

Relatividad

para futuros físicos

Saúl Ramos-Sánchez

CopIt-arXives
Publishing Open Access
with an Open Mind
2018

Este libro contiene material protegido por Leyes de Autor

Todos los derechos reservados ©2018
Publicado electrónicamente en México, por CopIt-arXives
Diseño de portada por Adriana Vergara
Obra editada por Octavio Miramontes Vidal
Con prólogo de Miguel Alcubierre Moya

Relatividad para futuros físicos

por Saúl Ramos-Sánchez
CopIt-arXives, México Cd.Mx., 2018
Incluye índice y bibliografía
ISBN: 978-1-938128-18-9 ebook

Derechos y permisos

Todo el contenido de este libro es propiedad intelectual de su autor quien, sin embargo, otorga permiso al lector para copiar, distribuir e imprimir sus textos libremente, siempre y cuando se cumpla con lo siguiente: (i) el material no debe ser modificado ni alterado, (ii) la fuente debe ser citada siempre y los derechos intelectuales deben ser atribuidos a su autor, (iii) estrictamente prohibido su uso con fines comerciales.

Producido con software libre incluyendo L^AT_EX y Linux. Indexado en el catálogo de publicaciones electrónicas de la Universidad Nacional Autónoma de México y en Google Books.

Con el apoyo de DGAPA-UNAM a través del proyecto PAPIIT-IN-100217, del proyecto CONACyT F-252167, y del Instituto de Física de la UNAM.

ISBN: 978-1-938128-18-9 ebook

<http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/>

Este libro ha pasado por revisión de pares

CopIt-arXives

Cd. de México - Cuernavaca - Madrid - Curitiba
Viçosa - Washington DC - London - Oxford

Con el apoyo de la
Universidad Nacional Autónoma de México
Instituto de Física

A Dêmian y Adriana

Índice general

Índice general	I
Presentación	V
Prólogo	IX
Bibliografía	XIII
Algunos datos y convenciones	XV
Introducción	XIX
1. Fundamentos de la relatividad especial	1
1.1. Introducción	1
1.2. El experimento de Michelson–Morley	2
1.3. Relatividad Galileana	4
1.3.1. Diagramas de espacio–tiempo en relatividad Galileana	7
1.3.2. El intervalo Galileano	8
1.4. Transformaciones de Lorentz y relatividad especial	10
1.5. Invariancia del intervalo y espacio–tiempo	16
1.6. Dilatación temporal	20
1.7. Un primer vistazo a 4–vectores	23
1.8. Diagramas de espacio–tiempo y efectos relativistas	28
1.8.1. Contracción de Lorentz	35
1.8.2. Causalidad en diagramas de espacio–tiempo	36

1.9.	El grupo de transformaciones de Lorentz	39
1.9.1.	Boosts de Lorentz en tres dimensiones	39
1.9.2.	Boosts de Lorentz como rotaciones hiperbólicas	40
1.9.3.	Los elementos del grupo de Lorentz	42
1.9.4.	Simetrías de Lorentz y constantes de movimiento	45
1.10.	Aplicaciones ópticas de la relatividad especial	48
1.10.1.	Efecto Doppler	48
1.10.2.	Aberración de luz o aberración estelar	51
1.11.	Mecánica cuántica relativista de partículas sin espín*	54
1.11.1.	La ecuación de Klein–Gordon	54
1.11.2.	Corrientes conservadas	56
1.11.3.	Causalidad y antipartículas	58
2.	Geometría en relatividad	69
2.1.	Tensores en relatividad	69
2.1.1.	Algunas propiedades de vectores	69
2.1.2.	1–formas	72
2.1.3.	Gradiente de una función	75
2.1.4.	Tensor métrico	76
2.1.5.	El papel del tensor métrico	79
2.1.6.	La base del tensor métrico	81
2.1.7.	Tensores de rango (M, N)	83
2.1.8.	Álgebra tensorial	88
2.1.9.	Gradiente de un tensor en espacio–tiempo plano	89
2.2.	Ecuaciones de Maxwell en relatividad especial	90
2.2.1.	Fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell	91
2.3.	Tensor de energía–momento	97
2.3.1.	Tensor de energía–momento de un fluido perfecto.	97
2.3.2.	Conservación de energía–momento	100
2.4.	Espacio con métrica no trivial	102
2.4.1.	Coordenadas curvilíneas	102
2.4.2.	Vectores y 1–formas base en coordenadas curvilíneas	104
2.4.3.	Tensor métrico y gradiente en coordenadas curvilíneas	104

2.4.4.	Derivadas en coordenadas curvilíneas	106
2.4.5.	Derivada covariante	107
2.4.6.	Los símbolos de Christoffel no son tensores	113
2.5.	Sistemas físicos en espacios no triviales y covariancia	114
2.6.	Espacio y espacio-tiempo con curvatura	116
2.6.1.	Espacio plano contra curvo	117
2.6.2.	Variedades	118
2.6.3.	Transporte paralelo	121
2.7.	Tensor de Riemann	130
2.7.1.	Simetrías del tensor de Riemann	133
2.8.	Identidades de Bianchi, tensores de Ricci y Einstein	134
2.9.	Vectores de Killing y simetrías del espacio-tiempo*	136
2.9.1.	Cantidades conservadas en geodésicas	138
2.9.2.	Simetrías del espacio-tiempo de Minkowski	139
2.10.	Densidades tensoriales*	142
3.	Relatividad general y sus aplicaciones básicas	153
3.1.	Principios de relatividad general	153
3.1.1.	Principio de equivalencia	153
3.1.2.	Corrimiento al rojo gravitacional	156
3.2.	Campos gravitacionales débiles: límite Newtoniano	158
3.2.1.	Unidades naturales	163
3.3.	Solución de Schwarzschild: estrellas y agujeros negros	163
3.3.1.	Estrella estática	166
3.3.2.	Corrimiento al rojo en el espacio-tiempo de Schwarzschild	169
3.3.3.	Cantidades conservadas	170
3.3.4.	Órbitas de partículas libres en espacio-tiempo de Schwarzschild	171
3.3.5.	Singularidades de Schwarzschild y agujeros negros	175
3.3.6.	Formación y tipos de agujeros negros*	181
3.4.	Pruebas de la relatividad general	184
3.4.1.	Desviación de la luz	185
3.4.2.	Precesión “anómala” del perihelio	188
3.4.3.	Ondas gravitacionales	192

3.5. Principios relativistas de cosmología	198
3.5.1. Espacio-tiempo de Friedmann–Robertson–Walker	199
3.5.2. Corrimiento al rojo cosmológico y ley de Hubble	203
3.5.3. Evolución de un universo plano	205
3.5.4. Radiación cósmica de fondo	211
3.5.5. Problema del horizonte cosmológico	216
3.5.6. Inflación cosmológica	219
3.5.7. Breve cronología cosmológica	221
A. Ecuación de la geodésica utilizando el principio de mínima acción	231
B. $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ es tensor	233
C. Ecuaciones de Einstein y la acción de Einstein-Hilbert	235

Presentación

En repetidas ocasiones se ha dicho que el mundo vive actualmente en la *Edad de la Información*; pero también se ha dicho que esta afirmación es inexacta y que lo que actualmente se vive es una *Economía de la Información*. En esta última, cualquier conocimiento es objeto de comercio que se vende y se paga: una mercancía pues. Como nunca antes, se hace una defensa legal y punitiva de los derechos de autor. Lo cual en principio no está mal si no es porque para los autores y creadores intelectuales, salvo algunos pocos casos, la compensación económica es prácticamente nula.

En el campo científico esto es aún más grave. La generación del conocimiento en ciencias se paga, es su mayoría, con dinero público. Pero un grupo muy reducido de empresas internacionales controlan la publicación y difusión de ese conocimiento sin absolutamente ninguna retribución a sus autores o instituciones, al contrario. Pero la invención de la internet y la www -paradójicamente- ha venido también acompañada de iniciativas, aún tímidas, para hacer que ese conocimiento sirva realmente para la formación de los individuos y en última instancia para que la ciencia sea una verdadera herramienta y motor para el desarrollo humano. De esta manera ha nacido el llamado movimiento del *acceso libre* que se plantea la distribución del conocimiento científico de manera abierta, irrestricta y gratuita para el público general que, finalmente, es quien con sus impuestos financia la mayor parte de la actividad científica.

Hace más de 10 años se inició en México el proyecto editorial CopIt-arXives que se planteó la publicación de textos académicos bajo la filosofía de acceso abierto. Hoy presentamos con un enorme entusiasmo el libro *Relatividad para futuros físicos* del Dr. Saúl Ramos-Sánchez, quien de manera generosa lo ha propuesto para publicación en este proyecto académico y para el beneficio de los estudiantes de física en México y en general aquellos de habla hispana en el mundo entero y que se verán dotados ahora con un texto escrito con autoridad y exactitud. Con ello, CopIt-arXives celebra además el lanzamiento de una nueva colección de libros. Esta vez específicamente dedicada a libros de texto y que hemos titulado *Textos contemporáneos* en alusión al movimiento literario impulsado por Jaime Torres-Bodet y quien fuera un intelectual mexicano de gran trayectoria. Torres-Bodet estaría al mando de la SEP en el año 1959 cuando estableció el proyecto de libros de texto

gratuito para enseñanza básica en México. Un prototipo vanguardista del acceso abierto para la educación pública de México. A casi 60 años de la destacada obra de Torres-Bodet, nos congratulamos de la publicación en línea de este primer volumen.

Octavio Miramontes Vidal
Editor Jefe, Copit-arXives
CDMX, 29 de mayo del 2018

Palabras del autor

La enseñanza obligatoria de la relatividad en la licenciatura en física en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM) tiene menos de 15 años, a pesar de que esta disciplina nació en 1905, con el trabajo seminal de Albert Einstein sobre relatividad especial. Y sólo hace cuatro años se reconoció que, siendo la relatividad un elemento tan importante como la mecánica cuántica en nuestra comprensión física del universo, es necesario que un estudiante de física adquiera a la mitad de su carrera una visión amplia de uno de los trabajos más importantes de Einstein. Esta situación no es única en la UNAM, hay varias Universidades latino-americanas en las que sólo recientemente se comenzó la enseñanza de esta predictiva área de la física y también existen otras que aún no incluyen cursos sobre relatividad.

Un argumento usual para evitar la enseñanza de la relatividad es que los elementos matemáticos que se requieren para comprenderla son muy avanzados y que el grado de madurez necesario en un estudiante para que pueda aprovechar un curso de esta naturaleza es el de un alumno de posgrado. Contrario a este punto de vista, estoy convencido de que un estudiante a partir del segundo semestre de su carrera en física posee las herramientas para apreciar con profundidad los fundamentos de la relatividad especial. Asimismo, un estudiante con conocimientos sólidos de cálculo diferencial y geometría Euclidiana en varias dimensiones es capaz de comprender la relatividad general. Proporcionar una guía adecuada para esos estudiantes es uno de los propósitos de este texto.

Este texto no contiene material original. Los temas discutidos aquí aparecen en muchos importantes libros sobre la teoría de la relatividad, tales como los recomendados, como textos auxiliares, en la Bibliografía. La diferencia entre esos libros y el presente trabajo es que, en mi opinión, ninguno de ellos resulta ideal como una introducción a ambas ramas de la teoría de la relatividad para ser impartida en un curso semestral de licenciatura o pregrado, durante apenas tres horas por semana. Además, la mayoría de ellos son encontrados sólo en inglés, lo que frecuentemente impide que un estudiante joven adopte esos libros. Otra diferencia es que, en algunos temas, este texto ofrece discusiones que podrían hacer más accesibles los conceptos físicos y las consecuencias de la relatividad.

La estructura de este trabajo también es diferente a la de los libros habituales. En lu-

gar de dividir los temas en varios capítulos que pueden consultarse independientemente, los tres capítulos de este texto están pensados para leerse consecutivamente. Además, varios temas secundarios, tales como las falsas *paradojas* de la relatividad, han sido relegados a las secciones de ejercicios, al final de cada capítulo. Por esta razón, un estudiante cuidadoso, debería no sólo consultar el desarrollo y contenido conceptuales de este texto, sino ejercitarse frecuentemente con la resolución de los ejercicios. Los ejercicios están planeados para que el estudiante pueda repasar las ideas centrales del texto y, simultáneamente, desarrollar su propia intuición. Especialmente, las *preguntas conceptuales* suelen ser de respuesta directa, pero requieren una comprensión más profunda que los típicos ejercicios algebraicos.

Una última diferencia de este texto con respecto a otros ya disponibles es que está planeado para que un estudiante interesado en especializarse en física de altas energías lo encuentre especialmente útil. Esto motiva la elección de algunas convenciones y la inclusión de secciones y ejemplos que aportan herramientas imprescindibles para esos estudiantes. No obstante, cualquier estudiante, al concluir la revisión del texto, adquirirá conocimientos sólidos sobre la teoría de la relatividad, lo que le permitirá desarrollarse en el área de su interés.

Los tres capítulos de este texto están concebidos para estudiarse en cinco semanas cada uno, dedicando entre tres y seis horas por semana, incluyendo la resolución de los ejercicios. El primer capítulo aporta una discusión detallada de los elementos esenciales de la relatividad especial. Tras discutir su relevancia conceptual, incluyendo una discusión del grupo de Lorentz y las leyes de conservación, se abordan algunas aplicaciones físicas de la relatividad especial, incluida la descripción relativista de partículas sin espín. El segundo capítulo introduce los conceptos matemáticos clave de la relatividad general, tales como los tensores, las variedades, la métrica y la curvatura, así como los elementos físicos fundamentales de la relatividad general, tales como el tensor de energía-momento, el tensor de Einstein y, como ejemplo recurrente, las ecuaciones de Maxwell. El tercer capítulo tiene como objetivo estudiar la relatividad general como resultado del principio de equivalencia y el principio relativista en términos del formalismo desarrollado en el segundo capítulo; esto conduce a un análisis de las principales pruebas de la relatividad general y un análisis superficial de dos aplicaciones importantes: los agujeros negros y la cosmología moderna.

Este texto constituye una introducción a la teoría de la relatividad, a nivel licenciatura, por lo que i) en algunos casos, la claridad conceptual física ha sido preferida al rigor matemático, y ii) existen diversos tópicos que no han sido siquiera mencionados, tales como aspectos cuánticos de los agujeros negros, relatividad especial en diversas coordenadas, versiones de gravedad modificada, etc. Sin embargo, el texto contiene suficiente material para motivar al estudiante interesado a especializarse durante sus estudios de posgrado, empleando textos más ambiciosos como los enumerados en la Bibliografía.

La profundidad y amplitud con la que se discuten los temas están basadas en mi propia experiencia impartiendo el curso frente a varios grupos. Es posible que otros docentes opinen que se requiere más tiempo o herramientas alternativas para discutir los elementos

de la relatividad aquí presentados. No obstante, estoy convencido de que los temas de este texto pueden ser transmitidos a estudiantes de licenciatura como se plantea aquí, dado que ellos también dedican tiempo a repasar los temas y resolver los ejercicios propuestos, y se evitan en un primera lectura los temas marcados con un asterisco.

Agradecimientos

Estoy en deuda con Miguel Alcubierre por haber dedicado su ingenio y talento para escribir el prólogo de este trabajo, en donde sintetiza acertadamente las etapas del desarrollo de la relatividad y la posible contribución de este texto.

Deseo agradecer particularmente el trabajo y dedicación que Lartaun Aramis de Icaza Astiz invirtió en la traducción y captura de este texto como parte de su proceso de titulación. Asimismo, le agradezco sus sugerencias en distintas partes del texto, las cuales benefician al lector. En especial, Aramis fue quien hizo notar que este trabajo hubiera estado incompleto sin incluir una sección dedicada al estudio de las ondas gravitacionales, recientemente detectadas.

Mi gratitud va además a los muchos estudiantes entusiastas que han participado en los cursos de relatividad que he impartido en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Sus preguntas continuas y su fascinación por esta área han sido y son una motivación para escribir y mejorar este texto. También es un placer agradecer a los estudiantes que han sido ayudantes del curso, quienes, más allá de su deber, han participado en el diseño de algunos de los ejercicios contenidos en estas notas. Por su invaluable labor, agradezco a Yessenia Olgún Trejo, Jorge Armando Arroyo Troncoso, Carlos Crispín Espinosa Ponce y, muy especialmente, a Tupac Bravo Ibarra, quien depositó su talento en ingeniosos y didácticos ejercicios, diseñados para que sus compañeros más jóvenes compartieran el placer de entender los vericuetos de la relatividad.

Estoy también en deuda con Iker Loic de Icaza Astiz y Aitor Lander de Icaza Astiz, quienes invirtieron mucho tiempo trazando cuidadosamente todas las figuras que aparecen en este texto.

Agradezco el apoyo recibido para el desarrollo de este trabajo mediante los proyectos CONACyT F-252167 y DGAPA-PAPIIT IN100217, así como el apoyo que me brindó el Instituto de Física para la publicación de la versión impresa de este trabajo. Además, agradezco la hospitalidad del ICTP, quien me recibió durante la última etapa de redacción de este texto. Finalmente, deseo agradecer la cuidadosa revisión realizada por los árbitros, quienes contribuyeron a mejorar la calidad de esta obra.

S. Ramos-Sánchez
UNAM
2018

Prólogo

Hace ya más de 100 años, Albert Einstein revolucionó la manera en la que entendemos el Universo cuando presentó, primero en 1905 la teoría especial de la relatividad, y luego en 1915 la teoría general de la relatividad. La relatividad especial era una nueva cinemática compatible con el postulado, empíricamente confirmado con altísima precisión, que dice que la velocidad de la luz es absoluta, es decir, la misma para todo observador inercial. Las consecuencias de este postulado fueron una revisión radical de nuestros conceptos de espacio y tiempo, mostrando en particular que las mediciones de longitudes y tiempos son distintas para diferentes observadores inerciales, que la simultaneidad es relativa, que la rapidez de la luz es no solo absoluta sino un límite máximo para toda interacción causal, y que la masa y la energía son equivalentes. En 1908 Hermann Minkowski mostró que la relatividad especial de Einstein podía reinterpretarse como la geometría de un espacio-tiempo de 4 dimensiones dotado de una estructura causal dada por los conos de luz.

Para 1908 Einstein ya había concluido que la teoría de la gravitación newtoniana era incompatible con la relatividad especial por lo que requería ser modificada. Einstein intuyó que la propiedad fundamental de la gravitación era la vieja observación de Galileo de que todos los cuerpos caen con la misma aceleración en un campo gravitacional sin importar su masa. Einstein elevó esta observación a un postulado físico que hoy nos parece fundamental, el llamado *principio de equivalencia* que afirma que en caída libre las leyes de la física se deben reducir, al menos localmente, a las leyes en ausencia de gravedad, es decir, a las de la relatividad especial. El principio de equivalencia resultó ser un arma muy poderosa, que llevó a Einstein a la idea de que la gravedad debería poder ser descrita por una deformación en la geometría del espacio-tiempo de Minkowski, o dicho de otra forma, que la gravedad no era otra cosa que una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo. La nueva teoría relativista de la gravitación era una generalización de la relatividad especial para geometrías curvas, razón por la cual Einstein mismo la bautizó como relatividad general.

La relatividad general tuvo logros importantes relativamente pronto, al explicar en detalle un avance en el perihelio de la órbita Mercurio de 40 segundos de arco por siglo, que había sido imposible de entender con la gravitación newtoniana. La nueva teoría también predecía que la luz debería desviarse al pasar cerca de un objeto masivo, predicción que

quedó confirmada en 1919 gracias a las observaciones de Arthur Eddington de la posición de estrellas cercanas al Sol durante un eclipse solar. Este resultado catapultó a Einstein a la fama internacional. Durante la década de los 1920's la relatividad general fue utilizada para estudiar la evolución del Universo como un todo, primero por el mismo Einstein, y luego por científicos tales como Georges Lemaître, Alexander Friedmann, Willem de Sitter y otros. En particular, Lemaître mostró que las ecuaciones de la relatividad general mostraban que el Universo debería estar en expansión, y que en un pasado remoto todo el Universo habría estado concentrado en una región pequeña de muy alta densidad, a la que llamó el "huevo cósmico", y que representa el primer atisbo al modelo cosmológico de la Gran Explosión. Pese al rechazo inicial de Einstein, la expansión del Universo fue comprobada observacionalmente por Edwin Hubble en 1929. A la relación que rige la expansión del Universo se le conoció durante décadas como la *ley de Hubble*, aunque muy recientemente este nombre ha sido cambiado a la *ley de Hubble-Lemaître* (hace un par de semanas al momento de escribir estas líneas).

Pese a estos importantes logros iniciales, la relatividad general fue relegada durante décadas a un segundo plano en la física-matemática. La complejidad de los conceptos matemáticos, su poca utilidad en el estudio de sistemas astrofísicos para los que en general los efectos relativistas son casi despreciables, aunada al espectacular éxito de la mecánica cuántica, opacó durante mucho tiempo a la relatividad general. La teoría tuvo un resurgimiento en la década de los 1960's, cuando científicos de la talla de Stephen Hawking, Roger Penrose, John Wheeler y otros mostraron una serie de resultados teóricos de gran relevancia.

Sin embargo, la relatividad general continuó siendo un tema en el que trabajaban unas pocas decenas de científicos a nivel internacional, comparado con los miles que trabajaban en temas de mecánica cuántica y partículas elementales, por ejemplo. Incluso, en la enorme mayoría de los programas de estudios de física en distintas Universidades, la relatividad general era una materia optativa que muy pocos estudiantes cursaban. Hasta hace unos pocos años, no era extraño encontrar físicos profesionales altamente exitosos que nunca habían aprendido relatividad general. Afortunadamente, esto ha cambiado recientemente. El desarrollo casi explosivo de la cosmología moderna durante los últimos 20 años, gracias a la existencia de satélites especializados que han aportado datos de gran precisión, y más recientemente la primera detección de las ondas gravitacionales en el 2015, han hecho que la relatividad general entre de lleno a la astrofísica moderna.

De la misma manera que la relatividad general se mantuvo relativamente aislada del resto de la física por varias décadas, los pocos libros de texto que se escribieron durante todo ese período resultaban difíciles de entender para los estudiantes de física. La teoría había quedado en manos de matemáticos, y los libros reflejaban ese estilo: definiciones, lemas, teoremas, demostraciones, etc. Incluso libros famosos como el de Hawking y Ellis (*The Large Scale Structure of Spacetime*, Cambridge Univ. Press, 1973) seguían este formato. Quizá el primer libro que adoptó un estilo más intuitivo y geométrico fue el de Misner, Thorne

y Wheeler (*Gravitation*, W.H. Freeman and Co., 1973), pero tal vez era aún demasiado técnico y enciclopédico, y dirigido principalmente a estudiantes avanzados de posgrado. En el mundo de habla inglesa la situación cambió en la década de los 1980 y después, con una serie de textos con una visión más moderna, geométrica e intuitiva, y accesibles a estudiantes avanzados de licenciatura.

En este contexto muchos investigadores en relatividad general comenzaron a exigir la inclusión de esta teoría como un curso obligatorio para estudiantes de licenciatura, a la par de los cursos de electrodinámica o mecánica cuántica. En particular, en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México dicho curso se volvió parte del programa obligatorio a fines de la década del 2000 (aunque, hay que decirlo, con menos horas que otros cursos obligatorios, razón por la cual aún no es posible cubrir todos los temas que se requieren). Había llegado el momento entonces de tener un libro escrito en castellano para estudiantes de países de habla hispana. Es aquí donde entra este nuevo libro escrito por Saúl Ramos-Sánchez. Investigador del Instituto de Física de la UNAM y especializado en la teoría de cuerdas. El autor conoce a fondo la relatividad general y la necesidad de un texto accesible y claro para estudiantes de licenciatura.

El libro está dividido en tres partes, y adaptado a un curso semestral de tres horas semanales, motivo por el cual se concentra principalmente en el desarrollo de la teoría, y un poco menos en los detalles de las aplicaciones astrofísicas, aunque sí se discuten las más importantes.

La primera parte es una introducción a la relatividad especial, iniciando desde el principio de relatividad de Galileo, el famoso experimento de Michelson y Morley, y las transformaciones de Lorentz. De ahí el autor introduce conceptos elementales de cálculo tensorial. Si bien es posible estudiar relatividad especial de manera puramente algebraica sin introducir tensores, esto no le hace en realidad ningún favor al estudiante, pues se pierde la intuición geométrica y el formalismo matemático necesario para después entender la relatividad general. Es entonces un gran acierto de este libro introducir estas herramientas desde el primer capítulo. El libro toca también algunos temas más avanzados que rara vez se ven en un curso introductorio de relatividad, tales como el grupo de Lorentz-Poincaré, y conceptos de mecánica cuántica relativista.

La segunda parte del libro aborda de lleno la visión geométrica de la relatividad, introduciendo poco a poco al lector en el formalismo de la geometría diferencial, primero en coordenadas curvilíneas y después en espacios curvos. De nuevo se discuten algunos temas avanzados tales como las simetrías del espacio-tiempo y los campos de Killing, el concepto del grupo de holonomías (fundamental en la búsqueda moderna de una teoría cuántica de la gravedad), y las densidades tensoriales.

Finalmente, en la tercera parte el libro aborda las aplicaciones más importantes de la relatividad general. En particular se introduce la solución de Schwarzschild que representa tanto el campo gravitacional externo a un objeto con simetría esférica, así como los agujeros

negros más simples. Se estudia en detalle la desviación de la luz en un campo gravitacional, y la precesión de la órbita de Mercurio. Finalmente, el libro trata varios temas de enorme actualidad, tales como las recientemente descubiertas ondas gravitacionales y la cosmología moderna.

Este libro sin duda llena un hueco importante en la literatura científica de habla hispana, y es altamente recomendable para estudiantes avanzados de la licenciatura en física, cubriendo desde los conceptos básicos de la teoría de la relatividad hasta los temas más candentes de la astrofísica y la cosmología modernas.

Miguel Alcubierre
Noviembre, 2018

Bibliografía

El desarrollo de este texto se ha visto influenciado por muchos trabajos previos. La mayoría de esos libros discuten los diversos temas de una forma diferente a la de este texto, por lo que pueden ser empleados como visiones complementarias, en algunos casos, o como textos de profundización, en otros casos. Cada lista mostrada a continuación agrupa una selección de textos sobre los temas que titulan las listas; los libros son citados de acuerdo a la preferencia del autor de este texto, pero el orden no refleja una diferencia en la calidad de los libros.

Relatividad Especial

- E.F. Taylor, J.A. Wheeler, *Spacetime physics: Introduction to Special Relativity*. Freeman & Co., 1992.
- S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*. Cambridge Univ. Press, 1995 (secciones 2.2–2.4).
- A. Einstein, *Relativity. The special and general theory*. Methuen & Co Ltd., 1916.

Relatividad General

- B.F. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge Univ. Press, 1985.
- S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*. John Wiley, 1972.
- C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*. Freeman & Co., 1975.
- S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*. arXiv:gr-qc/9712019, 1997.

Relatividad Especial y General

- W. Rindler, *Relativity*. Oxford Univ. Press, 2001.
- S. Hacyan, *Relatividad para estudiantes de física*. FCE México, 2013.

Cosmología

- E.W. Kolb, M.S. Turner, *The early universe*. Addison-Wesley Pub. Co., 1988.
- S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008.

Divulgativos

- S. Hacyan, *Relatividad para principiantes*. FCE, México, 2009.
- R.P. Feynman, *Six not-so-easy pieces*. Basic Books, 2011.
- B. Greene, *The fabric of the cosmos*. Vintage Books, 2004.
- S. Weinberg, *The first three minutes*. Basic Books, 1988.
- S. Hawking, *A brief history of time*. Bantam Books, 1998.

Algunos datos y convenciones

Se utilizarán las siguientes convenciones y definiciones:

- c denota la rapidez de la luz en el vacío, dada por $c = 299,793,458$ m/s. En cálculos numéricos se utilizará el valor aproximado $c \approx 3 \times 10^8$ m/s.
- La constante de gravitación universal de Newton: $G_N \approx 6.674 \times 10^{-11}$ N · m²/kg².
- La constante de Boltzmann: $k_B \approx 1.38 \times 10^{-23}$ J/K $\approx 8.617 \times 10^{-5}$ eV/K.
- La constante de Planck: $h \approx 6.626 \times 10^{-34}$ J·s $\approx 4.136 \times 10^{-15}$ eV·s.
- Cuando resulte conveniente, se utilizarán las llamadas *unidades naturales*, definidas aquí por la asignación $c = G_N = 1$. Se indicará cuando se empleen.
- Las coordenadas espacio–temporales se denotan por el arreglo vertical de 4 componentes, con unidades de longitud, $(ct, x^1, x^2, x^3)^T$. Comúnmente, la combinación ct es denotada x^0 .
- Otra notación útil para las coordenadas espacio–temporales es $(x^\mu) = (x^0, x^1, x^2, x^3)^T$. Análogamente, para otros vectores; por ejemplo, las componentes de momento en un espacio–tiempo se denotan como $(p^\mu) = (p^0, p^1, p^2, p^3)^T$.
- Los índices griegos μ, ν, ρ, \dots son llamados índices espacio–temporales con valores $0, \dots, 3$. Estos etiquetan las componentes espacio–temporales de posición (x^μ) , momento (p^μ) , vector de onda (k^μ) , \dots
- Los índices latinos i, j, k, \dots toman los valores $1, 2, 3$, de manera que están reservados para vectores espaciales, habituales, y/o las componentes espaciales de un vector en espacio–tiempo.
- El espacio dual al espacio de vectores se denomina *espacio de 1–formas* y sus elementos también tienen 4 componentes, las cuales se denotan con índices inferiores; por ejemplo, una 1–forma válida tiene las componentes $(p_\mu) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$.

- Se utilizará la llamada *convención de sumas de Einstein*, de acuerdo a la cual, cuando un índice es repetido en un monomio, se debe interpretar como la suma de la expresión en el monomio con todos los valores que puede adquirir el índice. Por ejemplo, si los valores que puede adquirir un índice son $\mu = 0, 1, 2, 3$, entonces

$$x^\mu p_\mu \equiv \sum_{\mu=0}^3 x^\mu p_\mu = x^0 p_0 + x^1 p_1 + x^2 p_2 + x^3 p_3.$$

Puede haber más de un índice repetido en una expresión monomial. Por ejemplo,

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \equiv \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

En el caso de índices espaciales (latinos) repetidos, la convención de sumas aplicará posicionando los índices *siempre* de la siguiente manera:

$$x^i x^i \equiv \sum_{i=1}^3 x^i x^i = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2.$$

- Los vectores espaciales se denotan con letras negritas, e.g. $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T$. Su magnitud se representa como $v = |\mathbf{v}|$ y se determina mediante $|\mathbf{v}|^2 = v^i v^i$.
- β denota la proporción entre la rapidez de un *sistema físico* y la de la luz c , $\beta = |\mathbf{v}|/c$. β designa frecuentemente la rapidez relativa entre sistemas de referencia con movimiento rectilíneo uniforme.
- El factor de Lorentz se denota como $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.
- La métrica espacio-temporal de Minkowski (correspondiente a un espacio-tiempo plano) está dada por la matriz diagonal 4×4 , $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.
- La métrica de una variedad (Riemanniana o Lorenziana) arbitraria se denota por g ; sus componentes satisfacen $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, es decir, g es simétrica.
- El producto escalar de 4-vectores en el espacio-tiempo de Minkowski se denota como

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x_\mu y^\mu = \sum_{\mu=0}^3 x_\mu y^\mu \equiv \sum_{\nu,\mu=0}^3 x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu = x^\mu \eta_{\mu\nu} y^\nu \\ x \cdot y &= (x^0, \quad x^1, \quad x^2, \quad x^3) \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^0 \\ y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix} \\ &= x^0 y^0 - x^i y^i \\ &= x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Debido a que el resultado es un número real y, por tanto, independiente del índice μ , en la expresión $x_\mu y^\mu$ decimos que el índice μ ha sido *contraído*.

- Debido a la convención elegida en la signatura de la métrica, el intervalo diferencial en espacio-tiempo plano está dado por

$$ds^2 = (dx^0)^2 - dx^i dx^i.$$

- El tiempo propio de un sistema (inercial o no) se denota como τ y satisface instantáneamente la relación diferencial $c^2 d\tau^2 = ds^2$.
- La derivada covariante se denota como D (en lugar de ∇ , para evitar confusiones).
- Los símbolos de Christoffel (de segundo tipo) se denotan como $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$.
- El tensor de Ricci se define en términos de las componentes del tensor de Riemann como la contracción $R_{\mu\nu} \equiv R^\alpha_{\mu\alpha\nu}$.
- El escalar de Ricci se define como $R \equiv R^\mu_{\mu}$.
- En la métrica de Friedmann-Robertson-Walker (ver sección 3.5.1), el llamado factor de escala $a(t)$ tiene dimensiones de longitud.
- El símbolo $\stackrel{!}{=}$ denota la *imposición* de una igualdad. E.g. $A \stackrel{!}{=} B$ indica el requerimiento de que A sea igual a B .
- La conversión entre energía E en GeV y temperatura T en K se establece mediante la constante de Boltzmann como $T = E/k_B \approx 1.16 \times 10^{13} \text{ K/GeV}$.

Puesto que las *convenciones* aquí definidas no son universales, el lector deberá verificar qué convenciones se utilizan en los textos auxiliares que decida emplear.

Introducción

La relatividad en el siglo XXI

Es imposible no vincular la teoría de la relatividad con Albert Einstein, su creador, quizá el ícono científico más grande del siglo pasado. Mediante la versión especial de su teoría, Einstein logró demostrar que las reglas de la electricidad y el magnetismo no dependen de cómo se mueva quien la experimente, contrario a lo que la física de Newton concluía. Mostró también que las ondas electromagnéticas, al contrario de las otras ondas conocidas en ese tiempo, existen incluso en el vacío. Posteriormente, su relatividad general explicó los cambios “anómalos” observados en la órbita de Mercurio. Además, sin más herramientas que la geometría y un axioma de la época de Galileo, predijo correctamente que la luz sufre de atracción gravitacional, a pesar de que las partículas que la describen no poseen masa, y que la luz es más azul cuanto más cerca se encuentre de un cuerpo con masa.

Estas predicciones que aparecieron en el artículo original de Einstein fueron confirmadas paulatinamente hace más de medio siglo en distintos experimentos y observaciones que catapultaron a Einstein a una fama nunca antes vista en los medios científicos. Para la sociedad cambiante de inicios del siglo XX, el hecho de que con tan sólo matemáticas se puedan describir increíbles aspectos de la naturaleza fue una grata sorpresa. Quizá no es que fuera una experiencia inédita, sino que pocos esperaban un cambio tan revolucionario en un paradigma que había durado siglos. Antes de Einstein, la descripción Newtoniana de la gravitación era venerada por su simplicidad y validez universal. Desafiar a semejante autoridad con el talento con que lo hizo Einstein conquistó a todos.

Muy pronto se descubrió que la relatividad escondía más sorpresas. En 1915, el mismo año de su presentación en público, la teoría reveló la posible existencia de cuerpos astrofísicos con masas estelares que no dejan escapar ni la luz, los *agujeros negros*. Estas bestias devoradoras de materia se convirtieron inmediatamente en las celebridades más seductoras y enigmáticas de la relatividad entre un amplio público. Poco después, Einstein mostró que su teoría predice la existencia de ondas gravitacionales, deformaciones del tejido cósmico que se mueven a la velocidad de la luz, como si fueran velocísimos sismos espaciales. Por si fuera poco, pronto se observó que es posible obtener una descripción científica detallada de la historia del universo basada en las ecuaciones de la relatividad.

Pese a lo interesante de estas últimas anotaciones, durante varias décadas del siglo pasado en los círculos científicos más conservadores los estudios de los agujeros negros, las ondas gravitacionales y la cosmología no eran vistos más que como curiosos trabajos teóricos. La razón fue y ha sido que es complicado o imposible realizar confirmaciones directas y que es difícil hacer los cálculos relativistas precisos para poder comparar con observaciones indirectas.

Sin embargo, ingeniosos (y a veces sólo afortunados) experimentos han acumulado vasta evidencia indirecta. Por ejemplo, sobre cosmología, el descubrimiento de la radiación cósmica de fondo, predicha y descrita por el modelo cosmológico de la gran explosión como la radiación remanente de una época temprana en la que el universo era muy caliente, fue un ladrillo importante en la consolidación de la cosmología. Su descubrimiento fue galardonado con el máximo honor del Premio Nobel en 1978. A pesar de esto, aún existían dudas sobre si el modelo de la gran explosión, basado en la relatividad general, era el correcto para describir esta radiación. Por fortuna, una década después fue confirmado que la radiación no es uniforme en todo el cosmos y que la medición de estas inhomogeneidades coincide con lo predicho por la teoría. Celebrado con el Premio Nobel en 2006, este descubrimiento no dejó muchas opciones abiertas. La cosmología descrita por la relatividad es la más apropiada. Una medición más detallada de la expansión del universo condujo pronto al último mayor descubrimiento cosmológico: el universo crece cada vez más rápido (Premio Nobel 2011). Y (casi) todo puede ser ajustado perfectamente a partir de la relatividad general.

La confirmación de la existencia de los agujeros negros y las ondas gravitacionales no tiene una historia más corta. Por una parte, los agujeros negros siempre han representado una singular molestia científica. El hecho de que la teoría indique que la fuerza gravitacional en el corazón de los agujeros negros es *infinita* indica un grave problema: justamente ahí la teoría de la relatividad general deja de ser válida. Así, por algún tiempo se consideró que los agujeros negros son un truco que nos juegan las matemáticas. Sin embargo, los teóricos plantearon que, al igual que las estrellas compuestas enteramente de neutrones, los agujeros negros son los cadáveres de estrellas más grandes que la nuestra. La confirmación de la existencia de las estrellas de neutrones en los 1960s y observaciones indirectas del movimiento de estrellas alrededor de regiones oscuras condujeron a la certeza de que hay muchos agujeros negros en el universo, y de que pueden tener masas de millones de veces la del Sol.

Además, los agujeros negros, aunque no son las típicas aspiradoras cósmicas que nos pintan, sí absorben grandes cantidades de materia de su vecindario cósmico, creando a su alrededor un anillo de material incandescente que emite radiación, llamado disco de acreción. Esta radiación predicha por la teoría ha sido confirmada especialmente en el centro de galaxias como la nuestra. En la Vía Láctea, el movimiento de un grupo de estrellas alrededor del centro de la galaxia, “perseguido” por astrónomos desde los 1990s, ha revelado que ahí habita un cuerpo relativamente pequeño y oscuro con masa de casi 3 millones de veces la del Sol y que emite radiación según las predicciones para un agujero

negro. Si esto no bastara, en 2011 se observó un disco de acreción con emisión de radiación X, consistente con las predicciones de agujeros negros con masas de *miles* de millones de veces la de nuestra estrella absorbiendo el material de un quásar.

La última serie de observaciones indirectas de los agujeros negros tiene que ver con las ondas gravitacionales. A pesar de que éstas pueden producirse con cualquier movimiento acelerado (hasta un aplauso las produce) de acuerdo a la teoría, sólo ondas gravitacionales generadas por violentos eventos cósmicos son capaces de producir ondas gravitacionales que podamos detectar en la Tierra con sensores tan sensibles como para medir deformaciones del espacio de una milésima del tamaño de un protón o menos. La detección de ondas gravitacionales en 2015, galardonada en 2017 con el Premio Nobel, tuvo el reto de explicar el origen de la detección. Supercomputadoras con sofisticados programas lograron demostrar que la señal, de acuerdo con la relatividad, sólo es consistente con la colisión y mezcla de dos agujeros negros con masas equivalentes a algunas decenas de veces la del Sol. De un golpe, dos de las predicciones más controversiales de la relatividad fueron comprobadas ¡hace apenas un par de años! Y la evidencia sigue acumulándose actualmente con la finalidad de explorar posibles desviaciones de las predicciones de la teoría de Einstein y de encontrar aplicaciones astronómicas del estudio de las ondas gravitacionales.

No sólo las ondas gravitacionales y los agujeros negros están bajo la lupa de los investigadores actualmente. Como decíamos, el modelo cosmológico de la gran explosión puede explicar todas las observaciones de la dinámica del universo bajo suposiciones muy sencillas sobre la geometría del espacio-tiempo y una suposición sobre el contenido del cosmos basada en mediciones recientes: un 5% es materia como la que hay en nuestro planeta, un 27% es un tipo de materia denominado *materia oscura* que no emite luz, y un 68% del contenido cósmico es una forma de energía apodada *energía oscura* que provoca la expansión acelerada que observamos.

El mayor misterio es que nadie tiene la menor idea de qué son la materia y la energía oscuras. No es nada que hayamos podido observar directamente hasta ahora, aunque hay suficiente evidencia indirecta para afirmar que esas “sustancias” o algo que tiene los mismos efectos existe. Hay quienes, no obstante, están convencidos de que debemos modificar ligeramente las ecuaciones básicas de la relatividad general para percatarnos de la verdadera naturaleza de esas entidades oscuras. Otros consideran que sólo la inmensamente desafiante búsqueda de la compatibilidad de la relatividad general y la mecánica cuántica disipará nuestras dudas.

Y esta mezcla nos conduce hoy de regreso a los agujeros negros. El interior de los agujeros negros, por ser inobservable, es totalmente desconocido. Lo único que sabemos es que la gravedad debe ser tan intensa en su interior que podría tener efectos sobre las partículas más diminutas comparables con los efectos producidos por las fuerzas cuánticas que, según la física de partículas, rigen su comportamiento. De ser así, es posible que ahí se manifieste una forma de gravedad cuántica, que debemos teorizar con base en lo que hemos comprobado en el último siglo.

Pero incluso para los menos interesados en los aspectos fundamentales de la gravedad, la teoría de la relatividad ofrece hoy herramientas modernas importantes. Además de ser relevante en el sistema de posicionamiento global (GPS), es crucial en las observaciones astronómicas. La desviación de la luz debida a su paso cerca de formaciones galácticas, estrellas, planetas, etc. provoca un desplazamiento aparente en la posición de las estrellas y galaxias con respecto a la real. Pero no es el único efecto. Si detrás de un cuerpo astrofísico muy masivo habita una galaxia, la desviación de los haces de luz emitidos por la galaxia en todas direcciones pueden ser desviados hacia nosotros en todo el contorno del “estorbo” astrofísico. A este efecto se le llama *lente gravitacional*. Las lentes gravitacionales no sólo permiten caracterizar lo que hay detrás de los objetos observables que provocan la desviación de la luz, sino también, cuando se presentan en regiones donde no hay obstáculos visibles, nos exhiben propiedades de objetos inobservables, como los agujeros negros y formaciones de materia oscura, que aún no han sido descritos completamente.

La relatividad, a pesar de su edad, sigue siendo un tesoro en desarrollo, cuyas preguntas y respuestas plantean retos actuales que probablemente se convertirán en la base de los descubrimientos futuros y de un cambio de paradigma como el que vivieron los testigos de la osadía de Einstein. La pregunta que podemos formularnos es si queremos ser los futuros físicos que estarán en el corazón de esa previsible revolución o no.

Capítulo 1

Fundamentos de la relatividad especial

1.1. Introducción

Desde el siglo XVII, Galileo Galilei introdujo el elemento clave para la *relatividad: el principio de la relatividad*. En su versión, establece que todas las leyes físicas son las mismas en cualquier sistema moviéndose con una velocidad uniforme con respecto a otro sistema en reposo absoluto (después llamaremos a estos sistemas *inerciales*).

La mecánica de Newton se desarrolló basada en este principio, encontrando que dos *axiomas* adicionales eran necesarios para que las teorías fueran consistentes:

1. el tiempo es absoluto, o sea, es el mismo para todo observador inercial; y
2. las interacciones ocurren instantáneamente, incluso si son a distancia.

Durante dos siglos, estos axiomas fueron considerados correctos. Sin embargo, el descubrimiento de la electrodinámica y, en particular, el hecho de que \mathbf{E} y \mathbf{B} satisfacen la ecuación de onda en el vacío

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{E} = 0 = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{B}, \quad c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}, \quad (1.1)$$

produjeron un cambio de paradigma. Primero, para Maxwell esto fue una señal clara de que la luz era efectivamente una onda electromagnética gobernada por los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} . En segundo lugar, estas ecuaciones de onda no son invariantes bajo las transformaciones que Galileo y Newton propusieron para relacionar los puntos de vista de observadores inerciales (ver problema 1.3 y la sección 1.3).

Posteriormente, estos problemas llevaron al principio fundamental en la formulación de Einstein de la *relatividad especial*: la velocidad de la luz *en el vacío* es la misma para todos los observadores inerciales independientemente de su movimiento.

Antes de entrar en detalles, estudiaremos la observación experimental más importante que conduce inevitablemente a esta conclusión.

1.2. El experimento de Michelson–Morley

Cuando Hertz confirmó que, como predijo Maxwell, la luz es una onda electromagnética, la mayoría de los científicos llegaron a la conclusión de que el medio en que estas ondas se movían debía ser el *éter*, una sustancia estática de densidad despreciable que llenaba todo el universo. El *éter* sería inmóvil con respecto a las *estrellas fijas* de Newton.

Michelson y Morley reportaron en 1887 un experimento basado en la interferencia de rayos de luz viajando por diferentes caminos para comprobar la existencia del *éter*. El montaje experimental propuesto por ellos se puede observar esquemáticamente en la figura 1.1. Sobre una mesa circular que permite ser rotada, se coloca al centro un divisor de haz. En un extremo de la mesa se coloca una fuente de luz colimada dirigida hacia el divisor de haz. En el extremo opuesto a la fuente hay un espejo. Perpendicularmente a la

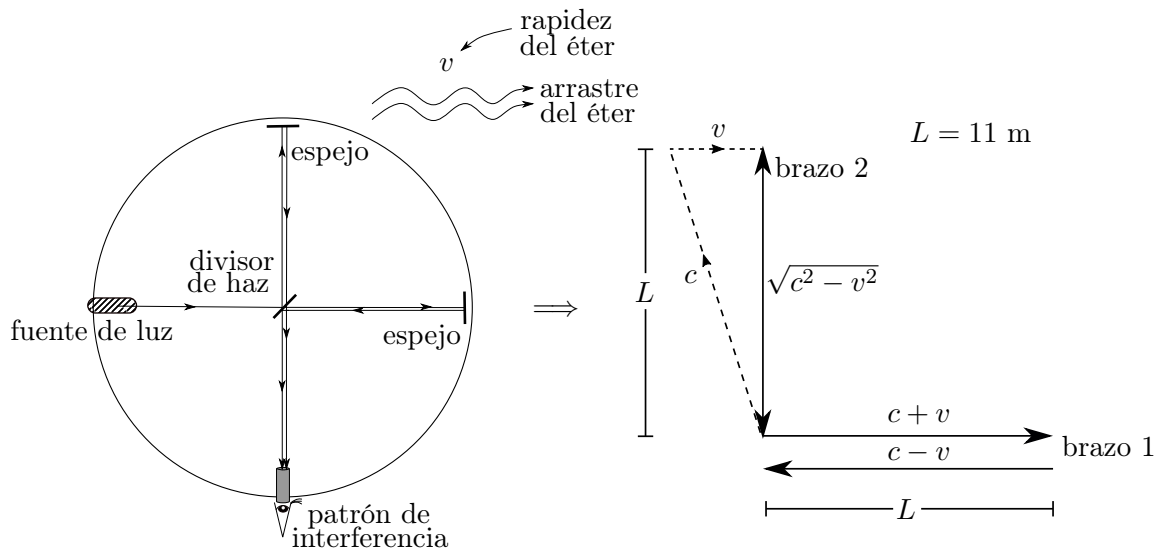


Figura 1.1: Interferómetro de Michelson y Morley. Un haz de luz es dividido a lo largo de dos direcciones perpendiculares (los *brazos* del interferómetro). Tras recorrer una distancia L , los haces son reflejados hacia el divisor de haz, que los recombina y dirige hacia un observador. En caso de que el *éter* exista y se desplace en la dirección de uno de los brazos, se debería observar un patrón de interferencia.

recta del espejo y la fuente, se colocan otro espejo y una lente donde habrá un observador. Los caminos perpendiculares por los que se desplazan los haces se conocen como *brazos* del interferómetro. Los haces de luz que surgen del divisor de haz recorren la misma distancia $L = 11\text{m}$ hasta los espejos, de ida y regreso, para ser recombinados y proyectados hacia el punto de observación. Dado que la Tierra se desplaza, se espera que el éter exhiba una velocidad de arrastre v en la dirección opuesta a la dirección de movimiento del planeta, a lo largo de la cual deberá ubicarse uno de los brazos del interferómetro. Debido a esta diferencia, suponiendo que las velocidades del movimiento se componen trivialmente (como sumas y restas vectoriales), deberíamos observar un patrón de interferencia en el punto de observación.

Del lado derecho de la figura 1.1, se presenta un diagrama de las velocidades efectivas del haz a lo largo de los brazos del interferómetro de Michelson-Morley. Calculando el tiempo de viaje por los brazos, empleando las distintas velocidades, obtenemos

$$T_1 = \frac{L}{c+v} + \frac{L}{c-v} = \frac{2cL}{c^2-v^2} = \frac{2L\gamma^2}{c}, \quad T_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2L\gamma}{c}, \quad (1.2)$$

en donde hemos definido

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.3)$$

Por lo tanto, la diferencia entre los tiempos de viaje de la luz por los brazos del interferómetro está dada por

$$\Delta T = T_1 - T_2 = \frac{2L\gamma}{c} (\gamma - 1). \quad (1.4)$$

Dada la diferencia $\Delta T \neq 0$ (debido a que la velocidad de arrastre del éter es $v \neq 0$), la teoría ondulatoria de la luz indica que el patrón de interferencia a observar está caracterizado por la constante $c\Delta T/\lambda$, donde λ denota la longitud de onda del haz de luz. Sin embargo, Michelson y Morley no detectaron ningún patrón de interferencia. Es posible concebir que el éter, por alguna razón, fluya en una dirección diagonal que iguale la rapidez con la que se desplaza la luz a lo largo de ambos brazos del interferómetro, como se muestra en la figura 1.2. En ese caso se obtendría $\Delta T = 0$, justificando el resultado nulo del experimento. Sin embargo, tras rotar el experimento el resultado seguía siendo el mismo. El experimento fue confirmado muchas veces, cada vez con mayor resolución¹.

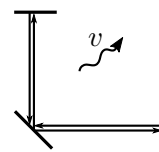


Figura 1.2: Dirección del éter propuesta para justificar los resultados.

El irlandés George Francis FitzGerald en 1889 e, independientemente, el holandés Hendrik Antoon Lorentz en 1892 propusieron una resolución al resultado nulo de Michelson y

¹Ver e.g. G. Joos. *Die Jenaer Wiederholung des Michelsonversuchs*. Ann. Phys. **7**, 1930.

Morley, insistiendo en la existencia del éter. De alguna manera, esta sustancia contrae los objetos en la dirección de la corriente etérea, siguiendo la regla

$$L' = \frac{L}{\gamma} \quad \Longrightarrow \quad T_1 = \frac{2L'\gamma^2}{c} = \frac{2L\gamma}{c} = T_2. \quad (1.5)$$

Entonces, como se esperaba, el patrón de interferencia no aparecía.

Pero esta propuesta estaba lejos de la respuesta final. Entre otras cosas, aunque interesante, no resolvía el problema de la indetectabilidad del éter. La solución correcta llegaría con una interpretación radical del resultado de Michelson y Morley: ¡la rapidez de la luz c es siempre la misma en el vacío! Como veremos en breve, esto condujo a resultados contraintuitivos que, en gran medida, contradecían la dominante física Newtoniana y la relatividad Galileana.

1.3. Relatividad Galileana

Para comenzar nuestro estudio de la relatividad, formulemos el principio de la relatividad Galileana de una manera ligeramente más general: *todas las leyes físicas de la naturaleza y las ecuaciones que las describen tienen la misma forma en todos los marcos de referencia admisibles.*

El primer aspecto que debemos definir es *marco de referencia*. Un marco de referencia es un conjunto de coordenadas espaciales dotado de relojes fijos (lo cual permite definir velocidad, momento, etc.). Un marco de referencia *rígido* es aquel en el que las distancias entre puntos permanecen invariante, sin importar las fuerzas externas. Un marco de referencia *inercial* es un marco de referencia rígido moviéndose con velocidad constante respecto a un marco de referencia en reposo absoluto.

El segundo aspecto importante es que el principio de la relatividad puede aplicarse para diferentes marcos admisibles. Por ejemplo, la física Newtoniana (y la relatividad especial) requiere marcos de referencia inerciales, pero para otros tipos de física (e.g. en relatividad general) los marcos de referencia pueden ser más generales (e.g. acelerados, rotatorios).

Los marcos de referencia son tradicionalmente denotados por S, S', S'' , etc.. Si consideremos que sólo existen tres dimensiones espaciales y una temporal², en el marco de referencia S podemos denotarlas como x^i , con $i = 1, 2, 3$, y t , respectivamente. Adicionalmente, con la finalidad de que todas las coordenadas tengan las mismas unidades, en lugar de emplear t como la coordenada temporal, usaremos ct . En los marcos de referencia primados, las coordenadas se denotan también primadas.

²No es complicado extender estas nociones a espacios con más dimensiones espaciales, pero es probablemente imposible extenderlas a espacios con más de una dimensión temporal porque se viola causalidad, i.e. se altera la conexión causal entre distintos eventos, conduciendo e.g. a que el futuro provoque efectos en el pasado.

Dos marcos de referencia S y S' que estén relacionados por el principio de relatividad deben ser tales que exista una transformación \mathcal{G} entre ellos

$$ct, x^i \xleftrightarrow{\mathcal{G}} ct', x^{i'}. \quad (1.6)$$

En los casos donde \mathcal{G} es lineal en cuatro dimensiones, podemos escribir

$$x' = \mathcal{G}x, \quad (1.7)$$

donde x denota el arreglo vertical de 4 entradas $(ct, x^1, x^2, x^3)^T$. Supongamos dos marcos de referencia inerciales S y S' , donde S' se mueve con velocidad constante en la dirección x^1 , $\mathbf{v} = (v, 0, 0)^T$ con respecto a S , como se muestra en la figura 1.3.

En la mecánica Newtoniana, las transformaciones que permiten a un observador en S conocer cómo un observador en S' mediría la posición y el tiempo están dadas por las transformaciones de Galileo:

$$\begin{aligned} ct' &= ct, \\ x^{1'} &= x^1 - vt = x^1 - \frac{v}{c}(ct), && \text{transformación de Galileo} \\ x^{2'} &= x^2, \\ x^{3'} &= x^3. \end{aligned} \quad (1.8)$$

La primera relación es la manifestación de uno de los axiomas de la mecánica Newtoniana: el tiempo es universal. Si $x^i = x^{i'} = 0$ al tiempo $t' = t = 0$, decimos que el sistema está en una *configuración estándar*. Claramente, si un *evento* sucede en el punto p con coordenadas (x^1, x^2, x^3) al tiempo t , entonces es observado desde S' ocurriendo en el punto p' : $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ al tiempo t' .

Como las transformaciones de Galileo se ajustan al principio de relatividad para marcos de referencia inerciales, las leyes de la naturaleza en S y S' deben ser las mismas. Por

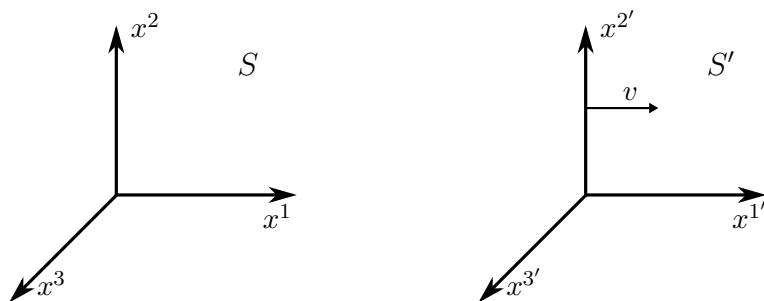


Figura 1.3: Marco de referencia S' moviéndose con velocidad \mathbf{v} con respecto a S .

ejemplo, se puede mostrar fácilmente que la segunda ley de la mecánica no se altera. Para ello, diferenciamos las coordenadas de los puntos p y p' , obteniendo

$$\begin{aligned} x^{1'} &= x^1 - \frac{v}{c}x^0 &\implies & u^{1'} \equiv \dot{x}^{1'} = u^1 - \frac{v}{c}\dot{x}^0 = u^1 - v, \\ x^{2'} &= x^2 &\implies & u^{2'} \equiv \dot{x}^{2'} = u^2, \\ x^{3'} &= x^3 &\implies & u^{3'} = u^3, \end{aligned} \tag{1.9}$$

donde hemos definido $x^0 \equiv ct$, por conveniencia, y las derivadas temporales pueden considerarse con respecto a t en p y p' debido a la universalidad del tiempo en la mecánica Newtoniana. Diferenciando otra vez, hallamos que

$$\begin{aligned} a^{1'} &= \dot{u}^{1'} = a^1, \\ a^{2'} &= a^2, \\ a^{3'} &= a^3, \end{aligned} \tag{1.10}$$

i.e. el vector de aceleración es el mismo para observadores inerciales ubicados en S y S' . De aquí se obtiene que el vector de fuerza en el marco de referencia S' está dado por

$$\mathbf{f}' = m\mathbf{a}' = m\mathbf{a} = \mathbf{f}, \tag{1.11}$$

y, por lo tanto, la segunda ley de Newton es *invariante relativista* en la relatividad Galileana.

Debido a que las transformaciones de Galileo (1.8) son transformaciones lineales, es posible reescribirlas en forma matricial como

$$x' = \mathcal{G}x, \quad \text{con } x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \text{y } \mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.12}$$

Las transformaciones descritas por $\mathcal{G} = \mathcal{G}(v)$ con la operación básica del producto entre matrices forman un grupo (a veces denominado *grupo de Galileo*); es decir, el conjunto de todas las transformaciones que pueden expresarse por medio de (1.12) satisface las siguientes propiedades:

1. Cerradura: $\mathcal{G}(v)\mathcal{G}(\bar{v}) = \mathcal{G}(v + \bar{v})$,
2. Existencia del inverso para todo elemento $\mathcal{G}(v)$: $(\mathcal{G}(v))^{-1} = \mathcal{G}(-v)$,
3. Existencia del elemento neutro: $\mathbb{1} = \mathcal{G}(v = 0)$.

Puesto que $\det \mathcal{G} = 1 \forall \mathcal{G}$, el grupo es denominado *especial*.

1.3.1. Diagramas de espacio–tiempo en relatividad Galileana

Un diagrama de espacio–tiempo consiste en un gráfico coordinado que, adicionalmente a las coordenadas espaciales, incluye en un eje adicional la coordenada temporal. Así, un punto en los diagramas de espacio–tiempo se trata de una ubicación espacial a un determinado instante. Entonces, e.g., si una partícula se desplaza a lo largo de una trayectoria, podemos concebir que describe una curva en un diagrama de espacio–tiempo. Sin embargo, también describe una curva en un diagrama de espacio–tiempo si no se desplaza, pues tendremos la misma posición de la partícula para todos los tiempos, describiendo una recta paralela al eje temporal. Formalmente, un diagrama de espacio–tiempo es un diagrama en cuatro dimensiones. Por simplicidad, habitualmente sólo se grafican dos dimensiones, una espacial y una temporal.

Podemos representar un marco de referencia S mediante un diagrama de espacio–tiempo con ejes coordinados x^1 y x^0 , como en la figura 1.4, en donde estos ejes han sido elegidos perpendiculares debido a que podemos considerar que la posición y el tiempo son independientes en la física Newtoniana.

Los diagramas de espacio–tiempo permiten comparar la dinámica de distintos sistemas desde la perspectiva de diferentes observadores inerciales. Particularmente, es fácil imaginar que un observador en un marco de referencia inercial S' , en movimiento con respecto a S en la dirección x^1 , verá que una partícula en reposo desde la perspectiva de S se mueve justamente con la misma rapidez con la que se mueve S' de acuerdo a S , pero en la dirección opuesta. Otro ejemplo de esta observación es lo que percibe una persona en un autobús cuando mira “pasar” las casas y los árboles debido a su movimiento. Esta situación se puede ilustrar fácilmente en un diagrama de espacio–tiempo, empleando las transformaciones Galileanas.

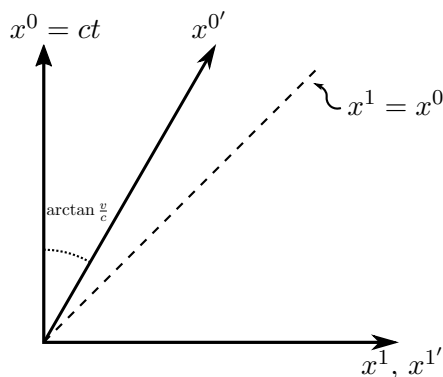


Figura 1.4: Diagrama de espacio–tiempo para dos marcos de referencia en configuración estándar. El marco de referencia S tiene coordenadas (x^0, x^1) . La ecuación que satisface el eje vertical en S es $x^1 = 0$, mientras que en S' es $x^1' = 0$ o equivalentemente $x^1 - \frac{v}{c}x^0 = 0$.

Supongamos que los marcos S y S' están en configuración estándar. Esto quiere decir particularmente que los diagramas de espacio–tiempo de ambos marcos de referencia coinciden en el origen, $x^i = x^{i'} = 0$ y $x^0 = x^{0'} = 0$. Supongamos también que el marco de referencia en reposo S es nuestro marco preferencial y que la velocidad de S' con respecto a S es $v > 0$. Deseamos conocer la percepción de un observador en S' acerca de las posiciones de las partículas en el universo.

En la figura 1.4, además de los ejes x^0 y x^1 del sistema de referencia S , que satisfacen $x^0 = 0$ para el eje x^1 y $x^1 = 0$ para el eje x^0 , se presentan los ejes $x^{0'}$ y $x^{1'}$ del sistema de referencia S' . Para construir el eje $x^{1'}$ exigimos $x^{0'} = 0$; vemos que coincide con el eje x^1 debido a que en las transformaciones Galileanas el tiempo es absoluto, o sea, es el mismo en S y S' . En cambio, el eje $x^{0'}$ sí cambia. Exigiendo $x^{1'} = 0$ y aplicando la transformación de Galileo (1.8), obtenemos $x^{1'} = x^1 - \frac{v}{c}x^0 = 0$, lo que implica que el eje $x^{0'}$, en la perspectiva de S , está determinado por la recta $x^1 = \frac{v}{c}x^0$. A medida que v crece, $\arctan(v/c)$ aumenta, incrementando la inclinación de $x^{0'}$ con respecto a x^0 . Notamos que no existe ninguna razón especial por la que $\arctan(v/c)$ no pueda tener cualquier valor; en particular, nada impide que v pueda ser mayor a c (correspondiente a la línea punteada en la figura). Adicionalmente, si la velocidad de S' fuera en la dirección opuesta ($v < 0$), el eje $x^{0'}$ estaría del lado izquierdo del eje x^0 .

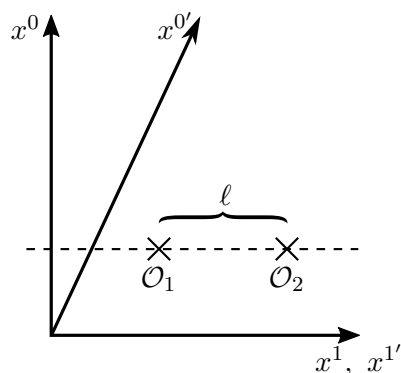
Para un observador en S , un objeto en reposo describe una curva vertical, paralela a x^0 . Pero, para un observador en S' , el reposo se traduce en una curva paralela a $x^{0'}$. La intersección de cada línea paralela a $x^{0'}$ con el eje $x^{1'}$ define un valor diferente de posición. Por lo tanto, en general la posición de una partícula medida por un observador en S no coincide con la posición que otro observador en S' obtiene. Entonces, una partícula en reposo en la perspectiva de S , es una partícula que, a medida que avanza el tiempo, cambia de posición hacia valores cada vez más pequeños (más grandes) de $x^{1'}$ en S' si $v > 0$ ($v < 0$).

1.3.2. El intervalo Galileano

En las transformaciones Galileanas, el *intervalo espacial* es invariante. Normalmente, al intervalo espacial le llamamos simplemente “distancia”. Para mostrar la invariancia del intervalo Galileano en la relatividad Galileana, consideremos en un marco de referencia en reposo S una varilla de longitud fija ℓ , cuyos extremos son \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 , como se muestra en la figura 1.5. La varilla se mide en cualquier marco de referencia determinando las coordenadas de los extremos de la varilla y luego calculando la diferencia espacial entre ellas.

Un observador en S encuentra los extremos de la varilla de longitud ℓ en las posiciones

$$\mathcal{O}_1 : (x_1^0, x_1^1), \quad \mathcal{O}_2 : (x_2^0, x_2^1). \quad (1.13)$$

Figura 1.5: Varilla de longitud ℓ en S .

Calculando la diferencia espacial entre esas coordenadas, encuentra que

$$\Delta x^1 = x_2^1 - x_1^1 = \ell. \quad (1.14)$$

Por otra parte, un observador en S' encuentra los extremos de la varilla en

$$\mathcal{O}_1 : (x_1^{0'}, x_1^{1'}), \quad \mathcal{O}_2 : (x_2^{0'}, x_2^{1'}). \quad (1.15)$$

Calculando su diferencia espacial y utilizando las transformaciones de Galileo (1.8) (con $x^0 = ct$), encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta x^{1'} &= x_2^{1'} - x_1^{1'} \\ &= x_2^1 - \frac{v}{c}x_2^0 - \left(x_1^1 - \frac{v}{c}x_1^0\right) \\ &= \Delta x^1 - \frac{v}{c} \underbrace{\Delta x^0}_0 = \ell, \end{aligned} \quad (1.16)$$

es decir, los observadores en S y S' miden la misma longitud de la varilla. Así obtenemos el resultado anunciado: las distancias son preservadas bajo transformaciones Galileanas.

En 3 dimensiones, los puntos \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 tienen 3 coordenadas espaciales, entonces el cuadrado de la longitud de la varilla está dado en general por

$$\ell^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2, \quad (1.17)$$

que es otra forma de expresar el teorema de Pitágoras, ahora en 3 dimensiones. Para una transformación de Galileo arbitraria con $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T$, se puede mostrar que la longitud (1.17) es invariante³. En matemáticas, las transformaciones que preservan las

³En general una transformación de Galileo con velocidad $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)^T$ se denota como el elemento del grupo $\mathcal{G}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -v^1 & 1 & 0 & 0 \\ -v^2 & 0 & 1 & 0 \\ -v^3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ actuando en $x = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}$.

distancias en un determinado espacio son conocidas como *isometrías* del espacio. Por lo tanto, las transformaciones Galileanas son isometrías de nuestro espacio 3-dimensional.

Una pregunta interesante es si esta invariancia puede extenderse a las cuatro dimensiones codificadas en $(x^0, x^1, x^2, x^3)^T$. De hecho, como $(\Delta x^0)^2 = (\Delta x^{0'})^2 = 0$ por la universalidad del tiempo, se satisface *en este caso particular* que

$$\ell^2 = (\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \pm (\Delta x^0)^2, \quad (1.18)$$

es invariante, es decir, los observadores en S y S' miden la misma “distancia”. Podríamos estar tentados a considerar la ecuación (1.18) como la cantidad invariante bajo transformaciones relativistas Galileanas. Sin embargo, es fácil mostrar que para eventos arbitrarios con coordenadas de espacio-tiempo $\mathcal{E}_1 : (x_1^0, x_1^1, x_1^2, x_1^3)$ y $\mathcal{E}_2 : (x_2^0, x_2^1, x_2^2, x_2^3)$, la cantidad

$$(\Delta x^1)^2 + (\Delta x^2)^2 + (\Delta x^3)^2 \pm (\Delta x^0)^2 \quad (1.19)$$

no es invariante cuando $\Delta x^0 \neq 0$. Es decir, bajo transformaciones Galileanas, sólo el intervalo espacial es preservado.

1.4. Transformaciones de Lorentz y relatividad especial

El resultado nulo del experimento de Michelson y Morley y la carencia de la invariancia de las ecuaciones de Maxwell fueron una señal de que el éter no existe y de que la física Newtoniana requiere correcciones. Justamente esas correcciones son lo que hoy llamamos la teoría de la relatividad.

La relatividad especial puede obtenerse a partir de los siguientes **postulados**:⁴

1. el principio de relatividad de Galileo es válido para *cualquier* marco de referencia inercial;
2. la luz en todos los marcos de referencia inerciales (en el vacío) se mueve con la misma rapidez; y
3. el espacio es homogéneo, isotrópico y continuo.

En este esquema, buscamos obtener las transformaciones que permiten que un observador en un marco de referencia en reposo S entienda las mediciones de posición y tiempo obtenidas por otro observador en un marco de referencia S' que se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{v} = (v, 0, 0)^T$ con respecto a S . A estas transformaciones las llamaremos las

⁴Existen versiones que proponen la invariancia del intervalo espacio-temporal en lugar del segundo postulado. A pesar de que es válido, veremos que la invariancia del intervalo es una consecuencia de las transformaciones relativistas que surgen a partir de los postulados aquí empleados.

*transformaciones de Lorentz.*⁵

Supongamos que S y S' están en configuración estándar o que, usando el tercer postulado, se pueden llevar a esa forma. Consideremos un reloj moviéndose libre y uniformemente en S a lo largo de la curva

$$x^i = x^i(t), \quad \text{tal que} \quad \frac{dx^i}{dt} = \text{cte}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.20)$$

Definimos el *tiempo propio* τ , el cual es el tiempo medido desde la perspectiva del propio reloj. Como el tiempo es homogéneo (i.e. hay simetría en el tiempo), entonces

$$\frac{dt}{d\tau} = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dx^0}{d\tau} = \text{cte}. \quad (1.21)$$

De (1.20) y (1.21), se obtiene la relación

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \text{cte} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.22)$$

la cual debe mantenerse en S' por estar asociada a la segunda ley de Newton. La derivada de $x^{\mu'}$ puede expresarse como

$$\frac{dx^{\mu'}}{d\tau} = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \equiv \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

en donde la segunda igualdad define la llamada *convención de sumas de Einstein*, bajo la cual se hace implícita la suma sobre los índices repetidos. Si diferenciamos nuevamente con respecto a τ , obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d^2x^{\mu'}}{d\tau^2} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \underbrace{\frac{d^2x^\nu}{d\tau^2}}_{=0} + \sum_{\sigma=0}^3 \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \\ &= \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} \underbrace{\frac{dx^\sigma}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}}_{=\text{cte por (1.22)}} \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned}$$

que conduce finalmente a

$$\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\sigma \partial x^\nu} = 0. \quad (1.23)$$

⁵Como veremos, las transformaciones que obtendremos aquí son sólo un tipo de transformaciones de Lorentz llamadas *empujones* o *boosts* de Lorentz. Es tradicional emplear también en castellano la palabra *boost*.

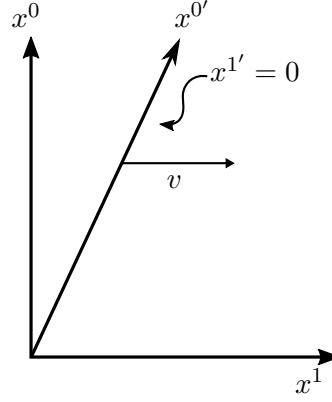


Figura 1.6: Eje $x^{0'}$ del marco de referencia S' observado por S , cuando S' se mueve con rapidez $v > 0$ en la dirección x^1 de S .

Esta ecuación es muy importante, pues implica que las transformaciones que surgen de los postulados de la relatividad especial son *lineales*, i.e.

$$x^{\mu'} = \mathcal{B}^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}, \quad (1.24)$$

donde $\mathcal{B} \equiv (\mathcal{B}^{\mu'}_{\nu})$ es una matriz 4×4 que codifica las transformaciones conocidas como transformaciones de Lorentz.

Como en las transformaciones de Galileo, esperamos que el eje temporal $x^{0'}$ en S' esté descrito por

$$x^1 = \frac{v}{c} x^0, \quad (1.25)$$

que corresponde a $x^{1'} = 0$, como se observa en la figura 1.6. Imponemos ahora esta restricción en (1.24) como un siguiente paso en nuestra búsqueda de la expresión de las transformaciones de Lorentz. A partir de (1.24), se obtiene que

$$\begin{aligned} x^{1'} &= \mathcal{B}^{1'}_{\nu} x^{\nu} = \mathcal{B}^{1'}_0 x^0 + \mathcal{B}^{1'}_1 x^1 + \mathcal{B}^{1'}_2 x^2 + \mathcal{B}^{1'}_3 x^3 \\ &= \left(\mathcal{B}^{1'}_0 + \frac{v}{c} \mathcal{B}^{1'}_1 \right) x^0 + \mathcal{B}^{1'}_2 x^2 + \mathcal{B}^{1'}_3 x^3 \stackrel{!}{=} 0, \end{aligned} \quad (1.26)$$

en donde hemos sustituido (1.25) en la segunda igualdad. Esta condición se satisface sólo si cada componente es nula, i.e.

$$\mathcal{B}^{1'}_0 + \frac{v}{c} \mathcal{B}^{1'}_1 = \mathcal{B}^{1'}_2 = \mathcal{B}^{1'}_3 = 0, \quad (1.27)$$

lo que implica que

$$x^{1'} = (-\beta x^0 + x^1) \mathcal{B}^{1'}_1, \quad (1.28)$$

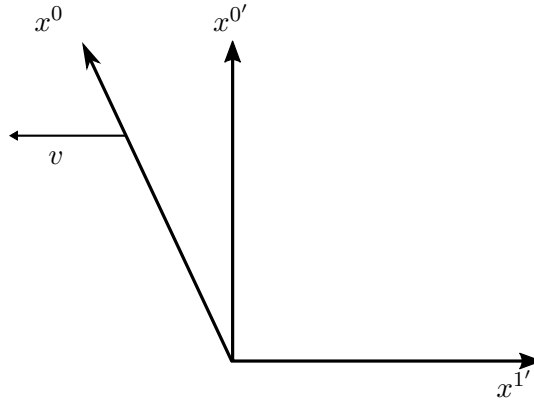


Figura 1.7: Eje $x^{0'}$ del marco de referencia S' observado por S , cuando S' se mueve con rapidez $v < 0$ en la dirección x^1 de S .

con $\beta = v/c$, como antes. Notemos que $\mathcal{B}^{1'}_1$ solamente debe depender de la velocidad relativa \mathbf{v} entre los marcos de referencia porque lo único que distingue a S de S' es precisamente \mathbf{v} . Además, la isotropía del espacio-tiempo permite que $\mathcal{B}^{1'}_1$ no dependa de la dirección de \mathbf{v} , sino sólo de la rapidez $|\mathbf{v}|$.

Podemos hacer el ejercicio análogo, pero ahora desde el punto de vista de S' , es decir, considerando que S' es el marco de referencia en reposo. S es ahora un marco de referencia en movimiento en la dirección x^1 , pero en la dirección opuesta a como S observa que S' se mueve, como se ilustra en el diagrama de espacio-tiempo 1.7. En este escenario, obtenemos que la exigencia $x^1 = 0$ que describe el eje temporal de S conduce a

$$x^1 = \mathcal{B}^{1'}_1(\beta x^{0'} + x^{1'}). \quad (1.29)$$

Como en ambos casos el prefactor sólo depende de $|\mathbf{v}|$, podemos suponer que ambos son iguales a una constante por determinar, i.e.

$$\mathcal{B}^{1'}_1 = \mathcal{B}^{1'}_1 \equiv \gamma. \quad (1.30)$$

Ahora utilizamos el segundo postulado de la relatividad de Einstein (la universalidad de c) en la forma

$$x^1 = x^0 \iff x^{1'} = x^{0'}, \quad (1.31)$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} x^0 &= \gamma(\beta x^{0'} + x^{1'}) = \gamma(\beta + 1)x^{0'}, \\ x^{0'} &= \gamma(-\beta x^0 + x^1) = \gamma(-\beta + 1)x^0. \end{aligned} \quad (1.32)$$

El producto de estas ecuaciones conduce la relación

$$x^0 x^{0'} = \gamma^2 (1 - \beta^2) x^0 x^{0'}, \quad (1.33)$$

que sólo es válida si se satisface

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \beta^2}. \quad (1.34)$$

Al resolver para γ , debemos escoger la raíz positiva porque $x^{1'} = x^1$ para $\mathbf{v} = 0$ (no $x^{1'} = -x^1$), con lo que llegamos al famoso factor de Lorentz,

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad \text{factor de Lorentz} \quad (1.35)$$

Es interesante observar que el factor de Lorentz obtenido aquí coincide con el obtenido por FitzGerald y Lorentz, ecuación (1.3), en el contexto de su teoría del éter, también conocida como electrodinámica Lorentziana. Es esta coincidencia histórica la que condujo al nombre de esta constante.

Ahora, con ayuda de (1.28) y (1.29), reemplazamos $x^{1'} = \gamma(-\beta x^0 + x^1)$ en $x^1 = \gamma(\beta x^{0'} + x^{1'})$ y encontramos

$$x^1 = \gamma(\beta x^{0'} - \gamma\beta x^0 + \gamma x^1) = \gamma\beta x^{0'} - \gamma^2\beta x^0 + \gamma^2 x^1, \quad (1.36)$$

que puede ser reescrita como

$$x^{0'} = \gamma x^0 + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma\beta} x^1 = \gamma(x^0 - \beta x^1). \quad (1.37)$$

Esta ecuación es uno de los hallazgos más relevantes de la relatividad especial. En contraste con las transformaciones de Galileo, bajo transformaciones de Lorentz, el *tiempo no es absoluto*. En dos marcos de referencia inerciales con una rapidez relativa, $\beta \neq 0$, las mediciones del tiempo no son iguales. Consecuentemente, dado que en general $\Delta x^{0'} \neq \Delta x^0$, $\Delta x^0 = 0$ no significa que $\Delta x^{0'} = 0$, por lo que *la simultaneidad es relativa*.⁶

En resumen, hemos encontrado que las transformaciones de Lorentz están dadas por

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \beta x^1), \\ x^{1'} &= \gamma(-\beta x^0 + x^1), & \text{boost de Lorentz} \\ x^{2'} &= x^2, \\ x^{3'} &= x^3, \end{aligned} \quad (1.38)$$

⁶Como una nota histórica, en la teoría Lorentziana del éter el concepto de *tiempo local*, definido como $t' = t - vt/c^2$, también estableció la relatividad de la simultaneidad, como identificó Henri Poincaré desde 1900. Aunque el tiempo local fue originalmente introducido como un artefacto matemático, Poincaré fue quien descubrió que conducía a importantes efectos físicos, como este.

cuando el marco de referencia S' se mueve con velocidad uniforme $\mathbf{v} = (v, 0, 0)^T$ con respecto a S . Las ecuaciones (1.38) definen una transformación de Lorentz en una dimensión, conocida como *boost* de Lorentz.⁷ En términos de la matriz $\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{\mu'}_{\nu})$, los boosts se pueden reescribir como

$$x' = \mathcal{B}x, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Se puede mostrar directamente que la transformación de Lorentz para una determinada β satisface $\mathcal{B}^{-1}(\beta) \equiv (\mathcal{B}^{\mu'}_{\nu'}) = \mathcal{B}(\beta \rightarrow -\beta)$, tal como lo hacen las transformaciones Galileanas.

Mientras que los boosts de Lorentz dependen del factor de Lorentz (1.35), las transformaciones de Galileo dependen sólo linealmente de β . Esta diferencia es muy importante. Supongamos que un marco de referencia S' se desplaza con una rapidez mayor a c . Claramente, en este caso $\beta^2 > 1$ y consecuentemente γ no tiene un valor real. De acuerdo a las ecuaciones (1.38), un observador en S' sería incapaz de definir sus coordenadas espaciales y temporales, ya que sus mediciones de distancia y tiempo tendrían valores imaginarios. Estas inconsistencias hacen obligatorio establecer que la rapidez máxima que un marco de referencia puede tener es justamente la de la luz, i.e. $|\mathbf{v}| \leq c$ siempre. Y, como no existen marcos de referencia que puedan desplazarse con rapidez por encima de c , *no es posible transmitir información más rápidamente de lo que es posible mediante un haz de luz*. Una consecuencia inmediata de esta observación es que la interacción a distancia de los sistemas físicos *no puede ser instantánea*.

Por otra parte, notamos que, si se exige que $x^0 = x^{0'}$, entonces $x^{1'} + x^1 = \gamma(x^{1'} + x^1)$, lo que implica que $\gamma = 1$ y $x^{1'} = x^1 - \frac{v}{c}x^0$. Este resultado coincide justamente con las transformaciones de Galileo (1.8). Notamos también que cuando la rapidez con la que S' se mueve con respecto a S es despreciable, $\beta \ll 1$, el factor de Lorentz se puede aproximar como

$$\gamma \approx 1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4). \quad (1.40)$$

Por lo tanto, observamos que e.g. la coordenada espacial puede expresarse como

$$x^{1'} \approx x^1 - \beta x^0 + \frac{1}{2}\beta^2 x^1 + \mathcal{O}(\beta^3). \quad (1.41)$$

Claramente, en la mecánica Newtoniana las velocidades de los sistemas son tales que $\beta^2 \rightarrow 0$. Así, los términos de orden β^2 y menores se pueden considerar *correcciones relativistas* a los resultados Newtonianos. En suma, la interpretación de estas observaciones es que las

⁷Como veremos en la sección 1.9, las transformaciones de Lorentz forman un grupo que incluye los boost y las rotaciones en tres dimensiones.

transformaciones de Galileo son un caso especial de los boosts de Lorentz para observadores inerciales con rapidez relativa muy pequeña con respecto a la rapidez de la luz, $v \ll c$.

Otra consecuencia de los boosts de Lorentz (1.38) es que, a diferencia de lo que ocurre en la mecánica Newtoniana, al considerar la relatividad especial es imposible hablar de tiempo y espacio independientemente. El espacio y el tiempo se mezclan. El movimiento relativo de diferentes marcos de referencia inerciales pone de manifiesto que, en realidad, el tejido que sustenta la dinámica del universo es el *espacio-tiempo*. Este concepto podría considerarse la contribución central de la relatividad a la ansiada búsqueda de un teoría que unifique conceptual y matemáticamente la física en una única descripción.

La existencia del espacio-tiempo revela que el carácter paramétrico (tan especial) que juega el tiempo en la física Newtoniana debe ahora ser adoptado por todas las coordenadas del espacio-tiempo x^μ si deseamos describir sistemas que se desplazan con una rapidez suficientemente alta, tal que las correcciones de orden β^n , con $n \geq 2$, no sean despreciables. A estos sistemas los llamamos *sistemas relativistas*. Un claro ejemplo de sistemas relativistas son las partículas elementales libres. Discutiremos algunos detalles más respecto a esta observación en la sección 1.11, en donde se abordarán algunos aspectos generales de las teorías de campos cuánticos.

1.5. Invariancia del intervalo y espacio-tiempo

En relatividad especial, la noción de *evento* es particularmente útil. Un evento (como un accidente, la caída de la hoja, o la recepción de un rayo de luz) ocurre en un lugar del espacio-tiempo, por lo que se le asocia un punto del espacio-tiempo. Entonces, es conveniente referirse a los puntos de un marco de referencia como *eventos*.

Claramente, dos eventos que ocurren sucesivamente en un mismo lugar deben estar relacionados. Probablemente, uno es la causa del otro, estableciendo una *relación causal* entre ellos. Es posible establecer una relación causal también entre eventos que ocurran en lugares diferentes. Un ejemplo típico sería la reacción de un estudiante tras recibir en la cabeza el objeto que otro le lanzara desde la distancia. Otros ejemplos más interesantes serían la aparición de *chubascos* de partículas en nuestra atmósfera debidos a la emisión de *rayos cósmicos* en el Sol, o la detección de ondas gravitacionales en la Tierra 1,300 millones de años después de haber sido producidas por la combinación de dos gigantes agujeros negros. Todas estas parejas de eventos tienen en común que, a pesar de la distancia entre los eventos, el tiempo entre la causa y el efecto es “razonable”, es decir, la rapidez con la que la causa es comunicada al lugar donde ocurre el efecto es siempre menor o igual a c .

Sin embargo, si dos eventos ocurren en dos lugares diferentes simultáneamente o separados por un tiempo que exige que la información de lo que ocurrió en uno de los lugares sea transmitida al otro en un tiempo menor al que tardaría un haz de luz en viajar de un lugar a otro, los eventos están desconectados causalmente.

Para, entre otras cosas, poder establecer claramente en qué casos un evento *tiene influencia* sobre otro, es útil definir el *intervalo* entre eventos como la separación en espacio-tiempo entre ellos. En el diagrama de espacio-tiempo 1.8 aparecen tres pares de eventos. Aquellos conectados por la línea a $\pi/4$ se conocen como *intervalos luminoides* o ‘tipo luz’. La diferencia en las coordenadas espacio-temporales de eventos conectados por intervalos luminoides satisfacen $\Delta x^0 = \pm \Delta x^1$. Si consideramos que la rapidez con la que la información se transmite entre los eventos está dada por $c|\Delta x^1|/|\Delta x^0|$, entonces siempre es c ; por lo tanto, estos eventos tienen siempre una relación causal.

El segundo tipo de eventos se ejemplifica en la figura 1.8 por los eventos conectados por una línea vertical. En este ejemplo particular, los eventos ocurren en el mismo lugar, sólo están separados temporalmente. Notamos que se satisface $|\Delta x^0| > |\Delta x^1| = 0$. Es decir, la velocidad a la que la información entre los eventos debe desplazarse es nula, y, por lo tanto, claramente el evento del futuro es influenciado por el evento del pasado. Esta observación es también cierta para eventos que no ocurren en el mismo lugar, pero satisfacen $|\Delta x^0| > |\Delta x^1| \neq 0$. En ese caso, la rapidez con la que la información de un evento pasado debe viajar a un evento futuro está dada por $c|\Delta x^1|/|\Delta x^0| < c$ y, por lo tanto, también existe una relación causal entre ellos. Los intervalos de este tipo se conocen como intervalos *temporaloides*. Notamos, entonces, que los intervalos temporaloides pueden representarse en un diagrama de espacio-tiempo como líneas verticales, pero *también* como líneas con una pendiente mayor a 1.

Finalmente, los eventos conectados por una línea horizontal en la figura 1.8 son eventos que ocurren simultáneamente y en lugares diferentes desde la perspectiva de un observador

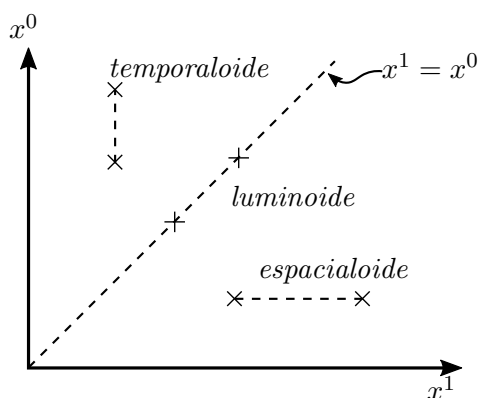


Figura 1.8: Ejemplos de *intervalos* entre dos eventos en diagramas de espacio-tiempo. Los intervalos *luminoides* o ‘tipo luz’ conectan eventos a lo largo de rectas en las que $\Delta x^0 = \pm \Delta x^1$. Los intervalos *temporaloides* o ‘tipo tiempo’ conectan eventos que satisfacen $|\Delta x^0| > |\Delta x^1|$, como los que ocurren en una misma posición espacial (línea vertical). Los intervalos *espacialoides* o ‘tipo espacio’ corresponden a eventos que cumplen $|\Delta x^0| < |\Delta x^1|$, como los eventos simultáneos (línea horizontal).

en reposo. En este caso, notamos que $|\Delta x^1| > |\Delta x^0| = 0$, por lo que la rapidez con la que la información entre los eventos debe transmitirse para que estén causalmente conectados es infinita. Esto es una clara indicación de que los eventos en ese ejemplo no están relacionados causalmente. Lo mismo se puede concluir de eventos que satisfacen simplemente $|\Delta x^1| > |\Delta x^0| \neq 0$, pues en este caso la rapidez con la que la información de un evento pasado debe viajar a un evento futuro es $c|\Delta x^1|/|\Delta x^0| > c$, lo cual está prohibido por las reglas de los boosts de Lorentz. A intervalos que describen eventos como estos se les conoce como *espacialoides*.

Frecuentemente, al referirnos a las posiciones de distintos objetos, también nos referiremos a intervalos a pesar de que, a primera vista, la posición de un objeto no define un *evento*. Sin embargo, el evento al que hacemos referencia es a la *medición de la posición de un objeto*, lo cual ocurre en una posición y un momento determinado. Por ejemplo, si la posición de los dos extremos de una varilla es obtenida simultáneamente, el intervalo entre los eventos de medición es espacialoide y, por lo tanto, no hay relación causal entre el resultado de ambas mediciones.

El concepto de *intervalo*, definido como la separación espacio–temporal entre distintos eventos, es expresado concretamente (en un espacio–tiempo plano) como

$$\Delta s^2 \equiv (\Delta x^0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Delta x^i)^2 = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^i)(\Delta x^i), \quad (1.42)$$

en donde el signo menos entre la componente temporal y la contribución espacial⁸ no sólo auxilia a distinguir entre los distintos tipo de eventos, sino que tiene importantes consecuencias geométricas en la estructura del espacio–tiempo, como veremos en el siguiente capítulo.

La definición del intervalo (1.42) en términos de las diferencias temporal Δx^0 y espaciales Δx^i es conveniente cuando estas cantidades son finitas y, además, los marcos de referencia y/o el movimiento de los sistemas estudiados son inerciales durante un tiempo medible. Como la mayoría de los sistemas físicos no satisfacen estas cualidades durante un largo periodo de tiempo, se prefiere considerar el intervalo mediante mediciones instantáneas de posición y tiempo, en su formato diferencial

$$ds^2 \equiv (dx^0)^2 - dx^i dx^i. \quad \text{intervalo} \quad (1.43)$$

Claramente, la definición en términos de diferenciales conduce a la ecuación (1.42) para tiempos largos. En este texto, aunque preferiremos dar ecuaciones generales en términos

⁸Aunque la diferencia de signos es universal, que la componente espacial sea la que carga el signo negativo es una *convención*, a veces llamada *de Landau-Lifshitz* porque es la que esos autores emplean en sus textos de física teórica. Es más frecuentemente empleada en textos especializados en física de partículas que en textos sobre relatividad general.

de diferenciales, emplearemos también las diferencias Δx^μ , cuando así convenga en la discusión.

Mediante estas expresiones para el intervalo entre eventos, podemos clasificar de forma práctica los pares de eventos. Claramente, de acuerdo a las definiciones de los distintos tipos de intervalos, estos pueden clasificarse de acuerdo a

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 & \quad \text{intervalo luminoso,} \\ ds^2 > 0 & \quad \text{intervalo temporal,} \\ ds^2 < 0 & \quad \text{intervalo espacial.} \end{aligned} \tag{1.44}$$

Si la información de un evento debiera ser comunicada a un segundo evento en un intervalo, las partículas empleadas en semejante comunicación (fotones, electrones u otras) deberían viajar con una velocidad definida por $u^i \equiv cdx^i/dx^0$. Observamos que, en estos términos, la clasificación de los intervalos puede reexpresarse como

$$\frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2} = \frac{u^i u^i}{c^2} = \frac{dx^i dx^i}{(dx^0)^2} \begin{cases} = 1 & \text{intervalo luminoso,} \\ < 1 & \text{intervalo temporal,} \\ > 1 & \text{intervalo espacial.} \end{cases} \tag{1.45}$$

Como es imposible que un sistema físico alcance $|\mathbf{u}|^2 > c^2$, encontramos nuevamente la conclusión previa de que no es posible que la información sea comunicada ni que exista relación causal entre los eventos que forman parte de un intervalo espacial. Pero eventos conectados por intervalos luminosos o temporales están vinculados causalmente.

Es interesante que el segundo postulado de la relatividad especial establece que si $\Delta s^2 = 0$, inmediatamente se obtiene que $(\Delta s')^2 = 0$. Esto resulta evidente al reescribir la primera parte de la expresión (1.45) de la forma

$$u^i u^i = c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad u'^i u'^i = c^2. \tag{1.46}$$

Los intervalos luminosos se preservan en cualquier marco de referencia inercial. Sorprendentemente, esta observación puede generalizarse para cualquier intervalo, como se puede mostrar fácilmente⁹ usando los boosts de Lorentz (1.38), que conducen a las transformaciones de dx dadas por

$$dx^{\mu'} = \mathcal{B}^{\mu'}{}_{\nu} dx^{\nu}. \tag{1.47}$$

⁹Se puede obtener la invariancia del intervalo mostrando primero que $(ds')^2 = \kappa ds^2$ y después que $\kappa = 1$ al exigir isotropía y homogeneidad del espacio-tiempo, así como continuidad de la función ds^2 . Ver J.H. Elton, *Indefinite quadratic forms and the invariance of the interval in special relativity*. Am. Math. Monthly **117**, 2010, y Apéndice G de S.T. Thornton, J.B. Marion, *Classical dynamics of particles and systems*. Brooks/Cole, 2004.

La invariancia del intervalo, expresada para cualesquiera dos sistemas de referencia inerciales S y S' como

$$(ds')^2 = ds^2, \quad \text{invariancia del intervalo} \quad (1.48)$$

es un enunciado *crucial* en la relatividad especial, con profundas repercusiones físicas. Por eso es común que se le mencione como postulado en lugar de la universalidad de la velocidad de la luz.

Una consecuencia inmediata de la invariancia del intervalo es que las propiedades que vinculan a dos eventos son preservadas para todos los observadores en distintos marcos de referencia inerciales. La dinámica de radiación electromagnética (como la empleada en las radiocomunicaciones), o la de ondas gravitacionales (explorada brevemente en la sección 3.4.3) es la misma desde cualquier marco de referencia inercial. Esto es trivialmente esperado porque tanto la radiación electromagnética como las ondas gravitacionales se desplazan a la velocidad de la luz. Una observación menos trivial es que cualesquiera dos eventos que están *causalmente conectados* deben permanecer de la misma forma para cualquier observador en un marco de referencia inercial. Es decir, eventos descritos por intervalos luminoides o temporaloides aparecen en el mismo orden temporal para cualquier observador inercial. Como veremos en la sección 1.8, esto no ocurre para intervalos espacialoides.

1.6. Dilatación temporal

Considere dos marcos inerciales S y S' en configuración estándar. Estudiemos dos eventos ocurriendo en la misma posición en S' , i.e. $\Delta x^{i'} = 0$. Aplicando las transformaciones de Lorentz (1.38), vemos que

$$\Delta x^0 = \gamma \Delta x^{0'} \iff \Delta t = \gamma \Delta t'. \quad \text{dilatación temporal} \quad (1.49)$$

Como $\gamma > 1 \forall \mathbf{v} \neq 0$, encontramos la enunciación de la llamada *dilatación temporal*: *el tiempo de un marco de referencia en movimiento, medido por un observador en un marco de referencia en reposo, avanza más lento*. Es decir, un observador en S aprecia que los relojes de S' se atrasan.

Uno podría tener la tentación de usar la expresión (1.49) para saber qué tan rápido (lento) un observador en S' ve que las manecillas del reloj de S avanzan, obteniendo

$$\Delta t' = \frac{1}{\gamma} \Delta t \rightarrow \text{avanzan más rápido en } S, \quad (1.50)$$

pero, si ahora repetimos el argumento que condujo a (1.49) utilizando la transformación de Lorentz inversa encontramos que

$$\Delta t' = \gamma \Delta t, \quad (1.51)$$

o sea, un observador en S' aprecia que el tiempo corre a un ritmo menor en S . ¿Es esto una paradoja? La razón de esta aparente “paradoja” es la relatividad del movimiento. Cuando $\Delta x^{i'} = 0$ en el marco de referencia en movimiento S' y medimos tiempos desde el punto de vista del marco en reposo S , encontramos

$$\Delta x^0 = \gamma \Delta x^{0'} \iff \Delta x^{0'} = \frac{1}{\gamma} \Delta x^0, \quad (1.52)$$

donde el tiempo en el marco en movimiento, $\Delta x^{0'}$, parece más corto desde el punto de vista de S . De manera similar, desde el punto de vista de S' es S el que se mueve. Así, si hay dos eventos tales que $\Delta x^i = 0$, entonces

$$\Delta x^{0'} = \gamma \Delta x^0 \iff \Delta x^0 = \frac{1}{\gamma} \Delta x^{0'}. \quad (1.53)$$

Notemos que los eventos para los cuales $\Delta x^{i'} = 0$ y $\Delta x^i = 0$ solamente pueden coincidir para $\beta = 0$, es decir, en general son eventos distintos.

¿Realmente significa que el tiempo disminuye su ritmo para sistemas en movimiento? Desde el punto de vista de sistemas en reposo (llamémosles *laboratorio*), la respuesta es sí.

Ejemplo 1.1.

Un *muón* es una partícula elemental inestable que tiene las mismas cargas y espín que el electrón, pero su masa es aproximadamente 200 veces la masa del electrón. Consideremos el movimiento de un muón producido por el impacto de rayos cósmicos en la atmósfera. Típicamente, los muones son producidos a una altitud de 15 kilómetros con una rapidez de aproximadamente $0.9997 c$. Los muones no son estables y decaen en otras partículas en un tiempo de $2.2 \mu s$ en reposo. Sin dilatación temporal, el muón viajaría aproximadamente 660 metros en la atmósfera. Sin embargo, son detectados en la superficie terrestre.

Como los muones generados por los rayos cósmicos se mueven a *velocidades relativistas*, debemos considerar la dilatación temporal (1.49). Con $\beta = 0.9997$, vemos que el tiempo de vida del muón, desde el punto de vista del laboratorio es

$$\Delta x^0 = \gamma \Delta x^{0'} \approx 40.8(2.2 \mu s) \approx 89.8 \mu s. \quad (1.54)$$

Por lo tanto, el muón puede viajar hasta 27 kilómetros si no es detenido por la materia en el suelo. Este efecto es suficiente para mostrar que la dilatación temporal sí ocurre.

En el ejemplo anterior supusimos que el muón describe una trayectoria normal con la misma velocidad, pero eso podría no ser cierto en general. En lugar del tiempo $x^{0'}$ en cada uno de los marcos de referencia que el muón adopte, es más conveniente considerar al tiempo medido por la partícula en movimiento a lo largo de su línea de universo arbitraria. A este tiempo es lo que llamamos *tiempo propio* τ .

Dado que, desde su propia perspectiva, un sistema con tiempo propio τ no está en movimiento, instantáneamente podemos asegurar que $dx^i = 0$. Así,

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 = (dx^0)^2 = (dx^0)^2 - dx^i dx^i = ds^2. \quad (1.55)$$

Como el intervalo es invariante para cualquier observador inercial, $ds^2 = ds'^2$, a partir de la ecuación (1.55) concluimos que el tiempo propio también lo es:

$$c^2 d\tau^2 = c^2 (d\tau')^2. \quad \text{invariancia del tiempo propio} \quad (1.56)$$

Esto implica que, aunque el tiempo t no es universal, el tiempo propio τ sí lo es; es decir todo observador inercial mide el mismo tiempo τ asociado a un sistema en una trayectoria espacio-temporal arbitraria, pero es diferente al tiempo local t del observador a menos de que éste se desplace en la misma trayectoria que el sistema observado.

Otra observación importante es que resulta imposible definir el tiempo propio para intervalos espacialoides, ya que si $ds^2 < 0$ entonces también $d\tau^2$ es negativo y, consecuentemente, el tiempo propio es imaginario. Pero esto no es una sorpresa, pues el tiempo propio está definido como el tiempo de un sistema físico en movimiento medido desde su propio marco de referencia y, como hemos visto, la imposibilidad de rebasar la rapidez de la luz impide que exista un sistema físico que se desplace a lo largo de trayectorias espacialoides.

Ahora consideremos el marco de referencia del laboratorio S (en reposo) y el movimiento (arbitrario) de un sistema con tiempo propio τ . De $c^2 d\tau^2 = ds^2$ se obtiene que

$$\begin{aligned} cd\tau &= \sqrt{(dx^0)^2 - dx^i dx^i} \\ &= dx^0 \sqrt{1 - \frac{dx^i}{dx^0} \frac{dx^i}{dx^0}} \\ &= dx^0 \sqrt{1 - \frac{|\mathbf{u}|^2}{c^2}}, \end{aligned} \quad (1.57)$$

donde hemos definido $u^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$, que es la i -ésima componente de la velocidad del sistema en movimiento, medida por un observador en el laboratorio S . Podemos reescribir esta relación como

$$cd\tau = \frac{1}{\gamma(u)} dx^0 \quad \iff \quad \frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\gamma(u)}. \quad (1.58)$$

1.7. Un primer vistazo a 4–vectores

El concepto de tiempo propio τ permite definir cantidades físicas como si fueran medidas por observadores en su propio marco de referencia. Notemos que nosotros somos ese tipo de observadores, por lo que las cantidades que definiremos se refieren justamente a las que medimos en los laboratorios. Con este fin, consideremos la *línea de mundo*¹⁰ de un sistema descrito por

$$x(\tau) = (x^\mu(\tau)) = (x^0(\tau), x^1(\tau), x^2(\tau), x^3(\tau))^T = \begin{pmatrix} x^0(\tau) \\ \mathbf{x}(\tau) \end{pmatrix}, \quad (1.59)$$

en términos del tiempo propio. Generalizando la definición de velocidad, podemos definir la *4–velocidad* como

$$U \equiv \frac{dx}{d\tau} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \gamma_u \frac{dx}{dt} = (\gamma_u c, \gamma_u u^1, \gamma_u u^2, \gamma_u u^3)^T = \gamma_u \begin{pmatrix} c \\ \mathbf{u} \end{pmatrix}, \quad u^i \equiv \frac{dx^i}{dt}, \quad (1.60)$$

donde las componentes espaciales $U^i = \gamma_u u^i$ definen la *velocidad propia* (o celeridad) y empleamos la abreviación $\gamma_u = \gamma(u) = (1 - |\mathbf{u}|^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$.

Resulta conveniente (y geoméricamente natural, como veremos detalladamente en la sección 2.1) introducir el concepto de *4–vectores* como todas aquellas cantidades físicas, dotadas con 4 componentes espacio–temporales que se transformen como las componentes de dx bajo cualquier transformación de Lorentz.

Para comprobar que la 4–velocidad es un 4–vector basta con, por ejemplo, aplicar un boost de Lorentz \mathcal{B} en sus componentes, aplicando (1.47), lo cual conduce a

$$U^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau'} = \frac{d}{d\tau} \left(\mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu x^\nu \right) = \mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu \frac{dx^\nu}{d\tau},$$

donde hemos empleado en la segunda igualdad la invariancia de τ , y en la tercera igualdad que $d\mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu/d\tau = 0$ porque $d\gamma_v/d\tau = \gamma_v^3 \gamma_u \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/c^2 = 0$ y $d\beta_v/d\tau = \gamma_u \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}/cv = 0$ para observadores inerciales con velocidad \mathbf{v} con respecto al reposo. Esta ecuación conduce a $U^{\mu'} = \mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu U^\nu$, que coincide con la transformación de dx debida a un boost de Lorentz.

Por otra parte, la velocidad local (u^μ) del marco de referencia S se transforma como

$$u^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{dt'} = c \frac{\mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu dx^\nu}{dx^{0'}} = c \frac{\mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu dx^\nu}{\mathcal{B}^{0'}{}_\sigma dx^\sigma}. \quad (1.61)$$

De hecho, como $u^{i'}$ es una componente de la velocidad \mathbf{u}' medida en S' de un cuerpo en movimiento en S con velocidad \mathbf{u} , la ecuación (1.61) representa la *regla de adición de*

¹⁰La *línea de mundo* (o *worldline*) es la trayectoria en el espacio–tiempo que describe un sistema en movimiento, parametrizada por una variable temporal.

velocidades relativista. Para hacerlo evidente, consideremos que S' se mueve con respecto a S con velocidad $\mathbf{v} = (v, 0, 0)^T$, entonces $u^{\mu'}$ está asociada con un boost de u^μ a lo largo de la dirección x^1 . Se obtiene, con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, que para un boost de Lorentz en la dirección x^1 la ecuación (1.61) se expresa en componentes como

$$\begin{aligned} u^{1'} &= \frac{c\gamma(dx^1 - \beta dx^0)}{\gamma(dx^0 - \beta dx^1)} = \frac{c(\frac{dx^1}{dx^0} - \beta)}{1 - \beta\frac{dx^1}{dx^0}}, \\ u^{i'} &= \frac{cdx^i}{\gamma(dx^0 - \beta dx^1)} = \frac{c\frac{dx^i}{dx^0}}{\gamma\left(1 - \beta\frac{dx^1}{dx^0}\right)}, \quad i = 2, 3, \end{aligned} \quad (1.62)$$

de donde concluimos que la regla de adición de velocidades para un boost en x^1 está dada por

$$u^{1'} = \frac{u^1 - v}{1 - \frac{vu^1}{c^2}}, \quad u^{i'} = \frac{u^i}{\gamma\left(1 - \frac{vu^1}{c^2}\right)}, \quad i = 2, 3. \quad \text{adición de velocidades} \quad (1.63)$$

Notamos que si la velocidad del sistema observado en S es $\mathbf{u} = (c, 0, 0)^T$ (como un fotón), entonces $u^{1'} = \frac{c-v}{1-\frac{vc}{c^2}} = c$. De hecho, empleando la primera ecuación de (1.63) notamos que $u^{1'} = c$ es cierto sólo si

$$\left(1 - \frac{u^1}{c}\right) \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 0 \quad \iff \quad u^1 = c, \quad (1.64)$$

porque $|v| \neq c$ debido a que es la velocidad relativa entre dos observadores. En conclusión, las reglas (1.63) para la suma de velocidades reflejan el carácter universal de la rapidez de la luz.

Otra cantidad útil a definir es la 4-aceleración

$$\mathcal{A}^\mu = \frac{dU^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2}. \quad (1.65)$$

Como $d\tau$ es invariante bajo transformaciones de Lorentz y d^2x^μ se transforma como dx^μ (o lo que es equivalente dU^μ se transforma como dx^μ), \mathcal{A}^μ también se transforma como dx^μ . Definimos las componentes espaciales \mathcal{A}^i como las componentes de la *aceleración propia*.

Empleando la 4-velocidad y la 4-aceleración, se pueden definir el 4-momento p y la 4-fuerza f , cuyas componentes están dadas por

$$\begin{aligned} p^\mu &= mU^\mu, & 4\text{-momento} \\ f^\mu &= m\mathcal{A}^\mu & 4\text{-fuerza} \end{aligned} \quad (1.66)$$

en un sistema con masa en reposo m . Con estas definiciones y la ecuación (1.65), nos percatamos de que la segunda ley de Newton se preserva para 4–vectores, i.e.

$$f^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau}. \quad (1.67)$$

Por definición, notamos también que ambos, $p = (p^\mu)$ y $f = (f^\mu)$, se transforman como dx y, por lo tanto, son 4–vectores.

Se pueden definir cantidades adicionales que son 4–vectores, tales como

$$\begin{aligned} k &= (k^\mu) = \frac{p}{\hbar}, & 4\text{-vector de onda} \\ J &= (J^\mu) = \rho U, & 4\text{-corriente } (\rho \text{ es la densidad de carga en reposo}) \\ A &= (A^\mu) = (\phi, \mathbf{A})^T. & 4\text{-potencial electromagnético} \end{aligned}$$

Mientras las coordenadas espaciales de los 4–vectores se interpretan como los vectores propios de sus cantidades correspondientes, la componente 0 requiere una explicación adicional. Consideremos como ejemplo el 4–momento p . Cuando la rapidez $u = |\mathbf{u}|$ del sistema es pequeña comparada con c , es posible expresar p^0 como

$$p^0 = mU^0 = mc\gamma(u) \approx mc \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u^2}{c^2} + \dots \right) = \frac{1}{c} \left(mc^2 + \frac{1}{2} mu^2 + \dots \right), \quad (1.68)$$

en donde la aproximación resulta de desarrollar $\gamma(u)$, con $u/c \ll 1$, en una serie de Taylor. Aunque identificamos fácilmente a $\frac{1}{2}mu^2$ como la energía cinética del sistema desde el punto de vista de S , el primer término es más complicado.

Para $\mathbf{u} = 0$, $p^0 = \frac{1}{c}mc^2$ está totalmente determinado por la masa inercial (invariante) del sistema en su propio marco de referencia. Como mc^2 aparece al mismo nivel que $\frac{1}{2}mu^2$, Einstein argumentó que este término debe ser interpretado como la *energía inercial* de un sistema en reposo, su propia energía potencial. Los términos restantes son potencias de u^2 , estos pueden ser consideradas *correcciones relativistas*, sólo relevantes para velocidades grandes, $u^2 \approx c^2$, con unidades de energía. Y esta última es una observación crucial.

Para Einstein, esto significaba que

$$p^0 \equiv \frac{E}{c} = \frac{1}{c}\gamma(u)mc^2, \quad (1.69)$$

donde E es la *energía total* del sistema. Podemos reescribir la interpretación anterior como $E = \gamma(u)mc^2$ que, para un partícula en reposo, $u = 0$, se reduce a la fórmula más conocida de la física,¹¹ $E = mc^2$. La ecuación (1.69) fue la conclusión más relevante del artículo de

¹¹Algunos autores introducen a este nivel el *oscuro* concepto de *masa relativista*, $M \equiv \gamma(u)m$, mediante el cual obtienen $E = Mc^2$. Interpretan M como una “masa debida al movimiento” de un sistema. Esto pareciera indicar que la estructura de una partícula es modificada por su movimiento, lo cual no es correcto. Por esta razón, no emplearemos ese concepto en este texto.

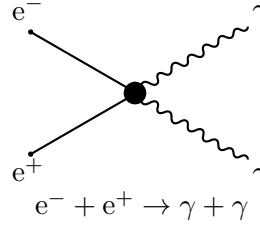


Figura 1.9: Aniquilación electrón-positrón que resulta en luz con la energía equivalente a la masa del par.

Einstein en 1905: ¡la energía es equivalente a la masa!

La mejor prueba de la relación entre masa y energía se encuentra quizá en experimentos que involucran aniquilación de materia y antimateria, como el mostrado esquemáticamente en la figura 1.9, donde la colisión del par electrón-positrón, cada uno con masa en reposo $m \approx 511 \text{ keV}/c^2$, produce dos fotones con energía individual $E \approx 511 \text{ keV}$. Esto representa una pequeña fracción de la energía producida por el Sol. Otro ejemplo quizá más relevante aun es la masa macroscópica de los cuerpos. Aproximadamente el 99 % de la masa atómica proviene de la energía de amarre entre las partículas que componen los átomos.

Notemos que (1.69) implica que la masa asociada a una partícula con energía E está dada por

$$mc^2 = \gamma^{-1}(u)E = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}E,$$

que se anula justo cuando $u^2 = c^2$. Esto significa que las partículas *sin masa* se mueven a la *velocidad de la luz* y todas las partículas que se mueven a esta velocidad carecen de masa. Observamos también que la rapidez de un sistema de masa m está dada por

$$\frac{u}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{E}\right)^2}.$$

Esto implica que para que u alcance el valor c , el sistema debe tener una energía infinita. Así establecemos la imposibilidad de que un sistema masivo alcance la rapidez de la luz. Actualmente, en el acelerador de partículas más poderoso construido, cada par de protones alcanza (con masa total de casi $2 \text{ GeV}/c^2$) la enorme energía de 13 TeV . Sustituyendo, obtenemos que la rapidez de estas partículas es 99.999998 % de la rapidez de la luz.

Volviendo a nuestra discusión sobre el 4-momento, el correspondiente 4-vector puede ser escrito como

$$p = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)^T \equiv (\gamma(u)mc, \gamma(u)m\mathbf{u})^T, \quad (1.70)$$

donde hemos empleado (1.69) y definido el *momento propio* $\mathbf{p} \equiv \gamma(u)m\mathbf{u}$ en compatibilidad con (1.60). En estos términos, encontramos la relación entre el momento propio y la energía

de un sistema relativista

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c^2} \mathbf{u}. \quad (1.71)$$

Por otra parte, aplicando la hipótesis de De Broglie al 4–momento, podemos obtener el 4–vector de onda $k = (k^\mu)$:

$$k = \frac{p}{\hbar} = \left(\frac{E}{c\hbar}, \frac{\mathbf{p}}{\hbar} \right)^T = \left(\frac{\hbar\omega}{c\hbar}, \frac{\mathbf{k}\hbar}{\hbar} \right)^T = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right)^T. \quad (1.72)$$

Hemos usado en la tercera igualdad la hipótesis de los cuantos de Planck, $E = \hbar\omega$, donde ω es la frecuencia cuántica de la onda asociada al sistema. La ecuación (1.72) indica que la componente 0 del 4–vector de onda es la frecuencia de onda.

Como dijimos antes, las componentes V^μ de un 4–vector V deben ser transformadas como las de dx , i.e.

$$V^{\mu'} = \mathcal{B}^{\mu'}{}_\nu V^\nu, \quad (1.73)$$

al ser observadas por distintos observadores inerciales. Sin embargo, como también hemos visto, no todas las cantidades físicas se pueden codificar en 4–vectores, pues algunas son invariantes para todos los observadores inerciales o, en términos técnicos, *invariantes o escalares de Lorentz*. Además de la masa en reposo m de un sistema y de la rapidez de la luz c , hemos visto que ds^2 y $d\tau^2$ son escalares de Lorentz. Es posible construir otras cantidades escalares con base en los 4–vectores.

Con esta finalidad, definiremos el producto escalar en el espacio–tiempo. Recordemos primero que

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = dx^0 dx^0 - dx^i dx^i. \quad (1.74)$$

Esta expresión se asemeja al producto escalar “típico” salvo por el signo *peculiar*, el cual permite la existencia de intervalos espacialoides, para los cuales $ds^2 < 0$. Con estas observaciones, resulta razonable proponer que el espacio vectorial de cuatro dimensiones de los marcos de referencia inerciales está dotado con el *producto interior indefinido*¹² dado por

$$A \cdot B \equiv A^0 B^0 - A^i B^i, \quad (1.75)$$

donde $A = (A^\mu)$ y $B = (B^\mu)$ son 4–vectores. (Más formalmente, como veremos en el capítulo 2, el espacio–tiempo construye una variedad pseudo-Riemanniana, dotada con una forma bilineal simétrica de *signatura* $(+, -, -, -)$ llamada métrica, lo cual permite definir el producto interior definido por (1.75).)

Se puede mostrar fácilmente que $A \cdot B$ es un escalar de Lorentz. Consideremos e.g. el 4–momento p y el producto escalar consigo mismo

$$p = mU \Rightarrow p \cdot p = m^2 U \cdot U = m^2 \gamma^2(u) (c^2 - u^2) = m^2 c^2 \gamma^2(u) \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right) = m^2 c^2, \quad (1.76)$$

¹²El producto interior en un espacio vectorial se llama *indefinido* cuando permite valores negativos.

lo cual es una constante universal. Además, vemos que de la definición (1.70) obtenemos

$$p \cdot p = p^0 p^0 - p^i p^i = \frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2. \quad (1.77)$$

Comparando (1.76) y (1.77), obtenemos

$$\frac{E^2}{c^2} - |\mathbf{p}|^2 = m^2 c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad E^2 = m^2 c^4 + |\mathbf{p}|^2 c^2, \quad (1.78)$$

que se identifica como la relación de energía–momento para partículas en movimiento. Podemos distinguir tres límites: el reposo $|\mathbf{p}| = 0$, el límite ultrarrelativista $|\mathbf{p}| \gg mc$, y el límite no-relativista $|\mathbf{p}| \ll mc$. Para una partícula en reposo, se recupera $E = mc^2$. En el límite ultrarrelativista, (1.78) se simplifica a $E = |\mathbf{p}|c$. Finalmente, en el límite no-relativista obtenemos

$$E = mc^2 \sqrt{1 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{m^2 c^2}} \approx mc^2 + \frac{|\mathbf{p}|^2}{2m}, \quad (1.79)$$

en donde identificamos inmediatamente el segundo término como la energía cinética no relativista y, por lo tanto, podemos interpretar el primer término como la energía potencial debida a la masa inercial del sistema.

Un resultado adicional de nuestra definición de producto interior (1.75) es que $U \cdot U = c^2$, como comprobamos en la ecuación (1.76). Dado que el resultado es un escalar de Lorentz, su derivada se anula, de donde obtenemos

$$\frac{d(U \cdot U)}{d\tau} = 0 = 2U \cdot \frac{dU}{d\tau} = 2U \cdot \mathcal{A}; \quad (1.80)$$

es decir, la 4–velocidad U es siempre “perpendicular en el espacio–tiempo”¹³ a la 4–aceleración \mathcal{A} , tal como ocurre en la mecánica Newtoniana cuando la velocidad tridimensional satisface $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \text{cte}$. La diferencia es que, mientras que en la mecánica Newtoniana $\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0$ sólo para algunos casos (como el movimiento circular uniforme), en espacio–tiempo $U \cdot \mathcal{A} = 0$ es siempre válida.

1.8. Diagramas de espacio–tiempo y efectos relativistas

Como en la relatividad Galileana, en la relatividad especial los diagramas de espacio–tiempo son una herramienta útil para representar relaciones entre diferentes marcos de

¹³Notamos que $V \cdot W = 0$ también ocurre si el 4–vector W es múltiplo de V y $V \cdot V = 0$ debido al signo – en (1.75), por lo que no denota perpendicularidad. Pero en el caso de la 4–velocidad sí lo hace porque $U \cdot U \neq 0$ siempre.

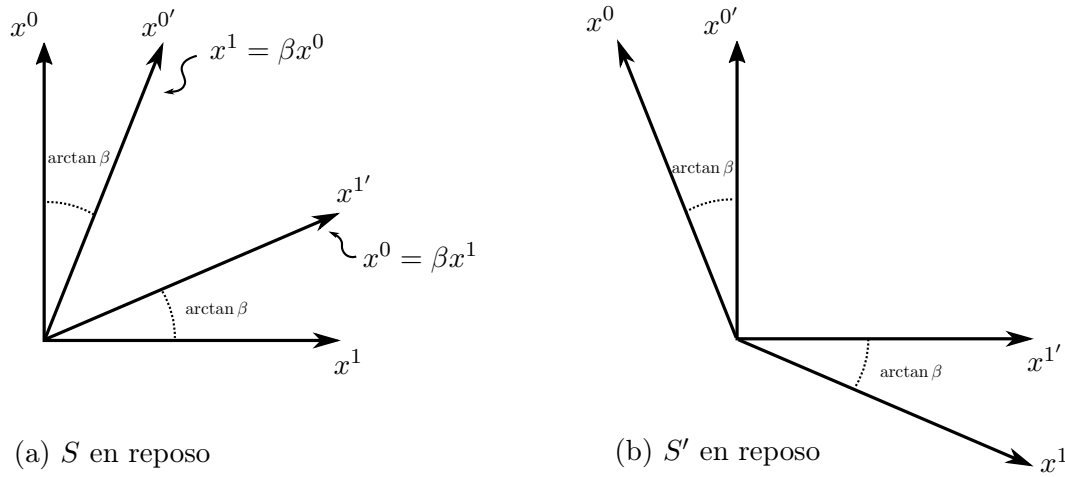


Figura 1.10: Diagramas de espacio–tiempo para dos marcos de referencia inerciales relacionados por un boost de Lorentz a lo largo de x^1 , con $\beta > 0$. (a) Los ejes $x^{0'}$ y $x^{1'}$ de S' observados desde S se acercan a la *curva luminoide* $x^0 = x^1$. (b) Debido a que S' observa que S se mueve con rapidez dada por $-\beta$, un observador en S' percibe que los ejes de S se alejan de la recta $x^0 = x^1$.

referencia. En la sección 1.4 supusimos que el eje $x^{0'}$ de un marco inercial S' coincide en los tratamientos relativistas de Newton y Einstein (ver figura 1.6). Esta suposición, aunada a la universalidad de la rapidez de la luz, condujo a las transformaciones relativistas (1.38). Ahora podemos usar estas transformaciones para encontrar también el eje $x^{1'}$ en la perspectiva de un observador en S :

$$\begin{aligned} \text{Eje } x^{0'}: \quad x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) = 0 &\implies x^1 = \beta x^0, \\ \text{Eje } x^{1'}: \quad x^{0'} = \gamma(x^0 - \beta x^1) = 0 &\implies x^0 = \beta x^1. \end{aligned} \tag{1.81}$$

En la figura 1.10(a) se muestran las rectas descritas por la ecuación (1.81), correspondientes a los ejes $x^{0'}$ y $x^{1'}$. La forma de este diagrama es el resultado de la mezcla de espacio y tiempo por efecto de los boosts de Lorentz, una manifestación de que un observador inercial no puede tratar al espacio y el tiempo de manera independiente. La comprensión de que el espacio y el tiempo x^i y x^0 están inexorablemente mezclados en el espacio–tiempo puede ser considerada como la contribución de Einstein a la ambiciosa meta de unificación.

Es importante remarcar que el diagrama de espacio–tiempo 1.10(a) es la apreciación de un observador localizado en S , en su propio sistema de referencia, de un marco de referencia en movimiento S' . Un observador localizado en S' ve a S en movimiento con rapidez $-\beta$, con los ejes x^0 y x^1 determinados en términos de $x^{0'}$ y $x^{1'}$, mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned} \text{Eje } x^0: \quad x^1 = \gamma(x^{1'} + \beta x^{0'}) = 0 &\implies x^{1'} = -\beta x^{0'}. \\ \text{Eje } x^1: \quad x^0 = \gamma(x^{0'} + \beta x^{1'}) = 0 &\implies x^{0'} = -\beta x^{1'}. \end{aligned} \tag{1.82}$$

Las curvas descritas por estas ecuaciones son los ejes espacio–tiempo mostrados en la figura 1.10(b).

Observando las diferencias en las figuras 1.10, notamos que, con relación a la *curva luminoide* o *curva nula* $x^0 = x^1$ (que coincide para todos los observadores inerciales, como el lector puede comprobar trivialmente), en los diagramas de espacio–tiempo los ejes de un marco de referencia que se desplaza con $\beta > 0$ se acercan a la curva luminoide mientras que se alejan si $\beta < 0$.

Una vez establecida la forma de los ejes en un diagrama de espacio–tiempo, es preciso calibrarlos para poder comparar mediciones en los distintos marcos de referencia. Con este propósito, empleamos la invariancia del intervalo

$$\Delta s^2 = (\Delta s')^2 \quad \implies \quad (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 = (\Delta x^{0'})^2 - (\Delta x^{1'})^2, \quad (1.83)$$

donde supusimos, por simplicidad, $\Delta x^2 = \Delta x^3 = 0$. Además, podemos suponer que uno de los eventos del intervalo ocurre en $x^\mu = 0$, lo que simplifica la invariancia del intervalo a

$$(x^0)^2 - (x^1)^2 = (x^{0'})^2 - (x^{1'})^2 \equiv K, \quad K = \text{cte.} \quad (1.84)$$

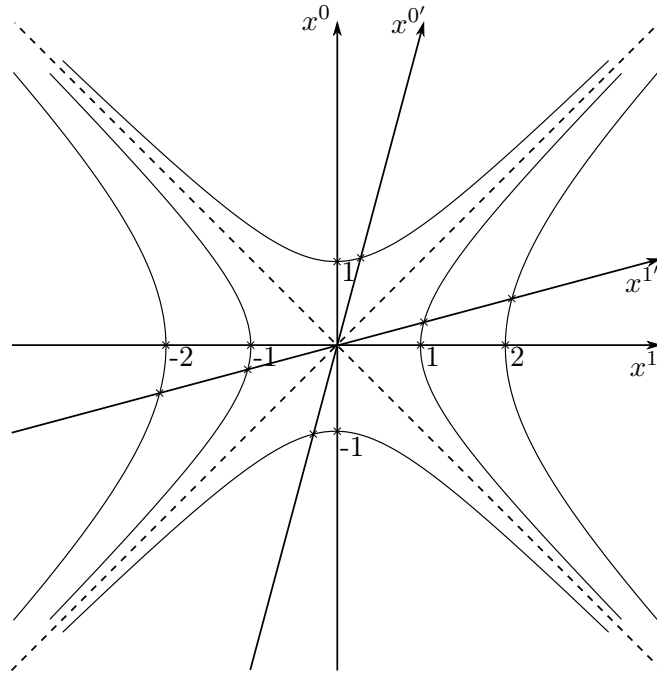


Figura 1.11: Las curvas hiperbólicas descritas por (1.84) permiten la calibración de los ejes. Para cada constante positiva, las hipérbolas asignan un valor positivo y uno negativo a los ejes temporales que intersecan. Cada constante negativa corresponde a una hipérbola que asigna un valor positivo y otro negativo a los ejes espaciales que interseca.

Cada valor constante de K en la ecuación (1.84) corresponde a una hipérbola diferente. Valores positivos de K corresponden a hipérbolas que “abren” verticalmente, mientras que $K < 0$ corresponde a hipérbolas horizontales. Por construcción, las asíntotas de las hipérbolas son las rectas $x^0 = \pm x^1$. De aquí sigue que las hipérbolas con $K > 0$ intersecan sólo ejes temporales (coincidiendo con el hecho de que el intervalo es temporaloide en este caso), y las hipérbolas con $K < 0$ intersecan ejes espaciales (y el intervalo es espacialoide).

Con estas observaciones, la calibración de los ejes ocurre como sigue. Notamos que en la intersección del eje x^0 y una hipérbola con $K > 0$, el valor de x^0 es $\pm\sqrt{K}$ porque $x^1 = 0$ a lo largo de ese eje. Por invariancia del intervalo, la intersección del eje $x^{0'}$ ocurre justamente en $x^{0'} = \pm\sqrt{K}$ porque $x^{1'} = 0$ a lo largo del eje. Como se ilustra en la figura 1.11 para $\beta > 0$, cuanto mayor sea la rapidez de S' con respecto a S , la diferencia que percibe un observador inercial entre las mediciones temporales en diferentes marcos de referencia aumenta. Como veremos en breve, este es el corazón de la dilatación temporal. Análogamente, como en los ejes espaciales de S y S' se satisface respectivamente $x^0 = 0$ y $x^{0'} = 0$, entonces una hipérbola con $K < 0$ interseca los ejes espaciales en los valores $x^1 = \pm\sqrt{-K} = x^{1'}$.

Dilatación temporal. Empleando esta calibración, es fácil explicar la dilatación temporal debido a los boosts de Lorentz. En la figura 1.12 se presentan los ejes temporales de dos observadores inerciales, tales que, desde la óptica de S , S' se mueve con β grande con respecto a S en la dirección positiva de x^1 . Un observador en S' mide un tiempo $\Delta x^{0'}$. De acuerdo a la calibración hiperbólica dictada por (1.84), el mismo valor que se mide en S' está dado por la intersección de la hipérbola con $K = (\Delta x^{0'})^2 > 0$ con el eje temporal en S . Sin embargo, un observador en S , considera que el tiempo Δx^0 correspondiente a $\Delta x^{0'}$ es, más bien, el obtenido al intersecar con el eje x^0 la línea horizontal (paralela al eje x^1) que pasa por $x^{0'} = \Delta x^{0'}$. Y este corresponde a un valor mayor (está por encima de la hipérbola) al reportado por un observador en S' .

Es tentador pensar que el observador en S ha cometido un error; sin embargo, la medición del observador en S es correcta. Todos aquellos eventos que ocurran a lo largo de líneas paralelas a x^1 en su diagrama de espacio–tiempo ocurren al mismo tiempo. Por lo tanto, el resultado desde la perspectiva de un observador en S ,

$$\Delta x^0 > \Delta x^{0'} ,$$

es un resultado físicamente real, la dilatación temporal relativista. Como obtuvimos en la sección 1.6, *el tiempo medido por un observador en movimiento marcha más lentamente que el de un observador en reposo desde el punto de vista del observador en reposo*. La relación exacta entre Δx^0 y $\Delta x^{0'}$ está dada por la ecuación (1.49), obtenida previamente.

Como veremos en la sección 1.8.1, algo parecido ocurre con las longitudes, pero deberemos analizar los eventos de medición de posiciones con mayor atención. Particularmente, deberemos cuidar que las mediciones ocurran simultáneamente y esto no es trivial.

Relatividad de la simultaneidad. Como hemos visto, el tiempo afecta al espacio (ver e.g. ecuación (1.38)) en relatividad especial, por lo que dos eventos que aparentan ser simultáneos para un observador inercial no lo son para otro observador inercial si existe una velocidad relativa entre ellos. Esto resulta particularmente relevante al establecer la posición espacial en la que ocurren dos o más eventos desde la perspectiva de distintos marcos de referencia. La dificultad es evidente si un observador en reposo desea ubicar las posiciones de los extremos de un objeto que se encuentra en movimiento. Si no establece simultáneamente las posiciones de los extremos podría, entre otras cosas, equivocarse en el tamaño del objeto.

Consideremos dos marcos de referencia inerciales S y S' con movimiento relativo a lo largo de x^1 . Un observador en S' nota que dos eventos ocurren simultáneamente, i.e. que satisfacen $\Delta x^{0'} = 0$. Esta medición es traducida a una medición en S mediante un boost de Lorentz, que conduce a

$$\Delta x^{0'} = \gamma(\Delta x^0 - \beta \Delta x^1) \stackrel{!}{=} 0.$$

De esta expresión, encontramos que un observador en S mide que el tiempo entre ambos eventos es proporcional a la distancia que separa a los eventos y a la velocidad relativa del observador inercial en movimiento, $\Delta x^0 = \beta \Delta x^1$. Claramente, a menos de que $\beta \ll 1$, los observadores no estarán de acuerdo en que los eventos ocurrieron al mismo tiempo.

Existe una consecuencia adicional de que la *simultaneidad sea relativa*: no todos los observadores inerciales pueden estar de acuerdo en el orden de la secuencia de eventos (ver ejercicio 1.12). Para ilustrar este fenómeno relativista, consideremos dos eventos que ocurren simultáneamente en S , en el origen \mathcal{O} y $\mathcal{E} = (0, x^1, 0, 0)$. Ahora, dos observadores con rapidez v en direcciones opuestas a lo largo del eje x^1 encuentran que, aunque el evento

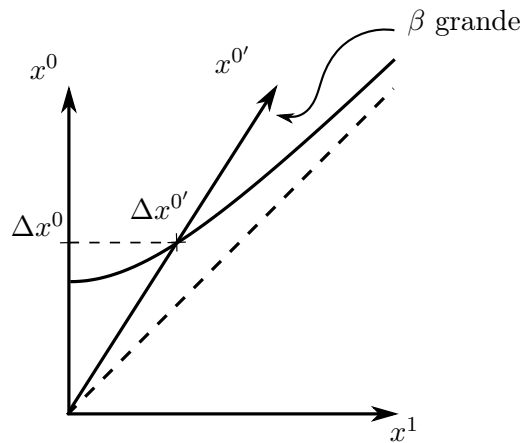


Figura 1.12: Dilatación temporal. Considerando boosts de Lorentz con $\beta > 0$, el tiempo medido en S' es siempre menor al medido por un observador en S .

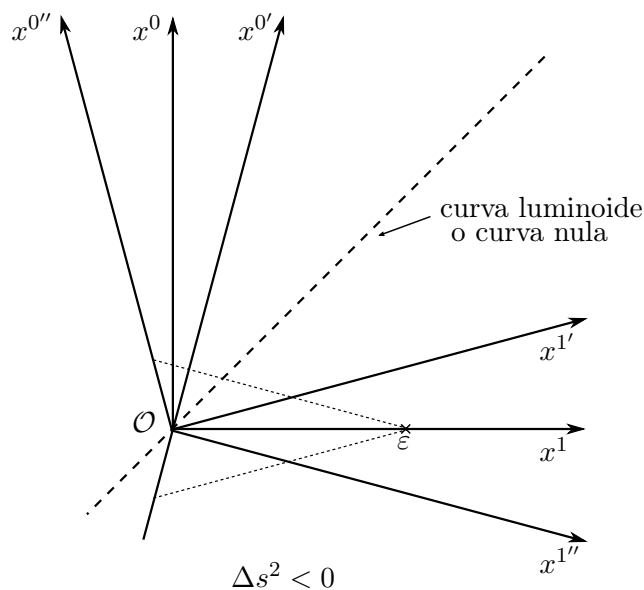


Figura 1.13: Secuencia de eventos separados por un intervalo espacialoide, $\Delta s^2 < 0$. Mientras que los eventos \mathcal{O} y \mathcal{E} son simultáneos para S , para $S'(S'')$, \mathcal{E} ocurre antes (después) de \mathcal{O} .

en el origen siempre ocurre en el mismo lugar y tiempo, el segundo evento ocurre a distintos tiempos. Si llamamos S' al marco de referencia en movimiento en la dirección positiva de x^1 y S'' al que se mueve en sentido opuesto, las posiciones del evento \mathcal{E} difieren temporalmente de acuerdo a:

$$\begin{aligned} S': \quad \mathcal{E} &= (-\gamma\beta x^1, \gamma x^1, 0, 0), \\ S'': \quad \mathcal{E} &= (+\gamma\beta x^1, \gamma x^1, 0, 0), \end{aligned} \tag{1.85}$$

como se muestra en la figura 1.13.

Es interesante notar que dos eventos simultáneos desde una perspectiva, se desfazan en el tiempo cuando un observador se mueve a lo largo de la trayectoria que conecta los eventos. Particularmente, notamos a partir de (1.85) que un observador que se desplaza e.g. del evento \mathcal{O} hacia el evento \mathcal{E} , percibe que \mathcal{E} ocurrió antes que el evento del que partió. En cambio, si se desplaza en sentido opuesto, observa que la secuencia de eventos se revierte. La clave para llegar a esta conclusión en la figura 1.13 es que el tiempo es medido en cada marco de referencia por medio de líneas paralelas a su respectivo eje espacial, como indican las líneas punteadas en la imagen.

Relatividad de la posición. Así como la mezcla del espacio y el tiempo provoca que distintos observadores inerciales sean incapaces de ponerse de acuerdo sobre la secuencia temporal en la que ocurrieron dos eventos separados por un intervalo espacialoide, es im-

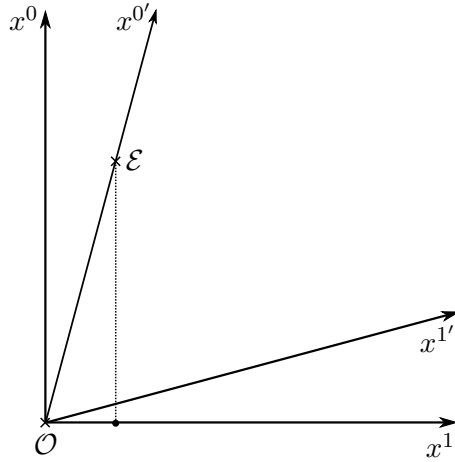


Figura 1.14: Eventos localizados en la misma posición para un observador en S' . Aunque \mathcal{O} y \mathcal{E} no ocurren en la misma posición en S , un observador en S' aprecia que ambos ocurren en la misma posición.

posible determinar universalmente la posición en la que ocurrieron dos eventos separados por un intervalo temporal no nulo.

Es fácil notar que para dos eventos arbitrarios separados por un intervalo temporal no nulo, con $ds^2 > 0$, siempre es posible escoger un marco de referencia en donde los eventos ocurren en el mismo lugar. Es decir, siempre podemos elegir un marco de referencia S' en el que $(\Delta s')^2 = (\Delta x^{0'})^2 > 0$ y $\Delta x^{i'} = 0$.

Consideremos, por ejemplo, la situación ilustrada en la figura 1.14, en la que se muestra sólo una dimensión espacial, por simplicidad. Dos eventos ocurren en el origen \mathcal{O} y en $\mathcal{E} = (x^0, x^1, 0, 0)$. Si un observador se encuentra en un marco de referencia S' que se mueve con rapidez $\beta > 0$ con respecto a S , el evento \mathcal{E} sucede

$$\mathcal{E} = (\gamma(x^0 - \beta x^1), \gamma(x^1 - \beta x^0)) .$$

Exigiendo que $x^{1'} = \gamma(x^1 - \beta x^0) \stackrel{!}{=} 0$, encontramos la rapidez a la que el marco de referencia S' debería desplazarse para que los eventos ocurrieran en la misma posición espacial,

$$\beta = \frac{x^1}{x^0} . \quad (1.86)$$

En el diagrama de espacio-tiempo 1.14, el marco de referencia S' ha sido elegido justamente para que la componente espacial del evento \mathcal{E} sea nula, ubicando a ambos eventos en la misma posición.

1.8.1. Contracción de Lorentz

En el espacio-tiempo, la única medición de distancias que es invariante bajo toda transformación de Lorentz es la dictada por el intervalo Δs^2 , ecuación (1.42). La forma de extraer la información espacial del intervalo es mediante una medición simultánea de las posiciones entre las que se desea conocer la distancia. Es decir, los eventos de medición de las posiciones deben ocurrir al mismo tiempo. Esto supone un obstáculo al traducir mediciones de distancia entre distintos observadores inerciales, ya que la simultaneidad es relativa.

Para establecer una regla que permita relacionar las distancias en distintos marcos de referencia, pensemos en una varilla de longitud ℓ' , medida por un observador en el marco de referencia propio de la varilla, S' . Esta longitud medida por un observador moviéndose con el objeto, le llamamos *longitud propia*. Suponemos, como es costumbre, que S' se mueve con respecto a un marco de referencia en reposo total S con rapidez codificada en $\beta > 0$. Consideremos que la medición de los extremos de la varilla en S' corresponde a los eventos

$$\begin{aligned} x'_1 &= (0, 0, 0, 0)^T \\ x'_2 &= (0, \ell', 0, 0)^T \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x^{1'} = \ell' \quad \text{y} \quad \Delta x^{0'} = 0. \quad (1.87)$$

Desde el punto de vista de un observador en S , las mediciones realizadas por el observador en S' no ocurren simultáneamente debido a su movimiento. En S , la posición de los eventos de medición en el espacio-tiempo se obtienen mediante la aplicación de un boost de Lorentz (1.38), lo que conduce a

$$\begin{aligned} x_1 &= (0, 0, 0, 0)^T \\ x_2 &= (\gamma\beta\ell', \gamma\ell', 0, 0)^T \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \Delta x^1 = \gamma\ell' \quad \text{y} \quad \Delta x^0 = \gamma\beta\ell'. \quad (1.88)$$

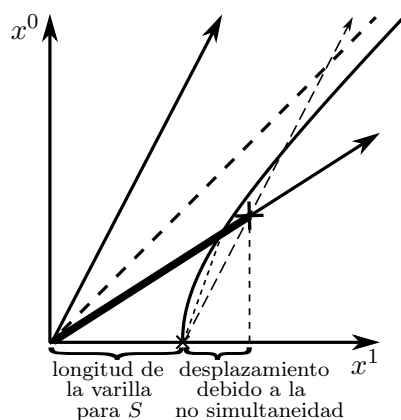


Figura 1.15: Determinación de la longitud de una varilla en movimiento. Un observador en movimiento mide una longitud mayor que uno en reposo, en S , debido a que este último nota que las mediciones en movimiento no fueron simultáneas.

Al aplicar el boost de Lorentz, hemos tomado en cuenta que S se desplaza con rapidez $-\beta$ con respecto a S' . El resultado $\Delta x^0 \neq 0$, confirma que las mediciones de los extremos de la varilla no son simultáneas para un observador en S . El ajuste debido a la no simultaneidad de las mediciones realizadas en S' se obtiene de notar que el extremo ilustrado a la derecha en la figura 1.15 se desplazó, debido a la rapidez β de la varilla, una distancia $\beta\Delta x^0$ que debe ser sustraída de la distancia Δx^1 medida en S . De esta forma, encontramos que la longitud de la varilla en movimiento desde la perspectiva del marco de referencia en reposo está dada por

$$\ell = \Delta x^1 - \beta\Delta x^0 = \gamma\ell' - \gamma\beta^2\ell' = \gamma(1 - \beta^2)\ell' = \ell'/\gamma, \quad (1.89)$$

es decir, de acuerdo con un observador en S , la longitud de la varilla en movimiento se contrae por un factor de $\frac{1}{\gamma} < 1$ en la dirección del movimiento:

$$\ell = \ell'/\gamma. \quad \text{contracción de Lorentz} \quad (1.90)$$

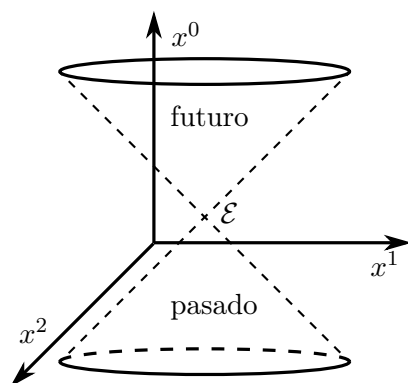
Notemos que este resultado coincide con la contracción propuesta por FitzGerald y Lorentz, ecuación (1.5), en su teoría del éter.

Experimentalmente la contracción de la longitud solamente puede ser comprobada en experimentos que involucran colisiones de átomos o núcleos; o corrientes (súper)rápidas.

1.8.2. Causalidad en diagramas de espacio–tiempo

Los diagramas de espacio–tiempo son muy útiles para estudiar la conexión *causal* entre eventos. Recordemos nuestra discusión la sección 1.5. Hemos visto que la invariancia del intervalo implica que ningún cambio de signo de ds^2 es admisible para diferentes observadores inerciales. A partir de esta observación, concluimos que los eventos relacionados por intervalos espacialoides, con $ds^2 < 0$, están desconectados causalmente para cualquier observador inercial debido a que la rapidez con la que una señal emitida en el lugar y momento de un primer evento para llegar al lugar y momento del segundo es siempre mayor que la de la luz y, por lo tanto, no existe forma de comunicación que permita que uno de ellos provoque el otro. Además, hemos visto en la sección 1.8 que es imposible para distintos observadores inerciales determinar con total certeza cuál evento ocurrió antes y cuál después si están separados por un intervalo espacialoide.

Por otro lado, eventos que ocurren a lo largo de una *curva nula*, donde $ds^2 = 0$, son algo especiales. Primero, notamos que $ds^2 = 0$ implica $d\tau = 0$, lo cual significa que un sistema moviéndose a la velocidad de la luz, ¡no posee un tiempo propio! Eventos a lo largo de caminos nulos sólo pueden conectarse por medio de señales que se desplacen a la velocidad de la luz y son apreciados de la misma manera por cualquier observador inercial. Por lo tanto, todo evento que haya ocurrido en el pasado de acuerdo a un observador inercial, es igualmente apreciado en el pasado por otros observadores.

Figura 1.16: Cono de luz de un evento \mathcal{E} .

Finalmente, para eventos con intervalo temporaloide, el tiempo propio τ sí puede ser definido. Por lo tanto, la *línea de mundo* de un observador a lo largo de una trayectoria temporaloide puede ser descrita por los puntos del intervalo y parametrizada por τ . La condición $ds^2 = d\tau^2 > 0$ para los eventos a lo largo de la trayectoria temporaloide y la invariancia del intervalo establecen que la diferencia temporal entre los eventos se mantiene. Consecuentemente, un evento que ocurre en el pasado debe ser observado en el pasado desde cualquier marco de referencia. Como discutimos en la sección 1.5, la causalidad entre los eventos de este tipo se mantiene debido a que una señal que se desplaza con rapidez menor a la de la luz desde un evento pasado puede alterar los resultados en un evento futuro.

En resumen, de nuestra discusión encontramos que:

- eventos separados espacialmente están causalmente desconectados;
- eventos separados luminoidemente están causalmente conectados; y
- eventos separados temporaloidemente están causalmente conectados.

Para eventos separados por un intervalo finito, notamos que sólo están causalmente vinculados si satisfacen $\Delta s^2 \geq 0$. Por lo tanto, la “superficie” en el espacio–tiempo 4–dimensional definida por todos los intervalos que satisfacen¹⁴ $\Delta s^2 = 0$, trazada desde un primer evento \mathcal{E} , establece una frontera entre los eventos que están *causalmente conectados* y los *causalmente desconectados*. Esta “superficie” define el llamado *cono de luz* del evento \mathcal{E} . Los eventos al interior del cono de luz están causalmente conectados con el evento \mathcal{E} , como se ilustra en la figura 1.16.

Todos los posibles futuros del evento \mathcal{E} se localizan en la región superior del cono de luz, mientras que la región inferior contiene todos los posibles pasados del evento. Si

¹⁴Dado que en cuatro dimensiones la condición elimina una de las variables, la “superficie” es en realidad un volumen.

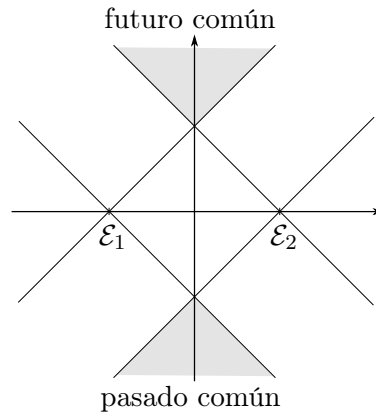


Figura 1.17: Los conos de luz de dos eventos \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 , simultáneos para un observador en reposo. La intersección de los conos determina los conjuntos de eventos que pueden corresponder al futuro y pasado comunes a \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 .

consideramos un observador inercial arbitrario, este siempre concluirá que el pasado de una *línea de mundo* que pasa por \mathcal{E} está definitivamente en el interior de la región inferior del cono de luz.

Usando esta herramienta, es posible averiguar, por ejemplo, el origen de ciertas propiedades comunes a diferentes regiones del universo o la posibilidad de que dos eventos simultáneos se afecten en el futuro, independientemente del movimiento (inercial) de los observadores. Como ilustramos en la figura 1.17, los conos de luz de dos eventos que suceden simultáneamente para algún observador se traslapan en las dos regiones sombreadas, una en el pasado y otra en el futuro de los eventos. La región de x^0 menor corresponde al conjunto de eventos pasados que pudo haber influido en ambos eventos, mientras que la región futura contiene posibles consecuencias de la combinación de los eventos. Un ejemplo que representa esta situación fácilmente es el interferómetro de Michelson-Morley, donde los eventos \mathcal{E}_1 y \mathcal{E}_2 se identifican con la reflexión de los haces de luz emitidos por una misma fuente en los extremos de los brazos del interferómetro (ver sección 1.2).

Es importante ser cuidadosos al usar esta lógica en general. Por ejemplo, si consideráramos los conos de luz de dos regiones muy distantes en el cosmos y no encontráramos que se traslapan durante los últimos 13,800 millones de años ¹⁵, podríamos concebir que no hay manera de que esas dos regiones observadas hayan tenido un pasado común. Sin embargo, las observaciones cosmológicas han mostrado que regiones que serían consideradas ajenas en este análisis tan simple sí debieron estar en contacto causal en algún momento. Como veremos brevemente en la sección 3.5, los detalles de la expansión del universo alteran profundamente el resultado más simple.

¹⁵Esta es la edad del universo de acuerdo al modelo cosmológico más acertado hasta ahora, el llamado Λ CDM o modelo de la *gran explosión*.

1.9. El grupo de transformaciones de Lorentz

Aunque frecuentemente los boosts de Lorentz son llamados transformaciones de Lorentz, como veremos, por sí mismos no forman un grupo porque, particularmente, la acción de dos o más boosts de Lorentz en el espacio-tiempo con tres dimensiones espaciales conduce a una transformación que no puede expresarse como un boost. Es decir, los boosts de Lorentz son un conjunto incompleto de transformaciones de las coordenadas del espacio-tiempo. Para encontrar el grupo completo de transformaciones de Lorentz, debemos estudiar cómo actúan los boosts de Lorentz cuando un sistema inercial se encuentra en movimiento en una dirección arbitraria.

1.9.1. Boosts de Lorentz en tres dimensiones

Es relativamente trivial imaginar la forma de los boosts de Lorentz cuando la velocidad del marco de referencia S' es a lo largo de cualquier dirección espacial x^i de S . Bastaría con sustituir el índice 1 por el índice i en las ecuaciones (1.38). Extender esta idea a cualquier dirección \mathbf{x} también es posible.

Consideremos un sistema de referencia inercial desplazándose con una velocidad \mathbf{v} arbitraria. Definimos, en lugar del parámetro de rapidez β , el vector $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c$. El boost debe afectar directamente a la dirección de \mathbf{x} a lo largo de \mathbf{v} . Entonces, es natural proponer

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\parallel} + \mathbf{x}_{\perp}, \quad (1.91)$$

tal que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{x}_{\parallel} = |\mathbf{v}||\mathbf{x}_{\parallel}|$, donde las componentes de \mathbf{x} paralelas y transversales a \mathbf{v} están dadas por

$$\mathbf{x}_{\parallel} = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_{\perp} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel}. \quad (1.92)$$

Entonces, en general, el factor de Lorentz está dado por

$$\gamma(\mathbf{v}) = (1 - |\boldsymbol{\beta}|^2)^{-1/2}. \quad (1.93)$$

Generalizando las expresiones (1.38), es natural proponer que este boost arbitrario puede expresarse como

$$\begin{aligned} x^{0'} &= \gamma(x^0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{x}), \\ \mathbf{x}' &= \mathbf{x}_{\perp} + \gamma(\mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta} x^0). \end{aligned} \quad (1.94)$$

Sustituyendo (1.92) en \mathbf{x}' , encontramos directamente que

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{x}_{\parallel} + \gamma \mathbf{x}_{\parallel} - \boldsymbol{\beta} \gamma x^0 \\
 &= \mathbf{x} - (1 - \gamma) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \mathbf{v} - \boldsymbol{\beta} \gamma x^0 \\
 &= \mathbf{x} - \left(\frac{\gamma x^0}{c} + (1 - \gamma) \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2} \right) \mathbf{v} \\
 &= \mathbf{x} + \left(-\gamma x^0 + \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta} \right) \boldsymbol{\beta}.
 \end{aligned} \tag{1.95}$$

Estas ecuaciones se reducen para $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)^T = (v/c, 0, 0)^T$ a la segunda expresión en (1.38):

$$\begin{aligned}
 x^{1'} &= x^1 + \left(-\gamma x^0 + \frac{\gamma - 1}{\beta^2} \beta x^1 \right) \beta = x^1 - \gamma \beta x^0 - x^1 + \gamma x^1 \\
 &= \gamma (x^1 - \beta x^0).
 \end{aligned} \tag{1.96}$$

Las ecuaciones (1.94) y (1.95) pueden ser reescritas en forma matricial como

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}^{\mu'}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta^1 \gamma & -\beta^2 \gamma & -\beta^3 \gamma \\ -\beta^1 \gamma & 1 + \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^1 \beta^1 & \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^1 \beta^2 & \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^1 \beta^3 \\ -\beta^2 \gamma & \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^1 \beta^2 & 1 + \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^2 \beta^2 & \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^2 \beta^3 \\ -\beta^3 \gamma & \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^1 \beta^3 & \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^2 \beta^3 & 1 + \frac{\gamma - 1}{|\boldsymbol{\beta}|^2} \beta^3 \beta^3 \end{pmatrix}, \tag{1.97}$$

donde β^i denotan las componentes de $\boldsymbol{\beta}$ (y no potencias). Esta matriz se simplifica para $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$ a

$$\mathcal{B}_1 = (\mathcal{B}^{\mu'}_{\nu}) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta \gamma & 0 & 0 \\ -\beta \gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1.98}$$

que coincide con la matriz de transformación obtenida en la ecuación (1.39). El subíndice 1 denota que el boost de Lorentz es aplicado a lo largo de la dirección x^1 . Notemos que $\det \mathcal{B}_1 = \gamma^2 - \beta^2 \gamma^2 = 1$. Este resultado se preserva para cualquier boost generalizado de la forma dada en (1.97); por lo tanto, en el lenguaje de grupos, el grupo que contiene a las transformaciones \mathcal{B} es un grupo *especial*, si todos los elementos del grupo tienen determinante 1.

1.9.2. Boosts de Lorentz como rotaciones hiperbólicas

Una derivación alternativa de las ecuaciones de Lorentz se obtiene mediante la aplicación de la invariancia de los intervalos luminoides. Consideremos dos marcos de referencia

inerciales S y S' en configuración estándar, con S' desplazándose en alguna dirección a lo largo de x^1 . (dx^0, dx^1) son las componentes diferenciales no triviales del intervalo asociado a un fotón en el marco de referencia S , y $(dx^{0'}, dx^{1'})$ son las correspondientes componentes en S' .

Como se trata de un intervalo luminoide, se satisface en ambos marcos de referencia que

$$(dx^1)^2 = (dx^0)^2 \quad \& \quad (dx^{1'})^2 = (dx^{0'})^2, \quad (1.99)$$

lo que implica que

$$dx^1 = \pm dx^0 \quad \& \quad dx^{1'} = \pm dx^{0'}, \quad (1.100)$$

con los signos iguales en ambas expresiones. Estas relaciones pueden ser combinadas mediante

$$\begin{aligned} dx^{1'} - dx^{0'} &= M(dx^1 - dx^0), \\ dx^{1'} + dx^{0'} &= N(dx^1 + dx^0), \end{aligned} \quad (1.101)$$

donde M y N son dos constantes por determinar. Sumando y restando las ecuaciones (1.101), llegamos a

$$\begin{aligned} dx^{0'} &= a dx^0 + b dx^1, \\ dx^{1'} &= a dx^1 + b dx^0, \end{aligned} \quad (1.102)$$

donde hemos definido por conveniencia

$$a \equiv \frac{M + N}{2} \quad \& \quad b \equiv \frac{N - M}{2}. \quad (1.103)$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.102) en la condición de invariancia del intervalo

$$(dx^{0'})^2 - (dx^{1'})^2 \stackrel{!}{=} (dx^0)^2 - (dx^1)^2,$$

encontramos que sólo se satisface si

$$a^2 - b^2 \stackrel{!}{=} 1. \quad (1.104)$$

La condición (1.104) reduce el número de parámetros libres a uno, el cual puede ser convenientemente reexpresado, notando que esa relación es similar a la identidad hiperbólica

$$\cosh^2 \phi - \sinh^2 \phi = 1.$$

En términos del *parámetro hiperbólico* ϕ , un boost de Lorentz a lo largo de la dirección x^1 puede escribirse como

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \cosh \phi & -\sinh \phi & 0 & 0 \\ -\sinh \phi & \cosh \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.105)$$

donde la elección de signos busca que $x^{\mu'}$ crezca a medida que x^μ lo haga. Aunque esta es la elección más conveniente, otras elecciones también son permisibles, como veremos más adelante. Hemos así encontrado una nueva interpretación para los boosts de Lorentz. Un boost de Lorentz es una *rotación hiperbólica* en el espacio-tiempo.

El parámetro hiperbólico, entonces, debe depender de la rapidez v del sistema de referencia S' , $\phi = \phi(v)$. La dependencia precisa se obtiene al exigir que el eje $x^{0'}$ del diagrama de espacio-tiempo de S' coincida con la recta $x^1 - \beta x^0 \stackrel{!}{=} 0$, tal como exigimos en la sección 1.4. El eje $x^{0'}$ está dado por $x^{1'} = 0$, por lo que, con base en el boost de Lorentz (1.105), encontramos que el eje temporal de S' en términos del parámetro hiperbólico satisface

$$-\sinh \phi x^0 + \cosh \phi x^1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^1 - \tanh \phi x^0 = 0,$$

lo que conduce finalmente al valor del parámetro hiperbólico

$$\tanh \phi = \beta. \quad (1.106)$$

La manipulación de algunas identidades hiperbólicas a partir de (1.106) conduce a las relaciones

$$\cosh \phi = \gamma, \quad \sinh \phi = \gamma\beta,$$

con las que se obtiene una comparación satisfactoria de (1.39) y (1.105). Adicionalmente, podemos determinar explícitamente el parámetro hiperbólico en términos de γ y β , como

$$\phi = \ln [\gamma(1 + \beta)]. \quad (1.107)$$

1.9.3. Los elementos del grupo de Lorentz

Nuestra discusión de la sección anterior significa que un boost a lo largo de la dirección x^1 es solamente una rotación hiperbólica en el plano $x^0 - x^1$. Esta curiosa observación se vuelve más relevante cuando nos damos cuenta de que el producto de dos boost a lo largo

de x^1 y x^2 es equivalente a una rotación Euclidiana en el plano $x^1 - x^2$ realizada después de otro boost¹⁶

$$\mathcal{B}_2(\beta_2) \mathcal{B}_1(\beta_1) = \mathcal{R}(\theta)\mathcal{B}(\beta_f), \quad (1.108)$$

donde $\beta_1 = (\beta_1, 0, 0)^T$, $\beta_2 = (0, \beta_2, 0)^T$ y $\beta_f = (\beta_1, \beta_2/\gamma_1, 0)^T$. A la rotación \mathcal{R} se le llama rotación de Thomas-Wigner y su presencia indica que los boosts de Lorentz no forman un grupo por ellos mismos. Debemos incluir otras rotaciones (no hiperbólicas) para conseguir el grupo de transformaciones de Lorentz.

Como hemos visto, la transformación de Lorentz más general es una transformación lineal de los 4-vectores, tales como dx , de acuerdo a

$$dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} dx^{\nu}, \quad \mu', \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1.109)$$

donde Λ es la matriz que describe la transformación. Para que Λ sea consistente con los postulados de la relatividad especial, debemos exigir la invariancia del intervalo. Expresando este requerimiento mediante el producto escalar definido en la ecuación (1.75), tenemos

$$dx \cdot dx \stackrel{!}{=} dx' \cdot dx'. \quad (1.110)$$

Con la finalidad de emplear una notación más útil, introducimos el llamado *tensor métrico* del espacio-tiempo $\eta = (\eta_{\mu\nu})$, tal que

$$\begin{aligned} dx \cdot dx &\equiv \eta_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} \\ &= (dx^0)^2 - dx^i dx^i. \end{aligned} \quad (1.111)$$

Para que la última igualdad se satisfaga, se requiere que η sea una matriz 4×4 con las siguientes entradas no triviales en la diagonal

$$\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (1.112)$$

El tensor métrico es un elemento geométrico muy importante de las variedades Riemannianas (y pseudo-Riemannianas), que estudiaremos en el siguiente capítulo. Como veremos, el espacio-tiempo descrito por el tensor métrico dado por (1.112) es llamado *espacio-tiempo plano o de Minkowski*. Por lo pronto, aquí η es considerada simplemente como una matriz 4×4 que ayuda a definir el producto escalar (y, por lo tanto, las distancias en el espacio-tiempo) de una forma compacta.

Discutamos ahora cómo podemos descubrir las propiedades de las transformaciones de Lorentz con ayuda de η . Empleando el tensor métrico, es posible reformular la invariancia

¹⁶Ver e.g. R. Ferraro, M. Thibeault. *Generic composition of boosts: an elementary derivation of the Wigner rotation*. Eur.J.Phys. **20** (1999) [arXiv:physics/0211022].

del intervalo como

$$\begin{aligned} dx' \cdot dx' &= \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} \\ &\stackrel{!}{=} \eta_{\rho\sigma} dx^{\rho} dx^{\sigma} = dx \cdot dx. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Comparando la última expresión del primer renglón con la primera del segundo, encontramos la condición

$$\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} \stackrel{!}{=} \eta_{\rho\sigma}. \quad (1.114)$$

Reordenando los índices, encontramos que las transformaciones de Lorentz más generales deben satisfacer

$$(\Lambda^T)_{\rho}{}^{\mu'} \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \quad (1.115)$$

que se puede reescribir como

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (1.116)$$

Calculando el determinante de cada lado de la igualdad y recordando que el determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, encontramos

$$(\det \Lambda)^2 \det \eta = \det \eta, \quad (1.117)$$

lo que implica que $\det \Lambda = \pm 1$. Además, reescribiendo la ecuación (1.116), encontramos que

$$\Lambda^T = \eta \Lambda^{-1} \eta^{-1}, \quad (1.118)$$

lo que significa que Λ debe ser *ortogonal* con respecto a η .¹⁷

Es posible demostrar que las matrices ortogonales con determinante ± 1 Λ asociadas a las transformaciones de Lorentz forman el grupo de Lie $O(3, 1)$ en el espacio-tiempo (plano), con 3 dimensiones espaciales y 1 temporal.

A pesar de que todas las transformaciones del grupo $O(3, 1)$ son admisibles, este grupo contiene tres subgrupos de transformaciones que parecen poco físicas. Notemos que admitir transformaciones con $\Lambda^{0'}_0 \leq -1$ y/o $\det \Lambda = -1$ conduce a transformaciones como las representadas por las matrices diagonales

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \text{diag}(-1, 1, 1, 1), & \textit{inversión temporal} \\ \mathcal{P} &= \text{diag}(1, -1, -1, -1), & \textit{paridad} \end{aligned} \quad (1.119)$$

que actúan como $x^0 \xrightarrow{\mathcal{T}} -x^0$ y $\mathbf{x} \xrightarrow{\mathcal{P}} -\mathbf{x}$, respectivamente. Tratar con estas operaciones representa un reto (note, por ejemplo, que $\mathcal{T}p = \left(-\frac{E}{c}, \mathbf{p}\right)^T$, donde p es el 4-momento; es

¹⁷Habitualmente, las matrices ortogonales tridimensionales M que forman el grupo de Lie $O(3)$ satisfacen $M^T = \mathbb{1}M^{-1}\mathbb{1}$. Hemos escrito explícitamente la matriz identidad $\mathbb{1}$ para enfatizar la analogía con la ecuación (1.118), con la diferencia de que la métrica en 3 dimensiones espaciales, siguiendo la lógica de (1.111), es simplemente la identidad (si el espacio es plano).

decir, la inversión temporal conduce a energías negativas). Se dice que estas transformaciones cambian la orientación del espacio–tiempo y son denominadas *impropias*. Entonces, nos podemos restringir naturalmente al *subgrupo propio* ($\det \Lambda = +1$) y *ortócrono*¹⁸ ($\Lambda^0{}_0 \geq 1$) $SO^+(3, 1)$, el cual incluye boosts de Lorentz (rotaciones hiperbólicas) y las rotaciones Euclidianas. Frecuentemente, es a este al que le llamamos grupo de Lorentz, aunque el grupo de Lorentz sea más general.

Debido a la homogeneidad del universo, podemos considerar el conjunto adicional de transformaciones en el espacio–tiempo formado por las *traslaciones* espacio–temporales, definidas por

$$x^\mu \rightarrow x^\mu + a^\mu, \quad (1.120)$$

donde a^μ son las componentes de un 4–vector de desplazamiento arbitrario. Las transformaciones de Lorentz y las traslaciones forman el grupo más grande conocido de transformaciones del espacio–tiempo, llamado *grupo de Poincaré*.

1.9.4. Simetrías de Lorentz y constantes de movimiento

Hemos visto que las transformaciones de Lorentz dejan algunas cantidades invariantes, que hemos llamado escalares de Lorentz, pese a transformar de forma no trivial a los 4–vectores. No obstante, el formalismo de la relatividad especial permite ver que, como la ecuación (1.67) muestra, las leyes de la mecánica de Newton también son invariantes para todos los observadores inerciales en el espacio–tiempo, ajustadas por correcciones relativistas. Similarmente, aunque de forma más espectacular, las leyes de Maxwell de la electrodinámica son invariantes bajo las transformaciones de Lorentz (ver ejercicio 1.3 y sección 2.2). En general, es posible establecer que todas las leyes físicas son invariantes ante las transformaciones relativistas, como establece el principio de relatividad. Por lo tanto, se dice que estas transformaciones son *transformaciones de simetría* o simplemente *simetrías* del espacio–tiempo.¹⁹

Un resultado espectacular demostrado por la matemática alemana Amalie Emmy Noether es el llamado (primer) *teorema de Noether* que, de manera informal, puede ser enunciado de la siguiente forma: *toda simetría continua de un sistema conduce a una cantidad cuyo valor es conservado en el tiempo, llamada constante de movimiento o carga de Noether*.

Las simetrías descritas por las transformaciones de Lorentz son continuas porque los boosts dependen de (las tres componentes de) la velocidad del observador y de los tres ángulos de rotaciones espaciales, que son cantidades que adoptan cualquier valor continuo. Por lo tanto, de acuerdo al teorema de Noether, esperamos que existan seis cantidades conservadas asociadas al grupo de Lorentz.

¹⁸Describe cualquier transformación de Lorentz que preserve la dirección del tiempo.

¹⁹Una analogía que permite entender el uso de la palabra *simetría* es considerar que una esfera perfecta es invariante bajo rotaciones y, por lo tanto, goza de una simetría bajo rotaciones.

En mecánica clásica, es bien sabido que un sistema que es simétrico bajo rotaciones en tres dimensiones espaciales posee tres cantidades conservadas, las tres componentes del momento angular \mathbf{L} . En términos de la matriz antisimétrica ($M^{\mu\nu}$) con componentes

$$M^{\mu\nu} \equiv x^\mu p^\nu - p^\mu x^\nu, \quad (1.121)$$

es posible expresar las componentes del momento angular (espacial) como

$$L(i) = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}M^{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \quad (1.122)$$

donde hemos etiquetado la componente de \mathbf{L} en la dirección x^i , $i = 1, 2, 3$, como $L(i)$ en lugar de usar índices porque no existe 4-vector que contenga a \mathbf{L} . Además, ε^{ijk} denota el símbolo de Levi-Civita en tres dimensiones²⁰ y la suma sobre índices repetidos es implícita. Podemos fácilmente verificar que e.g. la componente de momento angular en la dirección x^1 obtenida a partir de (1.122) está dada por $L(1) = M^{23} = x^2p^3 - x^3p^2$, coincidiendo con el resultado habitual.

Debido a su antisimetría, la matriz 4×4 ($M^{\mu\nu}$) contiene sólo seis componentes independientes no nulas que podemos elegir como M^{23} , M^{13} , M^{12} y M^{0i} , $i = 1, 2, 3$. Las primeras tres corresponden justamente a las componentes del momento angular \mathbf{L} y son cantidades conservadas, es decir, satisfacen

$$\partial_0 M^{23} = \partial_0 M^{13} = \partial_0 M^{12} = 0.$$

Mediante el principio de mínima acción o, como veremos en la sección 2.9, mediante el análisis de *vectores de Killing*, es posible demostrar que no sólo estas componentes de ($M^{\mu\nu}$) son conservadas,²¹ sino también M^{0i} .

Los elementos M^{0i} combinan componentes espaciales con componentes temporales del momento propio y la posición relativistas, por lo que están asociados a las rotaciones en espacio-tiempo, los boosts de Lorentz. Las constantes de movimiento correspondientes dependen del tiempo debido a que los boosts dependen también explícitamente del tiempo. Dado que $M^{0i} = x^0 p^i - E x^i / c$ es una constante de movimiento, su derivada con respecto a x^0 conduce a

$$\mathbf{p} - \frac{E}{c^2} \frac{d\mathbf{x}}{dt} = 0, \quad (1.123)$$

²⁰En tres dimensiones, el símbolo completamente antisimétrico de Levi-Civita está dado por

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es permutación par de } (1, 2, 3), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ es permutación impar de } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{si algún índice es repetido.} \end{cases}$$

²¹Se recomienda la lectura de la sección 14 de L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *The classical theory of fields* (V.2). Butterworth Heinemann, 1994.

que coincide con la relación (1.71), cierta para un sistema de una sola partícula estudiado por cualquier observador inercial si la partícula se desplaza con velocidad uniforme. Los tres grados de libertad de la ecuación (1.123) son las constantes de movimiento asociadas a los boosts de Lorentz.

El resultado (1.123) conduce a una interesante conclusión, pero, para llegar a ella, consideremos primero las cantidades conservadas asociadas a las traslaciones (1.120) que complementan el grupo de simetrías del espacio-tiempo para formar el grupo de Poincaré. Calculando la derivada con respecto al tiempo propio de las traslaciones, encontramos que la 4-velocidad no es alterada bajo estas transformaciones,

$$\frac{d}{d\tau}x^\mu \rightarrow \frac{d}{d\tau}(x^\mu + a^\mu) = \frac{d}{d\tau}x^\mu \quad (1.124)$$

debido a que a^μ es un 4-vector constante. Dado que el momento de una partícula de masa m es definido como $p = mU$, el 4-momento se conserva bajo traslaciones. En términos de las componentes p^μ , encontramos que tanto la energía del sistema E como el momento \mathbf{p} son cantidades conservadas.

Para entender ahora en general el significado de (1.123), consideremos un sistema de muchas partículas, las cuales, en principio, se mueven en direcciones y con velocidades arbitrarias. La matriz de cantidades conservadas (1.121) se expresa en este caso como

$$M^{\mu\nu} \equiv \sum_n x_n^\mu p_n^\nu - p_n^\mu x_n^\nu, \quad (1.125)$$

donde n etiqueta a cada una de las partículas que componen el sistema. Las componentes no triviales M^{ij} correspondientes al momento angular sólo reflejan que el momento angular total, dado por la suma de los momentos angulares individuales, se conserva. Por otra parte, las componentes M^{0i} conducen a

$$\sum_n \mathbf{p}_n t - \sum_n \frac{E_n}{c^2} \mathbf{x}_n = \text{cte}, \quad (1.126)$$

donde hemos supuesto que todas las mediciones de momentos y posiciones se realizan simultáneamente desde el punto de vista de un observador inercial, y hemos dividido por c . Dado que la energía se conserva en un sistema cerrado y en aquellos invariantes bajo traslaciones, como suponemos que es el sistema que analizamos aquí, entonces podemos dividir (1.126) por $\sum_n E_n/c^2 = \text{cte}$:

$$\frac{\sum_n \mathbf{p}_n}{\sum_n E_n/c^2} t - \frac{\sum_n E_n \mathbf{x}_n/c^2}{\sum_n E_n/c^2} = \text{cte}. \quad (1.127)$$

Por otra parte, notando que en el límite no relativista $E_n = \gamma(u_n)m_n c^2 \rightarrow m_n c^2$ y $\mathbf{p}_n \rightarrow m_n \mathbf{u}_n$, donde \mathbf{u}_n son las velocidades locales de las partículas que componen el

sistema, observamos que, en ese límite, esta expresión se reduce a

$$\frac{\sum_n m_n \mathbf{u}_n}{\sum_n m_n} t - \frac{\sum_n m_n \mathbf{x}_n}{\sum_n m_n} = \text{cte.} \quad (1.128)$$

Identificamos directamente al coeficiente de t como la velocidad del *centro de inercia* y al segundo término como la posición del *centro de inercia* no relativista del sistema.

Por lo tanto, definiendo la posición y la velocidad *relativistas* del centro de inercia del sistema como

$$\mathbf{X}_{CDI} \equiv \frac{\sum_n E_n \mathbf{x}_n / c^2}{\sum_n E_n / c^2}, \quad \mathbf{V}_{CDI} \equiv \frac{\sum_n \mathbf{p}_n}{\sum_n E_n / c^2}, \quad (1.129)$$

respectivamente, la relación (1.123) para un sistema de muchas partículas se puede reexpresar como

$$\mathbf{V}_{CDI} - \frac{d\mathbf{X}_{CDI}}{dt} = 0. \quad (1.130)$$

Debido a que \mathbf{V}_{CDI} es constante debido a la conservación de momento, el centro de inercia \mathbf{X}_{CDI} se desplaza con velocidad uniforme \mathbf{V}_{CDI} . Por medio de esta ecuación, logramos identificar que las tres constantes de movimiento asociadas a los boosts de Lorentz en las tres direcciones espaciales corresponden a la uniformidad de las tres componentes de la velocidad del centro de inercia relativista. Es decir, para cualquier observador inercial, un sistema relativista de muchas partículas invariante bajo los boosts de Lorentz se comporta, en conjunto, como un sistema inercial.

1.10. Aplicaciones ópticas de la relatividad especial

Las discusiones hasta este punto han sido generales. En esta sección buscamos aportar algunos ejemplos que conducen a predicciones únicas de la relatividad especial.

1.10.1. Efecto Doppler

El efecto Doppler le ocurre a cualquier frente de onda cuya fuente se está moviendo con respecto a un observador inercial. Esto se debe a que las *crestas* de la onda, desde la perspectiva del observador, están más o menos separadas dependiendo del movimiento de la fuente.

Centrémonos en la luz como el frente de onda. La luz es emitida con frecuencia ν' desde una fuente en movimiento con velocidad v a lo largo del eje x^1 , pero tal que la *línea de visión* hace un ángulo θ con respecto al eje x^1 , como se observa en la figura 1.18 (que no es un diagrama de espacio-tiempo).

Si el tiempo entre dos *crestas* consecutivas de una onda de luz emitida es $\Delta x^{0'}/c$, entonces la frecuencia de la luz está dada por

$$\nu' = \frac{c}{\Delta x^{0'}}. \quad (1.131)$$

La medición del tiempo $\Delta x^0/c$ entre dos crestas consecutivas realizada por un observador en reposo es afectada por dos efectos: i) el del movimiento de la fuente a lo largo de la línea de visión (que es el origen del efecto Doppler en la mecánica Newtoniana), y ii) por la dilatación temporal relativista. La combinación de estos elementos se expresa mediante

$$\frac{\Delta x^0}{c} = \gamma \frac{\Delta x^{0'}}{c} + \beta_\ell \gamma \frac{\Delta x^{0'}}{c}, \quad (1.132)$$

donde β_ℓ es la componente de $\boldsymbol{\beta} = (\beta, 0, 0)^T$ a lo largo de la línea de visión,

$$\beta_\ell = \beta \cos \theta. \quad (1.133)$$

Definiendo la frecuencia de la luz medida por el observador en reposo como $\nu \equiv c/\Delta x^0$, reescribimos (1.132) como

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu'} \gamma (1 + \beta \cos \theta). \quad \text{efecto Doppler relativista} \quad (1.134)$$

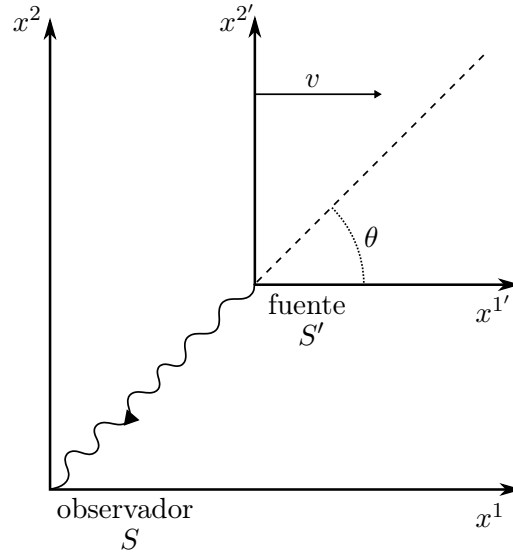


Figura 1.18: Una fuente de luz en movimiento S' emite luz que es observada por un observador en reposo S a un ángulo θ con respecto a su horizontal.

Claramente, cuando $\cos \theta = 1$, la línea de visión es a lo largo del eje x^1 , con la fuente alejándose del observador, como en la figura 1.19. En este caso, tenemos

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu'} \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\nu'} \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (1.135)$$

Para $\cos \theta = -1$, la fuente se acerca al observador y encontramos

$$\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\nu'} \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}. \quad (1.136)$$

A estos dos casos usualmente se les conoce como *efecto Doppler longitudinal* y en su límite no relativista corresponden al efecto Doppler Newtoniano. Vemos que para $\beta \ll 1$ las expresiones (1.135) y (1.136) pueden aproximarse por

$$\nu' = \nu(1 \pm \beta) + \mathcal{O}(\beta^2) \approx \nu \left(1 \pm \frac{v}{c}\right), \quad (1.137)$$

dependiendo de si la fuente se acerca ($-$) o se aleja ($+$), lo cual corresponde al resultado de la física Newtoniana. Las correcciones relativistas son proporcionales a $\beta^2/2$, lo que explica por qué este efecto es principalmente apreciable en fuentes que se desplazan a grandes velocidades, tales como las estrellas de galaxias distantes. Observamos que, como en el caso Newtoniano, entre más rápido se aleja (acerca) la fuente, la frecuencia de la luz emitida es menor (mayor) o, en otras palabras, más roja (azul) se observa su luz. Debido a que las estrellas típicamente se alejan de nosotros (debido esencialmente a la expansión cósmica), es frecuente que el efecto Doppler sea llamado simplemente *corrimiento al rojo*,

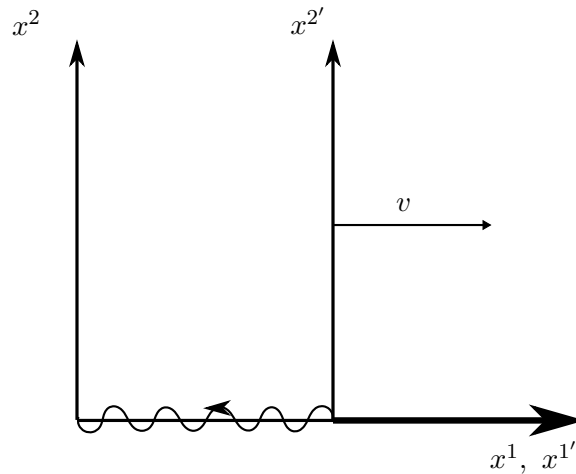


Figura 1.19: Una fuente emite luz mientras se aleja en el eje x^1 de un observador en reposo.

aunque también existan estrellas con movimiento hacia nosotros y exhiban, por lo tanto, un *corrimiento al azul* en su espectro de radiación.

La descripción relativista del efecto Doppler dada por (1.134) revela que hay un caso que no aparece en la física Newtoniana. Para $\cos \theta = 0$, es decir, cuando la línea de visión es perpendicular al movimiento de la fuente, ocurre el llamado *efecto Doppler transversal*. En este caso, la relación entre las frecuencias se simplifica a

$$\nu' = \nu\gamma, \quad \text{efecto Doppler transversal} \quad (1.138)$$

es decir, la frecuencia recibida es reducida por el factor de Lorentz.

En distintos contextos (ver e.g. sección 3.5.2) es útil definir el *corrimiento al rojo* por efecto Doppler longitudinal, para objetos (o fuentes luminosas) alejándose, como

$$z \equiv \frac{\nu' - \nu}{\nu} \quad \text{corrimiento al rojo} \quad (1.139)$$

que caracteriza la disminución de la frecuencia observada ν con respecto a la originalmente emitida ν' , como consecuencia del movimiento de la fuente. Si $z < 0$, en realidad se trata de un corrimiento al azul. A partir de (1.134), vemos que en la relatividad especial, el corrimiento al rojo está dado por $z = \gamma(1 + \beta \cos \theta) - 1$. Cuando la fuente se aleja longitudinalmente del observador, $z > 0$ y el corrimiento al rojo suele escribirse como

$$z + 1 = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}. \quad (1.140)$$

Como veremos en las secciones 3.1.2 y 3.3.2, en el contexto gravitacional hay correcciones adicionales. En conjunto, este corrimiento al rojo es importante para determinar la edad o comportamiento de estrellas y galaxias. Es, por ejemplo, conocido que las estrellas lejanas se ven más rojas de lo que realmente son (corrimiento al rojo astrofísico) porque se están alejando de nosotros.

1.10.2. Aberración de luz o aberración estelar

Las distancias y el tiempo dependen del movimiento del observador o del objeto observado. Esto implica que otras cantidades se afectan similarmente. Hemos visto cómo velocidades locales cambian dependiendo del movimiento relativo de observadores. Análogamente, aceleraciones y fuerzas se ven modificadas. Curiosamente, hasta algunos efectos angulares se vuelven evidentes cuando tenemos involucradas velocidades relativistas; este es el caso de la percepción del ángulo de incidencia de la luz por diferentes observadores inerciales.

Considere un rayo de luz observado a un ángulo α respecto del eje x^1 de un marco de referencia S en reposo. Otro observador moviéndose con rapidez v en la dirección x^1 mide un ángulo incidente α' , como se ilustra en la figura 1.20. La rapidez de la luz en ambos marcos de referencia es c , pero la rapidez en la dirección x^1 no necesariamente es la misma. Usando la regla de adición de velocidades (1.63) y haciendo las proyecciones angulares

$$\begin{aligned} u^{1'} &= -c \cos \alpha', & u^1 &= -c \cos \alpha, \\ u^{2'} &= -c \operatorname{sen} \alpha', & u^2 &= -c \operatorname{sen} \alpha, \end{aligned} \quad (1.141)$$

encontramos que

$$\cos \alpha' = \frac{\cos \alpha + \beta}{1 + \beta \cos \alpha}, \quad \operatorname{sen} \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\gamma(1 + \beta \cos \alpha)}, \quad (1.142)$$

que se combinan en la ecuación

$$\tan \alpha' = \frac{1}{\gamma} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha + \beta}. \quad (1.143)$$

Sin embargo, resulta más conveniente expresar este resultado en términos de la identidad trigonométrica

$$\tan \frac{1}{2} \alpha' = \frac{\operatorname{sen} \alpha'}{1 + \cos \alpha'}, \quad (1.144)$$

de donde encontramos

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} \alpha' &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\gamma(1 + \beta \cos \alpha + \cos \alpha + \beta)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\gamma(1 + \beta)(1 + \cos \alpha)} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}. \end{aligned} \quad (1.145)$$

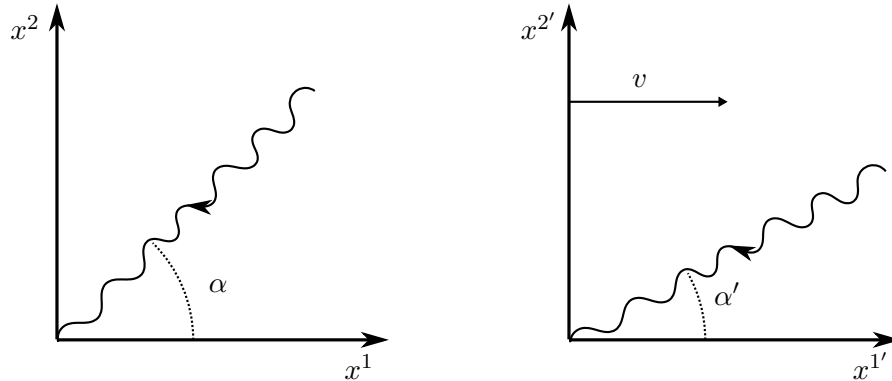


Figura 1.20: Ángulo de incidencia de la luz en marcos de referencia inerciales en reposo y en movimiento.

Empleando nuevamente (1.144), concluimos que

$$\tan \frac{1}{2}\alpha' = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} \tan \frac{1}{2}\alpha. \quad \text{aberración relativista} \quad (1.146)$$

Vemos que para $0 \leq \alpha \leq \pi$, la relación entre los ángulos de observación depende de β de acuerdo a

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}\alpha' < \tan \frac{1}{2}\alpha &\iff \alpha' < \alpha \text{ si } \beta > 0, \\ \tan \frac{1}{2}\alpha' > \tan \frac{1}{2}\alpha &\iff \alpha' > \alpha \text{ si } \beta < 0. \end{aligned} \quad (1.147)$$

Este efecto se conoce bien desde finales del siglo XVII; se le llama *aberración de la luz* o *aberración de Bradley*. La aberración de la luz tiene un papel importante en la astronomía porque este efecto altera la posición aparente de las estrellas a lo largo del día y el año debido a la rotación y traslación de la Tierra, como se observa esquemáticamente en la figura 1.21a. Claramente, la aberración anual es más importante. Como se ilustra en la figura 1.21b, estos efectos producen una variación oscilatoria del ángulo de observación de cuerpos estelares a lo largo del año.

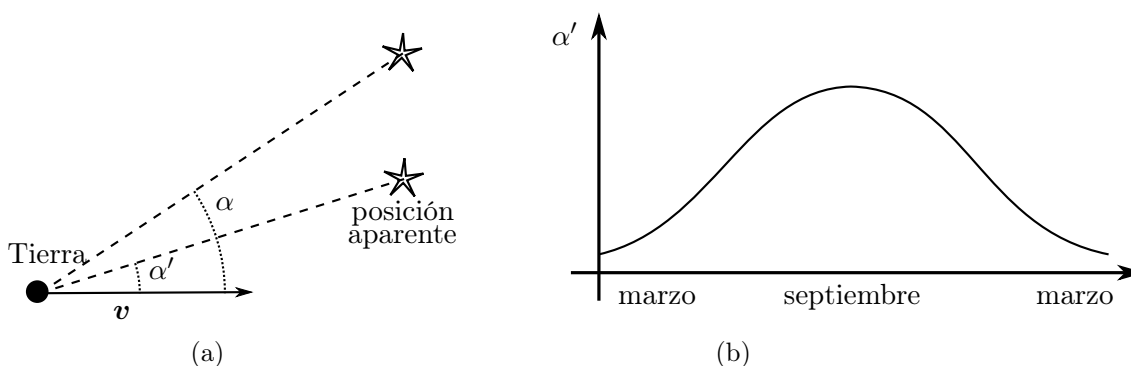


Figura 1.21: (a) Si un observador terrestre se mueve con la velocidad v indicada con respecto a una estrella (cercana) debida a la rotación y traslación de la Tierra, la posición aparente de la estrella tendrá un ángulo menor al que percibiría un observador en reposo. (b) Variación del ángulo de incidencia a lo largo del año.

1.11. Mecánica cuántica relativista de partículas sin espín*

1.11.1. La ecuación de Klein–Gordon

En la *mecánica cuántica*, la relación no relativista

$$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \quad (1.148)$$

origina la ecuación de Schrödinger (en la representación de posiciones),

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V \right) \psi, \quad (1.149)$$

tras reemplazar las cantidades físicas E y \mathbf{p} por los operadores cuánticos (diferenciales)²²

$$E \rightarrow \hat{E} \doteq i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow \hat{\mathbf{p}} \doteq -i\hbar \nabla, \quad (1.150)$$

y luego aplicar (1.148) sobre la llamada *función de onda* $\psi = \psi(t, \mathbf{x})$, que caracteriza por completo a un sistema cuántico. Claramente, la ecuación (1.149) trata de manera diferente a las coordenadas espaciales y a la temporal, lo que subraya su incompatibilidad con la relatividad especial.

El primer intento de obtener una ecuación cuántico–relativista fue hecha por el mismo Schrödinger. Su tratamiento fue el mismo que el anterior, pero empezando con la relación de energía y momento relativista (1.78),

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (1.151)$$

Repetiendo los pasos anteriores, encontramos

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \phi, \quad (1.152)$$

donde la función $\phi = \phi(t, \mathbf{x})$ aún debe interpretarse. Esta ecuación puede escribirse de forma más sugerente como

$$\left(\frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0, \quad \text{ec. de Klein–Gordon} \quad (1.153)$$

la cual se conoce como la ecuación de Klein–Gordon. Las derivadas temporales y espaciales en la ecuación de Klein–Gordon sólo difieren por un signo y el campo ϕ depende de todas las

²²El símbolo \doteq significa que el lado derecho es una representación del operador del lado izquierdo.

coordenadas x^μ . Por esta razón, se dice que esta ecuación trata al tiempo y las posiciones de la misma forma. Sin embargo, la diferencia en signo de las derivadas es importante; sugiere la posibilidad de definir el 4-vector de derivadas (el origen de los signos se explicará en la sección 2.1.5)

$$\partial \equiv (\partial^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^T, \quad (1.154)$$

de manera que podamos escribir la ecuación de Klein–Gordon como

$$\partial \cdot \partial \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0. \quad (1.155)$$

Podemos verificar inmediatamente que esta ecuación es invariante de Lorentz porque $\partial \cdot \partial$ y $\frac{m^2 c^2}{\hbar^2}$ son escalares de Lorentz; entonces, mientras ϕ se comporte como escalar bajo transformaciones de Lorentz, la ecuación de Klein–Gordon es compatible con la relatividad. Esta observación revela la naturaleza de ϕ . Así como la función de onda ψ representa el estado de una partícula, $\phi = \phi(x^\mu)$ está asociada a una partícula en el espacio–tiempo, pero, para que la ecuación de Klein–Gordon sea relativista, dicha partícula debe tener *espín cero*. A ϕ frecuentemente se le llama *campo escalar* y se le asocia a partículas libres de masa m y sin espín.

La ecuación de Klein–Gordon expresada sólo en términos de componentes de 4–vectores como en (1.155) se dice que se encuentra en *notación covariante*. Si una ecuación puede escribirse en notación covariante, en términos de 4–vectores (y cualesquiera otros tensores, como veremos en el siguiente capítulo), revela que es compatible con la relatividad de Einstein.²³ Es particularmente sencillo, por ejemplo, mostrar que (1.155) es invariante bajo transformaciones de Lorentz, considerando que las componentes del 4–vector de derivadas se transforma como cualquier 4–vector, $\partial^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu \partial^\nu$.

Por otra parte, podemos ver también que la ecuación de Klein–Gordon (1.153) es una ecuación de onda clásica que incluye un término de masa. Usando la relación de energía relativista (1.151), es sencillo mostrar que el ansatz

$$\phi = A \exp \left(\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - Et) \right) \quad (1.156)$$

provee una solución de la ecuación de Klein–Gordon. Una observación decepcionante para Schrödinger fue que los *niveles de energía* predichos por esta ecuación satisfacen

$$E = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \mathbf{p}^2 c^2}, \quad (1.157)$$

²³Como veremos en la sección 2.5, las leyes físicas escritas en notación covariante no dependen de la estructura del espacio–tiempo ni de la elección de coordenadas o marcos de referencia.

con ambos signos. Es decir, la ecuación de Klein–Gordon indica que un sistema físico puede poseer *energía negativa*.

Este problema es de suma importancia y fue resuelto algún tiempo después de la aparición de la ecuación de Klein–Gordon por Dirac, Feynman y Stückelberg, al interpretar los estados de energía negativa como estados de energía positiva moviéndose al pasado. Pero antes de entrar en estos detalles, estudiemos dos aspectos importantes de la ecuación de Klein–Gordon: el límite no relativista y la definición de la *4-corriente de probabilidad*.

1.11.2. Corrientes conservadas

El límite no relativista de (1.157) se obtiene cuando la mayor parte de la energía de la partícula está contenida en su masa en reposo, es decir

$$E = E_0 + E' \approx E_0 \equiv mc^2, \quad E' \ll E_0, \quad (1.158)$$

donde E_0 es la energía en reposo y E' la energía debida a la dinámica de las partículas. En estos términos, podemos reescribir el ansatz (1.156) como

$$\phi = \varphi e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}, \quad (1.159)$$

donde φ solamente depende de la energía no relativista, satisfaciendo la ecuación de Schrödinger no relativista

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} \approx E' \varphi \ll E_0 \varphi. \quad (1.160)$$

En este límite, las derivadas temporales de ϕ están dadas por

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{iE_0}{\hbar} \varphi \right) e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}}, \quad (1.161)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - 2\frac{iE_0}{\hbar} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{E_0^2}{\hbar^2} \varphi \right) e^{-\frac{iE_0 t}{\hbar}} \\ &\approx - \left(\frac{2iE_0}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{E_0^2}{\hbar^2} \right) \phi. \end{aligned} \quad (1.162)$$

Sustituyendo (1.162) en la ecuación de Klein–Gordon (1.153), encontramos

$$- \left(\frac{2imc^2}{\hbar c^2} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{m^2 c^4}{\hbar^2 c^2} + \nabla^2 \right) \phi + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi = 0, \quad (1.163)$$

que se simplifica a

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \phi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi, \quad \text{límite no relativista de la ec. de Klein–Gordon} \quad (1.164)$$

lo cual coincide con la ecuación de Schrödinger (1.149) para una partícula libre. Esta es una observación interesante ya que significa que la ecuación de Klein–Gordon puede ser considerada como el origen relativista de la ecuación de Schrödinger.²⁴

Aún podemos obtener más información de aquí. Consideremos la ecuación de Schrödinger para una partícula libre en la forma

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi = \frac{i\hbar}{2m}\nabla^2\phi. \quad (1.165)$$

Multiplicando por ϕ^* y agregando la ecuación resultante a su conjugado, encontramos

$$\phi^*\frac{\partial}{\partial t}\phi + \phi\frac{\partial}{\partial t}\phi^* = \frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla^2\phi - \phi\nabla^2\phi^*), \quad (1.166)$$

que puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(c\phi^*\phi) + \nabla \cdot \left[-\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*) \right] = 0. \quad (1.167)$$

Recordando que en mecánica cuántica no relativista $\phi^*\phi$ define la *densidad de probabilidad* ρ de la función de onda ϕ , y definiendo una *corriente de probabilidad*

$$\mathbf{j} \equiv -\frac{i\hbar}{2m}(\phi^*\nabla\phi - \phi\nabla\phi^*), \quad (1.168)$$

encontramos la *ecuación de continuidad*

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0, \quad (1.169)$$

la cual expresa la conservación de probabilidad, de la siguiente manera. Si la probabilidad no relativista de que una partícula se encuentre en un volumen Ω se define como $P \equiv \int_{\Omega} d^3x \rho$, entonces

$$\frac{\partial P}{\partial t} = - \int_{\Omega} d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = - \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \hat{n} dS = 0. \quad (1.170)$$

La última igualdad se debe al hecho de que \mathbf{j} desaparece cuando $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ y el volumen Ω tiene frontera $\partial\Omega$ al infinito. Podemos reescribir la ecuación de continuidad (1.169) en términos de una 4-corriente

$$J = (J^\mu) \equiv (c\rho, \mathbf{j})^T, \quad \text{4-corriente} \quad (1.171)$$

como

$$\partial \cdot J = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu J^\nu = 0. \quad \text{ecuación de continuidad} \quad (1.172)$$

²⁴ Aunque, como es habitual, los operadores diferenciales y el ansatz para ϕ son concebidos *ad hoc*.

Notamos que esta ecuación, de acuerdo con la discusión anterior, expresa la conservación de J^0 en todo el espacio siempre y cuando $\mathbf{j} = (J^i)$ desaparezca en el infinito, como se espera por ser un límite *físico*. Las definiciones de ρ y \mathbf{j} son típicas de la mecánica cuántica no relativista y es bien sabido que satisfacen (1.169).

Extendamos este tratamiento a la ecuación de Klein–Gordon. Para lograrlo, multipliquemos esta ecuación en su forma (1.155) por ϕ^* y restémosle a la ecuación resultante su conjugada. Obtenemos

$$\phi^* \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi - \phi \eta_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu \phi^* + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} (\phi^* \phi - \phi \phi^*) = \eta_{\mu\nu} \partial^\mu (\phi^* \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \phi^*) = 0 \quad (1.173)$$

Esta expresión adopta la forma (1.172) si las componentes de la 4–corriente relativista satisfacen

$$J^\nu \propto \phi^* \partial^\nu \phi - \phi \partial^\nu \phi^*. \quad (1.174)$$

Sin embargo, vemos que, en el límite no relativista, las componentes espaciales sólo pueden compararse con (1.168) si multiplicamos por $i\hbar/2m$. Por lo tanto, proponemos que la 4–corriente en el caso relativista esté dada por

$$J^\mu \equiv \frac{i\hbar}{2m} (\phi^* \partial^\mu \phi - \phi \partial^\mu \phi^*), \quad (1.175)$$

donde la *densidad de probabilidad conservada* $\rho = J^0/c$ ahora está dada por

$$\rho = \frac{1}{c} J^0 = \frac{i\hbar}{2m} \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right). \quad (1.176)$$

De inmediato notamos que hay un problema. Para valores arbitrarios de ϕ y $\frac{\partial \phi}{\partial t}$, ρ también puede ser negativa. Es decir, la ecuación de Klein–Gordon no sólo incluye *energías negativas*, sino también *probabilidades negativas*. Esta es una de las razones por las que a esta ecuación se le conoció durante mucho tiempo como una *curiosidad teórica sin sentido*.

1.11.3. Causalidad y antipartículas

La solución (1.156) de la ecuación de Klein–Gordon puede formularse en forma *covariante* (en términos de 4–vectores) como

$$\phi(x^\mu) = A \exp \left(-\frac{i}{\hbar} p \cdot x \right), \quad p \cdot x = \eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu, \quad (1.177)$$

donde la naturaleza *escalar de Lorentz* de ϕ se hace evidente una vez más. Por lo tanto, esta solución es claramente compatible con la relatividad especial. Sin embargo, recordemos

que E puede ser tanto positiva o negativa. Para $E_- \equiv -\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} < 0$, el exponente pierde su conveniente forma covariante

$$-\frac{i}{\hbar} p \cdot x = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + |E_-|t), \quad (1.178)$$

pero puede ser corregida si consideramos tiempos negativos

$$-\frac{i}{\hbar} p \cdot x = \frac{i}{\hbar} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - |E_-||t|), \quad t < 0. \quad (1.179)$$

Se puede interpretar este resultado como una *señal* de que soluciones de energía positiva se mueven temporalmente hacia el futuro, mientras que soluciones de energía negativa se mueven hacia atrás en el tiempo. A esto se le conoce como la interpretación de Feynman–Stückelberg.

Para que esta observación tenga sentido, consideremos la dispersión elástica de una partícula ϕ con un fotón γ , el cual carece de masa,

$$\phi\gamma \rightarrow \phi\gamma, \quad (1.180)$$

es decir, originalmente tenemos un ϕ y un γ , los cuales, después de interactuar, salen con las propiedades originales (energía, momento, carga, ...). Lo que es importante para nosotros es la interacción donde diferentes energías para ϕ podrían surgir.

Consideremos que ϕ tiene energía $E_1 > 0$ mientras γ tiene energía E_γ . Tendremos dos casos:

1. $E_\gamma < E_1$,
2. $E_\gamma > E_1$.

En ambos casos, como se puede observar esquemáticamente en la figura 1.22, la interacción ocurre como sigue. En x_1 ϕ emite un fotón con ciertas propiedades²⁵ y en x_2 ϕ absorbe otro fotón con las mismas propiedades del fotón emitido. La diferencia aparece debido a la energía restante en ϕ , $E = E_1 - E_\gamma$, después de emitir el fotón. Claramente, el primer caso, ilustrado en 1.22a, es el más sencillo. Como en este caso $E = E_1 - E_\gamma > 0$, ϕ se comporta *normalmente* perdiendo momento en x_1 y recuperándolo tiempo después ($x_2^0 > x_1^0$) en x_2 .

No obstante, en el segundo caso, ilustrado en 1.22b, después de emitir el fotón en x_1 , ϕ tiene energía negativa $E = E_1 - E_\gamma < 0$ y ya no puede desplazarse hacia el futuro. En lugar de eso, retrocede en el tiempo a x_2 , con $x_2^0 < x_1^0$, donde absorbe un fotón con energía E_γ lo que hace que ϕ vuelva a su estado original, con energía $E_1 > 0$.

²⁵Al emitir el fotón, ϕ altera su 4-momento, satisfaciendo siempre el principio de conservación. Sin embargo, en una situación como la presentada esquemáticamente en la figura 1.22, el momento lineal espacial de ϕ tras la emisión del fotón es mayor que el que tenía antes de emitirlo; esto implica particularmente que, tras emitir el fotón, no satisface la relación $p^2 = m^2 c^2$. A este tipo de partículas se les llama *virtuales*.

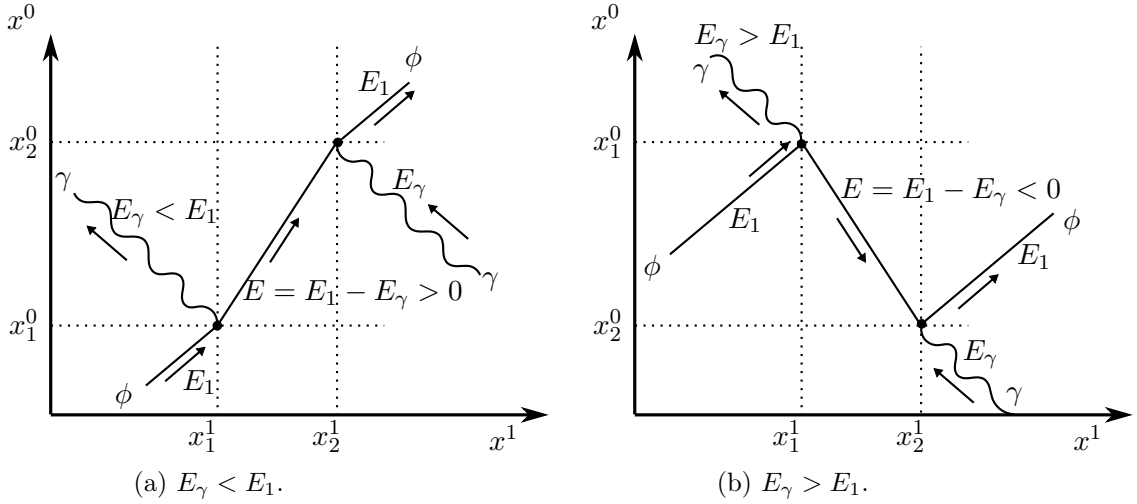


Figura 1.22: Interacción de una partícula escalar ϕ con un fotón γ mediante el intercambio de partículas *virtuales* de energía (a) $E_1 - E_\gamma > 0$ y (b) $E_1 - E_\gamma < 0$. En (b), la partícula con energía negativa “viaja al pasado”.

El peculiar “viaje al pasado” provoca escepticismo, pero adquiere sentido si analizamos nuevamente el caso 1.22b, tratando de evitar ahora la posibilidad de energías negativas. Leyendo la figura 1.22b desde el lado derecho se obtiene una imagen alternativa: el fotón entrante crea dos partículas escalares al llegar a x_2 , una con energía E_1 y la otra con $E_\gamma - E_1 > 0$. Esta última es después absorbida junto con el ϕ entrante, que se aniquilan en x_1 , produciendo el fotón saliente. Como antes, la energía se conserva para cada *vértice* de la interacción (de hecho, todo el 4-momento se conserva).

Notemos que en esta interpretación, la partícula creada en el punto x_2 con energía $E_\gamma - E_1$, pese a ser escalar, no puede ser completamente idéntica a la partícula ϕ que retrocede al pasado por tener energía negativa; debe corresponder a una partícula escalar con alguna propiedad que la distinga de la partícula ϕ . Si interpretamos a ϕ con $E < 0$ como una partícula diferente ϕ' con $E' = -E > 0$, ¿qué es ϕ' y qué la distingue de ϕ ?

Para responder esta pregunta, dotemos a ϕ de una *carga* eléctrica q . La correspondiente *densidad de carga* está dada por

$$\rho_q \equiv \rho q = \frac{i\hbar q}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right). \quad (1.181)$$

Sustituyendo la solución $\phi = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - E_\pm t)\right)$, con $E_\pm = \pm \sqrt{\mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4}$, encontramos

$$\rho_q = \frac{i\hbar q}{2mc^2} \left(-\frac{2iE_\pm}{\hbar} \right) \phi^* \phi = q \left(\frac{E_\pm}{mc^2} \right) \phi^* \phi = \begin{cases} +q \left(\frac{E_+}{mc^2} \right) |\phi|^2 \\ -q \left(\frac{|E_-|}{mc^2} \right) |\phi|^2 \end{cases}. \quad (1.182)$$

La última expresión permite la siguiente interpretación: partículas escalares de *energía negativa* con carga q son equivalentes a partículas de *energía positiva* y carga $-q$. Es decir, una partícula con energía negativa es equivalente a su antipartícula con energía positiva. Esta es la llamada interpretación de Feynman–Stückelberg de los estados con energía negativa, y representa un elemento importante de la llamada *electrodinámica cuántica*, la mejor y más precisa explicación de los procesos electromagnéticos en la física de partículas elementales.

Vemos que, para una partícula cargada, ρ_q tiene sentido como densidad de carga. También tiene sentido para partículas sin carga, para lo cual $\rho_q = 0$. Sin embargo, es imposible definir una densidad de probabilidad para la ecuación de Klein–Gordon, dado que ρ también adopta valores negativos.

Como observación final, mostremos que ρ se reduce a la densidad de probabilidad de la ecuación de Schrödinger no relativista:

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left(\phi^* \frac{\partial}{\partial t} \phi - \phi \frac{\partial}{\partial t} \phi^* \right) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left[\phi^* 2 \left(-\frac{i}{\hbar} \right) (E' + E_0) \phi \right] \approx \frac{E_0}{mc^2} \phi^* \phi = \phi^* \phi, \quad (1.183)$$

donde hemos usado que $i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} = E\phi = (E_0 + E')\phi$ y $E' \ll E_0$.

Ejercicios

1.1 Preguntas conceptuales.

- En relatividad especial, el postulado de la universalidad de la rapidez de la luz es esencial para obtener las transformaciones de Lorentz, $x^{\mu'} = \mathcal{B}^{\mu'}_{\nu} x^{\nu}$. ¿Son las únicas transformaciones consistentes con ese postulado? Considere, por ejemplo, las transformaciones conformes $x^{\mu'} = ax^{\mu}$, con $a = \text{cte}$. ¿Qué significa este resultado?
- En la relatividad Galileana, el *intervalo espacial* o distancia $\ell^2 \equiv (\Delta x^i)(\Delta x^i) = |\Delta \mathbf{x}|^2$ es invariante ante transformaciones Galileanas entre los marcos de referencia inerciales, es decir, $\ell^2 = (\ell')^2$. Sin embargo, al dividir por $(\Delta t)^2 \neq 0$ se llega a que $|\mathbf{u}|^2 = |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$, en donde \mathbf{v} es la velocidad uniforme a la que se mueve un marco de referencia inercial S' con respecto a otro marco en reposo S . ¿Cuál es la inconsistencia?

1.2 Invariancia del intervalo.

- Muestre que el *intervalo espacial* $\ell^2 \equiv (\Delta x^i)(\Delta x^i) = |\Delta \mathbf{x}|^2$ es invariante bajo una transformación tridimensional relativista de Galileo.
- Muestre que el *intervalo espacial–tiempo* $\Delta s^2 = (\Delta x^0)(\Delta x^0) - (\Delta x^i)(\Delta x^i)$ es invariante bajo un boost de Lorentz unidimensional.
- Siguiendo la discusión del artículo *Indefinite quadratic forms and the invariance of the interval in Special Relativity* de J.H. Elton [arXiv:math.GM/0904.3913], demuestre que el intervalo espacio–temporal es invariante.

Sugerencia: Es importante comprender el teorema demostrado ahí, antes de aplicarlo, y seguir la discusión compartida en el apéndice G de la referencia [2] de ese artículo.

1.3 Ecuaciones de Maxwell.

(a) Las ecuaciones de Maxwell en el vacío y sin fuentes están dadas en su forma diferencial por

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}$$

en donde \mathbf{E} y \mathbf{B} denotan los campos eléctrico y magnético, mientras que μ_0 y ϵ_0 son respectivamente la permeabilidad magnética y la permitividad eléctrica del vacío, y satisfacen $c^2 = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1}$. Aplicando relaciones entre el rotacional, el gradiente y la divergencia de un vector, muestre que las ecuaciones de Maxwell implican que los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} son ondas con velocidad c .

- (b) Muestre que la ecuación de onda para el campo magnético $\mathbf{B} = (B, 0, 0)^T$ no es invariante ante transformaciones Galileanas.
- (c) Muestre que la ecuación de onda para el campo magnético $\mathbf{B} = (B, 0, 0)^T$ sí es invariante bajo boosts de Lorentz.

1.4 Boosts de Lorentz.

En el apéndice I de su libro *Relativity. The special and the general theory* de 1916, Einstein sugiere una forma muy simple de obtener los boosts de Lorentz a partir del postulado de la invariancia de la velocidad de la luz, codificada en

$$\begin{aligned}x' - ct' &= \lambda(x - ct) \\ x' + ct' &= \mu(x + ct),\end{aligned}$$

para algunas constantes λ y μ , y el resultado Galileano de que $x' = 0$ debe coincidir con la curva $x - vt = 0$. Muestre cómo funciona la derivación de Einstein.

1.5 Preguntas conceptuales.

- (a) ¿Cómo expresaría en términos del 4-momento la conservación de momento y energía? ¿Qué implicaciones tiene para los 4-vectores $f = (f^\mu)$ y $p = (p^\mu)$, y para el resultado anterior, la acción de una fuerza externa sobre el sistema?
- (b) Un granjero con conocimientos de relatividad tiene un granero de longitud L_G y una escalera de longitud $L_E > L_G$, que quiere guardar en el granero. Planea utilizar la *contracción de Lorentz* para guardar la escalera. El granjero le dice a su hijo que corra con la escalera hacia el granero a una rapidez relativista (uniforme) v hasta que él cierre la puerta del granero cuando la escalera cruce la puerta. ¿Qué observa su hijo? ¿Logrará el granjero guardar su escalera?
- (c) Un tráiler muy veloz es conducido por un físico. Sabe que su vehículo tiene una altura de 5 m y que el puente de una carretera sólo alcanza los 4 m. Como su tráiler puede lograr una rapidez de hasta $0.7c$, medita sobre la posibilidad de tomar esa carretera. ¿Con qué rapidez deberá conducir para pasar por debajo del puente?

1.6 4-vectores.

- (a) Demuestre que el producto interior de dos 4-vectores $x \cdot y = x^0 y^0 - x^i y^i$ es un invariante de Lorentz.

- (b) Muestre que en el laboratorio las componentes de la 4-fuerza $f = (f^\mu)$ son $(\frac{c}{\gamma} \frac{dE}{dt}, \gamma \mathcal{F}^i)$, donde $\mathcal{F}^i \equiv dp^i/dt = d(m\gamma v^i)/dt$ son las componentes de la 3-fuerza. ¿Cuál es la interpretación de f^0 ?
- (c) De la definición de la 3-fuerza, muestre que $\mathcal{F}^i = m\gamma dv^i/dt + (\mathcal{F}^j v^j)v^i/c^2$. Esta expresión implica que, en general, la aceleración Newtoniana dv^i/dt no es paralela a la fuerza que la produce. ¿En qué casos particulares sí lo es?
- (d) Si dos eventos tienen separación **espacialoide**, ¿existe un marco de referencia inercial en el cual ambos eventos ocurren en el mismo lugar? Justifique su respuesta.
- (e) La sobreaceleración \mathbf{j} en física Newtoniana es la derivada temporal de la aceleración. Generalice este concepto a una 4-sobreaceleración j . Para una partícula de masa m , ¿qué significado físico tiene la componente mj^0 del 4-vector mj ?

1.7 Velocidades relativistas.

- (a) Tres marcos de referencia inerciales S, S', S'' están en configuración estándar entre ellos (el origen de sus coordenadas coincide y las velocidades están orientadas en la dirección x^1). S' tiene rapidez u con respecto a S , y S'' tiene rapidez v con respecto a S' . Emplee *solamente* los boosts de Lorentz para demostrar que la velocidad de S'' con respecto a S es

$$\frac{u+v}{1+\frac{uv}{c^2}}.$$

Explique por qué este método es válido.

- (b) Desde un marco de referencia inercial se observan tres partículas alineadas horizontalmente viajando con velocidades uniformes en la misma dirección. La primera de ellas tiene rapidez $4c/5$ mientras que la segunda tiene rapidez $3c/5$, ¿cuál es la rapidez de la tercera si, desde su perspectiva, las otras dos se acercan con la misma rapidez? ¿Cuál sería la respuesta de acuerdo a la relatividad Galileana?
- (c) En un sistema de referencia inercial, dos partículas son lanzadas simultáneamente desde un punto dado con velocidades iguales a v y en direcciones ortogonales. ¿Cuál es la velocidad de cada partícula relativa a la otra?

1.8 Composición de velocidades.

Chana observa una partícula de masa m moviéndose con velocidad $\mathbf{u} = (u, 0, 0)^T$ en el laboratorio. Al mismo tiempo, Chón, desde una nave que se mueve con velocidad $\mathbf{v} = (v, 0, 0)^T$ fuera del laboratorio, mide la velocidad $\mathbf{w} = (w, 0, 0)^T$ para la partícula.

- (a) Escriba w en términos de u y v .
- (b) ¿Cuáles son las componentes del 4-momento $p' = (p'^\mu)$ de la partícula de acuerdo a Chón en términos de w y en términos de u y v ?
- (c) ¿Qué relación existe entre los 4-vectores p y p' en términos solamente de v ?

1.9 Preguntas conceptuales.

- (a) Una dama relativista corre en un microbús relativista. Ambos se mueven con la misma rapidez, pero en direcciones perpendiculares. Chón, desde su cómoda perspectiva en el puesto de tacos, grita que ella se ve bastante delgada. ¿Miente o dice la verdad?

- (b) Describa muy brevemente (si es posible, usando alguna ecuación) por qué no es posible que un observador inercial viaje con rapidez c .

1.10 La paradoja de los gemelos.

Dos gemelos, Chana y Chón, viven en la Tierra. Chón decide emprender un viaje en su nave espacial con rapidez constante $v < c$ a Alfa Centauri, mientras que Chana decide quedarse en casa. En cuanto llega a su destino, Chón da media vuelta y emprende su viaje de regreso a la Tierra con la misma rapidez v . En el sistema de referencia de Chana, dibuje un diagrama de espacio-tiempo que describa la trayectoria recorrida por Chón.

1.11 *Gedankenexperiment* de Einstein.

Sean (a', b') y (a'', b'') los extremos de dos barras de idéntica longitud propia ℓ . Las barras se mueven con una rapidez constante de $0.6c$ en direcciones opuestas con respecto a un observador en reposo sobre el eje x^1 . Tras algún tiempo, el observador en reposo nota que ambos extremos de las barras coinciden en los puntos (a, b) .

- (a) Trace un diagrama de espacio-tiempo que muestre la situación descrita.
 (b) Muestre analíticamente que $b - a < \ell$.

1.12 Orden cronológico.

Tres eventos, \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 y \mathcal{E}_3 , mutuamente separados *espacialmente*, son apreciados por un observador inercial ocurriendo en el orden temporal \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 y \mathcal{E}_3 .

- (a) Explique mediante diagramas de espacio-tiempo si es posible que otro observador los vea en el orden opuesto, \mathcal{E}_3 , \mathcal{E}_2 y \mathcal{E}_1 .
 (b) Explique mediante diagramas de espacio-tiempo si es posible que otro observador los vea en el orden \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_3 y \mathcal{E}_2 .
 (c) Una clarividente llora de dolor en el preciso instante en el que su hermano, a 500 km de distancia, se golpea. Un científico observa ambos eventos desde un avión viajando a $\frac{12}{13}c$ desde el punto donde se encuentra el hermano hacia la clarividente. De acuerdo al científico, ¿qué evento ocurrió antes? ¿Cuánto tiempo antes ocurrió el primer evento? Dibuje un diagrama de espacio-tiempo del problema en cuestión. ¿Qué conclusiones obtendría el científico si el avión viajara en la dirección opuesta?

Sugerencia: puede emplear el artículo "Constraints on chronologies" de A. Shapere y F. Wilczek²⁶.

1.13 4-vectores en distintos marcos de referencia.

- (a) Muestre que cualquier vector temporal U^μ para el cual $U^0 > 0$ y $\eta_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = c^2$, es la 4-velocidad de alguna línea de universo.
 (b) Use el resultado anterior para mostrar que para cualquier vector temporal existe un marco de Lorentz en el cual las componentes espaciales de U^μ son cero.

1.14 Composición de boosts.

Es sabido que el conjunto de boosts de Lorentz no es un grupo debido a que no satisface la propiedad de cerradura. Para completar el llamado (sub)grupo de Lorentz $SO^+(3, 1)$, se requiere la inclusión de rotaciones espaciales.

²⁶<http://arxiv.org/abs/1208.3841>

- (a) Muestre que la composición de boosts de Lorentz en diferentes direcciones no es otro boost. Para hacerlo, considere un boost \mathcal{B}_1 en la dirección x^1 seguido de un boost \mathcal{B}_2 en la dirección x^2 .
- (b) Suponga que el resultado es un boost \mathcal{B}_f en alguna dirección f seguido por una rotación $\mathcal{R}(\theta)$ cuyo eje axial es el que no es alterado por los boosts, es decir, $\mathcal{B}_2\mathcal{B}_1 = \mathcal{R}(\theta)\mathcal{B}_f$, donde

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre el boost \mathcal{B}_f en términos de θ y los parámetros $\beta_1, \gamma_1, \beta_2$ y γ_2 de \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 .

- (c) Exigiendo que la matriz \mathcal{B}_f sea simétrica, encuentre $\text{sen } \theta$ y $\cos \theta$ en términos de los parámetros de \mathcal{B}_1 y \mathcal{B}_2 .
- (d) Use el resultado del inciso anterior para reescribir explícitamente \mathcal{B}_f . ¿En qué plano está la dirección del boost de Lorentz \mathcal{B}_f ?
- (e) En el plano de la dirección del boost \mathcal{B}_f , hay un vector de cuatro dimensiones ω (con sólo dos entradas no nulas) perpendicular a la dirección f del boost, es decir, tal que $\omega \cdot f = 0$. Argumente por qué ω debe satisfacer $\mathcal{B}_f\omega = \omega$. Usando esta relación, encuentre la dirección f del boost.
- (f) Con base en estos resultados, indique cuál es la estructura de la descomposición de un boost arbitrario en términos de boosts y rotaciones.

1.15 Preguntas conceptuales.

- (a) Un experimento moderno ha detectado una partícula con masa en reposo m , que alcanza una rapidez $v > c$. ¿Es correcto el resultado experimental? ¿Por qué?
- (b) ¿Puede un electrón libre emitir o absorber un solo fotón? Use conservación de energía y momento para responder.

1.16 Movimiento acelerado en 1 + 1 dimensiones.

- (a) En un espacio unidimensional, un cuerpo se mueve con aceleración $a = d^2x/dt^2$ de acuerdo a un sistema de referencia en reposo S . Demuestre que $a' = d^2x'/dt'^2$ en un sistema de referencia S' que se mueve con rapidez v con respecto a S está relacionado con a mediante

$$a' = \frac{a}{\gamma^3(1 - uv/c^2)^3},$$

en donde u es la rapidez a la que se mueve el cuerpo en S .

- (b) Encuentre las componentes de la 4-aceleración $\mathcal{A} = d^2x/d\tau^2$, donde τ es el tiempo propio. Determine el invariante de Lorentz $\alpha = \mathcal{A} \cdot \mathcal{A}$ en términos de a .
- (c) Si α es constante, encuentre $x(t)$. ¿Qué curva describe un objeto acelerado uniformemente?
- (d) Demuestre que el tiempo propio τ de un observador con α constante es

$$\tau = \frac{c}{\alpha} \text{senh}^{-1} \left(\frac{\alpha t}{c} \right).$$

Sugerencia: recuerde que $dt = \gamma(u)d\tau$.

1.17 Reflexión en un espejo.

Un espejo plano se mueve en dirección de su normal con rapidez uniforme v con respecto a un sistema de referencia S . Un rayo de luz de frecuencia ν_i golpea el espejo con un ángulo de incidencia θ_i y es reflejado con frecuencia ν_r a un ángulo de reflexión θ_r . Demuestre los siguientes aspectos:

- (a) Los ángulos de incidencia y reflexión satisfacen

$$\frac{\tan \frac{1}{2}\theta_i}{\tan \frac{1}{2}\theta_r} = \frac{c+v}{c-v}.$$

- (b) Las frecuencias incidente y reflejada satisfacen

$$\frac{\nu_r}{\nu_i} = \frac{c+v \cos \theta_i}{c-v \cos \theta_r} = \frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_r}.$$

Sugerencia: escriba las relaciones ópticas que mide un observador en S' que se mueve con el espejo, y obtenga las observaciones realizadas en S .

1.18 Generadores del grupo de Lorentz propio.

El grupo de Lorentz propio está compuesto por todas las matrices Λ que describen una transformación de Lorentz propia. Este grupo está formado entonces por los boosts y las rotaciones en 3 dimensiones, por lo que el grupo puede entenderse en términos de 6 parámetros asociados a estas transformaciones. Se pueden tomar estos parámetros como 3 ángulos de rotación ω_i y 3 parámetros hiperbólicos ϕ_i . Cualquier elemento de este grupo puede expresarse en general como

$$\Lambda(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\phi}) = e^{-i\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - i\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{K}},$$

en donde $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ y $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)^T$ son los 6 parámetros de la transformación mencionados. \mathbf{S} y \mathbf{K} son 3-vectores de matrices 4×4 , los cuales son definidos como los *generadores de rotaciones y boosts*, respectivamente. Si estudiamos transformaciones continuas, es suficiente considerar transformaciones infinitesimales, en las que los parámetros de la transformación son infinitesimalmente pequeños. A este nivel

$$\Lambda(\delta\boldsymbol{\omega}, \delta\boldsymbol{\phi}) = \mathbb{1} - i\delta\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{S} - i\delta\boldsymbol{\phi} \cdot \mathbf{K}. \quad (1.184)$$

- (a) Considere, por ejemplo, una rotación en el plano $x^2 - x^3$, es decir, alrededor del eje x^1 . Escriba la matriz 4×4 Λ que la representa. Considere ahora que el ángulo de rotación es infinitesimalmente pequeño. Utilizando la forma infinitesimal (1.184) y la forma de Λ , encuentre S_1 . Utilizando la forma infinitesimal de las rotaciones alrededor de los otros ejes encuentre S_2 y S_3 .
- (b) Recuerde que un boost puede escribirse en términos de los parámetros hiperbólicos $\phi_i = \ln(\gamma_i(1 + \beta_i))$, $i = 1, 2, 3$, como una rotación hiperbólica. Considere ahora la forma infinitesimal de los boosts en términos de los parámetros hiperbólicos en las 3 direcciones posibles. Haciendo lo análogo a lo hecho en el inciso anterior, encuentre los generadores K_1 , K_2 y K_3 de los boosts en las 3 direcciones.
- (c) Se define el conmutador como $[A, B] = AB - BA$. Encuentre las relaciones de conmutación entre todos los generadores, es decir $[K_i, K_j]$, $[S_i, S_j]$ y $[K_i, S_j]$.

(d) Definimos una nueva base como

$$A_j = \frac{1}{2}(S_j + iK_j),$$

$$B_j = \frac{1}{2}(S_j - iK_j).$$

Encuentre los conmutadores $[A_i, A_j]$, $[B_i, B_j]$ y $[A_i, B_j]$. ¿Qué puede concluir a partir de estos conmutadores sobre el grupo de Lorentz?

1.19 Grupos de Lorentz y Poincaré.

(a) A partir de la invariancia del intervalo ds^2 , aplique transformaciones de Lorentz para demostrar que

$$\Lambda^\mu{}_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta = \eta_{\alpha\beta}.$$

Escriba la forma matricial de la ecuación anterior.

- (b) De la forma matricial que obtuvo en el inciso anterior, demuestre que $\det \Lambda = \pm 1$.
- (c) De la ecuación del inciso (a) demuestre que $|\Lambda^0_0| \geq 1$. Con este resultado y el del inciso anterior, ha mostrado que podemos dividir el grupo en 4 sectores (dependiendo del signo de Λ^0_0 y de $\det \Lambda$).
- (d) De los resultados obtenidos en (b) y (c), defina los 4 sectores que componen a $O(3, 1)$. Determine a qué sector pertenece el elemento identidad, las rotaciones espaciales y los *boosts*.
- (e) Definimos la inversión temporal como $\mathcal{T} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ y la inversión espacial como $\mathcal{P} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Demuestre que \mathcal{T} y \mathcal{P} pertenecen a $O(3, 1)$. Indique a qué componente conexas pertenecen \mathcal{T} , \mathcal{P} y su composición $\mathcal{TP} = \mathcal{PT}$.
- (f) Pruebe o refute que cada componente conexas forma un subgrupo de $O(3, 1)$.
- (g) (**Grupo de Poincaré**) Una generalización de $O(3, 1)$ es el llamado grupo de Poincaré, el cual considera también traslaciones espacio-temporales y contiene como subgrupo a $O(3, 1)$. La acción de un elemento general del grupo de Poincaré, que denotaremos como (Λ, a) (donde $\Lambda \in O(3, 1)$ y $a \in \mathbb{R}^{(3,1)}$), sobre un vector x es $x' = (\Lambda, a)x = \Lambda x + a$, que, en términos de componentes, es

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu. \quad (1.185)$$

Note que un elemento $(\Lambda, 0)$, con $a = 0$ es simplemente un elemento de $O(3, 1)$. Considere dos elementos del grupo de Poincaré (Λ_1, a_1) y (Λ_2, a_2) . Use (1.185) para demostrar que la regla de composición del grupo de Poincaré está dada por

$$(\Lambda_2, a_2)(\Lambda_1, a_1) = (\Lambda_2 \Lambda_1, \Lambda_2 a_1 + a_2).$$

(h) Encuentre la expresión para el inverso a (Λ, a) , i.e., el elemento tal que $(\Lambda, a)(\Lambda, a)^{-1} = 1$.

1.20 Matrices de Dirac.

Suponga que el Hamiltoniano \mathcal{H} de una partícula relativista puede ser escrito como un cuadrado perfecto de una cantidad que es lineal en p

$$\mathcal{H} = (c(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3) + \beta m c^2)^2.$$

- (a) Si \mathcal{H} es igual a la energía relativista, encuentre las condiciones que deben cumplir los coeficientes α_1 , α_2 , α_3 y β .
- (b) Para que se cumplan las condiciones encontradas en (a), se necesita que α_i , y β sean matrices. ¿Qué eigenvalores pueden tomar estas matrices?
- (c) Demuestre que la traza de las matrices α_i y β es cero. ¿Cómo debe ser la dimensión de estas matrices?
- (d) ¿Cuál es la dimensión mínima que deben tener estas matrices? Con base en los resultados previos, ¿qué estructura tienen los objetos sobre los que actúan estas matrices?
- (e) Un álgebra de Clifford (o Dirac) se define mediante el siguiente anticonmutador

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1},$$

en donde γ^μ son en general D matrices de dimensión D . $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ es la llamada métrica de Minkowski D -dimensional, dada por $\eta = (\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1) = \eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$. Utilizando las propiedades que encontré en (a), escriba las matrices γ^μ como funciones de α_i y β . A las matrices γ^μ se les conoce como matrices de Dirac y son de crucial importancia para entender la dinámica de partículas relativistas con espín $\frac{1}{2}$.

Capítulo 2

Geometría en relatividad

2.1. Tensores en relatividad

2.1.1. Algunas propiedades de vectores

En la sección 1.7, introdujimos los 4–vectores como cantidades de cuatro dimensiones cuyas componentes se transforman como las componentes dx^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, bajo transformaciones de Lorentz Λ , es decir, tales que

$$A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^{\nu}, \quad (2.1)$$

si A^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, denota las componentes de un 4–vector A . Además, hemos mostrado en la sección 1.9.3 que las componentes del *tensor métrico* satisfacen

$$\Lambda^{\mu'}_{\rho} \Lambda^{\nu'}_{\sigma} \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\rho\sigma}, \quad (2.2)$$

para preservar la *invariancia* del *producto escalar* entre 4–vectores observados por distintos observadores inerciales. El producto escalar ha sido definido como

$$A \cdot B \equiv \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu, \quad (2.3)$$

para dos 4–vectores A y B arbitrarios con componentes A^μ y B^μ . Como se justificará en la sección 2.1.5, es conveniente reescribir $A \cdot B$ como

$$A \cdot B = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu, \quad (2.4)$$

donde hemos usado la propiedad del *tensor métrico* (que demostraremos en la sección 2.1.5)

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu, \quad B_\mu = \eta_{\mu\nu} B^\nu. \quad (2.5)$$

En este contexto, se dice que una de las funciones del *tensor métrico* es *bajar índices*.

Los 4–vectores o simplemente *vectores* forman un espacio vectorial que satisface las propiedades de todo espacio vectorial. Particularmente, si A y B son vectores con componentes A^μ y B^μ , $\mu = 0, \dots, 3$, entonces

$$\begin{aligned}(A + B)^\mu &= A^\mu + B^\mu \\ (aA)^\mu &= aA^\mu, \quad a \in \mathbb{R}\end{aligned}\tag{2.6}$$

y, en consecuencia, las componentes de la suma de vectores se transforman como

$$(A + B)^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu A^\nu + \Lambda^{\mu'}{}_\nu B^\nu\tag{2.7}$$

bajo una transformación de Lorentz.

Por otro lado, como las transformaciones de Lorentz son transformaciones lineales que relacionan dos sistemas coordenados, los de coordenadas x^μ y $x^{\mu'}$, mediante $x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu x^\nu$ y, viceversa, $x^\nu = \Lambda^\nu{}_{\mu'} x^{\mu'}$, en una relación continua y biyectiva, entonces las transformaciones de Lorentz son *difeomorfismos*¹ que satisfacen

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \quad \text{y} \quad \Lambda^\nu{}_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}}.\tag{2.8}$$

Escrito de esta forma, notamos que, si Λ es un difeomorfismo arbitrario, tal como una transformación de coordenadas, tanto (2.8) como (2.7) también se satisfacen. Esta observación permite notar que las transformaciones de Lorentz, hasta ahora empleadas para caracterizar los vectores, son sólo un caso especial de las transformaciones generales permitidas en la teoría de la relatividad, las cuales corresponden a *todos* los difeomorfismos del espacio–tiempo. Es decir, es posible *generalizar* las transformaciones de Lorentz a transformaciones que modifiquen radicalmente el espacio–tiempo, transformaciones que relacionen las coordenadas inerciales con coordenadas asociadas a sistemas acelerados, rotantes, o cualesquiera otros, siempre que las transformaciones puedan expresarse como (2.8). Este resultado meramente geométrico es tremendamente poderoso, pues permite generalizar la relatividad especial a cualquier marco de referencia, como veremos en el capítulo 3. Antes de llegar a esa generalización, debemos desarrollar algunos elementos que nos serán de gran utilidad.

En el contexto de la relatividad especial, que es formulada en un espacio–tiempo 4–dimensional plano, podemos elegir la *base del espacio de vectores* dada por

$$\begin{aligned}e_0 &= (1, 0, 0, 0)^T, \\ e_1 &= (0, 1, 0, 0)^T, \\ e_2 &= (0, 0, 1, 0)^T, \\ e_3 &= (0, 0, 0, 1)^T,\end{aligned}\tag{2.9}$$

¹Formalmente, un difeomorfismo es un mapeo diferenciable, biyectivo e invertible que relaciona un espacio continuo y localmente plano (conocido como *variedad*) con otro. Las transformaciones de Lorentz son difeomorfismos del espacio–tiempo plano en sí mismo.

o $e_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu$ en formato breve, donde δ_ν^μ es la *delta de Kronecker*, definida como

$$\delta_\nu^\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu \neq \nu, \\ 1 & \text{si } \mu = \nu, \end{cases} \quad (2.10)$$

con μ corriendo sobre las componentes de la base y ν sobre los elementos de la base. El espacio-tiempo plano descrito por la base (2.9) es conocido como *espacio-tiempo de Minkowski*.

En general, dada una base, un vector arbitrario A puede ser escrito como

$$A = A^\mu e_\mu. \quad (2.11)$$

Con esta definición, un vector A no tiene índices y, por lo tanto, es invariante ante difeomorfismos, incluyendo las transformaciones de Lorentz, es decir,

$$A = A^\mu e_\mu = A^{\mu'} e_{\mu'} = A'. \quad \text{invariancia de vectores} \quad (2.12)$$

Esto significa que, aunque las componentes de un vector sí se transforman, el propio vector *no*. Claramente, esto implica que $e_{\mu'} \neq e_\mu$, de donde podemos deducir cómo se transforman los vectores base. Empleando $A^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu A^\nu$ en (2.12),

$$A' = A^{\mu'} e_{\mu'} = \Lambda^{\mu'}_\nu A^\nu e_{\mu'} = A^\nu (\Lambda^{\mu'}_\nu e_{\mu'}) \stackrel{!}{=} A^\nu e_\nu = A,$$

encontramos la regla de transformación de los vectores base,

$$e_\nu = \Lambda^{\mu'}_\nu e_{\mu'}, \quad (2.13)$$

donde Λ denota algún difeomorfismo.

Consideremos, por ejemplo, que Λ es un boost a lo largo de la dirección x^1 , dado por (1.39). En este caso, los únicos vectores base que se transforman son e_0 y e_1 , que, de acuerdo a (2.13), satisfacen

$$\begin{aligned} e_0 &= \gamma e_{0'} - \gamma\beta e_{1'}, \\ e_1 &= \gamma e_{1'} - \gamma\beta e_{0'}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} e_{0'} &= \gamma e_0 + \gamma\beta e_1, \\ e_{1'} &= \gamma e_1 + \gamma\beta e_0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Esta ecuación indica que los vectores base se transforman inversamente a las componentes de vectores.

Expresemos la *transformación inversa* a Λ como

$$\Lambda^{-1} = (\Lambda^\nu_{\mu'}), \quad (2.16)$$

compatible con (1.118), como el lector puede comprobar fácilmente (ejercicio 2.1). Entonces, para obtener la nueva base $\{e_{\mu'}\}$ en términos de la base no transformada $\{e_\nu\}$, utilizamos la transformación inversa (2.16) en (2.13) y obtenemos

$$e_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} e_\nu, \quad \text{transformación de vectores base} \quad (2.17)$$

donde hemos usado las identidades

$$\Lambda^\nu_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\rho} = \delta^\nu_{\rho}, \quad \Lambda^{\mu'}_{\nu} \Lambda^\nu_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'} \quad (2.18)$$

debidas al producto de Λ con su inversa Λ^{-1} .

2.1.2. 1-formas

Consideremos ahora una función lineal p que toma como parámetro un vector arbitrario y devuelve algún escalar. La acción de p sobre un vector A está dada por

$$p(A) = p(A^\mu e_\mu) = A^\mu p(e_\mu) \equiv A^\mu p_\mu, \quad (2.19)$$

donde hemos definido $p_\mu \equiv p(e_\mu)$. En la segunda igualdad, hemos tomado en cuenta que las componentes A^μ del vector A son simples escalares y que p es una función lineal. La expresión (2.19) define la llamada *contracción de índices*, que se traduce en la suma de las componentes involucradas sobre los valores que pueden adoptar los índices,

$$p(A) = A^\mu p_\mu = A^0 p_0 + A^1 p_1 + A^2 p_2 + A^3 p_3. \quad (2.20)$$

Aunque veremos que la contracción de índices está relacionada con el producto escalar, aquí parecería que no se trata de lo mismo, pues p es una función lineal, no un vector. Por el momento, lo importante es notar los signos (todos positivos) y también la *posición de los índices* empleados en la suma (uno arriba y otro abajo). Los índices repetidos que *se contraen* desaparecen en el resultado final, por lo que frecuentemente también son llamados *índices mudos*. Es evidente que la elección del símbolo asociado al índice mudo es indiferente, por lo que puede sustituirse siempre y cuando el cambio ocurra en los *dos* lugares en donde aparece y el nuevo símbolo no aparezca en alguna otra parte de la expresión.

Ahora determinemos cómo cambian las cantidades p_μ bajo difeomorfismos. Para lograrlo, siguiendo la definición de p_μ , esta vez tomamos la acción de p sobre el vector base $e_{\mu'}$ afectado por Λ ,

$$p_{\mu'} \equiv p(e_{\mu'}) = p(\Lambda^\nu_{\mu'} e_\nu) = \Lambda^\nu_{\mu'} p(e_\nu) = \Lambda^\nu_{\mu'} p_\nu. \quad (2.21)$$

Encontramos que las cantidades p_μ se transforman como los vectores base, siguiendo la regla

$$p_{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} p_\nu, \quad (2.22)$$

es decir, inversamente a como las componentes de un vector lo hacen. Empleando este resultado, es directo comprobar que la contracción de índices (2.20) es, por definición, un escalar y, por lo tanto, un invariante bajo difeomorfismos e invariante de Lorentz:

$$\begin{aligned} A^{\mu'} p_{\mu'} &= (\Lambda^{\mu'}_{\nu} A^\nu) (\Lambda^\rho_{\mu'} p_\rho) \\ &= \Lambda^\rho_{\mu'} \Lambda^{\mu'}_{\nu} A^\nu p_\rho \\ &= \delta^\rho_{\nu} A^\nu p_\rho = A^\rho p_\rho \\ &= A^\mu p_\mu, \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde aplicamos la expresión (2.18) en la tercera igualdad y sustituimos el índice mudo ρ por μ en el último paso.

Dado que el conjunto de funciones de un espacio vectorial al conjunto de los reales forman un espacio vectorial, es posible afirmar que p es un objeto similar a un vector, pero que, según (2.20), es afectado inversamente por los difeomorfismos. Tales objetos son conocidos como *1-formas*.² Por lo tanto, los números p_μ definidos en (2.19) se interpretan como las *componentes* de una 1-forma.

En este texto, para evitar confusiones y poder distinguir entre un vector $V = V^\mu e_\mu$ y una 1-forma cuyas componentes sean V_μ , empleamos la notación \tilde{V} , tal que

$$\tilde{V}(e_\mu) = V_\mu. \quad (2.24)$$

En esta notación, (2.19) puede ser reescrita como

$$\tilde{p}(A) = A^\mu p_\mu, \quad \text{con } p_\mu \equiv \tilde{p}(e_\mu). \quad (2.25)$$

Como los vectores, las 1-formas construyen un espacio vectorial, por lo que se puede definir una base $\{\tilde{\omega}^\mu\}$ para ellas, tal que

$$\tilde{p} = p_\mu \tilde{\omega}^\mu, \quad p_\mu \in \mathbb{R}. \quad (2.26)$$

Por consiguiente, encontramos que

$$\begin{aligned} \tilde{p}(A) &= p_\mu \tilde{\omega}^\mu(A) = p_\mu \tilde{\omega}^\mu(A^\nu e_\nu) = p_\mu A^\nu \tilde{\omega}^\mu(e_\nu) \\ &\stackrel{!}{=} p_\mu A^\mu, \end{aligned} \quad (2.27)$$

²Históricamente, las 1-formas también han sido llamadas *vectores covariantes*, pero aquí evitaremos ese lenguaje.

donde usamos (2.25) en la última igualdad. Es decir, $p_\mu A^\mu \stackrel{!}{=} p_\mu A^\nu \tilde{\omega}^\mu(e_\nu)$, lo que implica

$$\tilde{\omega}^\mu(e_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad \mu, \nu = 0, \dots, 3. \quad (2.28)$$

Esta es precisamente la definición de la base de un espacio vectorial *dual* al espacio de vectores; es decir, las 1-formas $\tilde{p}, \tilde{w}, \dots$ son *vectores duales*.

La relación (2.28) aplicada a los vectores base (2.9) conduce a la base del espacio dual dada por

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_0 &= (1, 0, 0, 0), \\ \tilde{\omega}_1 &= (0, 1, 0, 0), \\ \tilde{\omega}_2 &= (0, 0, 1, 0), \\ \tilde{\omega}_3 &= (0, 0, 0, 1), \end{aligned} \quad (2.29)$$

la cual, a pesar de su forma constante, depende del marco de referencia. Esta forma de los *vectores duales base* (así como los vectores base $\{e_\mu\}$ de la ecuación (2.9)) representa la elección más sencilla de la base del espacio-tiempo de Minkowski, pero otras elecciones también son válidas. Particularmente, si aplicamos un simple cambio de coordenadas, las expresiones de los vectores y 1-formas en términos de sus bases continúan siendo válidas, aunque sus componentes y los vectores base adquieren formas muy diferentes. Lo mismo es cierto para otros difeomorfismos que modifiquen la geometría del espacio-tiempo original.

Es importante hacer notar que, debido a que tanto las componentes de un vector como las de una 1-forma (o vector dual) son números reales, un conjunto de 4 valores no tiene un significado definido a menos de que se indique a qué tipo de vectores pertenecen.

Veamos ahora cómo se transforman los vectores duales base bajo un difeomorfismo arbitrario Λ . Empleando (2.26) y (2.21), tenemos

$$\tilde{p}' = p_{\mu'} \tilde{\omega}^{\mu'} = \Lambda^\nu_{\mu'} p_\nu \tilde{\omega}^{\mu'}. \quad (2.30)$$

Imponiendo la invariancia relativista $p_\mu \tilde{\omega}^\mu = p_{\mu'} \tilde{\omega}^{\mu'}$, concluimos que

$$\tilde{\omega}^{\nu'} = \Lambda^{\nu'}_{\mu} \tilde{\omega}^\mu. \quad \text{transformación de vectores duales base} \quad (2.31)$$

La ecuación (2.31) representa la transformación bajo difeomorfismos de las componentes de los vectores duales base. Notamos que siguen las reglas de transformación de las componentes de vectores.

2.1.3. Gradiente de una función

Suponga que la trayectoria de una partícula está descrita por la función escalar³ paramétrica $\phi(\tau)$, donde τ es el tiempo propio introducido en la sección 1.4. Como $x^\mu = x^\mu(\tau)$, entonces ϕ puede interpretarse como un campo (escalar) del espacio-tiempo descrito por las coordenadas $\{x^\mu\}$,

$$\phi(\tau) = \phi[x^\mu(\tau)].$$

La derivada paramétrica de ϕ está dada por

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\partial\phi}{\partial x^0} \underbrace{\frac{dx^0}{d\tau}}_{=U^0} + \frac{\partial\phi}{\partial x^1} \underbrace{\frac{dx^1}{d\tau}}_{=U^1} + \frac{\partial\phi}{\partial x^2} \underbrace{\frac{dx^2}{d\tau}}_{=U^2} + \frac{\partial\phi}{\partial x^3} \underbrace{\frac{dx^3}{d\tau}}_{=U^3} \\ &\equiv (\partial_\mu\phi)U^\mu, \end{aligned}$$

donde $U = (U^\mu)$ es el vector de 4-velocidad definido en la sección 1.7. Las derivadas codificadas en $(\partial_\mu\phi)$ pueden considerarse como las componentes de una 1-forma $\tilde{d}\phi$ que toma el vector U y devuelve el escalar $\frac{d\phi}{d\tau}$, denominada 1-forma gradiente. Las componentes de la 1-forma $\tilde{d}\phi$ son comúnmente denotadas de varias formas equivalentes que emplearemos en este texto:

$$(\tilde{d}\phi)_\mu = \partial_\mu\phi = \phi_{,\mu} = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu}. \quad (2.32)$$

Entre estos, $\phi_{,\mu}$ es de particular utilidad para simplificar mucho la notación en relatividad. Por tratarse de las componentes de una 1-forma, las componentes de $\tilde{d}\phi$ se transforman de acuerdo a (2.21) como

$$\phi_{,\mu'} = \Lambda^\nu{}_{\mu'} \phi_{,\nu}, \quad (2.33)$$

donde Λ representa cualquier difeomorfismo. Por lo tanto, podemos reescribir (2.33) también como

$$\phi_{,\mu'} = \frac{\partial\phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial\phi}{\partial x^\nu}. \quad (2.34)$$

Directamente de (2.32), vemos que las componentes de la 1-forma gradiente para $\phi(\tau) = x^\mu(\tau)$ son

$$(\tilde{d}x^\mu)_\nu = x^{\mu}_{,\nu} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu. \quad (2.35)$$

Comparando con la ecuación (2.28), podemos identificar las 1-formas base

$$\tilde{\omega}^\mu \equiv \tilde{d}x^\mu, \quad \text{1-formas o vectores duales base} \quad (2.36)$$

³En general, una función escalar es aquella que para cada punto de un cierto espacio asigna un valor real, es decir, para un espacio X^N de N dimensiones es una función de $X^N \rightarrow \mathbb{R}$.

las cuales forman una base completa del espacio de vectores duales. Se obtiene que, para cualquier función escalar ϕ , podemos escribir la 1-forma gradiente en esta base como

$$\tilde{d}\phi = (\tilde{d}\phi)_\mu \tilde{d}x^\mu = \frac{\partial\phi}{\partial x^\mu} \tilde{d}x^\mu, \quad (2.37)$$

que tiene la estructura usual para los diferenciales de funcionales.

A partir de este resultado, recordando que la base $\{e_\mu\}$ es dual a $\{\tilde{\omega}^\mu\}$ y satisfacen (2.28), encontramos que los vectores base pueden expresarse como

$$e_\mu \equiv \partial_\mu. \quad \text{vectores base} \quad (2.38)$$

2.1.4. Tensor métrico

La definición del *producto escalar* (2.3) que hemos aplicado hasta ahora puede describirse formalmente en términos de los *vectores base*. Considere dos vectores en el espacio-tiempo de Minkowski, tales que

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A^\mu e_\mu) \cdot (B^\nu e_\nu) = A^\mu B^\nu e_\mu \cdot e_\nu \\ &\stackrel{!}{=} A^\mu B^\nu \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Esto implica que en cualquier marco de referencia inercial de la relatividad especial las componentes de la métrica pueden obtenerse mediante el producto punto de los vectores base,

$$\eta_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu. \quad (2.40)$$

La métrica η establece una regla para relacionar dos vectores A y B con el escalar $A \cdot B$, llamado *producto escalar*. Proponemos entonces que η es una función cuyas entradas son dos vectores y cuyo resultado es el producto escalar de estos. Claramente, esta función es bilineal (lineal en ambas entradas). Además, de acuerdo a (2.40), al aplicar η sobre los vectores base, obtenemos las componentes $\eta_{\mu\nu}$ de η . Como veremos en la sección 2.1.7, una función multilineal del espacio de vectores a los reales, como esta, es llamada *tensor*. Por lo tanto, η es un tensor llamado *tensor métrico* de Minkowski.

Frecuentemente, la expresión (2.40) da la impresión de que el producto punto del lado derecho de esa ecuación es el producto escalar habitual en coordenadas Cartesianas. Eso es incorrecto. La razón es que los vectores base $\{e_\mu\}$ *habitan* en el espacio-tiempo de Minkowski, y son los mismos en cualquier punto del espacio-tiempo, como consecuencia de la constancia de la métrica y los vectores base. Por lo tanto, el lado derecho de (2.40) debe leerse como $e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\alpha\beta} e_\mu^\alpha e_\nu^\beta$.

El producto escalar determinado por la métrica de Minkowski no es positivo-definido y, en consecuencia, la métrica tampoco lo es. En el espacio-tiempo que nos es familiar, se dice que la métrica es *no-degenerada*⁴ con *signatura* (3, 1). En nuestras convenciones, la signatura de la métrica cuenta el número de sus eigenvalores negativos y positivos, respectivamente. Las métricas no-degeneradas que tienen sólo un eigenvalor positivo son llamadas *métricas Lorentzianas*. Por lo tanto, la métrica de Minkowski y cualquier otra que busque reproducir observaciones como las de nuestro espacio-tiempo son Lorentzianas.

Hasta ahora, sólo hemos hablado de espacio-tiempo plano con la base especial elegida en (2.9). Sin embargo, incluso en espacio plano, otras bases son posibles. En esos casos, las componentes del tensor métrico no son las de la métrica constante de Minkowski, pero deben satisfacer relaciones similares a (2.39) y (2.40). Proponemos que la generalización de η es un tensor métrico g que toma dos vectores expresados en alguna base $\{e_\mu\}$ y devuelve su producto escalar,

$$g(A, B) = A \cdot B. \quad (2.41)$$

Exigimos adicionalmente que g sea bilineal, es decir, que sea lineal en ambos parámetros:

$$g(aA + B, C + dD) = ag(A, C) + g(B, C) + adg(A, D) + dg(B, D), \quad a, d \in \mathbb{R}, \quad (2.42)$$

para los vectores A, B, C y D .

El tensor métrico general g es compatible con (2.40) si sus componentes $g_{\mu\nu}$ están dadas por los valores *escalares* que adopta cuando es aplicado a los vectores base $\{e_\mu\}$,

$$g_{\mu\nu} \equiv g(e_\mu, e_\nu) = e_\mu \cdot e_\nu. \quad \text{componentes del tensor métrico} \quad (2.43)$$

Esta expresión es una indicación de que, dependiendo de la base elegida, el producto escalar adopta distintas estructuras. Pero también es posible concebir que la base $\{e_\mu\}$ no corresponda a un espacio-tiempo plano, es decir, que los vectores base no puedan ser relacionados con la base de Minkowski (2.9) por medio de difeomorfismos (cambios de coordenadas) idénticos en todos los puntos del espacio-tiempo generado.

Nuevamente, es preciso hacer un paréntesis para explicar el significado del lado derecho de (2.43). A partir del hecho de que el producto escalar es invariante bajo difeomorfismos, el producto de dos vectores expresados en la base de Minkowski con coordenadas $x^{\alpha'}$ puede ser relacionado al producto de esos mismos vectores en un espacio-tiempo con coordenadas x^μ arbitrarias mediante

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \eta_{\alpha'\beta'} A^{\alpha'} B^{\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} \Lambda^{\alpha'}_{\mu} \Lambda^{\beta'}_{\nu} A^{\mu} B^{\nu} = \eta_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}} A^{\mu} B^{\nu} \\ &\stackrel{!}{=} g_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A \cdot B, \end{aligned} \quad (2.44)$$

⁴Una métrica g no-degenerada satisface que, si $g(A, B) = 0 \forall B$, entonces $A = 0$. Esta es una condición más débil que la positividad requerida en espacios más comunes, como el Euclídeo.

donde $\Lambda^{\alpha'}_{\mu} = \partial x^{\alpha'} / \partial x^{\mu}$ denota las componentes del difeomorfismo que permite transitar del espacio de Minkowski al espacio con coordenadas x^{μ} . Esta expresión conduce a identificar las componentes de la métrica del espacio–tiempo como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^{\nu}}, \quad (2.45)$$

que coincide con (2.43) sólo si los vectores base del nuevo espacio $\{e_{\mu}\}$ son expresados en las coordenadas Minkowskianas, tal que

$$e_{\mu}^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\mu}}. \quad (2.46)$$

Con esta información, a partir de la expresión de los vectores en términos de los vectores base (2.11), encontramos que se satisface

$$\begin{aligned} A \cdot B &= g(A^{\mu} e_{\mu}, B^{\nu} e_{\nu}) \\ &= A^{\mu} B^{\nu} g(e_{\mu}, e_{\nu}) \\ &= A^{\mu} B^{\nu} g_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (2.47)$$

para dos vectores arbitrarios A y B definidos en cualquier sistema de coordenadas y un espacio arbitrario. Es decir, (2.47) es la expresión más general del producto escalar y se transforma en (2.3) en un espacio de coordenadas Cartesianas, cuyos vectores base son elegidos como en (2.9).

Dado que el producto escalar es una operación conmutativa, vemos que, a partir de la definición del tensor métrico (2.41), se satisface que

$$g(A, B) = A \cdot B = B \cdot A = g(B, A), \quad (2.48)$$

es decir, el tensor métrico es simétrico bajo el intercambio de sus entradas. A partir de esta relación, es posible establecer que las componentes del tensor métrico son *simétricas bajo el intercambio de índices*, es decir,

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}, \quad (2.49)$$

lo cual se verifica trivialmente cuando $g = \eta$.

Dado que el tensor métrico define un producto escalar en un determinado espacio–tiempo (o un espacio) coordenado, como discutimos en la sección 1.9.3, permite establecer la forma de medir distancias en él mediante el *intervalo* ds^2 . Es directo generalizar la ecuación (1.111), válida para espacio–tiempo plano en coordenadas Cartesianas, a

$$ds^2 \equiv dx \cdot dx = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu}, \quad (2.50)$$

válido en cualquier sistema coordenado. Es decir, dado un intervalo, es posible determinar las componentes de la métrica, y viceversa. Por esta razón, es frecuente que coloquialmente se confunda al intervalo con la métrica, aunque sean conceptos diferentes.

2.1.5. El papel del tensor métrico

Más allá de ser una herramienta para calcular el producto escalar entre vectores definidos en un determinado espacio–tiempo, el tensor métrico tiene un papel crucial en la relación entre vectores y 1–formas. Para describir esta propiedad y justificar la notación introducida en (2.4), definamos una 1–forma \tilde{A} , tal que

$$\tilde{A}(B) = A \cdot B, \quad (2.51)$$

cuyas componentes son, en general,

$$A_\mu = \tilde{A}(e_\mu) = A \cdot e_\mu = A^\nu e_\nu \cdot e_\mu = A^\nu (e_\mu \cdot e_\nu) = g_{\mu\nu} A^\nu,$$

donde hemos empleado (2.43) en la última igualdad. De esta forma, obtenemos la expresión

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu, \quad (2.52)$$

válida particularmente cuando $g = \eta$, caso en el que recuperamos (2.5).

Recordemos que las componentes del vector dual \tilde{A} son A_μ y las del vector A son A^μ . Esta expresión, por lo tanto, indica que el tensor métrico g establece el mapeo del espacio de vectores, con base $\{e_\mu\}$, al espacio de 1–formas, con base $\{\tilde{\omega}^\mu\}$, dado por

$$A = A^\nu e_\nu \xrightarrow{g} g_{\mu\nu} A^\nu \tilde{\omega}^\mu = \tilde{A}. \quad (2.53)$$

Este mapeo entre vectores y vectores duales puede interpretarse como el mapeo entre los vectores base y los vectores duales base dado por

$$e_\nu \xrightarrow{g} g_{\nu\mu} \tilde{\omega}^\mu, \quad (2.54)$$

donde hemos empleado la simetría del tensor métrico (2.49).

Por otra parte, dado que el espacio de vectores duales es un espacio vectorial, es igualmente posible definir un producto escalar entre 1–formas. Con este fin, propongamos que existe un tensor \tilde{g} que, a diferencia de los tensores empleados hasta ahora, toma dos 1–formas, \tilde{A} y \tilde{B} , y arroja como resultado su producto escalar; es decir,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\tilde{A}, \tilde{B}) &= \tilde{A} \cdot \tilde{B} = A_\mu B_\nu \tilde{g}(\tilde{\omega}^\mu, \tilde{\omega}^\nu) \\ &\equiv A_\mu B_\nu \tilde{g}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (2.55)$$

en donde, siguiendo la discusión alrededor de (2.47), hemos definido las componentes del tensor métrico en el espacio de 1–formas \tilde{g} por medio de su acción sobre los vectores duales base. Repitiendo nuestra discusión previa, podemos obtener el análogo a (2.52),

$$A^\mu = \tilde{g}^{\mu\nu} A_\nu, \quad (2.56)$$

que mapea 1-formas a vectores. Este mapeo se puede interpretar ahora como la relación entre las bases establecida por

$$\tilde{\omega}^\nu \xrightarrow{\tilde{g}} \tilde{g}^{\nu\mu} e_\mu. \quad (2.57)$$

Para encontrar la relación entre g y \tilde{g} , podemos mapear un vector arbitrario A a su dual \tilde{A} mediante la acción del tensor métrico g , y luego mapear \tilde{A} a A mediante \tilde{g} :

$$A^\nu e_\nu \xrightarrow{g} A^\nu g_{\nu\mu} \tilde{\omega}^\mu \xrightarrow{\tilde{g}} A^\nu g_{\nu\mu} \tilde{g}^{\mu\alpha} e_\alpha. \quad (2.58)$$

La última expresión *debe* coincidir con $A = A^\nu e_\nu$, por lo que obtenemos que \tilde{g} está relacionado con el tensor métrico g mediante

$$g_{\nu\mu} \tilde{g}^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha, \quad (2.59)$$

es decir, en términos matriciales, $\tilde{g} = g^{-1}$, por lo que frecuentemente es llamado el *tensor métrico inverso* o el *inverso de la métrica*. Es preciso aclarar que g^{-1} no es el inverso de g en el sentido de que tome números y arroje un par de vectores (como esperaríamos de la inversa de la función bilineal g), sino que, al contrario de g , g^{-1} mapea 1-formas en vectores. Así, para un vector arbitrario A , encontramos que

$$A \xrightarrow{g} \tilde{A} \xrightarrow{\tilde{g}^{-1}} A. \quad (2.60)$$

Pragmáticamente, observamos a partir de (2.52) que el tensor métrico tiene la función de bajar índices. Con este razonamiento, podemos actuar dos veces con el tensor métrico sobre g^{-1} para bajar sus índices,

$$g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \tilde{g}^{\mu\nu} = g_{\alpha\mu} \delta_\beta^\mu = g_{\alpha\beta}, \quad (2.61)$$

en donde hemos empleado (2.59) en la primera igualdad. Es decir, la doble acción del tensor métrico sobre g^{-1} conduce al tensor métrico. Esto motiva simplificar la notación aun más: podemos denotar las componentes del tensor métrico inverso como $g^{\mu\nu}$. En esta notación, (2.56) se simplifica a

$$A^\mu = g^{\mu\nu} A_\nu, \quad (2.62)$$

es decir, el tensor métrico inverso tiene la función de *subir índices*. Además, podemos reescribir (2.59) como

$$g_{\nu\mu} g^{\mu\alpha} = \delta_\nu^\alpha. \quad (2.63)$$

Consideremos ahora el tensor métrico de Minkowski, cuyas componentes son $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Dado el vector $A = (A^0, A^1, A^2, A^3)^T$, las componentes de la correspondiente 1-forma son

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= (\eta_{\mu\nu} A^\nu) = (A^0, -A^1, -A^2, -A^3) \\ &= (A_0, A_1, A_2, A_3). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Es decir, en el espacio–tiempo de Minkowski expresado en la base (2.9), las componentes espaciales de una 1–forma coinciden con las componentes espaciales de su correspondiente vector, salvo por que el signo es opuesto. Lo mismo es cierto sobre las componentes del vector si las componentes de la 1–forma son conocidas, dado que están relacionadas por la métrica inversa representada por la matriz $(\eta^{\mu\nu})$ que coincide con la matriz de componentes de la métrica $(\eta_{\mu\nu})$. Por ejemplo, consideremos la 1–forma gradiente de un campo escalar $\tilde{d}\phi$, cuyas componentes, de acuerdo con (2.32), están dadas por

$$(\tilde{d}\phi)_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \phi.$$

Por lo tanto, las componentes del correspondiente vector están dadas por

$$(d\phi)^\mu \equiv \partial^\mu \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right)^T \phi, \quad (2.65)$$

que coincide con (y justifica) nuestra propuesta de 4–vector gradiente (1.154) de un campo escalar ϕ .

A partir de la definición de producto escalar entre vectores (2.47) y de la relación (2.52), obtenemos

$$\begin{aligned} A \cdot B &= g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu = A^\mu (g_{\mu\nu} B^\nu) = A^\mu B_\mu \\ &= (g_{\nu\mu} A^\mu) B^\nu = A_\nu B^\nu = A_\mu B^\mu, \end{aligned} \quad (2.66)$$

confirmando la expresión (2.4). Esto significa que el producto escalar entre dos vectores se expresa como el producto de las componentes de uno de los vectores con las de la 1–forma asociada al otro vector. Análogamente, empleando (2.55) y (2.62), llegamos a

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu, \quad (2.67)$$

de donde concluimos que $\tilde{A} \cdot \tilde{B} = A \cdot B$.

2.1.6. La base del tensor métrico

Como mencionamos en la sección 2.1.4, g es un tensor por tratarse de una función lineal en sus entradas que toma vectores y devuelve escalares (números reales). Bajo esta definición, una 1–forma también es un tensor. La diferencia radica en el número de vectores que reciben y, por lo tanto, en su número de componentes: una 1–forma acepta un vector mientras que el tensor métrico acepta dos.

Por otra parte, sabemos que las 1–formas forman un espacio vectorial con base $\{\tilde{\omega}^\mu\}$, de forma que si \tilde{A} y \tilde{B} son 1–formas, entonces $\tilde{A} + \tilde{B}$ y $a\tilde{A}$, con $a \in \mathbb{R}$, también lo son y sus componentes están dadas por expresiones similares a las de los vectores, (2.6).

Es posible extender el espacio vectorial de las 1-formas, mediante la introducción del producto tensorial (o exterior) \otimes . Si llamamos $\tilde{\mathbb{V}}$ al espacio vectorial de las 1-formas, entonces el producto tensorial $\tilde{\mathbb{V}} \otimes \tilde{\mathbb{V}}$ también es un espacio vectorial, cuya base está dada por el producto de las dos bases, es decir, por los elementos denotados como $\{\tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu\}$. Por lo tanto, si \tilde{A} y \tilde{B} son 1-formas, su producto tensorial se expresa como

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B} = (A_\mu \tilde{\omega}^\mu) \otimes (B_\nu \tilde{\omega}^\nu) = A_\mu B_\nu \tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu \quad (2.68)$$

y es un elemento del espacio $\tilde{\mathbb{V}} \otimes \tilde{\mathbb{V}}$.

Considerando que V y W son dos vectores, la acción de $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ en la pareja de vectores (V, W) está dada por

$$\tilde{A} \otimes \tilde{B}(V, W) = \tilde{A}(V) \tilde{B}(W). \quad (2.69)$$

Primeramente, notamos que el producto tensorial es una operación no conmutativa, pues

$$\tilde{B} \otimes \tilde{A}(V, W) = \tilde{B}(V) \tilde{A}(W) \neq \tilde{A}(V) \tilde{B}(W). \quad (2.70)$$

En segundo lugar, y de particular importancia para nuestra discusión, es fácil convencerse de que $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ es una función bilineal que toma dos vectores y arroja el producto de los escalares $\tilde{A}(V)$ y $\tilde{B}(W)$, es decir, $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ es un tensor. Además, podemos concluir que el tensor $\tilde{A} \otimes \tilde{B}$ y el tensor métrico son elementos del mismo espacio vectorial $\tilde{\mathbb{V}} \otimes \tilde{\mathbb{V}}$.

Esta observación es muy importante. Quiere decir que el tensor métrico puede expresarse como

$$g = g_{\mu\nu} \tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu \quad (2.71)$$

con sus componentes dadas por $g_{\mu\nu} = g(e_\mu, e_\nu)$, como se puede verificar trivialmente empleando la relación entre las bases del espacio vectorial y su dual (2.28). Recordando ahora que los tensores son invariantes y que los vectores duales base se transforman bajo un difeomorfismo arbitrario de acuerdo a (2.31), notamos que

$$g' = g_{\mu'\nu'} \tilde{\omega}^{\mu'} \otimes \tilde{\omega}^{\nu'} = g_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}_{\alpha} \Lambda^{\nu'}_{\beta} \tilde{\omega}^{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta} \stackrel{!}{=} g_{\alpha\beta} \tilde{\omega}^{\alpha} \otimes \tilde{\omega}^{\beta} = g, \quad (2.72)$$

y, por lo tanto, las componentes del tensor métrico también se transforman no trivialmente de acuerdo a

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} g_{\alpha\beta} \quad \text{transformación de la métrica} \quad (2.73)$$

ante cualquier difeomorfismo. Notamos que la expresión (2.45) que relaciona la métrica de Minkowski con alguna otra métrica es un caso particular de esta propiedad del tensor métrico.

De nuestra discusión, es evidente que el tensor métrico no puede ser el único elemento en el espacio $\tilde{\mathbb{V}} \otimes \tilde{\mathbb{V}}$. Podemos concebir que existen varios objetos t de la forma

$$t = t_{\mu\nu} \tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu, \quad (2.74)$$

donde $t_{\mu\nu}$ corresponde a las componentes de t , dadas por

$$t_{\mu\nu} = t(e_\mu, e_\nu). \quad (2.75)$$

Como el resultado (2.73) no depende de las propiedades específicas del tensor métrico, estas componentes deben transformarse bajo difeomorfismos arbitrarios siguiendo la misma regla, es decir,

$$t_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\nu'}} t_{\alpha\beta}. \quad (2.76)$$

Aunque t debe considerarse como una función que toma dos vectores y regresa un escalar, sus características específicas dependen de las propiedades de la matriz de componentes ($t_{\mu\nu}$). Por ejemplo, a diferencia del tensor métrico, las componentes de t podrían satisfacer la relación antisimétrica $t_{\mu\nu} = -t_{\nu\mu}$ o no respetar ninguna relación de simetría. En este último caso, siempre es posible separar las componentes en dos partes:

- simétrica ante intercambio de índices, $t_{(\mu\nu)} = t_{(\nu\mu)}$, y
- antisimétrica ante intercambio de índices, $t_{[\mu\nu]} = -t_{[\nu\mu]}$,

tales que

$$t_{\mu\nu} = t_{(\mu\nu)} + t_{[\mu\nu]}. \quad (2.77)$$

Las componentes simétricas pueden obtenerse a partir de las componentes arbitrarias de t , mediante el proceso de simetrización expresando por

$$t_{(\mu\nu)} \equiv \frac{1}{2!} [t_{\mu\nu} + t_{\nu\mu}]. \quad (2.78)$$

De forma similar, podemos antisimetrizar las componentes de t mediante

$$t_{[\mu\nu]} \equiv \frac{1}{2!} [t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu}]. \quad (2.79)$$

2.1.7. Tensores de rango (M, N)

En la sección 2.1.2, introdujimos las 1-formas como funciones lineales que aceptan vectores y devuelven escalares. Similarmente, el tensor métrico, introducido en la sección 2.1.4, es una función bilineal que acepta pares de vectores y devuelve el producto escalar de éstos.

Además, tanto las 1-formas como el tensor métrico son invariantes bajo difeomorfismos, tales como un cambio de coordenadas o una transformación de Lorentz, pese a que sus componentes sí son alteradas por las transformaciones. Otra propiedad en común es que las componentes de las 1-formas y del tensor métrico se obtienen de su acción en los vectores base $\{e_\mu\}$. Finalmente, notamos que la base del tensor métrico es el producto tensorial de los elementos base de las 1-formas. Estas similitudes revelan que ambos objetos pertenecen a una clase grande de estructuras conocidas como *tensores*.

Como generalización, un tensor puede ser considerado una función multilinear que toma N vectores y arroja algún escalar. Estos tensores son elementos del espacio $\tilde{\mathbb{V}}^N = \tilde{\mathbb{V}} \otimes \dots \otimes \tilde{\mathbb{V}}$, donde $\tilde{\mathbb{V}}$ es el espacio generado por las 1-formas base y N se conoce como el *rango* de los tensores. Notamos que, en este sentido, una cantidad escalar es un tensor de rango 0. Las componentes $t_{\mu\nu\rho\dots}$ de un tensor t arbitrario estarían dadas por su aplicación sobre los vectores base, $t(e_\mu, e_\nu, e_\rho, \dots)$. El número de componentes de los tensores depende del rango del tensor y de la dimensionalidad del espacio $\tilde{\mathbb{V}}$ en el que son definidos. En 4 dimensiones, un tensor de rango N tiene 4^N componentes. Por ejemplo, un escalar tiene $4^0 = 1$ componente, una 1-forma tienen $4^1 = 4$ componentes, y un tensor de rango dos, como el tensor métrico, tiene $4^2 = 16$ componentes, aunque no todas sean independientes debido a sus relaciones de simetría.

Por otra parte, como el espacio de vectores \mathbb{V} comparte muchas propiedades con su dual, el espacio de 1-formas $\tilde{\mathbb{V}}$, no es difícil concebir que los vectores también son un tipo de tensores, y que éstos pueden generalizarse. Recordemos, por ejemplo, que el tensor métrico inverso g^{-1} es una función lineal que acepta 1-formas y devuelve el producto escalar de éstas, como es evidente de (2.55). También ahí es evidente que las componentes $g^{\mu\nu}$ de este tensor se obtienen de la acción del tensor métrico inverso sobre las 1-formas base, $g^{-1}(\tilde{\omega}^\mu, \tilde{\omega}^\nu)$. En analogía con el caso anterior, podemos considerar que los elementos del espacio \mathbb{V}^M son tensores de rango M que toman M 1-formas y devuelven escalares. Si t es ahora un elemento de \mathbb{V}^M , sus componentes son el resultado de su acción sobre las 1-formas base, $t^{\mu\nu\rho\dots} = t(\tilde{\omega}^\mu, \tilde{\omega}^\nu, \tilde{\omega}^\rho, \dots)$.

Podemos generalizar la definición de tensores a objetos multilineales que toman M 1-formas y N vectores, y devuelven escalares,

$$t(\tilde{A}, \tilde{B}, \dots; U, V, \dots) \in \mathbb{R}. \quad (2.80)$$

Estos tensores son elementos del espacio $\mathbb{V}^M \otimes \tilde{\mathbb{V}}^N$, tales que si $t \in \mathbb{V}^M \otimes \tilde{\mathbb{V}}^N$,

$$t = t^{\mu_1\mu_2\dots\mu_M}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_N} e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes e_{\mu_M} \otimes \tilde{\omega}^{\nu_1} \otimes \tilde{\omega}^{\nu_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{\nu_N}, \quad (2.81)$$

y sus componentes se calculan mediante la aplicación de t sobre las bases de 1-formas y vectores,

$$t^{\mu_1\mu_2\dots\mu_M}{}_{\nu_1\nu_2\dots\nu_N} = t(\tilde{\omega}^{\mu_1}, \tilde{\omega}^{\mu_2}, \dots, \tilde{\omega}^{\mu_M}, e_{\nu_1}, e_{\nu_2}, \dots, e_{\nu_N}). \quad (2.82)$$

Un tensor de este espacio tiene rango (M, N) . Estos tensores también son clasificados como tensores (de tipo) $\binom{M}{N}$, enfatizando la cantidad de índices de las componentes que aparecen *arriba* y *abajo*.

A partir de la expresión (2.81), empleando la invariancia de los tensores y las transformaciones ante difeomorfismos generales para los vectores base (2.17) y las 1-formas base (2.31), se puede mostrar fácilmente que las componentes de un tensor de rango (M, N) se transforman bajo difeomorfismos arbitrarios como (ver ejercicio 2.2)

$$t^{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_M}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots \nu'_N} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\mu'_2}}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_M}}{\partial x^{\mu_M}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x^{\nu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x^{\nu'_N}} t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N}. \quad (2.83)$$

El papel del tensor métrico y su inversa discutido en 2.1.5 puede generalizarse para tensores. A partir de (2.52) y aceptando que los vectores son tensores $\binom{1}{0}$ y las 1-formas son tensores $\binom{0}{1}$, vemos que el tensor métrico mapea vectores a 1-formas,

$$\binom{1}{0} \xrightarrow{g} \binom{0}{1}. \quad (2.84)$$

Inversamente, (2.62) establece un mapeo de 1-formas a vectores a través de la inversa del tensor métrico, de forma que obtenemos la relación entre tensores

$$\binom{0}{1} \xrightarrow{g^{-1}} \binom{1}{0}. \quad (2.85)$$

Para formalizar estos mapeos, dado un vector A y una 1-forma \tilde{A} , notamos que $g(e_\mu, A) = g(e_\mu, A^\nu e_\nu) = A^\nu g(e_\mu, e_\nu) = A^\nu g_{\mu\nu} = A_\mu$ y, análogamente, $g^{-1}(\tilde{\omega}^\mu, \tilde{A}) = A^\mu$. Por lo tanto,

$$\tilde{A} = g(e_\mu, A) \tilde{\omega}^\mu, \quad A = g^{-1}(\tilde{\omega}^\mu, \tilde{A}) e_\mu. \quad (2.86)$$

Para tensores $\binom{M}{N}$, podemos emplear que $t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} e_{\mu_1}$ es un vector (con índice μ_1 variable y los demás fijos), por lo que, de acuerdo a (2.86),

$$g(e_\alpha, t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} e_{\mu_1}) \tilde{\omega}^\alpha = g_{\alpha \mu_1} t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} \tilde{\omega}^\alpha \quad (2.87)$$

es una 1-forma con componentes (de índice α)

$$t_\alpha^{\mu_2 \dots \mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} \equiv g_{\alpha \mu_1} t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N}; \quad (2.88)$$

es decir, el tensor métrico también *baja un índice* al actuar sobre tensores generales. Insertando (2.87) en la expresión de un tensor de rango (M, N) , hallamos que el tensor métrico mapea un tensor $\binom{M}{N}$ a un tensor $\binom{M-1}{N+1}$

$$\binom{M}{N} \xrightarrow{g} \binom{M-1}{N+1}. \quad (2.89)$$

No es difícil convencerse de que la inversa del tensor métrico tiene el efecto opuesto,

$$\binom{M}{N} \xrightarrow{g^{-1}} \binom{M+1}{N-1}. \quad (2.90)$$

Esta observación explica por qué es necesario definir los tensores mediante productos tensoriales tanto de \mathbb{V} como de su dual, $\tilde{\mathbb{V}}$.

La aplicación repetida del tensor métrico sobre un tensor de rango (M, N) conduce a la cadena

$$\binom{M}{N} \xrightarrow{g} \binom{M-1}{N+1} \xrightarrow{g} \binom{M-2}{N+2} \xrightarrow{g} \binom{M-3}{N+3} \xrightarrow{g} \dots \quad (2.91)$$

Claramente, después de M aplicaciones del tensor métrico sobre el tensor $\binom{M}{N}$, éste se convierte en un tensor $\binom{0}{M+N}$. Similarmente, tras N aplicaciones de g^{-1} , obtenemos un tensor $\binom{M+N}{0}$. Este resultado nos muestra que un tensor t de rango (M, N) puede ser transformado a otro equivalente de rango (M', N') , tal que $M' + N' = M + N$ por acción del tensor métrico. Por ejemplo, un tensor F puede ser expresado como tensor de rango $(1, 1)$ o $(2, 0)$ o $(0, 2)$ al permitir la acción del tensor métrico o su inversa.

El mapeo entre distintos tensores nos ayuda a determinar lo que g^{-1} es en términos tensoriales. Si aplicamos dos veces g a las componentes $g^{\alpha\beta}$ de g^{-1} , obtenemos

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} g^{\alpha\beta}. \quad (2.92)$$

Entonces, $g^{\alpha\beta}$ son las componentes de un tensor $\binom{2}{0}$. Adicionalmente, notamos que

$$g_{\mu\alpha} g^{\alpha\beta} = g_{\mu}^{\beta}. \quad (2.93)$$

Sin embargo, como $g^{\alpha\beta}$ son las componentes de la inversa de g , con componentes $g_{\alpha\beta}$, entonces

$$g_{\mu}^{\beta} = \delta_{\mu}^{\beta}. \quad (2.94)$$

Por otra parte, así como las componentes de un tensor de rango $(0, 2)$ puede ser separadas en simétricas y antisimétricas de acuerdo a (2.78) y (2.79), podemos encontrar un método de hacer lo mismo con tensores arbitrarios. Para lograrlo, podemos reescribir (2.78) como

$$t_{(\mu_1\mu_2)} = \frac{1}{2!}(t_{\mu_1\mu_2} + t_{\mu_2\mu_1}) = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \Sigma_2} t_{\mu_{\sigma(1)}\mu_{\sigma(2)}}, \quad (2.95)$$

donde σ es un elemento del conjunto de permutaciones de los elementos y $\Sigma_2 = \{(1, 2), (2, 1)\}$, lo que implica que, por ejemplo, para el segundo elemento de Σ_2 debemos tomar $\sigma(1) = 2$

y $\sigma(2) = 1$. Generalizando para tensores de distintos tipos, tenemos

$$\text{rango } (0, N) : \quad t_{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N)} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} t_{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(N)}}, \quad (2.96)$$

$$\text{rango } (M, 0) : \quad t^{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M)} = \frac{1}{M!} \sum_{\sigma \in \Sigma_M} t^{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(M)}}, \quad (2.97)$$

$$\text{rango } (M, N) : \quad t_{(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N)}^{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M)} = \frac{1}{N!M!} \sum_{\sigma \in \Sigma_M} \sum_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_N} t^{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(M)}}_{\nu_{\tilde{\sigma}(1)} \nu_{\tilde{\sigma}(2)} \dots \nu_{\tilde{\sigma}(N)}}. \quad (2.98)$$

Por ejemplo, la porción completamente simétrica de un tensor t de rango $(2, 2)$ es

$$t^{(\mu\nu)}_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{2!2!} (t^{\mu\nu}_{\alpha\beta} + t^{\nu\mu}_{\alpha\beta} + t^{\mu\nu}_{\beta\alpha} + t^{\nu\mu}_{\beta\alpha}). \quad (2.99)$$

Adicionalmente, es posible simetrizar un tensor únicamente con respecto a algunas de sus componentes, aplicando una expresión similar. Por ejemplo, si se desea simetrizar sólo p de los índices superiores y q de los inferiores de un tensor de rango (M, N) , las componentes del nuevo tensor están dadas por

$$t_{(\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q) \nu_{q+1} \dots \nu_N}^{(\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p) \mu_{p+1} \dots \mu_M} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \sum_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_q} t^{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(p)} \mu_{p+1} \dots \mu_M}_{\nu_{\tilde{\sigma}(1)} \nu_{\tilde{\sigma}(2)} \dots \nu_{\tilde{\sigma}(q)} \nu_{q+1} \dots \nu_N} \quad (2.100)$$

en términos de las componentes del tensor t .

De forma similar, es posible también obtener expresiones para la porción *antisimétrica* de un tensor arbitrario. Reescribimos primero (2.79) para un tensor de rango $(0, 2)$ como

$$t_{[\mu_1 \mu_2]} = \frac{1}{2!} (t_{\mu_1 \mu_2} - t_{\mu_2 \mu_1}) = \frac{1}{2!} \sum_{\sigma \in \Sigma_2} \text{sgn}(\sigma) t_{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)}}, \quad (2.101)$$

donde, para cualquier número de elementos,

$$\text{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares (núm. par de permutaciones),} \\ -1 & \text{permutaciones impares (núm. impar permutaciones).} \end{cases} \quad (2.102)$$

Generalizando este resultado para tensores de rango $(0, N)$, obtenemos

$$t_{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_N]} = \frac{1}{N!} \sum_{\sigma \in \Sigma_N} \text{sgn}(\sigma) t_{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(N)}}. \quad (2.103)$$

Entonces, las componentes completamente antisimétricas de un tensor de rango (M, N) están dadas por

$$t_{[\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N]}^{[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M]} = \frac{1}{N!M!} \sum_{\sigma \in \Sigma_M} \sum_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_N} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tilde{\sigma}) t^{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(M)}}_{\nu_{\tilde{\sigma}(1)} \nu_{\tilde{\sigma}(2)} \dots \nu_{\tilde{\sigma}(N)}}. \quad (2.104)$$

Y el análogo antisimétrico de (2.100) es

$$t_{[\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q] \nu_{q+1} \dots \nu_N}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_M} = \frac{1}{p!q!} \sum_{\sigma \in \Sigma_p} \sum_{\tilde{\sigma} \in \Sigma_q} \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tilde{\sigma}) t_{\nu_{\tilde{\sigma}(1)} \nu_{\tilde{\sigma}(2)} \dots \nu_{\tilde{\sigma}(q)} \nu_{q+1} \dots \nu_N}^{\mu_{\sigma(1)} \mu_{\sigma(2)} \dots \mu_{\sigma(p)} \mu_{p+1} \dots \mu_M}. \quad (2.105)$$

También es posible combinar la simetrización y antisimetrización de las componentes de un tensor. Por ejemplo, considere un tensor R de rango $(2, 2)$. Simetrizando los dos índices superiores y antisimetrizando los dos inferiores, obtenemos

$$R^{(\mu\nu)}_{[\alpha\beta]} = \frac{1}{2!2!} (R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} - R^{\mu\nu}{}_{\beta\alpha} + R^{\nu\mu}{}_{\alpha\beta} - R^{\nu\mu}{}_{\beta\alpha}). \quad (2.106)$$

2.1.8. Álgebra tensorial

Los espacios vectoriales (sobre el campo de los reales) \mathbb{V} de vectores y su dual $\tilde{\mathbb{V}}$ de 1-formas, ambos dotados del operador $+$ que permite sumar elementos dentro de cada espacio, constituyen los espacios base para la construcción de tensores más generales si adoptamos el producto tensorial \otimes definido en 2.1.6. Con estos ingredientes, los espacios $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$, $\mathbb{V} \otimes \tilde{\mathbb{V}}$, $\tilde{\mathbb{V}} \otimes \tilde{\mathbb{V}}$, $\mathbb{V} \otimes \mathbb{V} \otimes \mathbb{V}$, etc. contienen, como elementos, tensores de distintos rangos. El conjunto de todos estos tensores dotado del producto tensorial define el *álgebra tensorial*, que es asociativa y distributiva bajo el producto tensorial \otimes y bajo la suma $+$ en cada subespacio vectorial.

Los tensores del álgebra tensorial admiten las siguientes operaciones:

- *Suma $+$ de tensores del mismo rango.* Si A y B son tensores de rango (N, M) , entonces $t = A + B$ es también un tensor de rango (N, M) y sus componentes están dadas por

$$t^{\mu\dots\nu\dots} = A^{\mu\dots\nu\dots} + B^{\mu\dots\nu\dots}. \quad (2.107)$$

- *Producto exterior \otimes entre tensores.* Si A es de rango (M_1, N_1) y B es de rango (M_2, N_2) , entonces $t = A \otimes B$ tiene rango $(M_1 + M_2, N_1 + N_2)$ y sus componentes son

$$t^{\mu_1 \dots \mu_{M_1} \nu_1 \dots \nu_{N_1} \alpha_1 \dots \alpha_{M_2} \beta_1 \dots \beta_{N_2}} = A^{\mu_1 \dots \mu_{M_1} \nu_1 \dots \nu_{N_1}} B^{\alpha_1 \dots \alpha_{M_2} \beta_1 \dots \beta_{N_2}}, \quad (2.108)$$

es decir, consiste en la yuxtaposición de las componentes del tensor original. Frecuentemente, en la literatura $t = AB$ se interpreta también como el producto tensorial.

- *Contracción.* La definición formal se trata del *emparejamiento natural* de las componentes de un tensor en un subespacio \mathbb{V} con sus componentes en el subespacio dual $\tilde{\mathbb{V}}$. Esta intrincada definición se expresa en la práctica como la suma de índices repetidos (uno superior y otro inferior) de un mismo tensor. Si A es un tensor de rango

(M, N) , la contracción de las componentes en el p -ésimo subespacio \mathbb{V} con las del q -ésimo subespacio $\tilde{\mathbb{V}}$ se expresa como

$$t^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \mu_{p+1} \dots \mu_M}{}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \nu_{q+1} \nu_N} = A^{\mu_1 \dots \mu_{p-1} \alpha \mu_{p+1} \dots \mu_M}{}_{\nu_1 \dots \nu_{q-1} \alpha \nu_{q+1} \nu_N}, \quad (2.109)$$

donde t es un tensor diferente de rango $(M-1, N-1)$ debido a que el índice α ha desaparecido (ha sido *contraído*).

Notemos que la contracción y el producto exterior conducen al producto interior. Sean A y \tilde{B} un vector y una 1-forma respectivamente. Entonces $t = A \otimes \tilde{B}$ es de rango $(1, 1)$ y componentes $t^\mu{}_\nu = A^\mu B_\nu$. Si contraemos los índices,

$$t^\mu{}_\mu = A^\mu B_\mu, \quad (2.110)$$

entonces el resultado tiene rango $(0, 0)$, es decir, es un escalar.

2.1.9. Gradiente de un tensor en espacio-tiempo plano

En la sección 2.1.3 hemos determinado que el gradiente de un campo escalar arbitrario $\phi(x^\mu)$ es la 1-forma

$$\tilde{d}\phi = (\tilde{d}\phi)_\mu \tilde{\omega}^\mu, \quad (2.111)$$

donde las componentes $(\tilde{d}\phi)_\mu$ están dadas por $(\tilde{d}\phi)_\mu = \phi_{,\mu} = \frac{\partial \phi}{\partial x^\mu} = \partial_\mu \phi$. Si consideramos que la función escalar ϕ es un tensor de rango $(0, 0)$, podríamos proponer que la operación gradiente \tilde{d} es tal que incrementa el rango en una unidad, es decir

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\tilde{d}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.112)$$

Esta idea puede aplicarse a tensores. Consideremos un tensor arbitrario t , tal que

$$t = t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N} e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes e_{\mu_M} \otimes \tilde{\omega}^{\nu_1} \otimes \tilde{\omega}^{\nu_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{\nu_N}. \quad (2.113)$$

Consideremos adicionalmente que los vectores y 1-formas base están dados, respectivamente, por las bases constantes (2.9) y (2.29), válidas sólo en el espacio-tiempo de Minkowski. El gradiente de t es entonces

$$\tilde{d}t = (\tilde{d}t)_\alpha \otimes \tilde{\omega}^\alpha = t_{,\alpha} \otimes \tilde{\omega}^\alpha = \left(t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N, \alpha} \otimes_{i=1}^M e_{\mu_i} \otimes_{j=1}^N \tilde{\omega}^{\nu_j} \right) \otimes \tilde{\omega}^\alpha, \quad (2.114)$$

porque e_{μ_i} y $\tilde{\omega}^{\nu_j}$ son constantes por lo que $e_{\mu_i, \alpha} = 0 = \tilde{\omega}^{\nu_j, \alpha}$. En un espacio-tiempo diferente o en otra elección de coordenadas, como veremos en la sección 2.4, los vectores base pueden no ser constantes y entonces la ecuación (2.114) contiene elementos adicionales. En el simple espacio-tiempo de Minkowski, obtenemos

$$\tilde{d}t = t^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_M}{}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_N, \alpha} \otimes_{i=1}^M e_{\mu_i} \otimes_{j=1}^N \tilde{\omega}^{\nu_j} \otimes \tilde{\omega}^\alpha, \quad (2.115)$$

de donde observamos que el gradiente $\tilde{d}t$ de un tensor t de rango (M, N) es un tensor de rango $(M, N + 1)$. De manera similar, vemos que $\tilde{d}^2t \equiv \tilde{d}(\tilde{d}t)$ es un tensor de rango $(M, N + 2)$ y la n -ésima aplicación de \tilde{d} sobre t resulta en un tensor de rango $(M, N + n)$.

Por ejemplo, si el tensor al que deseamos calcular el gradiente es el vector $A = A^\mu e_\mu$, obtenemos

$$\tilde{d}A = (A^\mu{}_{,\alpha} e_\mu + A^\mu e_{\mu,\alpha}) \otimes \tilde{\omega}^\alpha = A^\mu{}_{,\alpha} e_\mu \otimes \tilde{\omega}^\alpha, \quad (2.116)$$

donde hemos empleado las definiciones

$$A^\mu{}_{,\alpha} \equiv \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\alpha}, \quad e_{\mu,\alpha} \equiv \frac{\partial e_\mu}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (2.117)$$

en el espacio-tiempo de Minkowski.

2.2. Ecuaciones de Maxwell en relatividad especial

Como destacamos en la sección 1.11.1, uno de los aspectos más relevantes de los tensores es que, dado que son invariantes bajo difeomorfismos, entonces la física expresada en términos tensoriales es invariante particularmente bajo transformaciones de Lorentz, es decir, es universal para todos los observadores inerciales. Pero es más. Dado que otros difeomorfismos incluyen no sólo transformaciones de coordenadas, sino también deformaciones del espacio-tiempo, como veremos a partir de la sección 2.5, la física expresada en términos tensoriales también es invariante en marcos de referencia acelerados, lo que conducirá a la relatividad general. Habitualmente, a la expresión de la física en términos tensoriales le llamamos *notación covariante*. Si un formalismo no puede escribirse en esta notación, entonces no es compatible con la relatividad. Comenzaremos nuestra discusión de la física en notación covariante con la formulación de las ecuaciones de Maxwell.

El primer paso para reescribir las ecuaciones clave del electromagnetismo es escoger un conjunto de unidades. Nosotros elegimos unidades Gaussianas o cgs, donde las ecuaciones de Maxwell en el vacío y con fuentes están dadas por

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (2.118)$$

y la *fuerza de Lorentz* se escribe como

$$\mathbf{f} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \right), \quad (2.119)$$

donde \mathbf{E} y \mathbf{B} son el campo eléctrico y magnético, respectivamente, y ρ y \mathbf{j} son sus fuentes, la densidad de carga y la densidad de corriente.

La fuerza de Lorentz describe el movimiento de una partícula, con carga eléctrica q y velocidad local \mathbf{u} , a causa de los campos. La carga q es un escalar y, por lo tanto, invariante relativista.

2.2.1. Fuerza de Lorentz y ecuaciones de Maxwell

Vemos que \mathbf{f} depende de $\frac{q}{c}\mathbf{u}$, por lo que una primera conjetura es que el vector de fuerza de Lorentz f debe de ser proporcional al vector de velocidad, $\frac{q}{c}U$. Además debe haber un segundo tensor para agregar la acción del campo. Debido a que U es un vector y f también, el segundo tensor puede ser de rango (1, 1) y debe presentarse la contracción de algún índice. La elección más natural, en términos de las componentes, es entonces

$$f^\mu = \frac{q}{c}F^\mu{}_\nu U^\nu. \quad (2.120)$$

Notemos que el índice ν del lado derecho se contrae y el único índice libre es μ en ambos lados. La introducción del tensor F de rango (1, 1) permite que f tenga la estructura correcta. Ahora, veamos que, como $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$, entonces

$$0 = \frac{d}{d\tau}(p^\mu p_\mu) = 2\frac{dp^\mu}{d\tau}p_\mu = 2f^\mu p_\mu = 2f^\mu m U_\mu \quad \Longleftrightarrow \quad f^\mu U_\mu = 0, \quad (2.121)$$

donde hemos empleado (1.66) y (1.67). Aplicando el tensor métrico para bajar y subir índices sobre (2.120) y (2.121), expresando F ahora como un tensor de rango (0, 2), obtenemos

$$f_\mu U^\mu = 0 \quad \Longrightarrow \quad F_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = 0. \quad (2.122)$$

Dado que $F_{\mu\nu} U^\nu U^\mu = F_{\nu\mu} U^\mu U^\nu$ y que $U^\mu U^\nu = U^\nu U^\mu$, podemos descomponer (2.122) en dos partes como

$$\frac{1}{2}U^\mu U^\nu (F_{\mu\nu} + F_{\nu\mu}) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}. \quad (2.123)$$

Este resultado significa que el tensor F es antisimétrico. A F se le conoce como el *tensor de Faraday*.

Una elección del tensor de Faraday en representación matricial que conduce a la fuerza de Lorentz como la conocemos es (ver ejercicio 2.7)

$$(F_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & E(1) & E(2) & E(3) \\ -E(1) & 0 & -B(3) & B(2) \\ -E(2) & B(3) & 0 & -B(1) \\ -E(3) & -B(2) & B(1) & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.124)$$

donde $E(i)$ y $B(i)$ son los campos eléctrico y magnético en la dirección x^i con $i = 1, 2, 3$. Evitamos usar la notación E_1, \dots para no confundir E con un tensor, ya que \mathbf{E} y \mathbf{B} son sólo vectores tridimensionales. Es fácil mostrar que las componentes espaciales de f ,

$$f_i = \frac{q}{c}F_{i\mu}U^\mu, \quad (2.125)$$

determinan la fuerza de Lorentz habitual. Es útil notar que la versión de F de rango $(2, 0)$ tiene componentes ligeramente diferentes:

$$F^{\mu\nu} = \eta^{\mu\alpha}\eta^{\nu\beta}F_{\alpha\beta} \quad \Longrightarrow \quad (F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -E(1) & -E(2) & -E(3) \\ E(1) & 0 & -B(3) & B(2) \\ E(2) & B(3) & 0 & -B(1) \\ E(3) & -B(2) & B(1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.126)$$

Por ejemplo, $E(1) = -F^{01} = F_{01}$ mientras que $B(1) = F^{32} = F_{32}$.

Ahora consideremos una distribución continua de cargas eléctricas moviéndose a una velocidad local \mathbf{u} . La densidad de carga en su sistema de referencia propio es ρ_0 , entonces la densidad de carga medida en el laboratorio en reposo es

$$\rho = \gamma(u)\rho_0 \quad \text{porque} \quad V = \gamma(u)^{-1}V', \quad (2.127)$$

donde V es el volumen medido en el laboratorio y V' está medido en el marco de referencia en movimiento. Vemos que la relación entre ρ y ρ_0 es similar a

$$dt = \gamma(u)d\tau \quad (2.128)$$

y, por lo tanto, ρ parece transformarse de la misma manera que $\frac{x^0}{c}$.

Por otra parte, la densidad de corriente en este sistema puede definirse como

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{u}, \quad (2.129)$$

la cual está restringida por la ecuación de continuidad,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0. \quad (2.130)$$

Con base en estas observaciones, podemos proponer que la 4-corriente de una carga en movimiento desde el punto de vista de un observador en reposo está dada por

$$(J^\mu) = (c\rho, \mathbf{j})^T = (c\gamma(u)\rho_0, \mathbf{u}\gamma(u)\rho_0)^T = (\rho_0 U^\mu) \quad (2.131)$$

para representar la generalización de la corriente tridimensional \mathbf{j} . Para nuestro sistema, las componentes J^μ se transforman como dx^μ porque son proporcionales a U^μ . Con esta definición, la ecuación de continuidad (2.130) puede reexpresarse como

$$\partial_\mu J^\mu = J^\mu{}_{,\mu} = 0. \quad \text{ecuación de continuidad} \quad (2.132)$$

Una consecuencia de esta ecuación es que la carga definida por $Q \equiv \int d^3x J^0$ se conserva en el tiempo. Para confirmarlo, calculamos la derivada temporal de Q como

$$\frac{\partial Q}{c\partial t} = \int_{\Omega} d^3x \frac{\partial J^0}{c\partial t} = - \int_{\Omega} d^3x \nabla \cdot \mathbf{j} = \oint_{\partial\Omega} \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = 0, \quad (2.133)$$

donde Ω es un volumen grande que envuelve la carga Q , $\partial\Omega$ su frontera y \hat{n} es un vector normal a $\partial\Omega$ apuntando al exterior de Ω . En la penúltima igualdad usamos el teorema de Gauss, mientras que la última igualdad es el resultado de que \mathbf{j} se desvanece en la frontera si Ω es suficientemente grande. Por esta razón, a la ecuación (2.132) también se le llama la ecuación de conservación de carga.

Antes de reescribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, necesitamos un ingrediente más: el 4-potencial electromagnético $A = A^\mu e_\mu$, al cual podemos llegar recordando que los campos electromagnéticos pueden escribirse en términos de potenciales.

En electromagnetismo, los campos \mathbf{E} y \mathbf{B} pueden reescribirse como

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{c\partial t} - \nabla \phi, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (2.134)$$

en términos de los llamados potencial escalar electromagnético ϕ y potencial vectorial electromagnético \mathbf{A} . En componentes, la expresión anterior puede escribirse mediante el símbolo completamente antisimétrico de *Levi-Civita* ε^{ijk} como

$$E(i) = -\partial_0 A^i - \partial_i \phi, \quad B(i) = \varepsilon^{ijk} \partial_j A^k. \quad (2.135)$$

(Es importante la posición de los índices. Nótese que esta notación no es consistente con la contracción de índices porque ésta no es aún una notación covariante.)

Recordando que $\partial^\mu \phi = \eta^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$, entonces $\partial^i \phi = -\partial_i \phi$ y $\partial^0 \phi = \partial_0 \phi$, por lo que

$$E(i) = -\partial^0 A^i + \partial^i \phi, \quad B(i) = -\varepsilon^{ijk} \partial^j A^k. \quad (2.136)$$

Como las componentes de \mathbf{E} y \mathbf{B} aparecen como componentes del tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$, vemos que

$$\begin{aligned} -F^{0i} &= -\partial^0 A^i + \partial^i \phi, \\ -F^{jk} &= -\varepsilon^{ijk} \partial^j A^k = -\partial^j A^k + \partial^k A^j. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Para que la primera de estas ecuaciones sea simétrica, podemos definir el 4-potencial A como

$$(A^\mu) = (\phi, A^1, A^2, A^3)^T. \quad (2.138)$$

Por lo tanto, en términos de este tensor, las componentes del tensor de Faraday están dadas por

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu \quad \implies \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (2.139)$$

A partir de (2.139), se obtiene la llamada *identidad de Bianchi*

$$F_{\mu\nu,\sigma} + F_{\nu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\nu} = 0, \quad \text{identidad de Bianchi electromagnética} \quad (2.140)$$

debido a que, como por ejemplo $A_{\nu,\mu\sigma} = A_{\nu,\sigma\mu}$ (las derivadas conmutan), se satisface

$$A_{\nu,\mu\sigma} - A_{\mu,\nu\sigma} + A_{\sigma,\nu\mu} - A_{\nu,\sigma\mu} + A_{\mu,\sigma\nu} - A_{\sigma,\mu\nu} = 0. \quad (2.141)$$

Notemos que (2.140) provee una ecuación diferencial no trivial sólo para $\mu \neq \nu \neq \sigma$. Por ejemplo, si $\nu = \mu$, el lado izquierdo de (2.140) no contiene información,

$$F_{\mu\mu,\sigma} + F_{\mu\sigma,\mu} + F_{\sigma\mu,\mu} = 0 + F_{\mu\sigma,\mu} - F_{\mu\sigma,\mu} = 0. \quad (2.142)$$

De hecho, debido a que la identidad de Bianchi (2.140) posee varias simetrías, las únicas elecciones no triviales de índices son:

$$\begin{aligned} \mu = 0, \nu = 1, \sigma = 2 &\rightarrow F_{01,2} + F_{12,0} + F_{20,1} = \partial_2 E(1) - \partial_0 B(3) - \partial_1 E(2) = 0 \\ &\iff \partial_1 E(2) - \partial_2 E(1) = -\partial_0 B(3) \\ \mu = 0, \nu = 2, \sigma = 3 &\rightarrow F_{02,3} + F_{23,0} + F_{30,2} = \partial_3 E(2) - \partial_0 B(1) - \partial_2 E(3) = 0 \\ &\iff \partial_2 E(3) - \partial_3 E(2) = -\partial_0 B(1) \\ \mu = 0, \nu = 3, \sigma = 1 &\rightarrow F_{03,1} + F_{31,0} + F_{10,3} = \partial_1 E(3) - \partial_0 B(2) - \partial_3 E(1) = 0 \\ &\iff \partial_3 E(1) - \partial_1 E(3) = -\partial_0 B(2) \\ \mu = 1, \nu = 2, \sigma = 3 &\rightarrow F_{12,3} + F_{23,1} + F_{31,2} = -\partial_3 B(3) - \partial_1 B(1) - \partial_2 B(2) = 0 \\ &\iff \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{aligned} \quad (2.143)$$

La última ecuación en (2.143) es directamente la ley de Gauss magnética que implica la inexistencia de monopolos magnéticos. Las tres ecuaciones anteriores pueden reescribirse como $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_0 \mathbf{B}$, correspondiente a la ley de Faraday-Lenz. En resumen, de la definición del tensor de Faraday, hemos obtenido la identidad de Bianchi (2.140), que corresponde a dos de las ecuaciones de Maxwell, escritas en el formalismo covariante.

Es más directo convencerse de que las otras dos ecuaciones de Maxwell (ver primer renglón de (2.118)) están contenidas en

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu. \quad (2.144)$$

Por ejemplo, para $\nu = 0$ obtenemos

$$\partial_\mu F^{\mu 0} = \partial_i F^{i0} = \nabla \cdot \mathbf{E} \stackrel{!}{=} \frac{4\pi}{c} J^0 = 4\pi\rho. \quad (2.145)$$

Las ecuaciones de Maxwell expresadas en términos de los tensores F y J permiten identificar fácilmente algunas de las propiedades de la electrodinámica:

- Simetría de norma. Diferentes elecciones de potencial electromagnético A conducen a la misma física debido a que A no es directamente medible. Consideremos que A^μ son las componentes del 4-potencial asociado a un tensor de Faraday con componentes $F^{\mu\nu}$ que satisfacen las ecuaciones de Maxwell (2.140) y (2.144). Buscamos el efecto de alterar A^μ por el gradiente de una función escalar arbitraria $\alpha = \alpha(x)$ (tensor de rango 0) como

$$A^\mu \rightarrow \mathcal{A}^\mu = A^\mu + \partial^\mu \alpha. \quad (2.146)$$

Encontramos que el nuevo tensor de Faraday tiene las componentes $\partial^\mu \mathcal{A}^\nu - \partial^\nu \mathcal{A}^\mu = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu \partial^\nu \alpha - \partial^\nu \partial^\mu \alpha = F^{\mu\nu}$, como antes de la transformación (2.146). Como las ecuaciones de Maxwell se construyen con base en el tensor de Faraday y no en el 4-potencial, entonces A y \mathcal{A} conducen a la misma física.

Esta libertad en la elección del 4-potencial muestra que la teoría electrodinámica descrita por las ecuaciones (2.140) y (2.144) posee algunos grados de libertad redundantes que podemos eliminar al elegir para cualquier teoría el *mismo tipo* de 4-potencial. A este procedimiento se le conoce como elección de *norma*. Una norma elegida comúnmente en teorías relativistas es la llamada *norma de Lorentz*, definida por la condición $\partial_\mu A^\mu = 0$.

Toda transformación no trivial de los elementos de una teoría que no modifican la física que emerge de ésta es llamada *simetría*. Por lo tanto, la transformación de norma (2.146) es una *simetría de norma*.

- Invariancia bajo difeomorfismos. La forma covariante de las ecuaciones de Maxwell permite formular las ecuaciones del electromagnetismo independientemente de la base de coordenadas empleada. Recordemos que las componentes de un tensor covariante arbitrario se transforman bajo difeomorfismos de acuerdo a (2.83). En particular, el gradiente de una función escalar arbitraria ϕ se transforma como en (2.34). Si F satisface (2.144), notamos que, al aplicar un difeomorfismo, las componentes transformadas $F^{\mu'\nu'}$ satisfacen

$$\begin{aligned} \partial_{\mu'} F^{\mu'\nu'} &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \partial_\alpha F^{\beta\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \partial_\alpha F^{\beta\gamma} \\ &= \delta_\beta^\alpha \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \partial_\alpha F^{\beta\gamma} = \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \partial_\alpha F^{\alpha\gamma} \\ &= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\gamma} \frac{4\pi}{c} J^\gamma \\ &= \frac{4\pi}{c} J^{\nu'}. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Esto indica que las ecuaciones (2.144) son invariantes bajo difeomorfismos.⁵

⁵Es fácil mostrar que las ecuaciones de Maxwell en su forma (2.144) son invariantes sólo si $e_{\mu,\nu} = 0 = \tilde{\omega}^{\mu,\nu}$. Esta debilidad será corregida en la sección 2.5.

Por último, veamos una manera de simplificar las ecuaciones de Maxwell. Podemos introducir el *dual de Hodge* del tensor de Faraday $*F$ como el tensor de componentes

$$*F^{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \quad (2.148)$$

donde $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo de Levi-Civita de rango 4. En forma matricial, el dual de Hodge de F está dado por

$$(*F^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & -B(1) & -B(2) & -B(3) \\ B(1) & 0 & E(3) & -E(2) \\ B(2) & -E(3) & 0 & E(1) \\ B(3) & E(2) & -E(1) & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.149)$$

Se puede mostrar fácilmente que, en términos de $*F$, la identidad de Bianchi (2.140) se simplifica a

$$*F^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0. \quad (2.150)$$

Para concluir este ejemplo, identificamos las cantidades escalares (invariantes) que se pueden construir con F y $*F$. Los invariantes son aquéllos en los que todos los índices han sido contraídos y, por lo tanto, no se transforman bajo difeomorfismos. Para la teoría electromagnética, sólo hay dos:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} &= 2 (|\mathbf{B}|^2 - |\mathbf{E}|^2), \\ F_{\mu\nu} *F^{\mu\nu} &= -4 \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}. \end{aligned} \quad (2.151)$$

Formalmente, el segundo invariante es llamado *invariante pseudo-escalar* porque sí se transforma con un signo negativo bajo las transformaciones impropias de Lorentz (1.119). Las cantidades escalares son muy importantes porque representan observables universales para todo tipo de observador. Así, sabemos que todo observador debe medir los mismos resultados para las combinaciones dadas por (2.151).

Otra información muy importante que debemos mencionar aquí es que la densidad de energía de un medio de carga continua (por ejemplo, de agua con carga eléctrica) está dada por

$$\frac{1}{8\pi} (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2), \quad (2.152)$$

que, en el formalismo covariante, debe incluirse en el llamado tensor de energía-momento o tensor de tensión-energía de rango 2, cuyas componentes se denotan por $T^{\mu\nu}$, como estudiamos a continuación.

2.3. Tensor de energía–momento

Para una partícula aislada moviéndose en alguna dirección, $p = p^\mu e_\mu$ da una descripción completa de su momento y energía. Sin embargo, en un medio continuo, el momento puede “fluir” en diferentes direcciones conduciendo, por ejemplo, a las 3 componentes de *esfuerzos cortantes* en 4 dimensiones y a la *presión* debida al momento de todas las partículas en las 3 direcciones espaciales. Por lo tanto, necesitamos al menos 6 grados de libertad extra para llegar a la descripción de todas las componentes de energía y momento. Estos 10 grados de libertad, incluyendo las componentes de p , caben perfectamente en una matriz simétrica en cuatro dimensiones. Esto conduce a la definición del *tensor de energía–momento*.

Formalmente, el tensor de energía–momento T , con componentes $T^{\mu\nu}$, es el flujo de las componentes del 4–momento a través de una superficie de x^ν constante. Intentemos aclarar esta definición en el marco de referencia en reposo. La componente $(0,0)$ de T es el flujo de $p^0 = \frac{E}{c}$ a través de la “superficie” de x^0 constante,⁶ entonces T^{00} es densidad de energía que denotaremos con ρ . T^{i0} es flujo de p^i a través de una *superficie* de tiempo constante, entonces T^{i0} es densidad de momento. T^{0i} es el flujo de energía a través de una superficie de x^i constante, y T^{ij} es el flujo de p^i a través de la superficie a x^j constante.

En un marco de referencia en reposo, vemos que el flujo de energía T^{0i} puede ser diferente de cero debido a la conducción de calor. Lo mismo aplica para T^{i0} . De hecho, es posible mostrar que T es un tensor simétrico (ver apéndice C), por lo que $T^{i0} = T^{0i}$.

Los flujos T^{ij} representan fuerzas entre *componentes del sistema* adyacentes que pueden ser perpendiculares (o paralelas) a la superficie que comparten. Las componentes paralelas son las responsables del esfuerzo cortante y son la razón de $T^{ij} \neq 0$ para $i \neq j$. Cuando las fuerzas son perpendiculares, son solamente *presión* que aparece en los elementos de la diagonal T^{ii} (sin suma sobre índices). Recordemos que, formalmente, la presión debe ser independiente de la dirección. Entonces, debemos usar el término *estrés* o *tensión* cuando $T^{ii} \neq T^{jj}$.

2.3.1. Tensor de energía–momento de un fluido perfecto.

El tensor de energía–momento T existe para cualquier tipo de materia, como sólidos y fluidos, que pueden ser caracterizados como medios continuos. El fluido es una categoría muy general, que incluye todo tipo de materia y es incluso capaz de describir el contenido de nuestro universo entero.

De entre todos los tipos de fluidos, el fluido *perfecto* es el más simple. Definimos un fluido perfecto como un fluido compuesto de partículas que no intercambian momento a través de conducción de calor ni esfuerzos de corte en el marco de referencia en reposo. Resulta que, en consecuencia, (a) el fluido es *isotrópico* en su marco de referencia en reposo, y (b)

⁶Una “superficie” de x^0 constante corresponde al volumen entero del espacio a un tiempo dado.

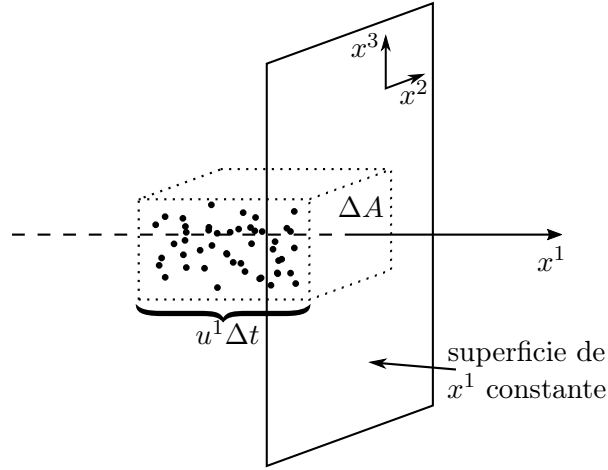


Figura 2.1: El número de partículas que atraviesan una porción ΔA de la superficie $x^1 = \text{cte}$ en un tiempo Δt es $nu^1\Delta t\Delta A$ para velocidades no relativistas. Entonces, el flujo no relativista por unidad de área es nu^1 .

la matriz de componentes $(T^{\mu\nu})$ es diagonal. Un fluido perfecto puede ser caracterizado por su presión P y su densidad de energía ρ .

El ejemplo más sencillo de un fluido perfecto es el *polvo*. El polvo es una colección de partículas en reposo con respecto de las otras (partículas del fluido) en algún marco de referencia (o, alternativamente, un fluido perfecto con presión nula).

Para llegar al tensor T , primero necesitamos definir la *densidad de número de partículas* n en el marco en reposo, la cual cuenta el número de partículas en un elemento de volumen del fluido. Podemos generalizar este concepto a un 4-vector llamado vector de flujo numérico N , cuyas componentes son

$$N^\mu = nU^\mu, \quad (2.153)$$

y que describe no solamente la densidad de número de partículas, sino también cuenta el número de partículas que fluyen en la dirección x^i cuando el polvo se está moviendo con 4-velocidad U en la perspectiva de algún marco de referencia; es decir, generaliza n a cualquier marco de referencia. Observamos que, como $N \cdot N = n^2 U \cdot U = n^2 c^2$, entonces n es un escalar bajo difeomorfismos.

En el marco de referencia en reposo, encontramos

$$N^0 = nc \quad \text{y} \quad N^i = 0. \quad (2.154)$$

Pero en otros marcos de referencia, encontramos

$$N^0 = \gamma(u)nc, \quad N^i = \gamma(u)nu^i, \quad (2.155)$$

donde N^0 es la densidad numérica como la ve un observador en movimiento, y N^i es el flujo a través de una superficie de x^i constante. Esta interpretación de N^i puede ilustrarse fácilmente con el ejemplo más sencillo: considere una *caja de polvo* moviéndose con velocidad no relativista u^1 , como se muestra en la figura 2.1. En un tiempo Δt , la caja avanza una distancia $u^1\Delta t$ a lo largo de x^1 , por lo que el volumen que atraviesa un área ΔA perpendicular al movimiento de la caja es $u^1\Delta t\Delta A$. El número total de partículas que atraviesan esa superficie se obtiene de multiplicar este volumen a n . Por lo tanto, el flujo de partículas, dado por el número de partículas por unidad de área y tiempo, es nu^1 , que coincide con N^1 definido por (2.155) para velocidades no relativistas. Para velocidades relativistas, deberemos tomar en cuenta la contracción de Lorentz que origina el factor $\gamma(u)$.

Ahora, como ρ es la densidad de energía y podemos suponer que cada partícula tiene masa m , entonces encontramos que en el marco de referencia en reposo

$$\begin{aligned} T^{00} &= \rho = mc^2n, \\ T^{0i} &= T^{i0} = 0 \quad \text{y} \quad T^{ij} = 0 \quad \text{describe un fluido con presión cero.} \end{aligned} \quad (2.156)$$

Dado que N corresponde a un flujo de partículas y T es en general un flujo de momento, podemos deducir que T corresponde al producto del momento p de cada partícula con N , como

$$T = p \otimes N = mU \otimes nU = \frac{\rho}{c^2}U \otimes U, \quad (2.157)$$

o, en componentes,

$$T^{\mu\nu} = \frac{\rho}{c^2}U^\mu U^\nu = \frac{\rho}{c^2}U(\tilde{\omega}^\mu)U(\tilde{\omega}^\nu) = T(\tilde{\omega}^\mu, \tilde{\omega}^\nu). \quad (2.158)$$

Por simplicidad, es frecuente utilizar la *densidad de masa* $\rho_m = mn = \frac{\rho}{c^2}$, tal que $T^{\mu\nu} = \rho_m U^\mu U^\nu$. Podemos ver que, como esperábamos, el tensor de energía–momento es simétrico,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}. \quad (2.159)$$

Un fluido perfecto más general, dotado también de presión, tiene un T cuyas componentes forman una matriz diagonal en el marco de referencia en reposo,

$$(T^{\mu\nu}) = \text{diag}(\rho, P, P, P), \quad (2.160)$$

donde ρ es la densidad de energía y P denota la presión del fluido (no confundir con el 4–vector de momento p). La forma de T se basa en las propiedades del fluido perfecto:

- sin conducción de calor $\implies T^{0i} = T^{i0} = 0$;
- sin fuerzas de corte $\implies T^{ij} = 0$ para $i \neq j$; e

- isotrópico \rightarrow diagonal en todos los marcos $\implies T^{ii} = T^{jj} \forall i \neq j$.

No es difícil convencernos de que, para que el tensor de energía–momento sea válido para marcos de referencia en movimiento en *espacio–tiempo de Minkowski* y que sea compatible con la expresión para polvo (2.158) con $P = 0$, las componentes de T deben escribirse como

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)U^\mu U^\nu - P\eta^{\mu\nu}. \quad \text{energía–momento de fluido ideal} \quad (2.161)$$

Una posible generalización de estas componentes para espacio–tiempo no plano consiste en reemplazar η por g ; por ahora, nos restringiremos al espacio–tiempo plano.

En un fluido perfecto P y ρ no son independientes. La relación entre ellas, conocida como *ecuación de estado* en termodinámica, está dada por

$$P = \omega\rho, \quad (2.162)$$

donde ω es una constante adimensional. Algunos ejemplos de fluidos de gran interés en la física gravitacional están dados por

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{radiación o materia relativista (caliente),} \\ 0 & \text{polvo o materia no relativista (fría),} \\ -1 & \text{constante cosmológica o energía del vacío o energía oscura.} \end{cases} \quad (2.163)$$

La ecuación de estado describe las propiedades más importantes del fluido perfecto.

2.3.2. Conservación de energía–momento

Sabemos que, para una partícula, la conservación de energía–momento se expresa como

$$\partial_0 p^\mu = 0, \quad (2.164)$$

donde ∂_0 denota la derivada parcial con respecto a la coordenada temporal x^0 . Sin embargo, en un continuo, la ley de conservación debe ser sustituida.

Para llegar a la expresión que representa la conservación de energía–momento en un continuo, definimos la cantidad

$$Q^\mu \equiv \int_{\Omega} d^3x T^{\mu 0}, \quad (2.165)$$

donde Ω es un volumen que contiene a todo el sistema, tal que $T^{\mu\nu} = 0$ fuera de Ω . Como $Q^0 = \int d^3x T^{00} = \int d^3x \rho$, entonces podemos identificar Q^0 con la energía total de sistema

descrito por el tensor T . Por lo tanto, la conservación de energía puede escribirse como $\partial_0 Q^0 = 0$, que, en la lógica de la ecuación (2.133), se satisface si

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}{}_{,\mu} = 0. \quad \text{conservación de energía–momento} \quad (2.166)$$

En estos términos, podríamos afirmar que el tensor T es una especie de *corriente de momento y energía*. Como para la carga eléctrica en (2.133), notamos que no sólo para Q^0 , sino para las 4 cantidades Q^μ se satisface

$$\frac{\partial Q^\mu}{c\partial t} = \int_\Omega d^3x \frac{\partial T^{\mu 0}}{c\partial t} = - \int_\Omega d^3x \partial_i T^{\mu i} = - \oint_{\partial\Omega} dS T^{\mu i} \hat{n}_i = 0, \quad (2.167)$$

donde $\partial\Omega$ es la frontera de Ω . La penúltima igualdad se debe al teorema de Gauss y la última se cumple bajo la suposición de que las componentes de $T^{\mu\nu}$ son funciones *bien comportadas* y de que el sistema está aislado. Entonces, además de la energía total Q^0 , obtenemos que el momento total Q^i , $i = 1, 2, 3$ también se conserva.

Otra ley de conservación importante es la conservación de partículas, que, en analogía con las ecuaciones anteriores, puede expresarse como

$$\partial_\mu N^\mu = N^\mu{}_{,\mu} = 0. \quad (2.168)$$

Vemos que en este caso, la carga conservada es $\int d^3x N^0 = c \int d^3x n$, es decir, el número de partículas.

Concluamos esta sección haciendo dos observaciones. Primero, definimos el tensor de energía–momento T como un tensor simétrico. Sin embargo, algunas generalizaciones de este tensor no son simétricas.⁷ En este texto nos restringiremos a tensores de energía–momento simétricos. La segunda observación se refiere al tensor de energía–momento del electromagnetismo. En el formalismo tensorial de Maxwell, es posible mostrar que las componentes de T están dadas por

$$T_{em}^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi}(F^{\mu\alpha}F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}). \quad (2.169)$$

Vemos que Q_{em}^0 en este caso es

$$Q_{em}^0 = \int d^3x T_{em}^{00} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{B}|^2), \quad (2.170)$$

que corresponde precisamente a la *energía integrada* del electromagnetismo. Además, como

$$T_{em}^{i0} = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i = S^i, \quad \text{vector de Poynting} \quad (2.171)$$

la conservación de Q_{em}^i equivale a la conservación de flujo de energía electromagnética.

⁷ En especial, la presencia de *torsión* o, análogamente, campos con espín no nulo (como fuentes de torsión), altera esta propiedad.

2.4. Espacio con métrica no trivial

Hasta ahora, nuestra discusión de casos específicos ha sido basada en el espacio-tiempo plano de Minkowski, cuya descripción se puede dar en términos de la base vectorial constante (2.9) y el tensor métrico igualmente trivial, de componentes constantes $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Al cambiar de base a una que dependa de las posiciones, ya sea mediante la elección de una geometría base diferente, o bien, al realizar un difeomorfismo no trivial, es previsible que algunas cosas cambien. En especial, nuestra discusión del gradiente (ver sección 2.1.9) será enormemente enriquecida y conducirá a los elementos más relevantes para nuestro estudio de espacio-tiempo con curvatura y, por lo tanto, de la relatividad general.

Antes de comenzar a estudiar los elementos básicos de la relatividad general en el capítulo 3, discutiremos las consecuencias más relevantes de suponer *espacios* (no *espacios-tiempo*) con métrica no trivial. El caso que emplearemos como guía es el de *coordenadas polares* en 2 dimensiones.

2.4.1. Coordenadas curvilíneas

Empecemos estudiando espacios en *dos dimensiones*. El análogo espacial al espacio-tiempo de Minkowski es el espacio Euclídeo. La base que se elige más comúnmente para expresar vectores en *espacio Euclídeo* recibe el nombre de *base Cartesiana* que, en dos dimensiones, se expresa por los vectores base

$$e_1 = (1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1)^T. \quad (2.172)$$

La métrica del espacio Euclídeo en dos dimensiones tiene las componentes

$$g_{\mu\nu} = e_\mu \cdot e_\nu = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 1, 2,$$

donde $\delta_{\mu\nu}$ es la delta de Kronecker, definiendo así el producto escalar en estas coordenadas. En el espacio Euclídeo, las posiciones se determinan con vectores $x = x^\mu e_\mu = (x^1, x^2)^T$.

Un difeomorfismo general de las coordenadas (x^1, x^2) a $(x^{1'}, x^{2'})$ está parcialmente codificado en la matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{pmatrix} \quad (2.173)$$

y su inversa, denotada como

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \end{pmatrix}, \quad \mu', \nu = 1, 2, \quad (2.174)$$

la cual existe para cualquier difeomorfismo.

La matriz Jacobiana permite escribir la transformación de las componentes de cualquier vector en el espacio Euclídeo como

$$V^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} V^{\nu}. \quad (2.175)$$

Análogamente, las componentes de las respectivas 1-formas en el espacio dual al de los vectores se transforman como

$$A_{\mu'} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} A_{\nu}, \quad (2.176)$$

con la inversa de la matriz Jacobiana.

Como las componentes $x^{\mu'}$ son funciones de las componentes x^{ν} , es decir, $x^{\mu'} = x^{\mu'}(x^{\nu})$, entonces las componentes del vector dx se transforman, aplicando la regla de la cadena, mediante

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} dx^{\nu}, \quad (2.177)$$

que es compatible con (2.176). Además, las componentes de la 1-forma gradiente de una función escalar, $\tilde{d}\phi$, se transforman, de acuerdo a (2.34), como

$$(\tilde{d}\phi)_{\mu'} = \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} = \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\mu'}} (\tilde{d}\phi)_{\nu}. \quad (2.178)$$

Ejemplo 2.1 Transformación de coordenadas Cartesianas a polares.

A partir de aquí, emplearemos el ejemplo de coordenadas polares para ilustrar los cambios que sufren los conceptos aprendidos antes cuando la métrica no coincide con la de un sistema Cartesiano. Las coordenadas polares están definidas por

$$\begin{aligned} x &\equiv x^1 = r \cos \theta, & y &\equiv x^2 = r \sen \theta, \\ \implies r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned} \quad (2.179)$$

donde r y θ son las nuevas coordenadas $x^{1'}$ y $x^{2'}$, en la notación habitual, y hemos preferido la notación (x, y) en lugar de (x^1, x^2) para evitar confusiones con las potencias. Vemos que las diferenciales de las nuevas coordenadas se expresan en términos de dx y dy como

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x} dx + \frac{\partial r}{\partial y} dy = \frac{1}{2r} 2x dx + \frac{1}{2r} 2y dy, \quad (2.180)$$

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} dx + \frac{\partial \theta}{\partial y} dy = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y dx}{x^2}\right) + \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \left(\frac{dy}{x}\right) \\ &= -\frac{y}{r^2} dx + \frac{x}{r^2} dy, \end{aligned} \quad (2.181)$$

lo que implica que la matriz Jacobiana en este caso está dada por

$$\begin{pmatrix} dx^{\mu'} \\ dx^{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} & \frac{y}{r} \\ -\frac{y}{r^2} & \frac{x}{r^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sen \theta \\ -\frac{\sen \theta}{r} & \frac{\cos \theta}{r} \end{pmatrix}. \quad (2.182)$$

2.4.2. Vectores y 1-formas base en coordenadas curvilíneas

Recordando que los vectores base $\{e_\mu\}$ se transforman con la inversa de la matriz de transformación para las transformaciones de coordenadas, encontramos

$$e_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} e_\nu, \quad (2.183)$$

mientras las 1-formas base $\tilde{\omega}^\mu = \tilde{d}x^\mu$ se transforman como

$$\tilde{d}x^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} \tilde{d}x^\nu. \quad (2.184)$$

Ejemplo 2.2 Bases en coordenadas polares.

En coordenadas polares tenemos, usando (2.183), que

$$\begin{aligned} e_r &= \frac{\partial x}{\partial r} e_x + \frac{\partial y}{\partial r} e_y = \cos \theta e_x + \sin \theta e_y, \\ e_\theta &= \frac{\partial x}{\partial \theta} e_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} e_y = -r \sin \theta e_x + r \cos \theta e_y, \end{aligned} \quad (2.185)$$

y para las 1-formas base, aplicando (2.184), obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{d}r &= \frac{\partial r}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial r}{\partial y} \tilde{d}y = \frac{x}{r} \tilde{d}x + \frac{y}{r} \tilde{d}y = \cos \theta \tilde{d}x + \sin \theta \tilde{d}y, \\ \tilde{d}\theta &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \tilde{d}x + \frac{\partial \theta}{\partial y} \tilde{d}y = -\frac{1}{r} \sin \theta \tilde{d}x + \frac{1}{r} \cos \theta \tilde{d}y. \end{aligned} \quad (2.186)$$

Notemos que ahora los vectores base dependen de la posición, a pesar del hecho de que seguimos en espacio plano y $e_x = (1, 0)^T$, $e_y = (0, 1)^T$. Además, los vectores base no son paralelos en distintos puntos, como se ilustra en la figura 2.2. Finalmente, la longitud de los vectores base tampoco es en general constante; por ejemplo, $|e_\theta|^2 = r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = r^2$ (aunque $|e_r|^2 = 1$).

2.4.3. Tensor métrico y gradiente en coordenadas curvilíneas

Ahora discutamos algunos aspectos sobre la métrica, usando las coordenadas polares desarrolladas en los ejemplos 2.1 y 2.2.

Como estamos en el espacio Euclídeo, sabemos que las componentes de la métrica en las coordenadas usuales (x, y) forman la matriz identidad, $(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(1, 1)$. Sin embargo, adoptando los resultados más importantes de la sección 2.1.4, en coordenadas polares encontramos que

$$g_{\mu'\nu'} = e_{\mu'} \cdot e_{\nu'} \quad \implies \quad (g_{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}, \quad (2.187)$$

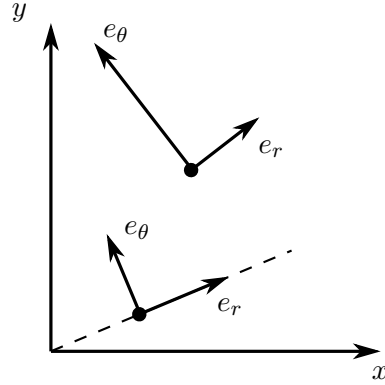


Figura 2.2: En general, los vectores base en coordenadas polares no son paralelos, y su dirección depende de su posición en el espacio.

donde hemos empleado (2.43) con el producto escalar Cartesiano. Esta métrica conduce al intervalo

$$ds^2 = |dr e_r + d\theta e_\theta|^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 = g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}. \quad (2.188)$$

Adicionalmente, la inversa de la métrica es

$$(g^{\mu'\nu'}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \end{pmatrix}, \quad (2.189)$$

es decir, $g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2}$, $g^{rr} = 1$ y $g^{\mu'\nu'} = 0$ para $\mu' \neq \nu'$. La métrica inversa puede utilizarse para determinar las componentes del (vector) dual de la 1-forma $\tilde{d}\phi$ con componentes $\phi_{,\nu'}$:

$$\begin{aligned} \phi^{,\mu'} = g^{\mu'\nu'} \phi_{,\nu'} &\implies \phi^{,r} = g^{rr} \phi_{,r} + g^{r\theta} \phi_{,\theta} = \frac{\partial\phi}{\partial r}, \\ \phi^{,\theta} = g^{\theta r} \phi_{,r} + g^{\theta\theta} \phi_{,\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta}. \end{aligned} \quad (2.190)$$

Así, obtenemos que la 1-forma gradiente es $\tilde{d}\phi = (\phi_{,r}, \phi_{,\theta})$ mientras que el correspondiente vector adopta la forma

$$d\phi = (\phi_{,r}, \frac{1}{r^2} \phi_{,\theta})^T = \frac{\partial\phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} e_\theta, \quad (2.191)$$

que es muy diferente del resultado en las coordenadas usuales: $\tilde{d}\phi = (\phi_{,x}, \phi_{,y})$ y $d\phi = (\phi_{,x}, \phi_{,y})^T$.

Debemos hacer un comentario con respecto a la notación habitual en otros textos. El gradiente de un vector en coordenadas polares se escribe usualmente como

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{e}_\theta, \quad \tilde{d}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r} \hat{d}r + \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} \hat{d}\theta. \quad (2.192)$$

Esta es solamente otra forma *equivalente* de escribir $d\phi$, en donde los vectores base están normalizados como

$$\hat{e}_r = \frac{e_r}{|e_r|} = e_r, \quad \hat{e}_\theta = \frac{e_\theta}{|e_\theta|} = \frac{1}{r}e_\theta. \quad (2.193)$$

2.4.4. Derivadas en coordenadas curvilíneas

Ya que conocemos el vector gradiente, podemos vernos tentados a aplicarlo directamente a otros vectores o tensores. Sin embargo, los tensores son muy diferentes al campo escalar ϕ porque están escritos en términos de los vectores base e_μ y de las 1-formas $\tilde{\omega}^\mu$, que no son constantes en coordenadas curvilíneas.

Por ejemplo, en coordenadas polares hemos encontrado en (2.185) que $e_r = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y$ y $e_\theta = -r \sin\theta e_x + r \cos\theta e_y$. Entonces, como e_x y e_y son constantes, las derivadas de los vectores base son

$$\begin{aligned} e_{r,r} &= \frac{\partial e_r}{\partial r} = 0, \\ e_{r,\theta} &= \frac{\partial e_r}{\partial \theta} = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y = \frac{e_\theta}{r}, \\ e_{\theta,r} &= \frac{\partial e_\theta}{\partial r} = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y = \frac{e_\theta}{r}, \\ e_{\theta,\theta} &= \frac{\partial e_\theta}{\partial \theta} = -r \cos\theta e_x - r \sin\theta e_y = -r e_r. \end{aligned} \quad (2.194)$$

Por medio del ejemplo, aprendemos que, en coordenadas curvilíneas⁸

$$e_{\mu,\nu} = \frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} \neq 0. \quad (2.195)$$

De hecho, esta cantidad es tan importante que nos lleva a introducir un ingrediente geométrico adicional para los casos en los que la métrica no es trivial, los *símbolos de Christoffel* (de segundo tipo⁹).

Los símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ están definidos mediante

$$e_{\mu,\nu} = \frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu} \equiv \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha, \quad \text{símbolos de Christoffel} \quad (2.196)$$

donde hemos usado el hecho de que, como vimos en el ejemplo de coordenadas polares (2.194), las derivadas de los vectores base son una combinación lineal de los vectores

⁸A partir de aquí, omitimos las primas sobre los índices para simplificar la notación.

⁹En la literatura, es frecuente encontrar los símbolos de Christoffel de primer tipo, $\Gamma_{\alpha\mu\nu} = g_{\alpha\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, que no emplearemos aquí.

base. Con esta expresión, podríamos interpretar a los símbolos de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ como la α -ésima componente de $\frac{\partial e_\mu}{\partial x^\nu}$. Sin embargo, es importante enfatizar que **estas no son componentes de un tensor**, como veremos en la sección 2.4.6.

Para el ejemplo de coordenadas polares, podemos obtener $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ directamente de (2.194):

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r, \\ \Gamma^r_{rr} &= \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^r_{r\theta} = \Gamma^r_{\theta r} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0.\end{aligned}\tag{2.197}$$

En este ejemplo vemos que $\Gamma^\alpha_{r\theta} = \Gamma^\alpha_{\theta r}$ para $\alpha = \theta, r$. Como estudiaremos en la siguiente sección, (en ausencia de *torsión*), esta es una propiedad general de simetría de los símbolos de Christoffel, por lo que, en d dimensiones hay $d^2(d+1)/2$ símbolos independientes.

2.4.5. Derivada covariante

Como las derivadas $e_{\mu,\nu} \neq 0$ en general, entonces los vectores base contribuyen a la derivada de un vector general $V = V^\mu e_\mu$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x^\nu} &= V^\mu{}_{,\nu} e_\mu + V^\mu e_{\mu,\nu} \\ &= V^\mu{}_{,\nu} e_\mu + V^\mu \Gamma^\alpha_{\mu\nu} e_\alpha \\ &= V^\mu{}_{,\nu} e_\mu + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu} e_\mu \\ &= (V^\mu{}_{,\nu} + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu}) e_\mu.\end{aligned}\tag{2.198}$$

La primera igualdad se debe a la regla de la cadena; la segunda se debe a la definición de los símbolos de Christoffel. En la tercera hemos intercambiado los índices $\alpha \leftrightarrow \mu$, lo que está permitido porque son índices contraídos. El resultado (2.198) es similar a $V_{,\nu} = V^\mu{}_{,\nu} e_\mu$, obtenido en coordenadas planas, salvo que la derivada de V recibe ahora una corrección proporcional a $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ debido a la nueva elección de coordenadas. Notando que $\Gamma^\mu_{\alpha\nu} = 0$ en coordenadas Cartesianas, podemos interpretar el término en paréntesis como la expresión completa de la derivada de un vector en un sistema coordenado cualquiera. Por lo tanto, es conveniente definir

$$V^\mu{}_{;\nu} = V^\mu{}_{,\nu} + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu}, \quad \text{componentes de derivada covariante}\tag{2.199}$$

como las componentes de un tensor de rango (1,1) llamado *derivada covariante* de un vector, tal que

$$DV = V^\mu{}_{;\nu} e_\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu.\tag{2.200}$$

Es evidente que, en una base Cartesiana, $V^\mu{}_{;\nu} = V^\mu{}_{,\nu}$. Entonces, la derivada covariante D es una generalización del gradiente \tilde{d} , válida en cualquier sistema coordenado.

Divergencia. Como consecuencia de la introducción de la derivada covariante, la divergencia cambia de forma. En coordenadas Cartesianas, hemos definido las componentes de la divergencia de V como la contracción $V^\mu{}_{;\mu} = \partial_\mu V^\mu$. En coordenadas curvilíneas, debemos generalizar esto a

$$D \cdot V = V^\mu{}_{;\mu} = V^\mu{}_{,\mu} + V^\alpha \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}. \quad (2.201)$$

Laplaciano. Consideremos una función escalar ϕ . Su gradiente por componentes está dado simplemente por

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi, \quad (2.202)$$

donde el término con los símbolos de Christoffel no aparece porque ϕ no se expresa en términos de los vectores base. (De hecho, como veremos a continuación, la derivada covariante cambia dependiendo de si actúa sobre un escalar, un vector, una 1-forma, un tensor, etc).

El vector dual de la 1-forma gradiente con componentes $D_\mu \phi$ se define mediante sus componentes

$$(D\phi)^\mu = D^\mu \phi = g^{\mu\nu} D_\nu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (2.203)$$

Para calcular el Laplaciano de ϕ , podemos aplicar (2.201) a las componentes del vector $D\phi$ en (2.203), obteniendo

$$D \cdot D \phi = D_\mu (D\phi)^\mu = D_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi)_{,\mu} + g^{\alpha\nu} \partial_\nu \phi \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}. \quad (2.204)$$

Notamos que, si $g^{\mu\nu}{}_{,\mu} \neq 0$, (2.204) tiene dos términos además del habitual en coordenadas Cartesianas:

$$D \cdot D \phi = \partial \cdot \partial \phi + \partial_\nu \phi g^{\mu\nu}{}_{,\mu} + g^{\alpha\nu} \partial_\nu \phi \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu}, \quad (2.205)$$

donde $\partial \cdot \partial = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$.

Derivada covariante sobre tensores

La derivada covariante no solamente actúa sobre campos vectoriales y escalares, sino en cualquier tipo de tensor. Consideremos primero el campo escalar resultado del producto

$$\phi = p_\mu A^\mu, \quad (2.206)$$

donde $\tilde{p} = p_\mu \tilde{\omega}^\mu$ y $A = A^\mu e_\mu$. Por un lado, aplicando la regla del producto, tenemos que

$$\phi_{;\nu} = p_{\mu;\nu} A^\mu + p_\mu A^\mu{}_{;\nu}. \quad (2.207)$$

Por otro lado, sabemos que $\phi_{;\nu} = \phi_{,\nu}$, lo que implica que

$$\begin{aligned} \phi_{;\nu} = \phi_{,\nu} &= p_{\mu,\nu} A^\mu + p_\mu A^\mu{}_{,\nu} \\ &= p_{\mu,\nu} A^\mu + p_\mu A^\mu{}_{;\nu} - A^\lambda \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} p_\mu \\ &= (p_{\lambda,\nu} - \Gamma^\mu{}_{\lambda\nu} p_\mu) A^\lambda + p_\mu A^\mu{}_{;\nu}, \end{aligned} \quad (2.208)$$

donde el segundo renglón proviene de (2.201). De aquí finalmente obtenemos la acción de la derivada covariante sobre la 1-forma \tilde{p}

$$p_{\lambda;\nu} = p_{\lambda,\nu} - \Gamma^\mu_{\lambda\nu} p_\mu. \quad (2.209)$$

Siguiendo la lógica de nuestra definición de $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$, vemos que esto implica

$$\tilde{\omega}^\mu_{,\nu} = -\Gamma^\mu_{\lambda\nu} \tilde{\omega}^\lambda. \quad (2.210)$$

Estas observaciones son importantes para obtener la forma de la derivada covariante para cualquier tensor t , tal que

$$t = t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots} \overbrace{e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{\nu_1} \otimes \tilde{\omega}^{\nu_2} \otimes \dots}^{\equiv B}. \quad (2.211)$$

Aplicando la definición de los símbolos de Christoffel y (2.210), encontramos que

$$\begin{aligned} \partial_\alpha t = & \left(t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots,\alpha} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} t^{\lambda\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots} + \Gamma^{\mu_2}_{\lambda\alpha} t^{\mu_1\lambda\dots}_{\nu_1\nu_2\dots} + \dots \right. \\ & \left. - \Gamma^\rho_{\nu_1\alpha} t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\rho\nu_2\dots} - \Gamma^\rho_{\nu_2\alpha} t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\rho\dots} - \dots \right) B. \end{aligned} \quad (2.212)$$

A partir de (2.212), es inmediato definir las componentes de la derivada covariante de un tensor arbitrario como

$$\begin{aligned} D_\alpha t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots} \equiv & t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots,\alpha} + \Gamma^{\mu_1}_{\lambda\alpha} t^{\lambda\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots} + \Gamma^{\mu_2}_{\lambda\alpha} t^{\mu_1\lambda\dots}_{\nu_1\nu_2\dots} + \dots \\ & - \Gamma^\rho_{\nu_1\alpha} t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\rho\nu_2\dots} - \Gamma^\rho_{\nu_2\alpha} t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\rho\dots} - \dots, \end{aligned} \quad (2.213)$$

que pueden ser también denotadas como $t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots;\alpha} \equiv D_\alpha t^{\mu_1\mu_2\dots}_{\nu_1\nu_2\dots}$. Si t tiene rango (M, N) , Dt corresponde a un tensor de rango $(M, N + 1)$.

Derivada covariante de la métrica. Primero, es importante recordar que las ecuaciones tensoriales son invariantes ante transformaciones (por eso el lenguaje tensorial es tan conveniente). Esto significa particularmente que, si una ecuación tensorial es válida en un sistema de coordenadas, debe ser válida para cualquier otro.

Consideremos ahora la derivada covariante de un vector V , con componentes $V^\alpha_{;\mu}$. Como $V^\alpha_{;\mu}$ corresponde a las componentes de un tensor, entonces la aplicación de la métrica conduce a

$$V_{\mu;\nu} = g_{\mu\alpha} V^\alpha_{;\nu}. \quad (2.214)$$

Por otro lado, la acción directa de la métrica en V seguida de la derivada covariante, aplicando la regla de Leibniz, conduce a

$$V_{\mu;\nu} = (g_{\mu\alpha} V^\alpha)_{;\nu} = g_{\mu\alpha} V^\alpha_{;\nu} + V^\alpha g_{\mu\alpha;\nu}. \quad (2.215)$$

Entonces, comparando (2.214) y (2.215), concluimos que en cualquier sistema de coordenadas

$$g_{\mu\alpha;\nu} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g^{\mu\alpha}{}_{;\nu} = 0. \quad (2.216)$$

Por otra parte, usando la derivada covariante de un tensor de rango (0, 2) de acuerdo a (2.212), encontramos

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} g_{\mu\alpha;\nu} = g_{\mu\alpha,\nu} - g_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}, \\ &\Leftrightarrow g_{\mu\alpha,\nu} = g_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}. \end{aligned} \quad (2.217)$$

Agregando algunas permutaciones a este resultado, encontramos

$$\begin{aligned} g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu} &= g_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} + g_{\lambda\mu}\Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha} + g_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} - g_{\lambda\nu}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu} - g_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} \\ &= g_{\alpha\lambda}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}) + g_{\nu\lambda}(\Gamma^\lambda{}_{\mu\alpha} - \Gamma^\lambda{}_{\alpha\mu}) + g_{\mu\lambda}(\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} + \Gamma^\lambda{}_{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (2.218)$$

Para simplificar esta expresión, recordemos el ejemplo de coordenadas polares, donde $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$. Podemos mostrar que esta observación es un resultado general. Con este propósito, primero veamos que $D_\mu D_\nu \phi = D_\nu D_\mu \phi$ es una expresión tensorial válida en coordenadas Cartesianas para todas las funciones escalares ϕ . Entonces, debe satisfacerse en cualquier sistema coordenado, es decir,

$$\phi_{,\nu\mu} - \phi_{,\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} = \phi_{,\mu\nu} - \phi_{,\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}, \quad (2.219)$$

de donde, empleando que $\phi_{,\nu\mu} = \phi_{,\mu\nu}$, concluimos que¹⁰

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}. \quad \text{simetría de símbolos de Christoffel} \quad (2.220)$$

Sustituyendo este resultado en (2.218), vemos que

$$g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu} = 2g_{\mu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu}$$

y, por lo tanto, obtenemos la expresión

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\mu}(g_{\mu\alpha,\nu} + g_{\nu\mu,\alpha} - g_{\alpha\nu,\mu}). \quad \text{símbolos de Christoffel (sin torsión)} \quad (2.221)$$

¹⁰Es posible concebir espacios en los que $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \neq \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$. Se dice que estos espacios están dotados de torsión y $\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}$ son las componentes del llamado tensor de torsión asociado (ver ejercicio 2.17).

Esta conclusión resulta muy importante en la práctica para calcular los símbolos de Christoffel en espacios y espacios-tiempo métricos.

Revisitando divergencia y Laplaciano. Ahora podemos simplificar nuestras expresiones para la divergencia de un vector V y el Laplaciano de un campo escalar ϕ .

Un resultado estándar de álgebra lineal basado en la fórmula de Leibniz y Jacobi para el determinante de una matriz invertible A establece que

$$\frac{\partial \det A}{\partial A_{ij}} = (A^{-1})_{ji} \det A. \quad (2.222)$$

Denotando el determinante de la matriz asociada a las componentes del tensor métrico como $|g| \equiv \det g$, la fórmula (2.222) implica para el determinante de la métrica que

$$\frac{\partial |g|}{\partial g_{\mu\nu}} = g^{\mu\nu} |g| \quad \implies \quad \frac{\partial x^\alpha}{\partial g_{\mu\nu}} \frac{\partial |g|}{\partial x^\alpha} = g^{\mu\nu} |g|. \quad (2.223)$$

La última ecuación puede reescribirse de la siguiente forma

$$\frac{\partial_\alpha |g|}{|g|} = g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} \quad \iff \quad \partial_\alpha \ln |g| = g^{\mu\nu} \partial_\alpha g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\alpha}. \quad (2.224)$$

Empleando los resultados anteriores, es posible reexpresar (2.221), con los índices α y ν contraídos, en términos de $|g|$ como

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu{}_{\alpha\mu} &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (g_{\alpha\lambda,\mu} + g_{\mu\lambda,\alpha} - g_{\alpha\mu,\lambda}) = \frac{1}{2} (g_{\alpha\lambda}{}^{,\lambda} + g^{\mu\lambda} g_{\mu\lambda,\alpha} - g_{\alpha\mu}{}^{,\mu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g_{\mu\lambda,\alpha} = \frac{1}{2} \partial_\alpha \ln |g| = \partial_\alpha (\ln \sqrt{|g|}) = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\alpha \sqrt{|g|}. \end{aligned} \quad (2.225)$$

Formalmente, estas ecuaciones son válidas para el valor absoluto del determinante de la métrica, por lo que las dos últimas igualdades solamente son válidas cuando $|g| > 0$ (lo cual no es automático porque $|g|$ denota sólo el determinante de g). En los casos en los que $|g| < 0$, como en el espacio-tiempo de Minkowski, $|g|$ debe ser reemplazado por $-|g|$.

Empleando (2.225) en (2.201), encontramos una nueva expresión para la divergencia

$$D \cdot V = V^\mu{}_{,\mu} + \frac{1}{\sqrt{|g|}} V^\mu \partial_\mu \sqrt{|g|}, \quad (2.226)$$

lo que conduce finalmente a

$$D \cdot V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(V^\mu \sqrt{|g|} \right). \quad (2.227)$$

Como hicimos anteriormente, para obtener el Laplaciano de un campo escalar ϕ , podemos reemplazar V^μ por $D^\mu \phi = g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi$ en la expresión para la divergencia de V , obteniendo

$$D \cdot D \phi = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \sqrt{|g|} \right). \quad (2.228)$$

Ejemplo 2.3 Coordenadas polares.

Usemos nuestro ejemplo estándar para verificar algunos de los aspectos discutidos. Primero, calculemos la divergencia y el Laplaciano.

Para notar las ventajas de las expresiones obtenidas, calcularemos la divergencia mediante las dos expresiones (2.201) y (2.226). Para la primera expresión, debemos determinar $\Gamma^\mu_{\alpha\mu}$. Usando la expresión explícita de los símbolos de Christoffel (2.197), obtenemos

$$\Gamma^\mu_{r\mu} = \Gamma^r_{rr} + \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{r} \quad (2.229)$$

$$\Gamma^\mu_{\theta\mu} = \Gamma^r_{\theta r} + \Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0, \quad (2.230)$$

lo que implica que, de acuerdo a (2.201),

$$D \cdot V = V^\mu_{,\mu} + V^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\mu} = \frac{\partial V^r}{\partial r} + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} V^r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rV^r) + \frac{\partial V^\theta}{\partial \theta}. \quad (2.231)$$

Por otro lado, a partir de (2.226), se obtiene el mismo resultado con $\sqrt{|g|} = r$ (ver (2.187)):

$$D \cdot V = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu (V^\mu \sqrt{|g|}) = \frac{1}{r} \partial_\mu (rV^\mu) = \frac{1}{r} \partial_r (rV^r) + \frac{1}{r} \partial_\theta (rV^\theta). \quad (2.232)$$

Estos resultados contrastan con la fórmula usualmente encontrada en la literatura para la divergencia en coordenadas polares,

$$D \cdot \hat{V} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r\hat{V}^r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{V}^\theta}{\partial \theta}, \quad (2.233)$$

debido a que habitualmente se emplea un vector normalizado \hat{V} (en lugar de V) expresado en términos de los vectores base \hat{e}_μ , que son elegidos *ortonormales*, es decir, tales que

$$\hat{V} = \hat{V}^\mu \hat{e}_\mu, \quad \hat{e}_\mu \cdot \hat{e}_\nu = \delta_{\mu\nu}. \quad (2.234)$$

La relación entre las bases $\{e_\mu\}$ y $\{\hat{e}_\mu\}$ surge de $\hat{e}_\mu = e_\mu/|e_\mu|$, donde $|e_\mu|$ denota la magnitud del vector base e_μ , como en (2.193). Por lo tanto, como V no debería depender de su base,

$$\hat{V} = \hat{V}^\mu \hat{e}_\mu = \hat{V}^\mu e_\mu / |e_\mu| \stackrel{!}{=} V^\mu e_\mu = V \quad \implies \quad V^\mu \equiv \hat{V}^\mu / |e_\mu|, \quad (2.235)$$

lo que para coordenadas polares implica que $\hat{V}^r = V^r$ y $\hat{V}^\theta = rV^\theta$ porque $|e_r| = 1$ y $|e_\theta| = r$; entonces, las expresiones para $D \cdot V$ y $D \cdot \hat{V}$ son equivalentes.

Por otro lado, el Laplaciano de un campo escalar ϕ en coordenadas polares puede

calcularse a partir de (2.228) como sigue:

$$\begin{aligned}
D \cdot D \phi &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_\mu \left(g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi \sqrt{|g|} \right) = \frac{1}{r} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi r) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (g^{r\nu} \partial_\nu \phi r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (g^{\theta\nu} \partial_\nu \phi) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (g^{rr} \partial_r \phi r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (g^{\theta\theta} \partial_\theta \phi) \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \phi,
\end{aligned} \tag{2.236}$$

donde hemos empleado que $|g| = r$ y que la métrica es diagonal.

Para concluir este ejemplo, nos gustaría recuperar la expresión explícita de los símbolos de Christoffel (2.197) mediante la fórmula obtenida (2.221). Como hemos visto, debido a la simetría $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$, en d dimensiones hay $d^2(d+1)/2$ símbolos de Christoffel independientes. Para $d = 2$, los 6 símbolos de Christoffel independientes son $\Gamma^\theta_{r\theta}$, $\Gamma^r_{\theta\theta}$, $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$, $\Gamma^r_{r\theta}$, Γ^r_{rr} y Γ^θ_{rr} . Por ejemplo,

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\lambda} (g_{\lambda r, \theta} + g_{\theta \lambda, r} - g_{r\theta, \lambda}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (g_{\theta\theta, r}) = \frac{1}{2} \frac{1}{r^2} (2r) = \frac{1}{r}, \tag{2.237}$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{r\lambda} (g_{\lambda\theta, \theta} + g_{\theta\lambda, \theta} - g_{\theta\theta, \lambda}) = -\frac{1}{2} g^{rr} (g_{\theta\theta, r}) = -\frac{1}{2} (2r) = -r, \tag{2.238}$$

que coinciden con nuestro resultado previo, (2.197). El lector también puede convencerse de que $g_{\mu\nu; \alpha} = 0$ se satisface. Por ejemplo, empleando (2.213), obtenemos

$$g_{r\theta; \theta} = g_{r\theta, \theta} - g_{\lambda\theta} \Gamma^\lambda_{r\theta} - g_{r\lambda} \Gamma^\lambda_{\theta\theta} = 0 - r^2/r - (-r) = 0.$$

2.4.6. Los símbolos de Christoffel no son tensores

Como V es un vector, entonces esperamos que DV sea un tensor, cuyas componentes se transforman bajo transformaciones básicas como

$$D_{\nu'} A^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} D_\nu A^\mu = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \partial_\nu A^\mu + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} A^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu}. \tag{2.239}$$

Por otro lado, también podríamos escribir $(DA)'$ como

$$\begin{aligned}
D_{\nu'} A^{\mu'} &= \partial_{\nu'} A^{\mu'} + A^{\alpha'} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} \\
&= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \partial_{\nu'} \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} A^\mu \right) + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} \\
&= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \partial_{\nu'} A^\mu + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} A^\mu \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\nu'} \partial x^\mu} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} A^\alpha \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'},
\end{aligned} \tag{2.240}$$

donde $\Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'}$ denota los símbolos de Christoffel transformados, que deseamos conocer en términos de $\Gamma^{\mu}_{\alpha\nu}$. Comparando (2.239) y (2.240), vemos que el primer término de (2.240) es idéntico al primero de (2.239), de manera que resulta

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} A^{\alpha} \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} = A^{\alpha} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\alpha}} A^{\alpha} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'}$$

y, consecuentemente,

$$\iff \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \Gamma^{\mu}_{\alpha\nu} - \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\alpha}}. \quad (2.241)$$

Debido a la presencia del segundo término, incompatible de acuerdo a (2.83) con la transformación de un tensor de rango (1, 2), vemos que Γ no puede ser un tensor.

Sin embargo, aunque Γ no es un tensor, cada Γ_{μ} sí es un tensor de rango (1, 1), con componentes $(\Gamma_{\mu})^{\lambda}_{\nu}$. Esto puede verse sencillamente de la definición de $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$

$$\tilde{d}e_{\mu} = e_{\mu,\nu} \tilde{\omega}^{\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} e_{\lambda} \otimes \tilde{\omega}^{\nu}, \quad (2.242)$$

donde es claro que para cada vector e_{μ} hay un tensor de rango (1, 1) $\tilde{d}e_{\mu}$ cuyas componentes son $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ con μ fija.

2.5. Sistemas físicos en espacios no triviales y covariancia

Para poder estudiar sistemas físicos con el formalismo desarrollado en la sección 2.4, debemos primeramente subrayar que los resultados obtenidos para espacios con métrica arbitraria se generalizan trivialmente a espacios-tiempo con métrica no trivial. La diferencia es que, en lugar de comenzar con la métrica Euclidiana, deberemos comenzar con la métrica de Minkowski y, mediante difeomorfismos, de acuerdo a (2.43), transitar a espacios con métricas más generales. Salvo por la anotación alrededor de (2.225) en referencia al signo del determinante de la métrica, todas las expresiones son válidas. Estos nos permite apreciar el poder de los elementos geométricos desarrollados en la física.

En las secciones 2.2 y 2.3 estudiamos la electrodinámica clásica y la conservación de energía-momento para fluidos en términos del formalismo covariante, el cual es ideado para que la física descrita por las ecuaciones en ese formalismo sea invariante bajo difeomorfismos, es decir, que sea la misma para distintos observadores que basen sus mediciones en diferentes sistemas coordenados.

Sin embargo, debido a que las ecuaciones que contienen las derivadas regulares ∂_{μ} sólo son invariantes bajo difeomorfismos que conducen a nuevos sistemas coordenados en los que los símbolos de Christoffel son nulos, el formalismo desarrollado en esas secciones sólo es válido para cualesquiera observadores con marcos de referencia relacionados por transformaciones que dejen la métrica de Minkowski invariante, es decir, por transformaciones

de Lorentz. En otras palabras, las expresiones finales obtenidas en las secciones 2.2 y 2.3 son válidas para observadores inerciales, o, en otras palabras, *son compatibles sólo con la relatividad especial*.

El origen de este resultado es que la derivada regular no constituye un tensor en un espacio (o espacio-tiempo) dotado de un tensor métrico no trivial. Como hemos visto en la sección 2.4.5, la derivada covariante es la única que es compatible con todo difeomorfismo, constituyendo un tensor, y además se reduce a la derivada regular en el caso en el que la métrica sea trivial. Por lo tanto, en los sistemas físicos descritos previamente basta con sustituir las derivadas por derivadas covariantes para lograr que sean *globalmente covariantes*, como se les denomina a las ecuaciones que son las mismas en los espacios relacionados bajo cualquier difeomorfismo.

Por lo tanto, las ecuaciones de Maxwell (2.144) y la ecuación de continuidad (2.132) se expresan en el formalismo covariante como

$$F^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{4\pi}{c} J^\nu \quad \text{con} \quad J^\mu{}_{;\mu} = 0. \quad (2.243)$$

Adicionalmente, las otras ecuaciones de Maxwell descritas por la identidad de Bianchi electromagnética (2.140) en términos covariantes están dadas por

$$F_{\mu\nu;\sigma} + F_{\nu\sigma;\mu} + F_{\sigma\mu;\nu} = 0, \quad (2.244)$$

que puede reescribirse en términos de la prescripción de antisimetrización (2.103) como

$$F_{[\mu\nu;\sigma]} = 0, \quad (2.245)$$

considerando que las componentes del tensor de Faraday son antisimétricas, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$.

Por otra parte, también las ecuaciones de conservación de energía-momento (2.166) son alteradas al formularlas en el formalismo covariante:

$$T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0. \quad (2.246)$$

Se emplea el término *covariancia* en lugar de invariancia porque los elementos que componen las ecuaciones en el formalismo covariante son tensores. Las componentes de los tensores no son invariantes bajo difeomorfismos, pero se transforman de forma tal que las ecuaciones tensoriales que son válidas en un sistema coordenado son también válidas en otro, si están relacionados mediante difeomorfismos.

Esta observación conduce al llamado *principio de covariancia general* que, en física, establece que las leyes físicas deben adoptar la *misma forma* matemática en todo sistema coordenado. El fundamento principal de este principio es que los sistemas coordenados son solamente estructuras matemáticas que hemos construido los humanos y que nos sirven para describir nuestras observaciones, pero el universo no está dotado naturalmente de

ningún sistema coordinado específico. Por lo tanto, las leyes físicas no deberían depender de nuestra elección de coordenadas.

El principio de covariancia no establece explícitamente una conexión con un observador específico. Sin embargo, recordando que los sistemas de referencia son marcos de referencia de distintos observadores, notamos que implícitamente los difeomorfismos relacionan las perspectivas de diferentes observadores. Los difeomorfismos más generales corresponden a deformaciones del espacio-tiempo que son capaces de alterar su estructura. Por lo tanto, los marcos de referencia relacionados por distintas transformaciones pueden corresponder a los de observadores inerciales, rotantes, acelerados, torcidos, etc.. Lo que el principio de covariancia general significa es que, sin importar el tipo de observadores, si sus marcos de referencia están relacionados mediante difeomorfismos, *las ecuaciones en notación covariante son válidas para todos los observadores*.

Evidentemente, entonces, el principio de covariancia general establece una generalización crucial al principio de relatividad, permitiendo que distintos observadores puedan interpretar y comparar sus mediciones.

2.6. Espacio y espacio-tiempo con curvatura

Como veremos, el logro más importante de la teoría de relatividad de Einstein fue la identificación del origen del comportamiento de la gravedad descrita por Newton. Einstein encontró en una “conjetura afortunada” que el campo gravitacional Newtoniano no sólo es provocado por la presencia de masa, sino que el tensor de energía-momento entero es fuente de gravedad. A un nivel superior, Einstein descubrió que la geometría del espacio-tiempo juega un papel fundamental en la descripción de las interacciones gravitacionales. Einstein notó que su teoría de relatividad especial, válida únicamente para marcos de referencia inerciales sin gravedad, se trata sólo de un caso particular de la relatividad para un espacio-tiempo desprovisto de una propiedad importante encontrada regularmente en geometría: *curvatura*. La relatividad especial funciona en espacio-tiempo plano, sin curvatura, pero, tan pronto como el espacio-tiempo exhibe algunas deformaciones, se convierte sólo en una aproximación (y una muy buena) de la física real. Como hemos visto, existe una importante relación entre espacio-tiempo plano y observadores inerciales. Entonces, incluir la gravedad, en donde los observadores son considerados no inerciales, requiere introducir espacio-tiempo con curvatura y establecer cuál es su conexión con la fuente material de la gravedad, el tensor de energía-momento.

Para poder discutir los detalles de estos interesantes hallazgos, es preciso comenzar por definir qué significa que un espacio o espacio-tiempo sean curvos y cómo podemos determinar el grado de curvatura de éstos.

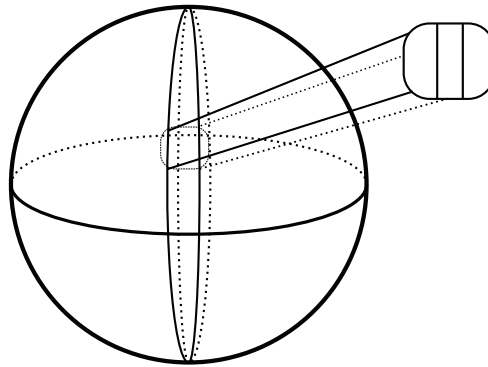


Figura 2.3: Dos geodésicas sobre la esfera apuntando hacia el polo norte o sur forman meridianos, que, por definición, se cruzan en dos puntos. Sin embargo, en una región suficientemente pequeña, *localmente*, las líneas pueden parecer paralelas, lo que nos podría hacer creer que el espacio es plano.

2.6.1. Espacio plano contra curvo

En la geometría Euclidiana, como una consecuencia del *postulado de paralelismo*, dos líneas paralelas no se cruzan en ningún punto. El espacio-tiempo de Minkowski también obedece este axioma de paralelismo Euclidiano. Cualquier espacio con esta propiedad se conoce como *plano*. Decimos que cualquier espacio que se desvía de ser plano es *curvo* o exhibe *curvatura*. Formalmente, esta propiedad es el resultado de abandonar el axioma de paralelismo Euclidiano.

Para poder entender cómo sucede la renuncia al axioma de paralelismo, notamos que las llamadas líneas rectas en geometría Euclideana son las curvas de mínima longitud que conectan dos puntos del espacio Euclídeo. Intuitivamente, es claro que en un espacio que consideraríamos curvo, las curvas más cortas que conectan dos puntos de ese espacio, no son necesariamente lo que conocemos como rectas en espacio Euclídeo. Tales curvas de mínima longitud son llamadas en espacios más generales *curvas geodésicas*, si se consideran únicamente regiones relativamente pequeñas del espacio.¹¹ La descripción detallada de las geodésicas deberá aguardar a la sección 2.6.3.

El ejemplo más convencional de un espacio curvo es la esfera bidimensional S^2 , ilustrada en la figura 2.3. Como podemos comprobar en nuestra vida cotidiana, en una región pequeña S^2 *parece plano*. En especial, notamos las líneas más cortas entre dos puntos parecen rectas y, por lo tanto, parecen obedecer el principio de paralelismo. Entonces, decimos que el espacio considerado es *localmente plano*. A pesar de esta propiedad bastante común, al observar el espacio entero, las curvas se extienden formando grandes círculos sobre S^2 (meridianos en la figura), intersecándose en los polos y, por lo tanto, violando el axioma

¹¹En general, las curvas geodésicas extremizan la longitud entre dos puntos, por lo que frecuentemente son también llamadas curvas extremales.

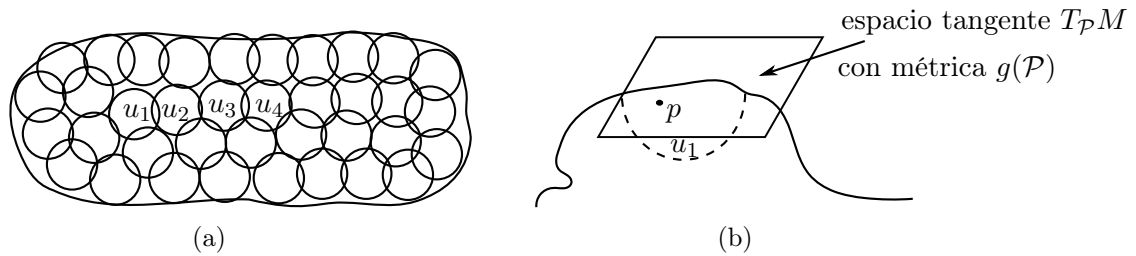


Figura 2.4: (a) Una variedad diferencial M es cubierta por un conjunto de abiertos u_i . (b) Una variedad Riemanniana tiene una métrica asociada a cada espacio tangente $T_{\mathcal{P}}M$ a sus puntos \mathcal{P} .

de paralelismo. El estudio de espacios como estos es llamado *geometría Riemanniana*.

Los espacios considerados en geometría Riemanniana son llamados *variedades Riemannianas*. En general, una variedad m -dimensional M es un espacio cubierto por un conjunto de subconjuntos abiertos $\{u_i\}$, tales que $\cup_i u_i = M$, donde podemos definir un homeomorfismo¹² φ entre u_i y un subconjunto de \mathbb{R}^m , como se ilustra en la figura 2.4a. Es decir, toda variedad es localmente plana y cada localidad es equivalente al espacio Euclídeo. Si, por su estructura, el espacio permite realizar cálculo diferencial en cada abierto u_i , entonces es una variedad diferenciable.

Una variedad diferenciable M permite definir en cada punto \mathcal{P} sobre ella un espacio tangente $T_{\mathcal{P}}M$, que puede visualizarse como el espacio vectorial de todas las direcciones en las que es posible pasar tangencialmente por \mathcal{P} . Finalmente, una *variedad Riemanniana* M es una variedad diferenciable, dotada de un tensor métrico $g(\mathcal{P})$ en cada espacio tangente $T_{\mathcal{P}}M$ de todos sus puntos. La figura 2.4b ilustra el espacio tangente a \mathcal{P} , dotado con su tensor métrico $g(\mathcal{P})$ plano. Debemos destacar que, a pesar de que una variedad Riemanniana es localmente plana y, en consecuencia, $g(\mathcal{P})$ es plano, en todos sus puntos \mathcal{P} , los espacios tangentes a cada punto no son los mismos.

2.6.2. Variedades

Como hemos visto en la sección 2.6.1, una variedad es cualquier espacio continuo que localmente es \mathbb{R}^m , aunque la *forma* (topología) del espacio completo puede ser bastante diferente a la de la geometría Euclidiana. Algunos ejemplos de variedades son ilustrados en la figura 2.5.

Es tan general la definición de variedad, que uno podría caer en la tentación de pensar que un espacio arbitrario es una variedad. Sin embargo, el contraejemplo más simple es el cono, pues es imposible escoger una región abierta alrededor de su vértice que parezca localmente un espacio Euclídeo.

¹²Un homeomorfismo es una función uno-a-uno, continua e invertible entre dos espacios topológicos.

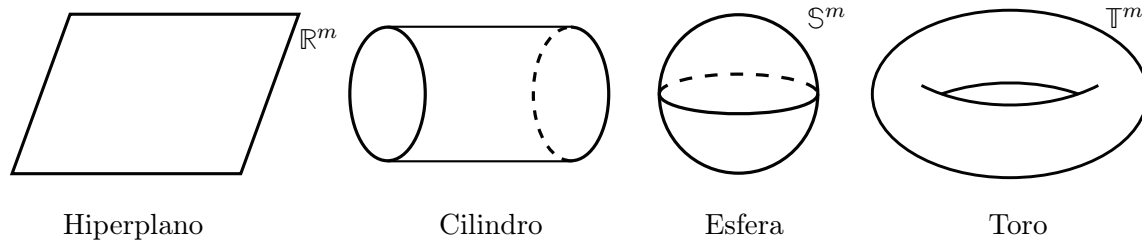


Figura 2.5: Ejemplos de variedades.

Los ejemplos de variedades mostrados en la figura 2.5 pueden describirse por un conjunto de *funciones* continuas llamadas coordenadas x^μ , de manera que las coordenadas de la variedad son solamente los parámetros libres independientes que parametrizan la variedad.

Las variedades más relevantes para la relatividad son Riemannianas. Sus principales cualidades son

1. son diferenciables en todas partes, por lo que están dotadas con una *conexión*; y
2. poseen una métrica *localmente plana* y *compatible* con la conexión.

Ambas propiedades requieren una explicación. En espacio plano y coordenadas Cartesianas estamos acostumbrados a realizar derivadas de, por ejemplo, campos vectoriales tomando la diferencia del mismo vector evaluado en puntos infinitesimalmente cercanos del espacio. La diferencia de dos vectores en espacio plano está bien definida. Sin embargo, en espacio curvo, las derivadas no pueden calcularse de la misma manera. Algo debe hacerse cargo de la *contribución* de la curvatura en la derivada. Este es el papel de la conexión: permitir calcular las derivadas de manera que el formalismo tensorial siga funcionando.

Recordando nuestra discusión en la sección 2.4, hemos aprendido que la derivada *correcta* en el lenguaje tensorial es la derivada covariante D , que conserva las propiedades tensoriales de la 1-forma gradiente \tilde{d} gracias a los símbolos de Christoffel $\Gamma^\mu_{\lambda\nu}$. Por lo tanto, son precisamente los símbolos de Christoffel los que juegan el papel de la conexión en espacio curvo. A este tipo de conexión frecuentemente se le conoce como *conexión Riemanniana* o *conexión de Christoffel* o *conexión de Levi-Civita*. Es frecuente en la literatura encontrar también que la conexión sea identificada con la derivada covariante entera, en lugar de sólo los símbolos de Christoffel.

Respecto a la segunda propiedad de las variedades Riemannianas, se dice que el tensor métrico de la variedad, $g = g_{\mu\nu}\tilde{\omega}^\mu \otimes \tilde{\omega}^\nu$, es *localmente plano* si en cada punto \mathcal{P} de la variedad se puede elegir un conjunto de coordenadas, tales que g sea equivalente al tensor métrico del espacio Euclídeo hasta primer orden en sus derivadas, es decir,

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \delta_{\mu\nu} + \mathcal{O}((x^\mu)^2) \approx \delta_{\mu\nu}. \quad (2.247)$$

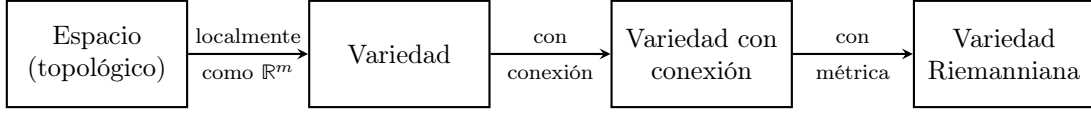


Figura 2.6: Las variedades Riemannianas son el subconjunto de todos los espacios topológicos localmente planos, diferenciables, y dotados de métrica y conexión compatibles.

Es decir, a primera aproximación, $g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \delta_{\mu\nu}$ mientras que $g_{\mu\nu,\rho}(\mathcal{P}) = 0$. Las segundas derivadas del tensor métrico pueden ser no nulas, $g_{\mu\nu,\rho\sigma}(\mathcal{P}) \neq 0$, lo cual, como veremos, es una manifestación de la curvatura del espacio. Notemos que todas estas propiedades se relacionan con un punto \mathcal{P} , lo que implica que lejos de \mathcal{P} el tensor métrico $g(\mathcal{P})$ puede violar estas restricciones, pero existirá otro punto en esa región y una elección de coordenadas para los que se satisfacen.

Por otro lado, la métrica y la conexión son compatibles si¹³

$$Dg = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad g_{\mu\nu;\rho} = 0, \quad \text{compatibilidad métrica-conexión} \quad (2.248)$$

en todas partes. Vemos que esta sencilla propiedad (que, como vimos en (2.216), es una propiedad del espacio plano) tiene varias consecuencias para la conexión y la derivada covariante. En primer lugar, también la derivada covariante del tensor métrico inverso se anula, $Dg^{-1} = 0$; en segundo, la métrica conmuta con la derivada covariante, lo que implica que

$$D_\mu V^\mu = D_\mu(g^{\mu\nu}V_\nu) = g^{\mu\nu}D_\mu V_\nu = D^\nu V_\nu; \quad (2.249)$$

y, por último, la conexión puede calcularse mediante la ecuación (2.221).

Dadas las propiedades de la métrica en una variedad Riemanniana, notamos directamente que en un punto \mathcal{P} donde la métrica está dada por (2.247) se satisface

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = 0 \quad \forall \lambda, \mu, \nu, \quad (2.250)$$

pero $\Gamma^\lambda_{\mu\nu} \neq 0$ en el resto de la variedad es posible. Más importante, incluso en \mathcal{P} , $\Gamma^\lambda_{\mu\nu,\rho} \neq 0$ ocurre siempre si $g_{\mu\nu,\rho\sigma} \neq 0$ para toda elección de coordenadas,¹⁴ o sea, si la variedad no es plana. Entonces podría parecer que una buena y universal señal de curvatura no trivial de una variedad Riemanniana es que las derivadas de la conexión no sean triviales para toda elección de coordenadas, es decir,

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu,\rho} \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{variedad curva.} \quad (2.251)$$

¹³Hay geometrías en las que la conexión y la métrica no son compatibles, estudiadas por vez primera por Cartan. Ver e.g. W. A. Rodrigues Jr., V. V. Fernandez, A. M. Moya. *Metric compatible covariant derivatives*, [arXiv:math/0501561].

¹⁴En espacio plano, es posible encontrar sistemas coordenadas en los que $g_{\mu\nu,\rho\sigma} \neq 0$, pero un simple cambio de coordenadas conduce a $g_{\mu\nu,\rho\sigma} = 0 \quad \forall \mu, \nu, \rho, \sigma$. Esto no ocurre en espacios curvos.

Como veremos, esta conjetura es *correcta*, pero debemos expresarla en términos de tensores, que, a diferencia de la conexión de Levi-Civita Γ , son independientes de la base y del marco de referencia.

Esta discusión se generaliza directamente a *variedades pseudo-Riemannianas* y Lorentzianas. Estas variedades se distinguen de las Riemannianas en que su métrica (y, por lo tanto, su producto escalar) no es positiva definida. El espacio-tiempo de Minkowski es la variedad pseudo-Riemanniana más simple, ya que es plana y tiene métrica constante universal $g = \eta$, de signatura $(3, 1)$ en todo punto \mathcal{P} , como discutimos en la sección 2.1.4. Esta observación permite ajustar la definición de planitud local. Una variedad Lorentziana de signatura $(3, 1)$ es localmente plana si en todos sus puntos \mathcal{P} es posible elegir un sistema de coordenadas en el que

$$g_{\mu\nu}(\mathcal{P}) = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O}((x^\mu)^2) \approx \eta_{\mu\nu}. \quad (2.252)$$

Todas las afirmaciones sobre la conexión y su compatibilidad con la métrica en una variedad Riemanniana son igualmente válidas en variedades pseudo-Riemannianas.

2.6.3. Transporte paralelo

El término *conexión* está íntimamente relacionado con otro concepto importante de la geometría Riemanniana: el *transporte paralelo*.

Para entender este concepto, primero recordemos que la introducción intuitiva Riemanniana de curvatura se basa en el axioma de paralelismo Euclidiano: si dos líneas rectas no se cruzan nunca cuando son extendidas, entonces son paralelas. Dichas líneas sólo existen en espacio plano. Si estas líneas no existen, el espacio debe ser curvo. Entonces vemos que, sorprendentemente un cilindro es plano mientras que la esfera no, como observamos esquemáticamente en la figura 2.7.

Pero hemos dicho que la sola idea de una línea *recta* en espacio curvo es complicada. ¿Cómo podemos estar seguros de que, por ejemplo, las curvas trazadas en la esfera en la figura 2.7b son lo suficientemente rectas como para poder aplicar el postulado de paralelismo? En la figura 2.8 notamos que es posible trazar otras curvas sobre \mathbb{S}^2 que nunca

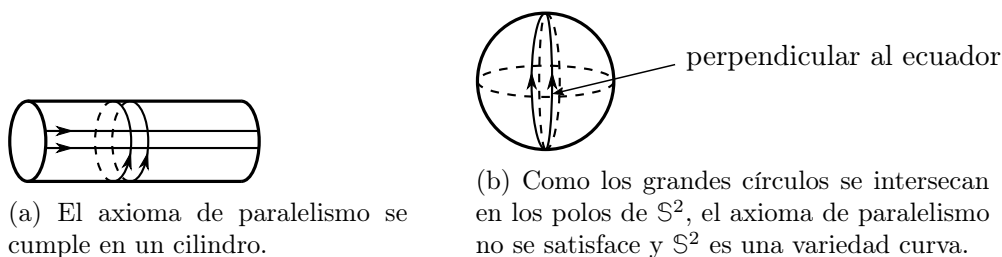


Figura 2.7: Líneas geodésicas en dos variedades Riemannianas.

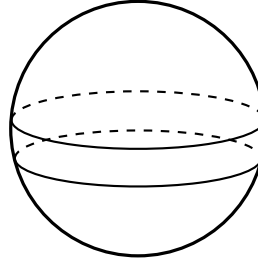


Figura 2.8: Curvas aparentemente paralelas en S^2 . El postulado de paralelismo no se satisface porque no son geodésicas.

se cruzan. ¿Cómo podemos determinar las curvas que representan la generalización de la noción de línea recta que tenemos en el espacio plano?

Un método para producir líneas rectas en espacio plano podría consistir en empezar con un vector T en un punto \mathcal{P} y reproducir el mismo vector en su extremo y, seguir así, como se representa en la figura 2.9. Como T es paralelo a sí mismo en cualquier otro punto en espacio plano, hemos puesto copias paralelas de T en la curva descrita por T mismo. La curva puede parametrizarse por un parámetro real λ , mapeando el intervalo $\lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1$ a la variedad M (en este caso, el espacio plano), es decir, la curva está dada por

$$x^\mu(\lambda) : \mathbb{R} \rightarrow M, \quad \lambda_0 \leq \lambda \leq \lambda_1, \quad (2.253)$$

tal que el vector T tiene las componentes dadas por

$$T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}. \quad (2.254)$$

Claramente, la línea recta que hemos generado en espacio (o espacio-tiempo) plano debe satisfacer

$$\frac{d}{d\lambda} T = 0, \quad (2.255)$$

porque el vector T no debe cambiar a lo largo de la curva. Como $T = T^\mu e_\mu$, podemos

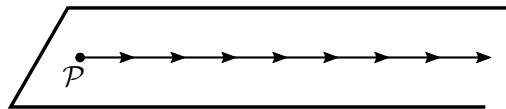


Figura 2.9: Una línea recta en espacio plano mediante transporte paralelo.

reescribir la ecuación (2.255) empleando (2.198) y (2.254) como

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} T &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} T_{,\nu} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} (T^\mu e_\mu)_{,\nu} = \frac{dx^\nu}{d\lambda} (T^\mu_{,\nu} + T^\alpha \Gamma^\mu_{\alpha\nu}) e_\mu \\ &= \frac{dx^\nu}{d\lambda} T^\mu_{,\nu} e_\mu = 0, \end{aligned} \quad (2.256)$$

que implica que una línea recta está descrita por

$$\frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0, \quad (2.257)$$

o bien, por

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) + \Gamma^\mu_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = 0. \quad \text{ecuación de la geodésica} \quad (2.258)$$

Vemos que en coordenadas Cartesianas la ecuación anterior se traduce a

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = 0 \quad \implies \quad x^\mu(\lambda) = a^\mu \lambda + b^\mu, \quad a^\mu, b^\mu = \text{cte}, \quad (2.259)$$

que es precisamente la ecuación de una línea recta.

Como no supusimos nada sobre la geometría del espacio en la ecuación (2.255), si $\Gamma^\mu_{\alpha\nu}$ establece la conexión de la variedad, la expresión (2.258) debe describir las curvas *más rectas* posibles en espacio curvo. Como hemos dicho antes, precisamente estas curvas son llamadas *geodésicas*. Las líneas rectas son las geodésicas del espacio plano. Es posible mostrar que las curvas trazadas en la figura 2.8 no son geodésicas y, por lo tanto, a pesar de que aparentan ser paralelas, no nos permiten emplear el postulado de paralelismo para saber si la esfera es curva o no. Sin embargo las curvas trazadas en la figura 2.7b sí son geodésicas.

Revisemos nuestro procedimiento de forma más general. Para obtener la *ecuación de la geodésica* (2.258), hemos descrito una curva en donde $T = \frac{dx}{d\lambda}$ se transporta tal que T permanece paralelo a su instancia previa. Notemos que, por definición, T es un vector tangente a la curva $x^\mu(\lambda)$, como en la figura 2.10.

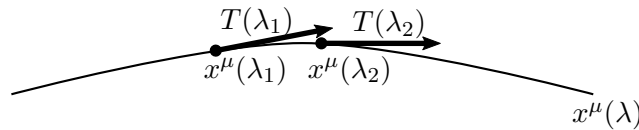


Figura 2.10: Transporte paralelo de un vector T a lo largo de la curva $x^\mu(\lambda)$.

El parámetro λ ha sido escogido arbitrariamente. Dos parámetros λ y λ' relacionados por una transformación afín,

$$\lambda' = a\lambda + b, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (2.260)$$

conducen a los mismos resultados. A los parámetros con esta relación se les conoce como *afines*. Entonces podemos escribir la ecuación de la *geodésica* en términos de λ' en lugar de λ . Esta información es relevante porque resulta que el tiempo propio τ , definido en la sección 1.4, es uno de esos parámetros afines, el cual puede resultar muy útil en las situaciones en las que es posible usarlo (para e.g. observadores masivos).

Interesantemente, las geodésicas son curvas muy especiales. En espacio plano, la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta. En espacio curvo, las trayectorias que minimizan la distancia entre dos puntos están determinadas por el mínimo de la longitud

$$S = \int_{\text{curva}} ds, \quad ds = \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}, \quad (2.261)$$

donde ds es llamado *elemento diferencial de línea*, claramente relacionado con el intervalo en la variedad, y la integral es a lo largo de una trayectoria dada. Como mostramos explícitamente en el apéndice A, el cálculo variacional permite verificar que la trayectoria que minimiza (2.261) es justamente (2.258), es decir, una geodésica, siempre que el parámetro afín empleado sea el tiempo propio τ o, equivalentemente, s .

En términos del tiempo propio, la ecuación de la geodésica (2.258) adopta la forma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = -\Gamma^\mu_{\alpha\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (2.262)$$

Identificamos inmediatamente que el lado izquierdo de la igualdad es la 4-aceleración \mathcal{A} definida en (1.65), que es proporcional a la 4-fuerza con componentes $f^\mu = m\mathcal{A}^\mu$. Por esta razón, al lado derecho de la ecuación anterior se le llama usualmente *4-fuerza inercial*. Este resultado es sorprendente porque significa que hay fuerzas que surgen directamente a partir de propiedades puramente geométricas del espacio. Si esta fuerza inercial fuera conservativa, el lado derecho de (2.262) sería el el gradiente de un potencial de la fuerza, $-\partial^\mu \phi$. Así que, de alguna forma, la geometría parece funcionar como fuente de un campo de fuerzas, independientemente de cualquier otro campo potencial que se imponga en esa geometría. Por lo tanto, es natural concebir que la única fuerza que percibe una partícula *libre* inmersa en una geometría dada es la fuerza inercial (2.262) y, en consecuencia, se mueve en la trayectoria descrita por una geodésica (ver ejercicio 2.379).

Por otra parte, dado que las componentes de la 4-velocidad se definen como $U^\mu = dx^\mu/d\tau$, empleando $d/d\tau = U^\alpha \partial_\alpha$ y la derivada covariante de U según (2.199), podemos reescribir la ecuación de la geodésica (2.262) como

$$U^\alpha U^\mu_{;\alpha} = 0. \quad \text{ecuación de la geodésica} \quad (2.263)$$

La suma sobre el índice α impide simplificar más esta expresión. Esta forma de la ecuación de la geodésica será frecuentemente más útil que (2.258).

El procedimiento que hemos empleado para describir las trayectorias geodésicas es llamado *transporte paralelo* de un vector. Análogamente, podemos transportar paralelamente a lo largo de una curva $x^\mu(\lambda)$ cualquier otro tensor. Para transportar paralelamente un vector arbitrario V , debemos exigirle que no sea alterado a lo largo de una trayectoria parametrizada por un parámetro afín λ . Es decir, debe satisfacer (2.255),

$$\frac{dV}{d\lambda} = 0 \quad (2.264)$$

la cual es equivalente a

$$\frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{\partial V}{\partial x^\mu} = T^\mu V^\nu{}_{;\mu} e_\nu = 0 \quad \iff \quad T^\mu V^\nu{}_{;\mu} = 0, \quad (2.265)$$

conduciendo finalmente a la llamada *ecuación de transporte paralelo* para un vector,

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} V^\alpha T^\nu = 0, \quad \text{transporte paralelo de } V \quad (2.266)$$

donde $T^\nu = dx^\nu/d\lambda$.

La ecuación (2.266) es una ecuación diferencial de primer orden soluble. Por lo tanto, dado un valor para el vector V en λ_0 , (2.266) determina V en cualquier valor del parámetro afín. Para descubrir la solución general de (2.266), definamos $\mathcal{W}^\mu{}_\alpha \equiv -\Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} T^\nu$ y tomemos el ansatz

$$V^\mu(\lambda) = P^\mu{}_\rho(\lambda, \lambda_0) V^\rho(\lambda_0), \quad (2.267)$$

donde $P^\mu{}_\rho$ es el *propagador paralelo* de cualquier vector V a lo largo de $x^\mu(\lambda)$ de λ_0 a λ (con la condición trivial $P^\mu{}_\rho(\lambda_0, \lambda_0) = 1$), vemos que

$$\frac{dV^\mu}{d\lambda} = \mathcal{W}^\mu{}_\alpha V^\alpha \quad \iff \quad \frac{d}{d\lambda} P^\mu{}_\rho(\lambda, \lambda_0) = \mathcal{W}^\mu{}_\alpha(\lambda) P^\alpha{}_\rho(\lambda, \lambda_0), \quad (2.268)$$

cuya solución es (omitiendo índices, para simplificar la notación)

$$\begin{aligned} P(\lambda, \lambda_0) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_{\lambda_0}^{\lambda} \int_{\lambda_0}^{\lambda_n} \int_{\lambda_0}^{\lambda_{n-1}} \cdots \int_{\lambda_0}^{\lambda_2} \mathcal{W}(\lambda_n) \mathcal{W}(\lambda_{n-1}) \cdots \mathcal{W}(\lambda_2) \mathcal{W}(\lambda_1) d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \\ &\equiv \exp\left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} \mathcal{W}(\lambda') d\lambda'\right), \end{aligned} \quad (2.269)$$

mientras que $\lambda \geq \lambda_n \geq \dots \geq \lambda_1$. Notemos que esta expresión es bastante parecida a las series de Dyson que aparecen en la mecánica cuántica.

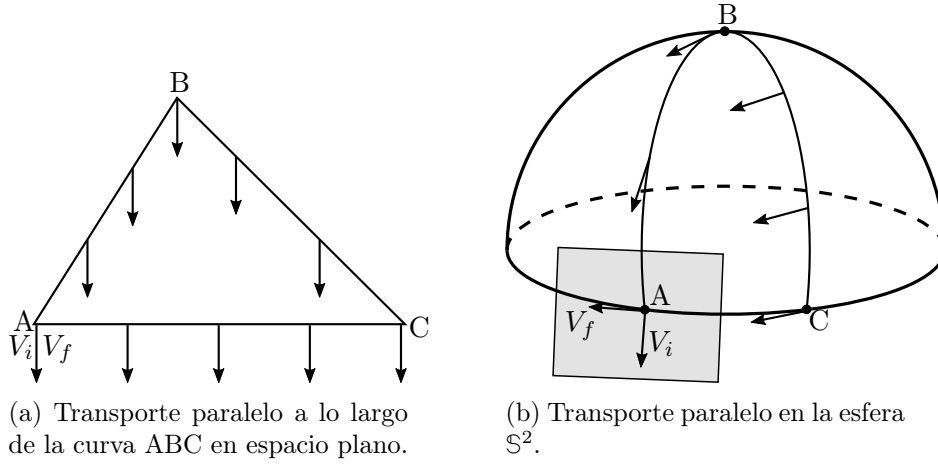


Figura 2.11: Transporte paralelo de un vector V en circuitos. Mientras que en (a) espacio plano el vector, tras ser transportado paralelamente, no cambia, i.e. $V_i = V_f$, en (b) la esfera sí, i.e. $V_i \neq V_f$.

Vemos que la ecuación de la geodésica es realmente un caso particular de la ecuación del transporte paralelo (2.266) para $V^\mu = T^\mu$, el vector tangente a la trayectoria de transporte.

Para obtener la ecuación que rige el transporte paralelo de un tensor arbitrario $t = t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} e_{\mu_1} \otimes e_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \tilde{\omega}^{\nu_1} \otimes \tilde{\omega}^{\nu_2} \dots$, imponemos la condición

$$\frac{dt}{d\lambda} = 0, \quad (2.270)$$

que se satisface, en analogía con (2.256), cuando

$$T^\mu t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots; \mu} = 0 \quad (2.271)$$

y que es equivalente a

$$\frac{dt^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots}}{d\lambda} + \Gamma^{\mu_1}_{\alpha\nu} t^{\alpha \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} T^\nu + \Gamma^{\mu_2}_{\alpha\nu} t^{\mu_1 \alpha \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} T^\nu + \dots - \Gamma^\alpha_{\nu_1 \nu} t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\alpha \nu_2 \dots} T^\nu - \dots = 0. \quad (2.272)$$

Una consecuencia interesante de la curvatura es que el transporte paralelo de un tensor en circuitos cerrados en general no lleva de regreso al mismo tensor, como se observa en la figura 2.11 al transportar un vector.

En la figura 2.11a, se muestra que el transporte paralelo de un vector a lo largo de un triángulo conduce al mismo vector en espacio plano, mientras que, como se muestra en la figura 2.11b, conduce a uno muy diferente en la 2-esfera S^2 . Dado que V_f es el resultado de actuar sobre V_i , es concebible establecer una relación entre estos tensores de la forma

$$V_f = AV_i, \quad (2.273)$$

donde A es una matriz de transformación cuya dimensionalidad iguala la de la variedad. En espacio plano, es claro que $A = \mathbf{1}$. Sin embargo, en general, A es un elemento no trivial de un grupo conocido como el *grupo de holonomía*, denotado $Hol(D)$, donde D se refiere a la conexión de Levi-Civita, de la variedad. Como mostramos en el siguiente ejemplo, el grupo de holonomía de \mathbb{S}^2 es el de rotaciones en dos dimensiones, $SO(2)$, y, por lo tanto, A puede representarse como una matriz de rotación,

$$A = \begin{pmatrix} \cos \zeta & \text{sen } \zeta \\ -\text{sen } \zeta & \cos \zeta \end{pmatrix}, \quad (2.274)$$

para algún ángulo ζ que depende de los detalles de cada circuito cerrado. Claramente, V_f depende de la curva tomada para transportar paralelamente, incluso si el punto inicial (y final) no cambian. El conjunto de todos los vectores transportados paralelamente a lo largo de todas las posibles trayectorias cerradas en un punto \mathcal{P} genera el espacio tangente $T_{\mathcal{P}}\mathbb{S}^2$.

Ejemplo 2.4 Transporte paralelo en \mathbb{S}^2 .

Parametrizar una esfera de radio R fijo requiere dos coordenadas. Considerando $R = 1$, las distancias sobre la esfera \mathbb{S}^2 se pueden determinar mediante el intervalo

$$ds^2 = d\theta^2 + \text{sen}^2 \theta d\varphi^2. \quad (2.275)$$

A partir de $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, encontramos que la métrica y su inversa adoptan la forma

$$(g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{sen}^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (g^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\text{sen}^2 \theta} \end{pmatrix}, \quad (2.276)$$

donde θ es el ángulo de latitud, como se muestra en la figura 2.12.

Consideremos el transporte paralelo en \mathbb{S}^2 de un vector $V = V^\mu e_\mu$ a lo largo de una línea de latitud constante θ_0 . La trayectoria está descrita por

$$(x^\mu) = (\theta_0, \varphi), \quad (2.277)$$

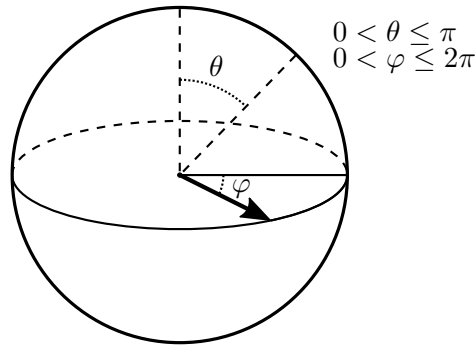


Figura 2.12: Ángulos θ y φ en la esfera.

de donde obtenemos (usando φ como parámetro afín)

$$(T^\nu) = \left(\frac{dx^\nu}{d\varphi} \right) = (0, 1)^T. \quad (2.278)$$

La ecuación de transporte paralelo para V^μ , de acuerdo a (2.265), es

$$V^\mu{}_{;\nu} T^\nu = 0 \quad (2.279)$$

que equivale a exigir

$$V^\mu{}_{,\varphi} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\varphi} V^\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad V^\mu{}_{,\varphi} + \Gamma^\mu{}_{\theta\varphi} V^\theta + \Gamma^\mu{}_{\varphi\varphi} V^\varphi = 0. \quad (2.280)$$

Empleando la métrica, encontramos que los únicos símbolos de Christoffel distintos de cero son

$$\Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\operatorname{sen} \theta \cos \theta, \quad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi{}_{\varphi\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}. \quad (2.281)$$

Se obtiene que las ecuaciones diferenciales para $V^\mu{}_{,\varphi}$ a lo largo de una trayectoria de latitud constante están dadas por el sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \partial_\varphi V^\theta - \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 V^\varphi &= 0, \\ \partial_\varphi V^\varphi + \frac{\cos \theta_0}{\operatorname{sen} \theta_0} V^\theta &= 0. \end{aligned} \quad (2.282)$$

Diferenciando una vez más y sustituyendo las ecuaciones (2.282), obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_\varphi^2 V^\theta - \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0 \partial_\varphi V^\varphi &= \partial_\varphi^2 V^\theta + \cos^2 \theta_0 V^\theta = 0, \\ \partial_\varphi^2 V^\varphi + \frac{\cos \theta_0}{\operatorname{sen} \theta_0} \partial_\varphi V^\theta &= \partial_\varphi^2 V^\varphi + \cos^2 \theta_0 V^\varphi = 0. \end{aligned} \quad (2.283)$$

Las ecuaciones diferenciales resultantes corresponden a ecuaciones de onda desacopladas de frecuencia $\cos \theta_0$, por lo que sus soluciones están dadas por

$$\begin{aligned} V^\theta(\varphi) &= A \cos(\varphi \cos \theta_0) + B \operatorname{sen}(\varphi \cos \theta_0), \\ V^\varphi(\varphi) &= C \cos(\varphi \cos \theta_0) + D \operatorname{sen}(\varphi \cos \theta_0), \end{aligned} \quad (2.284)$$

donde A, B, C y D son constantes a determinar.

Consideremos la condición inicial en $\varphi = 0$ dada por

$$(V^\mu)|_{\varphi=0} = (V_0^\theta, V_0^\varphi)^T. \quad (2.285)$$

Evaluando en la posición inicial las ecuaciones diferenciales acopladas originales (2.282), obtenemos la condición sobre las derivadas

$$\begin{aligned} \partial_\varphi V^\theta|_{\varphi=0} &= V_0^\varphi \operatorname{sen} \theta_0 \cos \theta_0, \\ \partial_\varphi V^\varphi|_{\varphi=0} &= -V_0^\theta \frac{\cos \theta_0}{\operatorname{sen} \theta_0}. \end{aligned} \quad (2.286)$$

Imponiendo estas condiciones, podemos determinar las constantes de la solución propuesta (2.284):

$$\partial_\varphi V^\theta|_{\varphi=0} = B \cos \theta_0 \stackrel{!}{=} V_0^\varphi \sin \theta_0 \cos \theta_0, \quad (2.287)$$

$$V^\theta(0) = A \stackrel{!}{=} V_0^\theta, \quad (2.288)$$

$$\partial_\varphi V^\varphi|_{\varphi=0} = D \cos \theta_0 \stackrel{!}{=} -V_0^\theta \frac{\cos \theta_0}{\sin \theta_0}, \quad (2.289)$$

$$V^\varphi(0) = C \stackrel{!}{=} V_0^\varphi. \quad (2.290)$$

Por lo tanto, las expresiones finales para V^θ y V^φ son

$$\begin{aligned} V^\theta &= V_0^\theta \cos(\varphi \cos \theta_0) + V_0^\varphi \sin \theta_0 \sin(\varphi \cos \theta_0), \\ V^\varphi &= V_0^\varphi \cos(\varphi \cos \theta_0) - \frac{V_0^\theta}{\sin \theta_0} \sin(\varphi \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (2.291)$$

Si $V_0 = e^\theta$ (es decir, $V_0^\theta = 1$ y $V_0^\varphi = 0$) en $\varphi = 0$, las ecuaciones (2.291) adoptan la forma

$$\begin{aligned} V^\theta(\varphi) &= \cos(\varphi \cos \theta_0), \\ V^\varphi(\varphi) &= -\frac{1}{\sin \theta_0} \sin(\varphi \cos \theta_0). \end{aligned} \quad (2.292)$$

Claramente, el vector resultante tras un circuito completo, $\varphi = 0 \rightarrow \varphi = 2\pi$, coincide con el inicial sólo si se satisface

$$\begin{aligned} V^\theta(2\pi) &= \cos(2\pi \cos \theta_0) = V_0^\theta = 1, \\ V^\varphi(2\pi) &= -\frac{\sin(2\pi \cos \theta_0)}{\sin \theta_0} = V_0^\varphi = 0, \end{aligned} \quad (2.293)$$

lo cual sólo ocurre si $\cos \theta_0 = 0$, es decir, si la trayectoria de la latitud constante es el ecuador, definido por $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. En general, a partir de la primera igualdad de (2.293), concluimos que el transporte paralelo de cualquier vector V alrededor de un paralelo con ángulo θ_0 resulta en que $V(2\pi)$ es una rotación de $V(0)$ por un ángulo $\cos \theta_0$ sobre el plano tangente al punto de inicio y fin de la trayectoria.

Reformulando y resolviendo las ecuaciones diferenciales en términos del vector renormalizado¹⁵ $\hat{V} = (V^\theta, \sin \theta V^\varphi)^T$, las soluciones (2.291) por $\theta = \theta_0$ fijo se pueden reescribir como

$$\begin{aligned} \hat{V}^\theta(\varphi) &= \hat{V}_0^\theta \cos(\varphi \cos \theta_0) + \hat{V}_0^\varphi \sin(\varphi \cos \theta_0), \\ \hat{V}^\varphi(\varphi) &= \hat{V}_0^\varphi \cos(\varphi \cos \theta_0) - \hat{V}_0^\theta \sin(\varphi \cos \theta_0), \end{aligned} \quad (2.294)$$

¹⁵El vector renormalizado está dado por (2.234) y (2.235).

de donde observamos que la relación entre $\hat{V}(\varphi = 2\pi)$ y $\hat{V}(\varphi = 0)$ está dada por

$$\begin{pmatrix} \hat{V}^\theta \\ \hat{V}^\varphi \end{pmatrix} \Big|_{\varphi=2\pi} = \begin{pmatrix} \cos(2\pi\omega) & \text{sen}(2\pi\omega) \\ -\text{sen}(2\pi\omega) & \cos(2\pi\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{V}_0^\theta \\ \hat{V}_0^\varphi \end{pmatrix}, \quad \omega = \cos \theta_0 \in (-1, 1). \quad (2.295)$$

Es decir, la matriz que relaciona $V(2\pi)$ con $V(0)$ es una representación bidimensional del grupo de rotaciones $SO(2)$.

2.7. Tensor de Riemann

Como hemos visto, una variedad es curva sólo si $\Gamma^\alpha_{\beta\mu,\nu} \neq 0$ en todo sistema coordenado. Entonces las derivadas de los símbolos de Christoffel podrían ser una medida útil de curvatura. Sin embargo, no son tensores y no es obvio cómo generalizarlos a tensores.

Por otro lado, como hemos ilustrado en el ejemplo 2.4, en una variedad con curvatura el efecto del transporte paralelo sobre tensores a lo largo de un circuito cerrado es no trivial, por lo que el grupo de holonomía es no trivial cuando existe curvatura.

Podemos combinar ambas observaciones para obtener una medida tensorial de la curvatura. Consideremos el transporte paralelo de un vector en el circuito $ABCD$ representado en la figura 2.13, donde δa^μ , δa^ν se consideran como valores constantes infinitesimalmente pequeños a lo largo de las direcciones fijas x^μ o x^ν , tales que los tensores casi no cambian con el transporte paralelo a lo largo de las trayectorias. Consideremos que $V = V_i$ en la posición inicial A . A partir de la ecuación del transporte paralelo de un vector V ,

$$\frac{dV^\beta}{d\lambda} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha T^\nu = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\partial V^\beta}{\partial x^\nu} + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha \right) \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.296)$$

obtenemos la ecuación diferencial a lo largo de x^ν (para ν fija)

$$V^\beta_{,\nu} = -\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha \quad \forall \beta \quad (2.297)$$

para las componentes del vector. Esta expresión es válida sólo si suponemos que la trayectoria a lo largo de la que se transporta el vector V depende únicamente de la dirección fija x^ν , tal que $dx^\mu/d\lambda = 0$ para $\mu \neq \nu$.

Para calcular el cambio en V como un efecto del transporte paralelo a lo largo de la curva AB en la dirección x^ν , podemos emplear

$$AB: \quad V^\beta(B) = V_i^\beta + \int_A^B \frac{\partial V^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu = V_i^\beta - \int_A^B \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu, \quad (\text{con } \nu \text{ fija}), \quad (2.298)$$

donde la integral es a lo largo de la dirección fija x^ν (entonces, no hay suma sobre ν) y V_i denota el vector V en su forma original desde A . Podemos usar fórmulas similares para las

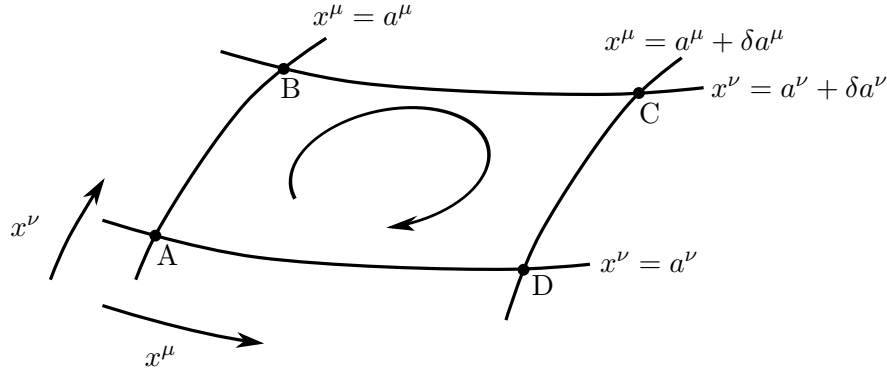


Figura 2.13: Circuito $ABCD$ a lo largo del cual un vector V es transportado paralelamente.

trayectorias BC , CD y DA :

$$BC : V^\beta(C) = V^\beta(B) - \int_B^C \Gamma^\beta_{\alpha\mu} V^\alpha dx^\mu, \quad (\text{con } \mu \text{ fija}), \quad (2.299)$$

$$CD : V^\beta(D) = V^\beta(C) - \int_C^D \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu, \quad (\text{con } \nu \text{ fija}), \quad (2.300)$$

$$DA : V_f^\beta = V^\beta(D) - \int_D^A \Gamma^\beta_{\alpha\mu} V^\alpha dx^\mu, \quad (\text{con } \mu \text{ fija}), \quad (2.301)$$

donde V_f denota la forma final de V después del transporte paralelo en el circuito $ABCD$.

Si el espacio es curvo, esperamos que

$$\delta V^\beta \equiv V_f^\beta - V_i^\beta \neq 0. \quad (2.302)$$

En términos de las integrales, δV^β se convierte en

$$\delta V^\beta = - \int_A^B \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu - \int_C^D \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu - \int_B^C \Gamma^\beta_{\alpha\mu} V^\alpha dx^\mu - \int_D^A \Gamma^\beta_{\alpha\mu} V^\alpha dx^\mu. \quad (2.303)$$

Vemos que a lo largo de cada intervalo recorrido, el integrando debe evaluarse en valores fijos de x^μ o x^ν , dependiendo de la dirección. Por ejemplo, en la trayectoria AB debemos evaluar el integrando con $x^\mu = a^\mu$, mientras que $x^\mu = a^\mu + \delta a^\mu$ debe usarse a lo largo CD . Como δa^μ y δa^ν son pequeños, tenemos que

$$(\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha) \Big|_{x^\mu = a^\mu + \delta a^\mu} \approx (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha) \Big|_{x^\mu = a^\mu} + \delta a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha) \Big|_{x^\mu = a^\mu} \quad (2.304)$$

es una buena aproximación. Con esto en mente, vemos que, por ejemplo,

$$\begin{aligned} & - \int_A^B \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu - \int_C^D \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu \approx \\ & - \int_A^B dx^\nu (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha) \Big|_{x^\mu = a^\mu} - \int_C^D dx^\nu (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha) \Big|_{x^\mu = a^\mu} - \delta a^\mu \int_C^D dx^\nu (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha)_{,\mu} \Big|_{x^\mu = a^\mu}, \end{aligned} \quad (2.305)$$

que, usando

$$\int_A^B dx^\nu = \delta a^\nu \quad \text{y} \quad \int_C^D dx^\nu = -\delta a^\nu \quad (2.306)$$

y la suposición de que $\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha$ y sus derivadas apenas cambian con x^ν , obtenemos

$$-\int_A^B \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu - \int_C^D \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha dx^\nu \approx \delta a^\nu (-\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha) + \delta a^\mu \delta a^\nu (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha)_{,\mu}. \quad (2.307)$$

Repetiendo estos pasos para las integrales restantes en (2.303), conseguimos finalmente

$$\begin{aligned} \delta V^\beta &\approx \delta a^\mu \delta a^\nu (\Gamma^\beta_{\alpha\nu} V^\alpha)_{,\mu} - \delta a^\mu \delta a^\nu (\Gamma^\beta_{\alpha\mu} V^\alpha)_{,\nu} \\ &= \delta a^\mu \delta a^\nu [\Gamma^\beta_{\alpha\nu,\mu} V^\alpha - \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \Gamma^\alpha_{\gamma\mu} V^\gamma - \Gamma^\beta_{\alpha\mu,\nu} V^\alpha + \Gamma^\beta_{\alpha\mu} \Gamma^\alpha_{\gamma\nu} V^\gamma] \\ &= \delta a^\mu \delta a^\nu [\Gamma^\beta_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma^\beta_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^\beta_{\gamma\mu} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu}] V^\alpha, \end{aligned} \quad (2.308)$$

(sin sumar sobre μ, ν) donde hemos empleado (2.297) e intercambiamos los índices γ y α en los dos términos con V^γ en el paso intermedio. Es útil definir la cantidad en los corchetes como el *tensor de Riemann* o el *tensor de curvatura de Riemann*

$$R^\beta_{\alpha\mu\nu} \equiv \Gamma^\beta_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma^\beta_{\gamma\nu} \Gamma^\gamma_{\alpha\mu} - \Gamma^\beta_{\alpha\mu,\nu} + \Gamma^\beta_{\gamma\mu} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu}. \quad \text{tensor de Riemann} \quad (2.309)$$

Aplicando la definición de derivada covariante, es posible comprobar que el tensor de Riemann también resulta del conmutador $[D_\mu, D_\nu] \equiv D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu$ actuando sobre un vector arbitrario (ejercicio 2.18),

$$[D_\mu, D_\nu] V^\beta = R^\beta_{\alpha\mu\nu} V^\alpha. \quad (2.310)$$

Esta expresión, que en matemáticas es considerada la definición del tensor de Riemann, significa que también al transportar V a lo largo de las direcciones x^μ y x^ν en ese orden y luego en el orden inverso conduce a distintos resultados, cuya diferencia es caracterizada por el tensor de Riemann. Además, (2.310) permite hacer una anotación adicional. Debido a que el lado izquierdo de la expresión es enteramente tensorial (contiene sólo componentes de tensores), también el lado derecho debe serlo. De esta forma, comprobamos que $R^\beta_{\alpha\mu\nu}$ son las componentes de un tensor; por lo tanto, sus componentes se deben transformar ante difeomorfismos como

$$R^{\beta'}_{\alpha'\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} R^\beta_{\alpha\mu\nu}, \quad (2.311)$$

como verificamos usando las propiedades de transformación de la conexión en el apéndice B.

La relación (2.310) puede generalizarse para cualquier tensor empleando (2.213) (ejercicio 2.18) como

$$\begin{aligned} [D_\mu, D_\nu] t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} &= R^{\mu_1}_{\alpha\mu\nu} t^{\alpha \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} + R^{\mu_2}_{\alpha\mu\nu} t^{\mu_1 \alpha \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots} + \dots \\ &- R^\alpha_{\nu_1 \mu\nu} t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\alpha \nu_2 \dots} - R^\alpha_{\nu_2 \mu\nu} t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \alpha \dots} - \dots, \end{aligned} \quad (2.312)$$

lo que implica que, en espacio o espacio-tiempo curvo, las derivadas covariantes *no conmutan*.

Una observación significativa sobre el tensor de Riemann es que la expansión de la métrica hasta segundo orden en x^μ , al centrar el sistema coordenado en cualquier punto de una variedad Riemanniana, se puede expresar como

$$g_{\mu\nu} \approx \delta_{\mu\nu} - \frac{1}{3} R_{\mu\nu\alpha\beta} x^\alpha x^\beta, \quad (2.313)$$

donde

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = g_{\mu\lambda} R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta}.$$

La expansión (2.313) muestra que el tensor de Riemann es una forma de “medir” qué tan grandes son las desviaciones de la métrica curva con respecto a la métrica plana. El mismo resultado aplica para variedades Lorentzianas, en las que solamente es preciso reemplazar $\delta_{\mu\nu}$ por $\eta_{\mu\nu}$.

2.7.1. Simetrías del tensor de Riemann

El tensor de Riemann tiene un número de propiedades de simetría que podemos observar fácilmente si consideramos una localidad alrededor de un punto \mathcal{P} de la variedad. Como la variedad es localmente plana, entonces $g^{\alpha\beta}{}_{,\sigma} = 0$ localmente, lo cual implica que alrededor de cada punto

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu,\sigma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\beta\mu,\nu\sigma} + g_{\beta\nu,\mu\sigma} - g_{\mu\nu,\beta\sigma}), \quad (2.314)$$

y, como $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0$ en espacio plano con coordenadas Cartesianas,

$$\begin{aligned} R^\beta{}_{\alpha\mu\nu} &= \Gamma^\beta{}_{\alpha\nu,\mu} - \Gamma^\beta{}_{\alpha\mu,\nu} = \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (g_{\gamma\alpha,\nu\mu} + g_{\nu\gamma,\alpha\mu} - g_{\alpha\nu,\gamma\mu} - g_{\gamma\alpha,\nu\mu} - g_{\mu\gamma,\alpha\nu} + g_{\alpha\mu,\gamma\nu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\beta\gamma} (g_{\nu\gamma,\alpha\mu} - g_{\alpha\nu,\gamma\mu} + g_{\alpha\mu,\gamma\nu} - g_{\mu\gamma,\alpha\nu}). \end{aligned} \quad (2.315)$$

Bajando el primer índice mediante el tensor métrico, se obtiene

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= g_{\alpha\lambda} R^\lambda{}_{\beta\mu\nu} = \frac{1}{2} \underbrace{g_{\alpha\lambda} g^{\lambda\gamma}}_{=\delta_\alpha^\gamma} (g_{\nu\gamma,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\gamma\mu} + g_{\beta\mu,\gamma\nu} - g_{\mu\gamma,\beta\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (g_{\nu\alpha,\beta\mu} - g_{\beta\nu,\alpha\mu} + g_{\beta\mu,\alpha\nu} - g_{\mu\alpha,\beta\nu}). \end{aligned} \quad (2.316)$$

Como hemos visto, el tensor métrico es simétrico, por lo que podemos verificar las siguientes relaciones (ejercicio 2.18):

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \quad (2.317)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \quad (2.318)$$

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (2.319)$$

Como estas relaciones son tensoriales, deben ser válidas para cualquier sistema de coordenadas posible sobre los distintos puntos de la variedad; es decir, estas relaciones son válidas sobre toda la variedad, no sólo localmente. Además, es posible verificar la *propiedad cíclica*

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} = 0. \quad (2.320)$$

Las propiedades de simetría del tensor de Riemann indican que no todas sus componentes son independientes. De (2.317) y (2.318) concluimos que cada par de índices es antisimétrico; en d dimensiones obtenemos $\frac{1}{2}d(d-1)$ componentes independientes para cada par, y después, usando la propiedad simétrica (2.319), podemos determinar que el número de componentes libres es

$$\frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}d(d-1) \right] \left[\frac{1}{2}d(d-1) + 1 \right] = \frac{1}{8}d(d-1)(d^2 - d + 2). \quad (2.321)$$

Sin embargo, la propiedad cíclica de los últimos índices, (2.320), impone

$$\frac{d!}{(d-4)!4!} \quad (2.322)$$

restricciones, reduciendo el número de grados de libertad del tensor de curvatura a

$$\begin{aligned} C_d &= \frac{1}{8}d(d-1)(d^2 - d + 2) - \frac{1}{24}d(d-1)(d^2 - 5d + 6) \\ &= \frac{1}{24}d(d-1)(3d^2 - 3d + 6 - d^2 + 5d - 6) \\ &= \frac{1}{12}d^2(d^2 - 1), \end{aligned} \quad (2.323)$$

en d dimensiones. Por lo tanto, en cuatro dimensiones hay solamente $C_4 = 20$ componentes independientes.

2.8. Identidades de Bianchi, tensores de Ricci y Einstein

De la expresión *local* (2.316) para $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, vemos que alrededor de cada punto de la variedad

$$R_{\alpha\beta\mu\nu,\lambda} = \frac{1}{2}(g_{\nu\alpha,\beta\mu\lambda} - g_{\beta\nu,\alpha\mu\lambda} + g_{\beta\mu,\alpha\nu\lambda} - g_{\mu\alpha,\beta\nu\lambda}). \quad (2.324)$$

Análogamente, para algunas permutaciones de índices, encontramos

$$R_{\alpha\beta\lambda\mu,\nu} = \frac{1}{2}(g_{\mu\alpha,\beta\lambda\nu} - g_{\beta\mu,\alpha\lambda\nu} + g_{\beta\lambda,\alpha\mu\nu} - g_{\lambda\alpha,\beta\mu\nu}) \quad (2.325)$$

$$R_{\alpha\beta\nu\lambda,\mu} = \frac{1}{2}(g_{\lambda\alpha,\beta\nu\mu} - g_{\beta\lambda,\alpha\nu\mu} + g_{\beta\nu,\alpha\lambda\mu} - g_{\nu\alpha,\beta\lambda\mu}). \quad (2.326)$$

Al sumar estas tres expresiones, encontramos que *localmente* (en espacio plano) debe satisfacerse

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \quad (2.327)$$

Esta expresión puede generalizarse para la variedad completa con la ecuación tensorial

$$R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu} = 0, \quad \text{identidad de Bianchi geométrica} \quad (2.328)$$

que es conocida como *identidad de Bianchi* geométrica. La identidad de Bianchi puede escribirse de manera alternativa como $R_{\alpha\beta[\mu\nu;\lambda]} = 0$ usando las propiedades de simetría del tensor de Riemann.

Para descubrir la importancia de las identidades de Bianchi, definimos algunas contracciones útiles del tensor de Riemann descubiertas por Ricci:

$$R_{\alpha\beta} \equiv R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}, \quad (2.329)$$

$$R \equiv g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} = R^{\mu}{}_{\mu} = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}. \quad (2.330)$$

La ecuación (2.329) define las componentes del *tensor de Ricci*, las cuales pueden expresarse explícitamente, al reemplazar (2.309) en (2.329), como

$$R_{\alpha\beta} = \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta;\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\beta}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\mu} - \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu;\beta} + \Gamma^{\mu}{}_{\gamma\mu}\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta}. \quad (2.331)$$

Notamos directamente que el tensor de Ricci es simétrico, es decir, $R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}$. La ecuación (2.330) define el llamado *escalar de Ricci*. Vemos que, como ambos surgen de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$, también deben contener información importante acerca de la curvatura del espacio.

Con estas definiciones, podemos ver que la identidad de Bianchi puede contraerse, obteniendo la *identidad de Bianchi contraída*¹⁶

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu}(R_{\alpha\beta\mu\nu;\lambda} + R_{\alpha\beta\lambda\mu;\nu} + R_{\alpha\beta\nu\lambda;\mu}) \\ = R_{\beta\nu;\lambda} + R^{\mu}{}_{\beta\lambda\mu;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} \\ = R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu} = 0. \end{aligned} \quad (2.332)$$

Esta identidad establece una relación entre las derivadas de los tensores de Riemann y de Ricci. Una relación mucho más importante se obtiene al contraer la *identidad de Bianchi* una vez más

$$\begin{aligned} g^{\beta\nu}(R_{\beta\nu;\lambda} - R_{\beta\lambda;\nu} + R^{\mu}{}_{\beta\nu\lambda;\mu}) &= R_{;\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} + R^{\mu\nu}{}_{\nu\lambda;\mu} \\ &= R_{;\lambda} - R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} - R^{\mu\nu}{}_{\nu\lambda;\mu} \\ &= R_{;\lambda} - 2R^{\nu}{}_{\lambda;\nu} = R_{;\lambda} - 2g_{\lambda\mu}R^{\nu\mu}{}_{;\nu} = 0. \end{aligned} \quad (2.333)$$

¹⁶Usamos la compatibilidad de la métrica, $g^{\alpha\mu}{}_{;\lambda} = 0$.

Si definimos el *tensor de Einstein* como

$$G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \quad \text{tensor de Einstein} \quad (2.334)$$

y reescribimos la última igualdad de la ecuación (2.333), encontramos que

$$\frac{1}{2}g^{\lambda\mu}R_{;\lambda} - R^{\mu\nu}{}_{;\nu} = - \left(R^{\nu\mu} - \frac{1}{2}g^{\nu\mu}R \right)_{;\nu} = -G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0, \quad (2.335)$$

donde empleamos la simetría de $R_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$, que implica también que $G^{\mu\nu} = G^{\nu\mu}$.

Este es un resultado muy interesante. Vemos que $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$ se parece a la ecuación de conservación energía–momento para un sistema de muchas partículas, $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. De hecho, este parecido es mucho más que eso, como Einstein descubrió. Como discutiremos en el siguiente capítulo con todo detalle, esta comparación revela que el tensor (geométrico) de Einstein y el tensor de energía–momento están relacionados mediante las llamadas *ecuaciones de campo de Einstein*

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T^{\mu\nu} \equiv \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa \equiv \frac{8\pi G_N}{c^4}, \quad \text{ecs. de campo de Einstein} \quad (2.336)$$

donde G_N es la constante gravitacional de Newton. Esto denota las $\frac{1}{2}d(d+1)$ ecuaciones de campo de Einstein y, como veremos en breve, son el núcleo de la *relatividad general*.

2.9. Vectores de Killing y simetrías del espacio–tiempo*

Como hemos visto en el capítulo anterior, las transformaciones de Lorentz son difeomorfismos de la métrica de Minkowski que la dejan invariante, es decir, son *isometrías* de la métrica de Minkowski. Debido a esta propiedad, cualesquiera marcos de referencia relacionados por una transformación de Lorentz son equivalentes y, por lo tanto, la física observada en esos marcos de referencia es la misma. En otras palabras, las transformaciones de Lorentz son *simetrías* de sistemas físicos basados en la geometría del espacio–tiempo de Minkowski.

En general, toda isometría de una métrica dada corresponde a una simetría del espacio–tiempo correspondiente. En esta sección estudiamos una forma útil de caracterizar las simetrías del espacio–tiempo y, por lo tanto, las simetrías que deben obedecer los sistemas físicos en él, por medio de los llamados *vectores de Killing*.

Comencemos considerando el difeomorfismo infinitesimal dado por

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon \xi^\mu, \quad \epsilon \ll 1, \quad (2.337)$$

donde ξ es un vector (o campo vectorial) que caracteriza la transformación. Notamos directamente que

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} = \delta_{\alpha}^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}{}_{,\alpha}. \quad (2.338)$$

Como consecuencia de este difeomorfismo, las componentes de las métricas en las distintas coordenadas están relacionadas, de acuerdo a (2.83), por

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\beta}} g_{\mu'\nu'}(x'). \quad (2.339)$$

Debido a que el difeomorfismo (2.337) es infinitesimal y a su estructura, notamos que las componentes de la métrica en las coordenadas transformadas se pueden expresar como una serie alrededor de las coordenadas no transformadas x , dada por

$$g_{\mu'\nu'}(x') = g_{\mu\nu}(x) + \epsilon \xi^{\gamma} g_{\mu\nu,\gamma}(x) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.340)$$

Sustituyendo (2.338) y (2.340) en (2.339), obtenemos

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= (\delta_{\alpha}^{\mu} + \epsilon \xi^{\mu}{}_{,\alpha})(\delta_{\beta}^{\nu} + \epsilon \xi^{\nu}{}_{,\beta})(g_{\mu\nu} + \epsilon \xi^{\gamma} g_{\mu\nu,\gamma} + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &\approx g_{\alpha\beta} + \epsilon (\xi^{\mu}{}_{,\alpha} \delta_{\beta}^{\nu} g_{\mu\nu} + \delta_{\alpha}^{\mu} \xi^{\nu}{}_{,\beta} g_{\mu\nu} + \delta_{\alpha}^{\mu} \delta_{\beta}^{\nu} \xi^{\gamma} g_{\mu\nu,\gamma}) \\ &= g_{\alpha\beta} + \epsilon (g_{\beta\mu} \xi^{\mu}{}_{,\alpha} + g_{\alpha\mu} \xi^{\mu}{}_{,\beta} + \xi^{\mu} g_{\alpha\beta,\mu}), \end{aligned} \quad (2.341)$$

en donde hemos retenido sólo los términos a orden ϵ en el segundo renglón, y en el último renglón hemos empleado la simetría de $g_{\mu\nu}$ y renombrado el índice γ como μ .

Observando que

$$g_{\beta\mu} \xi^{\mu}{}_{,\alpha} = (g_{\beta\mu} \xi^{\mu})_{,\alpha} - g_{\beta\mu,\alpha} \xi^{\mu} = \xi_{\beta,\alpha} - g_{\beta\mu,\alpha} \xi^{\mu},$$

los términos en paréntesis en (2.341) pueden simplificarse a

$$\begin{aligned} g_{\beta\mu} \xi^{\mu}{}_{,\alpha} + g_{\alpha\mu} \xi^{\mu}{}_{,\beta} + \xi^{\mu} g_{\alpha\beta,\mu} &= \xi_{\beta,\alpha} - g_{\beta\mu,\alpha} \xi^{\mu} + \xi_{\alpha,\beta} - g_{\alpha\mu,\beta} \xi^{\mu} + \xi^{\mu} g_{\alpha\beta,\mu} \\ &= \xi_{\beta,\alpha} + \xi_{\alpha,\beta} - \xi^{\mu} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \\ &= \xi_{\beta,\alpha} + \xi_{\alpha,\beta} - \xi^{\mu} 2g_{\mu\lambda} \Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \\ &= \xi_{\beta,\alpha} + \xi_{\alpha,\beta} - 2\Gamma^{\lambda}{}_{\alpha\beta} \xi_{\lambda} \\ &= \xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta}, \end{aligned} \quad (2.342)$$

donde la tercera igualdad es consecuencia de la forma de los símbolos de Christoffel (2.221) en términos de las componentes de la métrica, y en el último paso hemos empleado la acción de la derivada covariante en 1–formas (2.209). Empleando este resultado en (2.341), descubrimos que la relación entre las componentes de la métrica antes y después de la transformación (2.337) se puede reexpresar en la forma compacta

$$g_{\alpha\beta} \approx g_{\alpha\beta} + \epsilon (\xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta}), \quad (2.343)$$

a primer orden en ϵ . Por lo tanto, si (2.337) es una isometría de la métrica g , se debe satisfacer

$$2\xi_{(\beta;\alpha)} = \xi_{\beta;\alpha} + \xi_{\alpha;\beta} = 0, \quad \text{ecuación de Killing} \quad (2.344)$$

conocida como la *ecuación de Killing*. El vector ξ es llamado *vector de Killing* o *campo de Killing*. Dada una métrica, los vectores de Killing $\xi = \xi^\mu e_\mu$ asociados a las soluciones de (2.344) representan simetrías del espacio-tiempo caracterizado por g y son considerados los generadores de estas simetrías. Consecuentemente, existen tantos vectores de Killing independientes como simetrías tiene el espacio-tiempo descrito por la métrica.

Un caso particular de isometrías de un espacio-tiempo ocurre cuando el tensor métrico no depende de una determinada coordenada x^{μ_0} . En este caso, heredando el lenguaje de la mecánica Newtoniana, se le llama a x^{μ_0} *coordenada cíclica*. Observando (2.341), notamos que el difeomorfismo

$$x^{\mu'} = x^\mu + \epsilon \delta_{\mu_0}^\mu, \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.345)$$

es una isometría, pues $g_{\alpha\beta,\mu_0} = 0$ por suposición y la derivada de $\xi^\mu = \delta_{\mu_0}^\mu$ se anula. Las componentes $\xi_\alpha = g_{\alpha\mu} \delta_{\mu_0}^\mu = g_{\alpha\mu_0}$ satisfacen la ecuación de Killing debido a la compatibilidad de la métrica y su conexión.

2.9.1. Cantidades conservadas en geodésicas

Como vimos en la sección 1.9.4, el teorema de Noether establece que la existencia de una simetría prescribe la aparición de una cantidad conservada. Esto es particularmente cierto a lo largo de trayectorias geodésicas que, como veremos en el capítulo siguiente, describen sistemas que pueden interpretarse como inerciales.

Para determinar la estructura de las cantidades conservadas a lo largo de trayectorias geodésicas, consideremos que la geodésica está descrita por la curva $x = x(\lambda)$ en términos del parámetro afín λ . Estudiemos ahora la derivada del producto escalar de un vector (dual) de Killing con el vector tangente a la trayectoria geodésica,

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\xi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) = \xi_{\alpha,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + \xi_\alpha \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right). \quad (2.346)$$

A lo largo de una geodésica, de acuerdo a (2.258), el segundo término puede expresarse en términos de los símbolos de Christoffel, lo que conduce a

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\xi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) &= \xi_{\alpha,\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} + \xi_\alpha \left(-\Gamma^\alpha_{\mu\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \right) \\ &= (\xi_{\alpha,\beta} - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \xi_\gamma) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} \\ &= \xi_{\alpha;\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda}, \end{aligned} \quad (2.347)$$

en donde la segunda igualdad se obtiene al reemplazar los índices mudos $\alpha \rightarrow \gamma$ y $\mu \rightarrow \alpha$. Podemos expresar este resultado como la suma de dos términos idénticos salvo por el intercambio de los índices $\alpha \leftrightarrow \beta$, lo que, empleando la simetría de las derivadas con respecto a λ , permite concluir que

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\xi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} (\xi_{\alpha;\beta} + \xi_{\beta;\alpha}) \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.348)$$

porque ξ satisface la ecuación de Killing (2.344).

El resultado (2.348) indica que si $x = x(\lambda)$ describe una curva geodésica y ξ es un vector de Killing, entonces a lo largo de la trayectoria existe una cantidad conservada que está dada por

$$\xi_\alpha \frac{dx^\alpha}{d\lambda} = \xi_\alpha T^\alpha = \xi^\alpha T_\alpha = \text{cte}, \quad (2.349)$$

donde T es el vector tangente a la trayectoria geodésica, empleando la notación de la sección 2.6.3.

Notemos que si lo que se desplaza a lo largo de la geodésica es una partícula con masa m , es posible definir su tiempo propio τ tal que el parámetro afín esté dado por $m\lambda = \tau$. En este caso, (2.349) puede reexpresarse en términos del 4-momento $p = m dx/d\tau$ como

$$\xi^\alpha p_\alpha = \text{cte}. \quad (2.350)$$

Adicionalmente, si la métrica tiene una coordenada cíclica x^{μ_0} , la cantidad conservada se simplifica (porque $\xi^\mu = \delta^{\mu}_{\mu_0}$) a

$$p_{\mu_0} = g_{\mu_0\nu} p^\nu = \text{cte}, \quad (2.351)$$

conocido como el *momento conjugado* a la coordenada clásica. A pesar de la forma en la que hemos obtenido (2.351), es fácil convencerse de que esta expresión es también válida para partículas no masivas si identificamos $p^\nu \equiv T^\nu$.

2.9.2. Simetrías del espacio-tiempo de Minkowski

Como un ejemplo de nuestros resultados, busquemos las simetrías del espacio-tiempo de Minkowski en coordenadas Cartesianas. Las componentes del tensor métrico pueden representarse por la matriz diagonal constante $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Debido a que $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0$ para todos los valores de α, β, λ , la ecuación de Killing se simplifica a

$$\xi_{\beta,\alpha} + \xi_{\alpha,\beta} = 0. \quad (2.352)$$

Derivando esta expresión con respecto a x^μ , obtenemos

$$\xi_{\beta,\alpha\mu} + \xi_{\alpha,\beta\mu} = 0. \quad (2.353)$$

Por permutación de los índices, vemos que también las siguientes ecuaciones son válidas:

$$\xi_{\mu,\beta\alpha} + \xi_{\beta,\mu\alpha} = 0, \quad \xi_{\alpha,\mu\beta} + \xi_{\mu,\alpha\beta} = 0, \quad (2.354)$$

de donde conseguimos

$$\xi_{\beta,\alpha\mu} + \xi_{\alpha,\beta\mu} + \xi_{\mu,\beta\alpha} + \xi_{\beta,\mu\alpha} - \xi_{\alpha,\mu\beta} - \xi_{\mu,\alpha\beta} = 2\xi_{\beta,\alpha\mu} = 0. \quad (2.355)$$

Esta última representación de la ecuación de Killing en el espacio-tiempo plano puede resolverse fácilmente. Sus soluciones son

$$\xi_\alpha = a_\alpha + b_{\alpha\lambda}x^\lambda, \quad a_\alpha, b_{\alpha\lambda} \in \mathbb{R}. \quad (2.356)$$

Insertando este resultado en la ecuación de Killing (2.352), encontramos que

$$b_{\beta\lambda}\delta_\alpha^\lambda + b_{\alpha\lambda}\delta_\beta^\lambda = b_{\beta\alpha} + b_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.357)$$

es decir, la matriz de valores $(b_{\alpha\lambda})$ es antisimétrica.

En el espacio-tiempo de Minkowski, el número de vectores de Killing depende del número de valores independientes de a_α y $b_{\alpha\lambda}$ en (2.356). En 4 dimensiones hay 4 a_α y, debido a su antisimetría, 6 $b_{\alpha\lambda}$ independientes, por lo que hay 10 vectores de Killing y, consecuentemente, 10 simetrías asociadas al espacio-tiempo de Minkowski.

Las 4 simetrías expresadas en términos de $\xi_\alpha = a_\alpha$ (con $b_{\alpha\lambda} = 0$), $\alpha = 0, \dots, 3$, están asociadas a las cuatro coordenadas cíclicas x^α (ausentes en la métrica de Minkowski). Normalizando a la unidad, obtenemos que los vectores de Killing asociados a las coordenadas cíclicas pueden expresarse como

$$\xi(\alpha) = \delta_\alpha^\mu e_\mu = e_\alpha = \partial_\alpha \quad (2.358)$$

para cada α , donde hemos empleado en la última igualdad la expresión de los vectores base (2.38). La letra en paréntesis no denota dependencia alguna de los vectores de Killing; se trata de una etiqueta para identificarlos.

Los 4 vectores de Killing dados por (2.358) corresponden, de acuerdo a (2.337), a simetrías bajo traslaciones espacio-temporales en las 4 coordenadas Cartesianas del espacio-tiempo de Minkowski. Las cantidades conservadas asociadas a estos vectores de Killing a lo largo de geodésicas, según (2.351), son $p_0 = E/c$ y las componentes del momento espacial \mathbf{p} . La expresión (2.358) aporta una información adicional: los generadores de las traslaciones son los operadores diferenciales ∂_α , como es bien sabido en mecánica. Una manera alternativa de escribir estos 4 vectores de Killing, aunque mucho menos informativa es

$$\xi(0) = (1, 0, 0, 0)^T, \quad \xi(1) = (0, 1, 0, 0)^T, \quad \xi(2) = (0, 0, 1, 0)^T, \quad \xi(3) = (0, 0, 0, 1)^T \quad (2.359)$$

en la base del espacio de vectores, $\{e_\mu\}$.

Por otro lado, las 6 simetrías asociadas a las soluciones $\xi_\alpha = b_{\alpha\lambda}x^\lambda$ (con $a_\alpha = 0$) corresponden a los 6 valores $b_{\alpha\lambda}$ independientes. Una elección apropiada de éstos es

$$\{b_{12}, b_{13}, b_{23}, b_{01}, b_{02}, b_{03}\},$$

tales que para cada vector de Killing $\xi(\alpha, \lambda)$, con α y λ fijos, sólo $b_{\alpha\lambda} = 2 = -b_{\lambda\alpha}$ (el valor ha sido elegido con el propósito de simplificar las expresiones) y todos los otros elementos son nulos. En general, los vectores de Killing pueden escribirse como

$$\begin{aligned}\xi(\alpha, \lambda) &= g^{\mu\alpha}b_{\alpha\lambda}x^\lambda e_\mu \\ &= \frac{1}{2} \left(g^{\mu\alpha}b_{\alpha\lambda}x^\lambda + g^{\mu\lambda}b_{\lambda\alpha}x^\alpha \right) e_\mu \\ &= \frac{1}{2} b_{\alpha\lambda} \left(g^{\mu\alpha}x^\lambda - g^{\mu\lambda}x^\alpha \right) e_\mu,\end{aligned}\tag{2.360}$$

donde hemos empleado la antisimetría de $b_{\alpha\lambda}$.

Para identificar claramente los vectores de Killing, separamos ahora los valores no nulos de b en aquéllos con índices puramente espaciales, $\{b_{12}, b_{13}, b_{23}\}$, y los que tienen índices mezclados, $\{b_{01}, b_{02}, b_{03}\}$. Denotando los vectores de Killing puramente espaciales como $\xi(i, j)$, $i, j = 1, 2, 3$, reemplazando $b_{ij} = 2$ y reescribiendo las componentes espaciales de la métrica como $g^{\mu i} = -\delta_i^\mu$, vemos que en este caso (2.360) implica

$$\begin{aligned}\xi(i, j) &= \frac{1}{2} b_{ij} (g^{\mu i} x^j - g^{\mu j} x^i) e_\mu \\ &= -\frac{1}{2} b_{ij} (\delta_i^\mu x^j - \delta_j^\mu x^i) e_\mu \\ &= -x^j e_i + x^i e_j \\ &= x^i \partial_j - x^j \partial_i.\end{aligned}\tag{2.361}$$

Notamos que la acción de $\xi(i, j)$ sobre x^i es $\xi(i, j)x^i = -x^j$, y sobre x^j es $\xi(i, j)x^j = x^i$, lo que corresponde a una rotación por $\pi/2$ en el plano (i, j) a favor de las manecillas del reloj. Por lo tanto, identificamos que los 3 vectores de Killing $\xi(i, j)$ asociados a $b_{ij} \neq 0$ corresponden a los generadores de rotaciones espaciales en los 3 planos (i, j) . De hecho, el operador $\xi(i, j) = x^i \partial_j - x^j \partial_i$ es conocido en mecánica como el operador de momento angular. En una notación alternativa, los vectores de Killing pueden escribirse como

$$\xi(1, 2) = (0, -x^2, x^1, 0)^T, \quad \xi(1, 3) = (0, -x^3, 0, x^1)^T, \quad \xi(2, 3) = (0, 0, -x^3, x^2)^T. \tag{2.362}$$

En total analogía con estos resultados, encontramos que los generadores de las simetrías espacio–temporales están dados por

$$\xi(0, i) = x^i e_0 + x^0 e_i = x^i \partial_0 + x^0 \partial_i. \tag{2.363}$$

La diferencia en el signo surge de que, en este caso, deberemos considerar también que $g^{0\mu} = +\delta_0^\mu$. Las rotaciones espacio-temporales en el espacio-tiempo de Minkowski que lo dejan invariante son precisamente los boosts de Lorentz, por lo que (2.363) representa a los generadores de los boosts. Estos vectores de Killing también pueden reescribirse como

$$\xi(0,1) = (x^1, x^0, 0, 0)^T, \quad \xi(0,2) = (x^2, 0, x^0, 0)^T, \quad \xi(0,3) = (x^3, 0, 0, x^0)^T. \quad (2.364)$$

Aplicando un cálculo similar al mostrado en (2.361), notamos que, en general, la cantidad conservada asociada a $\xi(\alpha, \lambda)$ a lo largo de una geodésica está dada por

$$\begin{aligned} \xi(\alpha, \lambda)^\mu p_\mu &= \frac{1}{2} b_{\alpha\lambda} \left(g^{\mu\alpha} x^\lambda - g^{\mu\lambda} x^\alpha \right) p_\mu \\ &= \frac{1}{2} b_{\alpha\lambda} \left(p^\alpha x^\lambda - p^\lambda x^\alpha \right). \end{aligned} \quad (2.365)$$

Sustituyendo el valor elegido para $b_{\alpha\lambda} = 2$, encontramos que la cantidad conservada corresponde a

$$p^\alpha x^\lambda - p^\lambda x^\alpha \quad (2.366)$$

que coincide justamente con los elementos de la matriz $(M^{\alpha\lambda})$ de (1.121), que, según discutimos en la sección 1.9.4, contiene las cantidades conservadas asociadas con las transformaciones de Lorentz: las componentes del momento angular tridimensional y del momento lineal del centro de inercia del sistema que se desplaza en la trayectoria geodésica.

Mediante este estudio, hemos mostrado formalmente que las simetrías del espacio de Minkowski corresponden justamente a las asociadas al grupo de Poincaré, como anticipamos desde un punto de vista muy diferente en la sección 1.9.4.

2.10. Densidades tensoriales*

Hemos visto que, para describir un sistema en una base y de una manera geoméricamente independiente, el formalismo tensorial es una gran herramienta. Desafortunadamente, no todas las cantidades pueden escribirse como tensores (por ejemplo, la conexión de Levi-Civita no es un tensor). Este es el caso del *símbolo* de Levi-Civita en d dimensiones, que se puede expresar en cualquier sistema coordenado como

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d} = \tilde{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_d} = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones pares} \\ -1 & \text{permutaciones impares} \\ 0 & \text{de otra manera.} \end{cases} \quad (2.367)$$

El símbolo de Levi-Civita no es una cantidad tensorial. Sin embargo, es posible construir un tensor a partir de él. Para empezar, recordemos que el determinante $|A|$ de una matriz A cuadrada d -dimensional con componentes A_{ij} satisface la relación

$$\tilde{\varepsilon}_{i_1 i_2 \dots i_d} A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \cdots A_{i_d j_d} = |A| \tilde{\varepsilon}_{j_1 j_2 \dots j_d}, \quad (2.368)$$

con suma sobre índices repetidos.¹⁷

Aplicando el resultado (2.368) para la matriz Jacobiana de un difeomorfismo, aquí denotada como $\frac{\partial x'}{\partial x}$, encontramos que

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_d} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_d}}{\partial x^{\mu'_d}}. \quad (2.369)$$

Análogamente, para la matriz correspondiente a la inversa del difeomorfismo obtenemos

$$\tilde{\varepsilon}^{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_d} = \left| \frac{\partial x}{\partial x'} \right| \tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\mu'_2}}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_d}}{\partial x^{\mu_d}}, \quad (2.370)$$

donde $|\frac{\partial x}{\partial x'}|$ puede ser sustituido por la inversa del determinante Jacobiano $|\frac{\partial x'}{\partial x}|^{-1}$ debido a las reglas del determinante. Observamos que las expresiones anteriores se parecen a las transformaciones ante difeomorfismos de las componentes de un tensor, salvo por la aparición del determinante Jacobiano.

Cualquier cantidad $\tilde{\rho}$ que se transforma ante difeomorfismos como tensor, excepto por una potencia ω del determinante Jacobiano como factor se llama *densidad tensorial de peso* ω . Por lo tanto, $\tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}$ es una densidad tensorial de peso $\omega = +1$, mientras que $\tilde{\varepsilon}^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_d}$ tiene peso $\omega = -1$.

El símbolo del Levi-Civita no es la única densidad tensorial. Es posible mostrar que el determinante de la métrica $|g|$ se transforma como

$$|g'| = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-2} |g|, \quad (2.371)$$

por lo que $|g|$ es una densidad tensorial de peso $\omega = -2$.

Este último resultado es el que permite, a partir de una densidad tensorial, construir una cantidad que se transforma como tensor ante difeomorfismos, a la que llamaremos *pseudotensor*. El pseudotensor ρ asociado a una densidad tensorial $\tilde{\rho}$ de peso ω se define como

$$\rho \equiv |g|^{\omega/2} \tilde{\rho}. \quad (2.372)$$

Si las componentes de la densidad tensorial $\tilde{\rho}$ exhiben M superíndices y N subíndices, entonces se transforman bajo difeomorfismos como

$$\rho^{\mu'_1 \dots \mu'_M}_{\nu'_1 \dots \nu'_N} = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\omega} |g|^{\omega/2} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{\omega} \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_M}}{\partial x^{\mu_M}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x^{\nu'_N}} \tilde{\rho}^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}, \quad (2.373)$$

lo que puede ser reescrito como una transformación tensorial habitual,

$$\rho^{\mu'_1 \dots \mu'_M}_{\nu'_1 \dots \nu'_N} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_M}}{\partial x^{\mu_M}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\nu_N}}{\partial x^{\nu'_N}} \rho^{\mu_1 \dots \mu_M}_{\nu_1 \dots \nu_N}. \quad (2.374)$$

¹⁷Esta expresión de álgebra lineal no es tensorial, razón por la que no se han empleado distintas posiciones para los índices.

Entonces, concluimos que el pseudotensor para la densidad tensorial de Levi-Civita es

$$\varepsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d} = \sqrt{|g|}\tilde{\varepsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}, \quad \varepsilon^{\mu_1\mu_2\dots\mu_d} = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\tilde{\varepsilon}^{\mu_1\mu_2\dots\mu_d}. \quad (2.375)$$

El hecho de que necesitamos dos expresiones explica por qué estas cantidades tensoriales no son realmente tensores, sino solamente pseudotensores.

Otra densidad útil es el elemento de volumen en d dimensiones, que se transforma como

$$\tilde{d}^d x' = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \tilde{d}^d x, \quad (2.376)$$

es decir, es una densidad tensorial de peso $\omega = 1$. Por lo tanto, las integrales covariantes deben contener

$$d^d x = \sqrt{|g|} \tilde{d}^d x, \quad (2.377)$$

para que se transformen de manera tensorial. Nuevamente, en una variedad Lorentziana de signatura $(3, 1)$, como el espacio-tiempo de Minkowski, el determinante $|g|$ debe ser reemplazado por $-|g|$ para que sea positivo definido.

Los pseudotensores son importantes para construir la teoría covariante. Por ejemplo, en espacio curvo (o, en coordenadas curvilíneas generalizadas), es ε y no $\tilde{\varepsilon}$ lo que aparece en la definición del tensor dual de Hodge del tensor Faraday,

$$*F^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{|g|}}\tilde{\varepsilon}^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, \quad (2.378)$$

que solamente en un espacio plano coincide con la expresión que se usó anteriormente en (2.148), justificando la notación ahí empleada.

Ejercicios

2.1 Transformación de Lorentz inversa.

- Muestre que si Λ^{-1} es la inversa de un boost de Lorentz a lo largo de la dirección x^1 , entonces satisface (1.118).
- Se dice que, así como la métrica de Minkowski $\eta = (\eta_{\mu\nu})$ se emplea para *bajar índices* como en (2.5), la inversa de la métrica $\eta^{-1} = (\eta^{\mu\nu})$ se emplea para *subir índices*. Reescriba (1.118) en términos de componentes (con índices) empleando (2.5).

2.2 Transformaciones de tensores.

- A partir de la transformación de las componentes de un vector y la invariancia de tensores, obtenga la regla de transformación de las componentes de una 1-forma, $\tilde{V} = V_\mu \tilde{\omega}^\mu$.
- De la regla de transformación de las componentes de vectores y 1-formas obtenga la regla de transformación de las componentes de un tensor t definido como en (2.81).

2.3 Operadores de proyección.

Un *operador de proyección* P es una transformación lineal que mapea un espacio vectorial en sí mismo y que cumple $P^2 = P$. Sea P un operador de proyección cuyas componentes están dadas por $P^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - s^\mu s^\nu$, donde s es un 4-vector temporaloide unitario, es decir, $s^\mu s_\mu = 1$, y $\eta^{\mu\nu}$ son las componentes del tensor métrico inverso. Suponga que P mapea un vector v a un vector ω , es decir, $P^\mu{}_\nu v^\nu = \omega^\mu$.

- Demuestre que ω es ortogonal a s .
- Demuestre que $P^2 = P$, es decir, $P^\alpha{}_\beta P^\beta{}_\mu v^\mu = P^\alpha{}_\mu v^\mu$.
- Con base en los incisos anteriores, ¿cómo son las componentes de P si s es ahora espacialoide y unitario, es decir, $s^\mu s_\mu = -1$, y P preserva sus propiedades?

2.4 Preguntas conceptuales.

- Suponga que un objeto T con componentes $T^{\mu\nu}$ es definido como la suma directa de dos vectores, tal que $T^{\mu\nu} = A^\mu + B^\nu$. ¿Es $T^{\mu\nu}$ un tensor? ¿Por qué?
- ¿Son las siguientes expresiones correctas? Justifique su respuesta.

$$A_{\mu\nu} B^{\nu\alpha} = A_{\mu\nu} B^{\nu\gamma}, \quad \eta_{\mu\nu} A^{\mu\alpha} V^\nu = \eta_{\rho\nu} A^{\rho\alpha} V^\nu, \quad \eta_{\alpha\beta} \eta_{\gamma\delta} A^{\alpha\mu\nu} B^\gamma{}_\mu C^{\lambda\delta} = \eta^{\lambda\gamma} A_{\beta\mu}{}^\nu B^{\delta\mu} C_{\gamma\delta}.$$

2.5 Parte simétrica y antisimétrica de un tensor.

En general, intercambiar los índices genera un tensor distinto al original. Sin embargo, es posible definir simetría y antisimetría en un tensor, como se vio en la sección 2.1.7. Emplee las definiciones para la parte simétrica (2.96) y antisimétrica (2.103) de un tensor para resolver los siguientes ejercicios.

- Aplique las definiciones mencionadas para dar expresiones de $T_{(\alpha\beta)}$, $T_{[\alpha\beta]}$, $T_{(\alpha\beta\gamma)}$ y $T_{[\alpha\beta\gamma]}$.
- Muestre que un tensor de rango $(0, 2)$ que es antisimétrico en un sistema de referencia es antisimétrico en todos.
- Sean $A_{\mu\nu}$ las componentes de un tensor antisimétrico y sean $S^{\mu\nu}$ las componentes de un tensor simétrico. Muestre que

$$A_{\mu\nu} S^{\mu\nu} = 0.$$

- Muestre que si $V_{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor arbitrario, entonces

$$V^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} - V^{\nu\mu})A_{\mu\nu},$$

$$V^{\mu\nu} S_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(V^{\mu\nu} + V^{\nu\mu})S_{\mu\nu}.$$

donde A y S son los tensores definidos en el inciso anterior.

2.6 Tensor de rango 2.

Suponga que $A_{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor simétrico de rango $(0, 2)$.

- Muestre que

$$B_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu}$$

son las componentes de un tensor de rango $(0, 3)$.

- (b) Muestre que B es un tensor completamente simétrico.
 (c) Determine el número de componentes independientes que tiene este tensor.

2.7 Tensor de Faraday y electromagnetismo.

Considere que A_μ denota las componentes de una 1-forma (correspondiente al 4-potencial electromagnético).

- (a) Muestre que la elección del tensor de Faraday (2.124) conduce a la fuerza de Lorentz habitual (2.119) al sustituirlo en la relación tensorial (2.120).
 (b) Muestre que la ecuación (2.139) corresponde a las componentes de un tensor de rango dos. *Sugerencia: las componentes de un tensor se transforman de una forma precisa bajo la acción del grupo de Lorentz.*
 (c) Muestre que se cumple la ecuación (2.140).
 (d) Encuentre todas las simetrías bajo intercambio de índices de la identidad de Bianchi (2.140). *Sugerencia: hay simetrías bajo intercambio de dos o tres índices.*
 (e) Muestre que la relación (2.144) conduce a dos de las ecuaciones de Maxwell (2.118).

2.8 Símbolo de Levi-Civita y delta de Kronecker.

Se definen las componentes del símbolo de Levi-Civita de rango 4 (es espacio-tiempo plano) como

$$\varepsilon^{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4} = \begin{cases} +1 & \text{permutaciones de } (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ pares,} \\ -1 & \text{permutaciones de } (\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4) \text{ impares,} \\ 0 & \text{índices repetidos.} \end{cases}$$

Se definen también las componentes del tensor δ como

$$\delta_{\mu_1\dots\mu_n}^{\nu_1\dots\nu_n} = \det \begin{pmatrix} \delta_{\mu_1}^{\nu_1} & \dots & \delta_{\mu_1}^{\nu_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{\mu_n}^{\nu_1} & \dots & \delta_{\mu_n}^{\nu_n} \end{pmatrix}.$$

Con base en las definiciones anteriores, resuelva lo siguiente:

- (a) Muestre que en el espacio-tiempo de Minkowski $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda} = -\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}$.
 (b) Evalúe $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\lambda}$.
 (c) Muestre que la delta de Kronecker con componentes δ'_μ es un tensor.
 (d) Tome $\delta_{\lambda\gamma}^{\mu\nu}$ y muestre que es antisimétrica tanto en los índices superiores como en los inferiores.
 (e) Muestre que $\delta_{\lambda\gamma}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\varepsilon_{\lambda\gamma\alpha\beta}$.

2.9 Operador estrella de Hodge y electromagnetismo en espacio-tiempo plano.

De manera superficial, una r -forma se puede entender como un tensor de rango r completamente antisimetrizado. Por ejemplo, el tensor de Faraday es una 2-forma. El espacio vectorial de r -formas es isomorfo al espacio de $(d-r)$ -formas en una variedad d -dimensional. Es natural entonces definir un isomorfismo entre estos espacios mediante el *operador estrella* $*$ (o *dual de Hodge*). De esta

forma a un tensor antisimétrico t de rango r se le asigna un tensor antisimétrico $*t$ de rango $d - r$ de la siguiente manera:

$$*t^{\mu_1 \dots \mu_{d-r}} = \frac{1}{(d-r)!} \varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{d-r} \nu_1 \dots \nu_r} t_{\nu_1 \dots \nu_r},$$

en donde $\varepsilon^{\mu_1 \dots \mu_{d-r} \nu_1 \dots \nu_r}$ es la generalización de rango d del símbolo de Levi-Civita.

- Muestre que las componentes del tensor dual de Faraday en 4 dimensiones, $*F^{\mu\nu}$, coinciden con las de $F^{\mu\nu}$ tras realizar las sustituciones $E \rightarrow -B$ y $B \rightarrow E$.
- Demuestre que las identidades de Bianchi son equivalentes a la ecuación $\partial_\mu *F^{\mu\nu} = *F^{\mu\nu, \mu} = 0$. (*Sugerencia: contraiga las identidades de Bianchi con un símbolo de Levi-Civita.*)
- Muestre que $*(F) = -F$.

2.10 Electromagnetismo y relatividad especial.

- Suponga que un observador viaja a la velocidad relativista $\mathbf{u} = (u, 0, 0)^T$. ¿Cuál sería la forma de los campos \mathbf{E}' y \mathbf{B}' medidos por este observador?
- Calcule de manera explícita en términos de \mathbf{E} y \mathbf{B} las cantidades $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ y $*F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$. ¿Cómo se transforman estas cantidades bajo el grupo de Lorentz?
- Utilice el resultado anterior para indicar si, dado un marco de referencia donde $\mathbf{E} \neq 0$ y $\mathbf{B} = 0$, es posible encontrar otro marco de referencia (o una transformación de Lorentz) donde $\mathbf{E} = 0$ y $\mathbf{B} \neq 0$.

2.11 Ecuaciones de Maxwell y transformaciones generales de coordenadas.

Como hemos visto, dos ecuaciones de Maxwell son obtenidas de (2.144). Bajo difeomorfismos, los elementos que aparecen en esa ecuación se transforman como

$$x^\mu \rightarrow x^{\mu'} = f^{\mu'}(x), \quad J^\mu \rightarrow J^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} J^\mu, \quad F^{\mu\nu} \rightarrow F^{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu},$$

para un conjunto de funciones $f = (f^\mu)$ con Jacobiano diferente de cero.

- Muestre explícitamente que (2.144) es invariante bajo transformaciones de Lorentz.
- Muestre que (2.144) no es invariante bajo difeomorfismos más generales que las transformaciones de Lorentz.
- Ante una transformación de coordenadas, las componentes del tensor métrico se transforman como

$$g_{\mu'\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} g_{\mu\nu}.$$

Utilizando la transformación anterior para las componentes de g , obtenga la métrica en coordenadas cilíndricas y esféricas.

- Considere el cambio de coordenadas $(ct, x, y, z) \rightarrow (ct, r, \varphi, z)$. Utilizando los incisos anteriores, encuentre el tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$ en estas nuevas coordenadas.
- Calcule $F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}$ en las coordenadas definidas en (d) y compare con el resultado del ejercicio 2.10. ¿Cómo se transforman estas cantidades bajo el grupo de Lorentz?

- (f) ¿Qué tendrá que satisfacer el operador ∂_μ para que (2.144) mantenga su forma ante alguna transformación general de coordenadas?

2.12 Fluido perfecto.

Considere el tensor de energía-momento de un fluido perfecto, incluyendo su energía interna,

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} \rho_0 h U^\mu U^\nu - P \eta^{\mu\nu},$$

con ρ_0 la densidad de energía en reposo, h la entalpía por unidad de energía definida como $h = 1 + \epsilon + P/\rho_0$, ϵ la energía interna por unidad de energía y P la presión.

- (a) Demuestre que

$$T_{\mu\nu} \frac{U^\mu}{c} \frac{U^\nu}{c} = \rho_0 (1 + \epsilon),$$

lo cual define una forma covariante de la densidad de energía $\rho \equiv (1 + \epsilon)\rho_0$.

- (b) Muestre que en un sistema de referencia que se mueve junto con el fluido, el tensor de energía-momento del fluido perfecto es

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P).$$

2.13 Preguntas conceptuales.

- (a) Suponga que las trayectorias de dos partículas libres en algún lugar del universo se intersecan varias veces. ¿Qué propiedad geométrica tendrá el espacio? *Físicamente*, ¿con qué está relacionada esa propiedad?
- (b) Dado el tensor de esfuerzos electromagnético

$$T^{\mu\nu} = -\frac{1}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha} F^\nu{}_\alpha - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right),$$

¿bajo qué condiciones, en caso de ser posible, esperaríamos que el *fluido electromagnético* pudiera considerarse un fluido perfecto? (*Sugerencia: use la forma explícita de $F^{\mu\nu}$, $F^\mu{}_\alpha$ y $F_{\mu\nu}$.*)

2.14 Tensor de energía-momento para un campo de Klein-Gordon.

El tensor de energía-momento para un campo escalar con masa m en espacio-tiempo plano está dado por

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} (\partial_\alpha \phi \partial^\alpha \phi - m^2 \phi^2).$$

- (a) Encuentre la densidad de energía ρ y la presión P .
- (b) Muestre que $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ implica la ecuación de Klein-Gordon,

$$(\partial^\mu \partial_\mu + m^2)\phi = 0.$$

- (c) Suponga ahora que ϕ no depende de la posición, es decir, sólo depende de x^0 . Sin emplear los resultados anteriores, compare con el tensor de energía-momento para un fluido perfecto de acuerdo al ejercicio 2.12 con $\epsilon = 0$ y encuentre U^μ , P y ρ . ¿Son compatibles estos resultados con lo que encontró en (a)?

2.15 Transformaciones de coordenadas.

Considere un sistema de coordenadas parabólicas (p, q) . La transformación de coordenadas Cartesianas (x, y) a coordenadas parabólicas está dada por

$$p(x, y) = x \quad y \quad q(x, y) = y - cx^2,$$

donde c es una constante.

- Obtenga la transformación inversa y, a partir de esta, obtenga la métrica para el sistema p, q .
- Sea V un vector en el sistema parabólico con componentes $A^p = 1$ y $A^q = 0$, encuentre las componentes de A en el sistema Cartesiano.
- De igual forma, es posible definir coordenadas sinusoidales en el espacio plano 2-dimensional u y w por medio de las relaciones $u = x$ y $w = y - a \sin(bx)$, con a y b constantes. ¿Cuál es la métrica en el sistema sinusoidal?
- Suponga que un observador se mueve con velocidad constante \mathbf{v} , cuyas componentes son $v^x = v$ y $v^y = 0$. ¿Cuál es la velocidad del observador en el sistema (u, w) ?
- Muestre que la componente de la velocidad v^w no es independiente del tiempo a pesar de que la magnitud de \mathbf{v} es constante. Explique por qué v^w no es constante a pesar de que el vector \mathbf{v} siempre apunta en la misma dirección y su magnitud es constante.
- Concluya que dv^w/dt no puede ser la componente a^w del vector de aceleración del observador. ¿Esto se relaciona con la derivada que hemos considerado?

2.16 Derivada covariante.

En coordenadas curvilíneas, la derivada usual debe ser sustituida por la derivada covariante, que captura la naturaleza tensorial del gradiente \tilde{d} . El gradiente de un vector arbitrario V en una base coordenada curvilínea está dado por

$$\partial_\mu V = \partial_\mu(V^\nu e_\nu) = (\partial_\mu V^\nu)e_\nu + V^\nu \partial_\mu e_\nu = (V^\lambda{}_{,\mu} + \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} V^\nu)e_\lambda \equiv (D_\mu V^\lambda)e_\lambda.$$

Por lo tanto, $D_\mu V^\lambda$ define las componentes de la derivada covariante de V . La expresión de la derivada covariante es independiente de la elección del sistema de coordenadas y se reduce a la derivada usual cuando se trabaja con coordenadas Euclidianas (porque los vectores base son constantes). Así, las expresiones comunes vectoriales que conocíamos anteriormente pueden generalizarse a coordenadas curvilíneas por medio de la derivada covariante. Por ejemplo, la divergencia de un vector es $\tilde{d} \cdot V = D_\mu V^\mu$, la derivada en la dirección de U (derivada direccional) es $U^\mu D_\mu V^\alpha$, y el Laplaciano de una función escalar está dado por $\tilde{d}^2 \phi = D_\mu(D^\mu \phi)$. Cabe resaltar que la derivada covariante, así como la derivada usual, sigue la *regla de Leibniz*: $D_\mu(V^\alpha W_\beta) = (D_\mu V^\alpha)W_\beta + V^\alpha(D_\mu W_\beta)$. Otra notación conveniente para la derivada covariante es $D_\mu V^\alpha \equiv V^\alpha{}_{;\mu}$ (en analogía con la derivada usual).

- Demuestre que la derivada covariante de las componentes de una 1-forma está dada por $D_\mu q_\alpha = q_{\alpha,\mu} - \Gamma^\nu{}_{\alpha\mu} q_\nu$. (Sugerencia: Considere la expresión $D_\mu(q_\alpha V^\alpha)$. Por un lado utilice la regla de Leibniz para la derivada covariante y por otro lado recuerde que la derivada covariante de una función escalar es $D_\mu \phi = \partial_\mu \phi$). ¿Cómo calcularía las componentes de la derivada covariante de un tensor de rango $(1, 1)$, es decir, $D_\mu T^\alpha{}_\beta$?

- (b) Encuentre cómo se transforman $V^{\alpha, \beta}$ y $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ por separado bajo un cambio de coordenadas. Muestre que ninguna de las dos expresiones se transforma como un tensor, pero que su suma sí lo hace. Para poder comprobar que la expresión $\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta}$ no se transforma como un tensor, es necesario encontrar una expresión en términos de objetos conocidos para los símbolos de Christoffel. Con este fin, podemos hacer actuar la 1-forma $\tilde{\omega}^{\alpha}$ sobre $\partial_{\mu}e_{\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}e_{\lambda}$. Recordando que las 1-formas son funciones (multi-)lineales y que $\tilde{\omega}^{\alpha}(e_{\mu}) = \delta^{\alpha}_{\mu}$, tenemos

$$\tilde{\omega}^{\alpha}(\partial_{\mu}e_{\beta}) = \tilde{\omega}^{\alpha}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}e_{\lambda}) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\tilde{\omega}^{\alpha}(e_{\lambda}) = \Gamma^{\lambda}_{\mu\beta}\delta^{\alpha}_{\lambda}.$$

Así, hemos obtenido una expresión útil para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} = \tilde{\omega}^{\alpha}(\partial_{\mu}e_{\beta}).$$

- (c) Con base en los resultados del inciso anterior, ¿los símbolos de Christoffel son tensores? ¿Por qué?

2.17 Símbolos de Christoffel.

- (a) Muestre que si los símbolos de Christoffel no son simétricos, es decir, $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \neq \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$, entonces $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} - \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}$ son las componentes de un tensor de rango (1, 2). Este tensor es llamado *tensor de torsión asociado*.
- (b) Muestre las siguientes identidades:

- a) $g^{\alpha\beta, \gamma} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma}g^{\mu\beta} - \Gamma^{\beta}_{\mu\gamma}g^{\mu\alpha}$.
- b) $V^{\nu}_{\mu; \nu} = -|g|^{-1/2}(|g|^{1/2}V^{\nu}_{\mu})_{, \nu} - \Gamma^{\lambda}_{\mu\sigma}V^{\sigma}_{\lambda}$.
- c) $g_{\mu\nu, \alpha} = \Gamma_{\mu\nu\alpha} + \Gamma_{\nu\mu\alpha}$.

donde $|g| = \det g$ y los símbolos de Christoffel están dados por (2.221).

2.18 Tensor de Riemann.

Una forma de describir la curvatura de una variedad Riemanniana en dimensión n es mediante un tensor de rango (1, 3) conocido como tensor de curvatura de Riemann. Este tensor se puede entender como la medida de qué tanto difiere la métrica del espacio de una métrica plana. Se definen las componentes del tensor de Riemann como en (2.309), en términos de los símbolos de Christoffel.

- (a) Muestre que el tensor de Riemann satisface las relaciones de simetría

$$\begin{aligned} R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\alpha\beta\nu\mu}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= -R_{\beta\alpha\mu\nu}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} &= +R_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ R_{\alpha\beta\mu\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu} + R_{\alpha\mu\nu\beta} &= 0, \\ R^{\alpha}_{\alpha\mu\nu} &= 0. \end{aligned}$$

- (b) ¿Cuántas componentes independientes tiene el tensor de Riemann en 4 dimensiones?
- (c) Usando la definición de la aplicación de la derivada covariante sobre tensores arbitrarios, demuestre que para las componentes v^{α} de un vector arbitrario se satisface que

$$(D_{\mu}D_{\nu} - D_{\nu}D_{\mu})v^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}v^{\beta}.$$

- (d) Empleando la definición de la derivada covariante (2.213), muestre que para un tensor arbitrario con componentes $t^{\mu_1 \mu_2 \dots}_{\nu_1 \nu_2 \dots}$ se satisface (2.312).

2.19 Lagrangiano de una partícula libre.

Una geodésica es la generalización en espacio-tiempo curvo de una línea recta en espacio Euclídeo. Ésta define la trayectoria más corta entre dos puntos y corresponde a la trayectoria que siguen partículas no aceleradas. La ecuación de una geodésica es

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\gamma\nu} \frac{dx^\gamma}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0, \quad (2.379)$$

en donde λ es el parámetro de la trayectoria y es un parámetro afín, es decir, se relaciona con el tiempo propio τ mediante $\lambda = a\tau + b$, con a y b constantes. Cualquier parámetro afín (incluyendo al tiempo propio) puede parametrizar una geodésica.

- (a) Adoptando $\lambda = \tau$, muestre que en espacio-tiempo plano (2.379) es la generalización de la segunda ley de Newton. Generalizando esta observación para un espacio-tiempo no plano, exprese la 4-fuerza percibida por una partícula con masa m .

El Lagrangiano de una partícula libre en relatividad está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu, \quad (2.380)$$

en donde $U^\mu = dx^\mu/d\tau$ es la 4-velocidad de la partícula. En el formalismo Lagrangiano, las ecuaciones de movimiento para x^μ están dadas por las *ecuaciones de Euler-Lagrange* expresadas como

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0. \quad (2.381)$$

- (b) Muestre que cuando se inserta el Lagrangiano de una partícula libre en la ecuación (2.381) se obtiene la ecuación geodésica (2.379) en la forma $U^\nu D_\nu U^\mu = 0$.

Sugerencia: recuerde que en el formalismo Lagrangiano x^μ y U^μ son variables independientes, y que las derivadas de $g_{\mu\nu}$ son no triviales en general. Emplee también $g_{\mu\nu,\rho} U^\nu U^\rho = \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\rho} U^\nu U^\rho + g_{\mu\rho,\nu} U^\rho U^\nu)$.

Este resultado es de suma relevancia. Dado que las ecuaciones de Euler-Lagrange de una partícula libre conducen a la ecuación de las geodésicas, obtenemos que las partículas libres en un espacio-tiempo arbitrario siguen las trayectorias descritas por estas curvas.

2.20 Preguntas conceptuales.

- (a) Sobre la superficie de la 2-esfera de radio 1 descrita por el elemento de línea $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$, un vector V es igual a e_θ en $\theta = \pi/4$, $\phi = \phi_0$. ¿Cómo se ve V después del transporte paralelo alrededor del círculo $\phi = \phi_0$? ¿Cuál es la magnitud de V ?
- (b) Sabemos que si el tensor de Riemann es cero, entonces el espacio es plano, y viceversa. Suponga ahora que sólo se sabe que la contracción conocida como tensor de Ricci $R^\mu_{\alpha\mu\beta} = g^{\mu\nu} R_{\nu\alpha\mu\beta}$ es cero. ¿Es plano el espacio en cuestión?
- (c) ¿Qué es una geodésica?

- (d) Si dos observadores A y B siguen la misma trayectoria geodésica (sin importar el espacio en cuestión) y se ubican en puntos diferentes, ¿existe algún método para que A conozca las mediciones desde el punto de vista de B ?

2.21 Transporte paralelo y la 2-esfera.

Considere nuevamente la 2-esfera con elemento de línea $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ ($0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$), donde $\theta = 0$ es el polo norte y $\theta = \pi$ el sur.

- (a) Escriba la métrica y calcule los símbolos de Christoffel para la 2-esfera.
- (b) Escriba las ecuaciones de transporte paralelo de un vector $V = (V^\theta, V^\phi)^T$ en la 2-esfera a lo largo de un paralelo $\theta = \theta_0 = \text{cte}$, es decir, en la trayectoria descrita por $(x^\mu) = (\theta_0, \phi)^T$ y encuentre $V(\phi)$. Suponga la condición inicial $V(\phi = 0) = (V_0^\theta, V_0^\phi)^T$. *Sugerencia: considere como parámetro afín a ϕ y busque que el sistema obtenido de ecuaciones acopladas adopte la forma de dos osciladores armónicos desacoplados.*
- (c) Considere el resultado del inciso anterior. Si se escribe $\hat{V} = A\hat{V}_0$, en donde \hat{V} es el vector normalizado con $\hat{V}^\mu = V^\mu|e_\mu|$ (sin suma sobre μ). ¿Cuál es la forma de la matriz A ?, ¿cuál es el determinante de A ?
- (d) Considere ahora el vector $V = e_\theta$ en $\phi = 0$. ¿Cómo es V después de ser transportado paralelamente a lo largo del paralelo $\theta = \pi/3$?
- (e) Escriba las dos ecuaciones de la geodésica para la 2-esfera con los símbolos de Christoffel que obtuvo en el primer inciso y el parámetro afín τ (tiempo propio). Dadas algunas condiciones iniciales, describa cualitativamente algún posible método de resolver para $\theta(\tau)$ y $\phi(\tau)$.
- (f) Muestre que las ecuaciones para el transporte paralelo en la 2-esfera a lo largo de un meridiano con $\phi = \phi_0 = \text{cte}$ se reducen a

$$V^\theta{}_{,\theta} = 0 \quad y \quad V^\phi{}_{,\theta} + \cot\theta V^\phi = 0.$$

Encuentre las componentes de $V = V(\theta)$ dada la condición inicial $V(\theta = \vartheta_0) = (V_0^\theta, V_0^\phi)^T$. Usando $\vartheta_0 = \pi/2$ y $V(\vartheta_0) = e_\phi$, describa el comportamiento de $V(\theta)$ al ser transportado paralelamente a lo largo de un meridiano.

- (g) Calcule las componentes independientes $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$ del tensor de Riemann en la 2-esfera. *Sugerencia: emplee el resultado de (b) del ejercicio 2.18.*

Capítulo 3

Relatividad general y sus aplicaciones básicas

3.1. Principios de relatividad general

La relatividad especial es válida únicamente para marcos (globalmente) inerciales. La pregunta que Einstein se formuló fue cómo extender la relatividad a sistemas no inerciales sujetos a fuerzas. Quizá la fuerza más simple de todas es la *gravitacional* porque, en su presencia, *todos los cuerpos* con la misma velocidad inercial y posición siguen trayectorias idénticas.

Un buen punto de partida son los marcos de referencia no inerciales que, al menos como primera aproximación, pueden tratarse como marcos inerciales, dejándonos aplicar la relatividad especial hasta cierto punto. Como veremos, es posible encontrar dichos sistemas en el contexto de la gravedad.

3.1.1. Principio de equivalencia

Un concepto crucial que nos ayudará a extender la relatividad especial es un antiguo postulado todavía algo polémico: *el principio de equivalencia*. Este principio fue primeramente aplicado por Galileo y Newton. En su forma *débil* afirma que la *masa inercial* m_i y la *masa gravitacional* m_g son equivalentes. Esta asignación es un tanto sorprendente porque la masa inercial, que aparece en la segunda ley de Newton,

$$\mathbf{f} = m_i \mathbf{a}, \tag{3.1}$$

es una cantidad universal independientemente de la naturaleza de \mathbf{f} , mientras m_g que aparece en

$$\mathbf{f} = -m_g \nabla \phi, \tag{3.2}$$

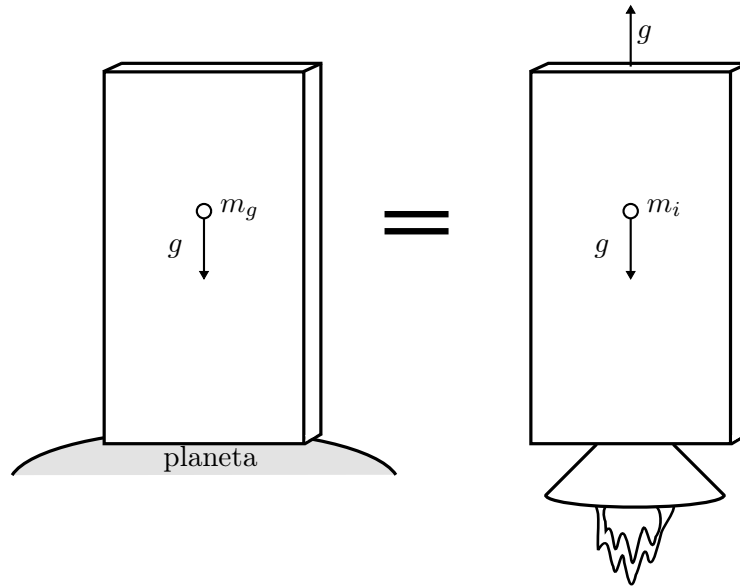


Figura 3.1: Principio de equivalencia. El movimiento de partículas en una caja debido a un campo gravitacional y al movimiento acelerado de la caja son indistinguibles para un observador dentro de una caja pequeña.

donde ϕ es el potencial gravitacional, es particular a la fuerza gravitacional. Sin embargo, diversos experimentos han demostrado que no hay ninguna desviación de

$$m_i = m_g. \quad (3.3)$$

Una consecuencia inmediata del principio de equivalencia débil es que

$$\mathbf{a} = \ddot{\mathbf{x}} = -\nabla\phi(\mathbf{x}) \quad (3.4)$$

describe el movimiento de cualquier partícula sujeta a un campo gravitacional, independientemente de su masa, carga o cualquier otra propiedad que tenga. Es decir, *el movimiento de las partículas en caída libre es universal*.

Una forma alternativa de expresar el principio de equivalencia surge del *Gedankenexperiment*¹ en el que un físico observa la caída libre de una partícula dentro de una caja pequeña y (visualmente) sellada. Si se satisface el principio de equivalencia, el observador dentro de la caja no sería capaz de decir si el movimiento de la partícula se debe a un campo gravitacional influyendo sobre la caja o si se debe al movimiento acelerado de la caja, como se observa esquemáticamente en la figura 3.1.

¹Le llamamos *Gedankenexperiment* a los *experimentos pensados* porque así les llamaba Einstein en alemán. La utilidad de éstos es que nos permiten comprender ciertos aspectos de la física en un escenario que concibe las consecuencias de una acción de acuerdo a su fenomenología.

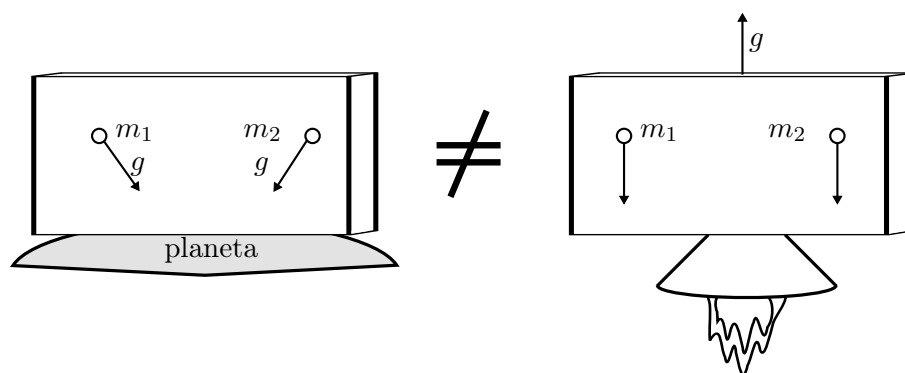


Figura 3.2: Movimiento de partículas aceleradas debido a un campo gravitacional y al movimiento acelerado de la caja, observadas dentro de una caja suficientemente *grande*. Notamos diferencias al comparar ambas cajas.

Vemos, sin embargo, que si la caja es suficientemente grande, las partículas que caen debido al efecto de un campo gravitacional pueden distinguirse de otras que están sujetas a una aceleración constante, como se observa esquemáticamente en la figura 3.2.

Se deduce entonces que una forma alternativa de expresar el principio de equivalencia (débil) es que el movimiento de partículas libres en un campo gravitacional es equivalente a que las mismas partículas estén en un marco de referencia uniformemente acelerado, siempre y cuando sólo pequeñas regiones del espacio-tiempo sean consideradas.

Una interesante consecuencia de esta interpretación se expresa en otro *Gedankenexperiment* de Einstein. Imaginemos de nuevo nuestro experimento encerrado en una caja, pero esta vez la caja cae por acción del campo gravitacional mientras que una partícula en la caja también cae libremente. Como la caja y la partícula caen con la misma aceleración uniforme, un observador no nota ningún movimiento de la partícula dentro de la caja, como se observa esquemáticamente en la figura 3.3. Este mismo experimento puede realizarse con dos o más partículas, y el observador podría describir la caja como un marco de referencia no acelerado, siempre y cuando la caja sea *suficientemente pequeña* (y la caja no haga contacto con el piso). Impresionantemente, antes de su inevitable muerte, el observador en la caja podría afirmar que en ese marco de referencia las leyes de la física pueden describirse con la relatividad especial.

Entonces, hemos encontrado que en regiones pequeñas alrededor de cada punto del espacio-tiempo dotado con un campo gravitacional, hay un marco de referencia especial (localmente inercial) en el cual las leyes de la naturaleza toman la forma de aquéllas en un marco de referencia inercial.

Curiosamente, la definición de una variedad es muy similar a la afirmación anterior: en una región pequeña alrededor de cada punto de una variedad Riemanniana existe un espacio en el cual la métrica es plana. Esto conduce a una sorprendente interpretación

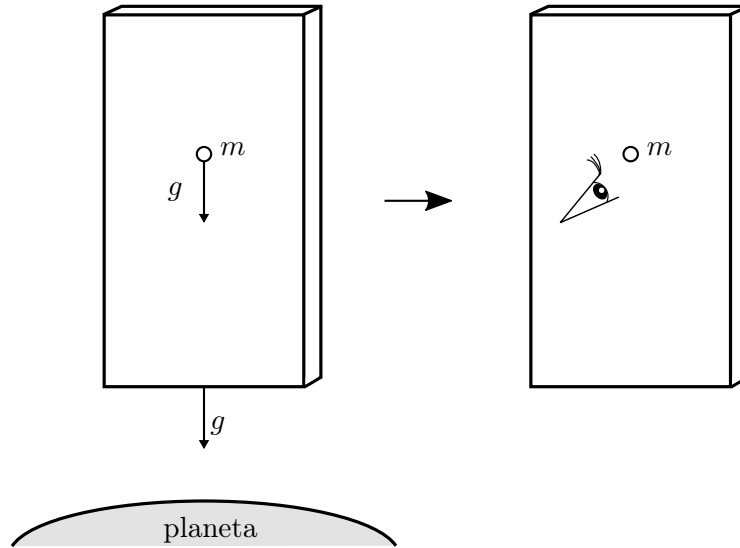


Figura 3.3: Cuando la caja también está acelerada por el campo gravitacional, un observador no puede notar ningún movimiento de la partícula.

geométrica del principio de equivalencia: el movimiento de una partícula sometida a un campo gravitacional es el mismo que observa una partícula libre al desplazarse sobre un espacio-tiempo con curvatura.

3.1.2. Corrimiento al rojo gravitacional

En nuestro estudio del efecto Doppler relativista en la sección 1.10.1, encontramos que para velocidades Newtonianas (no relativistas), la frecuencia ν' de la luz emitida por una fuente que se aproxima a un observador no coincide con la frecuencia observada ν de acuerdo a

$$\frac{\nu'}{\nu} \approx 1 - \frac{\Delta v}{c}, \quad \frac{\Delta v}{c} \ll 1, \quad (3.5)$$

donde Δv corresponde a la diferencia entre la velocidad v' de la fuente cuando un fotón con energía $h\nu'$ se emite al tiempo t_E y la velocidad v del receptor cuando el fotón es detectado al tiempo t_D con energía $h\nu$. En marcos de referencia inerciales v y v' son constantes, y entonces v y v' pueden medirse simultáneamente, es decir

$$\Delta v \equiv |v'(t_E) - v(t_D)| = |v'(t_E) - v(t_E)|. \quad (3.6)$$

En marcos de referencia no inerciales la diferencia en el tiempo es relevante.

Consideremos dos partículas originalmente (al tiempo t_0) en reposo que se aceleran repentinamente durante Δt con aceleración constante g a lo largo de una dirección, como

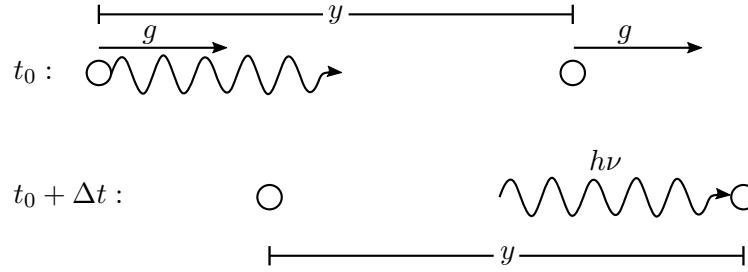


Figura 3.4: Emisión y recepción de luz de partículas en movimiento con una aceleración g y separadas una distancia y .

se representa en la figura 3.4. Si están separadas por una distancia y en t_0 , en $t_0 + \Delta t$ la distancia será la misma, pero la velocidad de ambas partículas habrá cambiado por $g\Delta t$. Supongamos ahora que la primera partícula emite un fotón con energía $h\nu'$ al tiempo t_0 , que es detectado por la segunda partícula al tiempo $t_0 + \Delta t$.

De acuerdo con nuestra descripción de Δv en el efecto Doppler Newtoniano, tenemos

$$\Delta v = |v'(t_0) - v(t_0 + \Delta t)| = |v(t_0) - v(t_0 + \Delta t)| = |0 - g\Delta t| = g\Delta t = \frac{gy}{c}. \quad (3.7)$$

Por consiguiente, de acuerdo a (3.5), las frecuencias de la luz emitida y detectada difieren por

$$\frac{\nu'}{\nu} \approx 1 - \frac{gy}{c^2}, \quad \frac{gy}{c^2} \ll 1. \quad (3.8)$$

Debido al principio de equivalencia, este resultado debe ser válido si las partículas están sujetas a un campo gravitacional. En este caso, dada la dirección de la aceleración gravitacional, la frecuencia menor es observada más lejos del origen de esa aceleración; es decir, un fotón pierde energía a medida que sube un campo gravitacional. Por ejemplo, si $g = G_N M/R^2$ es la aceleración inducida por un planeta de masa M y radio R , entonces, encontramos que el fotón detectado a una altitud y en el planeta debe tener un corrimiento al rojo dado por

$$\frac{\nu'}{\nu} \approx 1 - \frac{G_N M y}{c^2 R^2}. \quad \text{corrimiento al rojo gravitacional} \quad (3.9)$$

Por construcción, la expresión anterior sólo es válida para $R^2/y \gg G_N M/c^2$ y debe ser reemplazada en casos más generales, como será discutido en la sección 3.3.2. Es preciso destacar que el corrimiento al rojo gravitacional no corresponde a un simple cambio de perspectiva. A diferencia del corrimiento al rojo longitudinal de la relatividad especial (en el que la luz emitida por una fuente que se aleja del observador es apreciada con menor

frecuencia), en este caso la radiación electromagnética pierde energía al alejarse de una fuente gravitacional.

Este corrimiento al rojo gravitacional fue predicho por Einstein en su artículo de 1911 *On the Influence of Gravitation on the Propagation of Light*, pero ganó fuerza sólo después del desarrollo final de la teoría de la relatividad general en 1915. Se confirmó experimentalmente por Pound y Rebka en 1959, usando la emisión y absorción de rayos γ del ^{57}Fe .

Esta predicción codifica otra observación interesante: como $\nu' < \nu$, entonces $\Delta t' > \Delta t$, es decir, los relojes avanzan más lentamente cerca de una fuente de campo gravitacional, y entre más fuerte es el campo, más lento avanza el reloj. Sin embargo, Einstein notó que esta observación no es consistente con el postulado de la universalidad de la velocidad de la luz c , a menos de que la luz se curve por acción de la gravedad.

3.2. Campos gravitacionales débiles: límite Newtoniano

Aunque la observación anterior podría ser suficiente para relacionar fuerzas gravitacionales con la curvatura del espacio-tiempo, no hemos proporcionado un tratamiento formal a esta conclusión. Particularmente, la curvatura ha estado ausente en nuestra discusión. Para llegar a una descripción razonable, empecemos estudiando el escenario gravitacional más simple, uno donde el campo gravitacional sea muy débil (como en nuestro planeta).

Si hay alguna conexión entre gravitación y curvatura, un campo gravitacional débil podría ser descrito en términos de un espacio con muy poca curvatura. Impongamos las siguientes suposiciones sobre el espacio-tiempo:

1. Las partículas en el espacio-tiempo se mueven lentamente, es decir, $|u^i| \ll c$;
2. El espacio-tiempo es prácticamente plano, por lo que podemos aproximar la métrica como

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \quad \text{con} \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1; \quad (3.10)$$

3. La métrica y la conexión del espacio-tiempo son compatibles; además, suponemos que el campo débil es *estático*, entonces las componentes de la métrica no pueden depender del tiempo

$$g_{\mu\nu,0} = 0. \quad (3.11)$$

Como consecuencia de nuestra segunda suposición, la métrica es *casi* diagonal.

Nuestra labor ahora es estudiar el comportamiento de partículas libres en dicho espacio-tiempo, prestando especial atención a las desviaciones de su movimiento en espacio-tiempo plano. Con este propósito, consideremos la ecuación de la geodésica (2.258)

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0. \quad (3.12)$$

El segundo término de esta ecuación, al ser desarrollado, puede reescribirse como

$$\begin{aligned}
 \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} &= \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 + 2\Gamma^\mu_{0i} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^i}{d\tau} + \Gamma^\mu_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \\
 &= \left(\Gamma^\mu_{00} + 2\Gamma^\mu_{0i} \frac{\partial x^i}{\partial x^0} + \Gamma^\mu_{ij} \frac{\partial x^i}{\partial x^0} \frac{\partial x^j}{\partial x^0} \right) \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \\
 &= \left(\Gamma^\mu_{00} + 2\Gamma^\mu_{0i} \frac{u^i}{c} + \Gamma^\mu_{ij} \frac{u^i u^j}{c^2} \right) \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2,
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

donde hemos definido las componentes de la velocidad local, $u^i = \partial x^i / \partial t$. Como, por suposición, $|u^i| \ll c$, entonces (3.13) se reduce en este límite a

$$\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} \approx \Gamma^\mu_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \tag{3.14}$$

Usando la expresión de los símbolos de Christoffel en términos de la métrica (2.221), obtenemos

$$\Gamma^\mu_{00} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} (2g_{0\lambda,0} - g_{00,\lambda}) = -\frac{1}{2} g^{\mu\lambda} g_{00,\lambda}, \tag{3.15}$$

donde hemos empleado (3.11). Como hemos supuesto la expansión de la métrica (3.10), para satisfacer la condición $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta^\mu_\nu$, vemos que, tomando $\eta^{\mu\lambda} h_{\lambda\nu} = \eta_{\lambda\nu} h^{\mu\lambda}$, las componentes de la métrica son, a primer orden en h ,

$$g^{\mu\lambda} \approx \eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}, \quad |h^{\mu\lambda}| \ll 1. \tag{3.16}$$

Por lo tanto, en esta aproximación,

$$\Gamma^\mu_{00} \approx -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\lambda} - h^{\mu\lambda}) (\eta_{00} + h_{00})_{,\lambda} \approx -\frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} h_{00,\lambda}, \tag{3.17}$$

y, por consiguiente, la ecuación geodésica se convierte en

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} \approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\lambda} h_{00,\lambda} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2. \tag{3.18}$$

Para la componente $\mu = 0$, encontramos el resultado trivial

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \approx \frac{1}{2} \eta^{0\lambda} h_{00,\lambda} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = 0, \tag{3.19}$$

debido a que $g_{\mu\nu,0} = h_{\mu\nu,0} = 0$. Este resultado tiene una interpretación física directa. Ya que, de acuerdo a (1.67),

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} = \frac{1}{m} \frac{dp^0}{d\tau}, \tag{3.20}$$

entonces $g_{\mu\nu,0} = 0$ asegura la conservación de la energía, es decir, como supusimos, el sistema dinámico es estático. Una consecuencia directa es que

$$\frac{dx^0}{d\tau} = c \frac{dt}{d\tau} = \text{cte.} \quad (3.21)$$

Para las componentes espaciales $\mu = i$, encontramos la ecuación (no tensorial)

$$\frac{d^2x^i}{d\tau^2} \approx -\frac{1}{2}h_{00,i} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 = -\frac{1}{2}h_{00,i}c^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2, \quad (3.22)$$

que, multiplicando por $(d\tau/dt)^2$, conduce a

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} \approx -\frac{1}{2}c^2h_{00,i}. \quad (3.23)$$

Este resultado es similar a la relación Newtoniana (3.4), para un campo (potencial) gravitacional ϕ . De hecho, si elegimos

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2}, \quad (3.24)$$

(3.4) y (3.23) coinciden. En otras palabras, notamos que para un espacio-tiempo estático, es posible relacionar un campo gravitacional con la métrica. Empleando (3.10) y (3.24), identificamos que el intervalo adopta la estructura

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) (dx^0)^2 - (1 - h_{ii})(dx^i)^2. \quad (3.25)$$

Si suponemos que el espacio-tiempo descrito por este intervalo es homogéneo e isotrópico, es posible mostrar que $h_{ii} = 2\phi/c^2$.

A la luz de estas observaciones, nuestra suposición adquiere una interpretación física

$$\begin{aligned} |h_{\mu\nu}| \ll 1 &\implies \phi \ll 1, \\ g_{\mu\nu,0} = 0 &\implies \phi_{,0} = 0, \end{aligned}$$

es decir, el campo gravitacional es débil y estático. Esto establece una *relación clara entre la geometría y la gravitación*.

Para establecer la relación general entre geometría y gravitación, ahora debemos describir la relación entre las ecuaciones de campo de Einstein (2.336) y las ecuaciones de Newton para ϕ . Recordemos primero que en la gravedad Newtoniana, ϕ satisface la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\phi = 4\pi G_N\rho_m, \quad (3.26)$$

donde ρ_m es la densidad de masa. Para una distribución de masa esférica puntual, sabemos que

$$\phi = -\frac{G_N M}{r}, \quad M \equiv \int d^3x \rho_m. \quad (3.27)$$

Entonces, en el límite Newtoniano, encontramos que el intervalo está dado por

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2G_N M}{rc^2}\right) (dx^0)^2 - \left(1 - \frac{2G_N M}{rc^2}\right) (dx^i)^2. \quad (3.28)$$

La primera pregunta es cómo escribir la ecuación (3.26) en forma tensorial. Vemos que, en términos de $h_{00} = 2\phi/c^2$ y $T_{00} = \rho_m c^2 = \rho$, (3.26) se convierte en

$$\nabla^2 h_{00} = \frac{2}{c^2} \nabla^2 \phi = \frac{8\pi G_N}{c^2} \rho_m = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{00}, \quad (3.29)$$

donde T_{00} se ha tomado en el marco del centro de masa, como en (2.156). En cualquier otro marco, debemos considerar todas las componentes de $T_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$. Por lo tanto, la ecuación tensorial que estamos buscando depende de $g_{\mu\nu}$ del lado izquierdo y $T_{\mu\nu}$ del lado derecho.

Considerando el posible origen del Laplaciano espacial asociado al Laplaciano en términos de la derivada covariante, hacemos una *primera conjetura*:

$$D^\mu D_\mu g_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G_N}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (3.30)$$

Desafortunadamente, notamos de inmediato que esto no puede ser correcto porque, en general, $g_{\alpha\beta;\mu} = 0$ y $T_{\alpha\beta} \neq 0$. No obstante, es claro que requerimos segundas derivadas de la métrica para llegar a la ecuación de Poisson. Entonces, proponemos una *segunda conjetura* en la que, en lugar del Laplaciano covariante, empleamos directamente el tensor $R_{\alpha\beta}$ como el origen de $\nabla^2 h_{00}$. Dado que

$$R_{00} \approx \Gamma^i{}_{00,i} \approx -\frac{1}{2} \eta^{i\lambda} h_{00,\lambda i} = \frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}, \quad (3.31)$$

entonces podemos conjeturar que

$$R_{\mu\nu} = \frac{4\pi G_N}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (3.32)$$

Pero sabemos que, en general, $D^\mu R_{\mu\nu} \neq 0$ mientras $D^\mu T_{\mu\nu} = 0$.

Una conjetura más interesante es considerar del lado izquierdo el operador tensorial más general de rango 2 que dependa de las segundas derivadas de la métrica $g_{\mu\lambda,\nu\beta}$ y de $g_{\mu\nu}$. Proponemos

$$O^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + A g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu}, \quad A, \Lambda = \text{cte}, \quad (3.33)$$

tal que

$$O^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \kappa = \text{cte}, \quad (3.34)$$

y $D_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Juntas, estas condiciones implican $D_\mu O^{\mu\nu} = 0$, lo que conduce a

$$D_\mu O^{\mu\nu} = D_\mu (R^{\mu\nu} + A g^{\mu\nu} R - \Lambda g^{\mu\nu}) = D_\mu (R^{\mu\nu} + A g^{\mu\nu} R) = 0, \quad (3.35)$$

que, comparando con (2.335), sólo se satisface en general si $A = -\frac{1}{2}$ con base en argumentos meramente geométricos. Consecuentemente, salvo por el término (covariantemente) constante $-\Lambda g^{\mu\nu}$, O coincide con el tensor de Einstein G , cuyas componentes $G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ satisfacen $D_\mu G^{\mu\nu} = 0$. Entonces, encontramos que, escogiendo $\kappa = \frac{8\pi G_N}{c^4}$ para obtener (3.29) en el límite Newtoniano, la relación tensorial más general que conduce a la ecuación gravitacional de Poisson es

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \text{ecuaciones de campo de Einstein} \quad (3.36)$$

conocida como *las ecuaciones de campo de Einstein*. Por razones que serán exploradas más tarde, la constante Λ es conocida como *constante cosmológica* y típicamente se asocia a la energía intrínseca del vacío cuántico. Como mostramos detalladamente en el apéndice C, las ecuaciones de campo de Einstein pueden ser obtenidas directamente mediante el principio variacional a partir de la llamada *acción de Einstein-Hilbert*. Sin embargo, no existe manera de obtener, de primeros principios, esa acción. Es decir, así como la segunda ley de Newton y la ecuación de Schrödinger de la mecánica cuántica, las ecuaciones de campo de Einstein son leyes empíricas basadas en nuestras observaciones.

Dado que la ecuación de Poisson se puede obtener a partir de (3.36) con constante cosmológica nula, en el límite Newtoniano, las ecuaciones de Einstein establecen la conexión entre materia/energía y geometría que sugiere el principio de equivalencia. El lado izquierdo de (3.36) sólo contiene elementos geométricos, mientras que el lado derecho contiene la descripción del contenido que habita en el espacio-tiempo expresado por la geometría. Por lo tanto, la dinámica del contenido del universo, de acuerdo a las ecuaciones de campo de Einstein, está regida por la estructura geométrica del espacio-tiempo y, al mismo tiempo, el contenido del universo es fuente de las deformaciones (topología, curvatura, conexión, etc.) del espacio-tiempo.

En especial, la dinámica de partículas libres (y radiación), de acuerdo a las ecuaciones de Einstein, está completamente determinada por la métrica y, según nuestra discusión de la sección 2.6.3, corresponde al movimiento a lo largo de las geodésicas de la geometría. Por otra parte, hemos identificado que, al menos en el límite Newtoniano, la métrica corresponde al campo gravitacional; por lo tanto, una partícula libre sometida a un campo gravitacional sigue la trayectoria regida por la métrica del espacio-tiempo, es decir, una geodésica. Notamos que, en efecto, la gravedad desaparece para un observador que se desplaza junto a la partícula en caída libre porque, localmente, la métrica es plana en los espacios-tiempo Lorentzianos de la relatividad general y, por lo tanto, el campo gravitacional es el mismo reinante en la relatividad especial.

Einstein propuso esta generalización de su teoría de la relatividad como una descripción de las interacciones gravitacionales. Entonces no sólo caracteriza el movimiento de los objetos en caída libre que están sometidos a una forma local de la relatividad compatible con la teoría especial de Einstein, sino que debería ser capaz de proveer reglas para el

movimiento de cuerpos masivos, rotantes, con carga eléctrica, acelerados por algún efecto adicional de cualquier origen.

Las ecuaciones de campo de Einstein corresponden a una ley física sólo si es posible comprobar que todas sus consecuencias pueden ser verificadas experimentalmente, y obtener esas consecuencias requiere *resolver* las ecuaciones de Einstein. Y *resolverlas* no es asunto menor. Debido a las simetrías de $R_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$, (3.36) contiene 10 ecuaciones diferenciales parciales acopladas y cuadráticas en $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas. Resolver esas ecuaciones significa frecuentemente encontrar el tensor métrico que mejor se adapta a la dinámica de un sistema físico que experimenta interacciones gravitacionales. Pero también significa encontrar la dinámica del contenido de un espacio-tiempo dada una métrica de interés. El resto del capítulo está dedicado a identificar las consecuencias de la relatividad general dadas dos importantes métricas para nuestra existencia, la correspondiente a estrellas y la que describiría el universo como un *todo*.

3.2.1. Unidades naturales

Antes de comenzar a trabajar con la solución más sencilla de las ecuaciones de Einstein (3.36), es preciso introducir una simplificación a la notación. A partir de esta sección, emplearemos las llamadas *unidades naturales*, definidas por

$$G_N = c = \hbar = 1, \quad (3.37)$$

donde \hbar corresponde a la constantes de Planck.

Estas unidades, además de simplificar considerablemente las expresiones algebraicas que obtendremos, desconectan de todo tipo de prototipos de medición a las propiedades físicas. Es, de cierta forma, más *natural* suponer que los valores precisos *elegidos por la naturaleza* de las constantes universales en (3.37) es la unidad, en lugar de los valores artificiales que hemos aprendido a usar por razones históricas.

Notamos que, por ejemplo, en estas unidades, las ecuaciones de campo de Einstein adoptan la forma

$$G^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu}. \quad (3.38)$$

Adicionalmente, notamos a partir del intervalo de Minkowski con $c = 1$ (adimensional), $ds^2 = dt^2 - dx^i dx^i$, que las unidades de tiempo y longitud ahora coinciden. Además, la razón β ahora coincide con la rapidez de un sistema.

3.3. Solución de Schwarzschild: estrellas y agujeros negros

El campo gravitacional del Sol, de los planetas del sistema solar, e incluso de algunas galaxias puede ser modelado por la aproximación de campo débil, es decir, por la gravi-

tación Newtoniana. Sin embargo, las observaciones indican que en los núcleos galácticos y otras estructuras cósmicas reinan campos gravitacionales intensos, incluso probablemente responsables de las enormes energías que los rayos cósmicos alcanzan. Comprender la física gravitacional en general requiere obtener soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein.

La solución de Schwarzschild se considera la solución más sencilla y útil de las ecuaciones de campo de Einstein. Esta solución corresponde a la descripción de un sistema con las siguientes propiedades:

- (I) está dotado de simetría esférica,
- (II) es estático e invariante bajo inversión temporal ($t \rightarrow -t$), y
- (III) ocurre en el vacío.

La segunda propiedad implica que la métrica debe satisfacer $g_{\mu\nu,0} = 0$, como supusimos en el límite de campo débil, mientras que la tercera suposición exige que el tensor de energía-momento y la constante cosmológica se anulen, $T_{\mu\nu} = 0 = \Lambda$.

Obtener una solución a las ecuaciones de Einstein consiste, en este caso, en obtener la expresión más general de la métrica o, análogamente, del elemento de línea (o intervalo) que se ajusta a las cualidades buscadas. Para obtener la métrica de Schwarzschild, recordemos primero que en coordenadas esféricas tridimensionales el elemento de línea del espacio plano está dado por

$$d\tilde{s}^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \equiv dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.39)$$

donde $d\Omega^2$ es el diferencial de ángulo sólido. El término $r^2 d\Omega^2$ corresponde al elemento de línea bidimensional para una 2-esfera de radio r fijo, y su estructura hace evidente la simetría esférica. A partir de la expresión (3.39), proponemos el siguiente intervalo en un *espacio-tiempo* con simetría esférica:

$$ds^2 = dt^2 - d\tilde{s}^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.40)$$

En general, una métrica con simetría esférica podría tener términos no diagonales y coeficientes no triviales, conduciendo a una expresión como

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + 2g_{0r}dtdr + g_{rr}dr^2 - r^2d\Omega^2 + 2g_{0\theta}dtd\theta + 2g_{0\varphi}dtd\varphi. \quad (3.41)$$

La componente de ángulo sólido permanece invariante, suponiendo que r y g_{rr} podrán absorber toda dependencia en las otras variables. La simetría esférica implica invariancia bajo rotaciones, tales como $d\theta \rightarrow -d\theta$ y $d\varphi \rightarrow -d\varphi$, lo cual se satisface sólo si $g_{0\theta} = g_{0\varphi} = 0$. Como también exigimos invariancia bajo inversión temporal, es decir, bajo $dt \rightarrow -dt$, entonces $g_{0r} = 0$ también. Por lo tanto, la estructura más general del intervalo que reproduce los requerimientos de Schwarzschild es

$$ds^2 = g_{00}dt^2 + g_{rr}dr^2 - r^2d\Omega^2. \quad (3.42)$$

Para encontrar las expresiones precisas de las componentes g_{00} y g_{rr} de la métrica que conducen a una solución de las ecuaciones de Einstein, es preciso introducir la métrica obtenida hasta aquí,

$$(g_{\mu\nu}) = \text{diag}(g_{00}, g_{rr}, -r^2, -r^2 \sin^2 \theta), \quad (3.43)$$

en las ecuaciones de Einstein, y resolver las ecuaciones diferenciales resultantes. Para un sistema arbitrario, esto no es posible de manera exacta; afortunadamente, sí lo es para nuestro sistema.

Propongamos un ansatz para las componentes desconocidas de la métrica:

$$g_{00} = e^{2T(r)}, \quad g_{rr} = -e^{2R(r)} \quad (3.44)$$

con² $T(r), R(r) > 0 \forall r$ y las condiciones de frontera $\lim_{r \rightarrow \infty} T(r) = \lim_{r \rightarrow \infty} R(r) = 0$, tal que el intervalo adopta la forma

$$ds^2 = \left(e^{T(r)} dt \right)^2 - \left(e^{R(r)} dr \right)^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.45)$$

Con la métrica propuesta, podemos calcular directamente el tensor de Einstein $G^{\mu\nu}$ en términos de la función de masa

$$m(r) \equiv \frac{1}{2} r (1 - e^{-2R}), \quad \text{función de masa} \quad (3.46)$$

introducida aquí de forma auxiliar. Como veremos en breve, la elección de la notación no es arbitraria, ya que esta función auxiliar jugará el papel de *masa*. En términos de la función de masa, encontramos que las componentes no nulas del tensor de Einstein están dadas por

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{1}{r^2} e^{2(T-R)} (e^{2R} + 2rR' - 1) \\ &= \frac{1}{r^2} e^{2T} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2R})) = \frac{2}{r^2} e^{2T} \frac{dm}{dr}, \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{2R} + 2rT') = -\frac{2m}{r^3} e^{2R} + \frac{2T'}{r}, \quad (3.48)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2R} \left((T')^2 - R'T' - T'' + \frac{1}{r} T' - \frac{1}{r} R' \right), \quad (3.49)$$

$$G_{\varphi\varphi} = G_{\theta\theta} \sin^2 \theta, \quad (3.50)$$

donde $T' = dT/dr$.

²Como veremos, estas condiciones se violan en el interior de un agujero negro, donde ambas funciones cambian de signo.

3.3.1. Estrella estática

Supongamos por un momento que el tensor de energía–momento no es trivial. En una estrella estática, el movimiento de las partículas debe anularse, es decir, $U^i = 0$. Calculemos $T_{\mu\nu}$ suponiendo que una estrella puede modelarse como un fluido perfecto, para el cual, de acuerdo a (2.161),

$$T_{\mu\nu} = (\rho + P)U_\mu U_\nu - P g_{\mu\nu}, \quad (3.51)$$

donde ρ es densidad de energía y P es presión. Sólo las componentes diagonales son relevantes porque es un fluido perfecto. La primera componente está dada por

$$T_{00} = (\rho + P)(U_0)^2 - P g_{00}. \quad (3.52)$$

Podemos calcular $(U_0)^2$ de $U \cdot U = 1$ (en unidades naturales)

$$\begin{aligned} U \cdot U &= g_{00}(U^0)^2 - 0 = e^{2T}(U^0)^2 = 1 \quad \iff \quad U^0 = e^{-T} \\ \implies U_0 &= g_{00}e^{-T} = e^{2T}e^{-T} = e^T. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Usando este resultado en (3.52), obtenemos

$$T_{00} = (\rho + P)e^{2T} - Pe^{2T} = \rho e^{2T}. \quad (3.54)$$

Como $U_i = 0$ para $i = r, \theta, \varphi$, las demás componentes del tensor de energía–momento están dadas por

$$T_{rr} = -P g_{rr} = P e^{2R}, \quad (3.55)$$

$$T_{\theta\theta} = -P g_{\theta\theta} = P r^2, \quad (3.56)$$

$$T_{\varphi\varphi} = -P g_{\varphi\varphi} = P r^2 \sin^2 \theta = T_{\theta\theta} \sin^2 \theta. \quad (3.57)$$

Sustituyendo las componentes $(0,0)$ del tensor de Einstein (3.47) y del tensor de energía–momento (3.54) en la ecuación de campo de Einstein,

$$G_{00} = \kappa T_{00}, \quad \kappa = 8\pi, \quad (3.58)$$

llegamos a la ecuación diferencial

$$\frac{2}{r^2} e^{2T} \frac{dm}{dr} = \kappa \rho_m e^{2T}, \quad (3.59)$$

en donde $\rho = \rho_m$ (densidad de energía equivalente a densidad de masa) en unidades naturales. Simplificando, encontramos

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi \rho_m r^2. \quad (3.60)$$

Recordando que en la teoría de Newton la masa de un sistema gravitacional esféricamente simétrico puede expresarse como (comparar con (3.27))

$$M = \int d^3x \rho_m = \int dr 4\pi r^2 \rho_m, \quad (3.61)$$

identificamos a $m = m(r)$ como la función de masa, justo como anticipamos.

De la definición de $m(r)$ (3.46), podemos resolver para obtener una expresión para g_{rr}

$$-g_{rr} = e^{2R} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (3.62)$$

la cual podemos usar en la ecuación de Einstein con $\mu = \nu = r$, $G_{rr} = \kappa T_{rr}$. Sustituyendo (3.62) en (3.55) y (3.48), obtenemos

$$-\frac{2m}{r^3} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + \frac{2T'}{r} = 8\pi P \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad (3.63)$$

de donde obtenemos que

$$\frac{T'}{r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left[4\pi P + \frac{m}{r^3}\right] = \frac{4\pi P r^3 + m}{r^3 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)}. \quad (3.64)$$

Por lo tanto, la última ecuación diferencial a resolver es

$$T' = \frac{4\pi P r^3 + m(r)}{r(r - 2m)}. \quad (3.65)$$

Las otras dos ecuaciones de campo de Einstein para $\mu = \nu = \theta$ y $\mu = \nu = \varphi$ son equivalentes a

$$G_{\theta\theta} = 8\pi P r^2. \quad (3.66)$$

En lugar de entrar en los detalles para resolver las ecuaciones diferenciales obtenidas, recordemos que queremos resolver un sistema con $T_{\mu\nu} = 0$. Esto, por supuesto, solamente es válido en el exterior de la estrella, en donde

$$\rho_m = P = 0 \quad \implies \quad \frac{dm}{dr} = 0 \quad \implies \quad m(r) = M = \text{cte}. \quad (3.67)$$

En esta región, (3.65) adopta la forma

$$T' = \frac{dT}{dr} = \frac{M}{r(r - 2M)} = -\frac{1}{2r} + \frac{1}{2(r - 2M)}, \quad (3.68)$$

que conduce a la solución

$$2T(r) = -\ln r + \ln(r - 2M) = \ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right). \quad (3.69)$$

Finalmente, sustituimos en nuestro ansatz (3.44) para obtener

$$g_{00} = e^{2T} = 1 - \frac{2M}{r} = e^{-2R}, \quad (3.70)$$

donde la última igualdad es consecuencia de (3.62) con (3.67). Empleando el resultado (3.70) en el intervalo propuesto (3.42), encontramos la solución buscada para una *estrella de Schwarzschild*

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad \text{intervalo de Schwarzschild} \quad (3.71)$$

Como estudiaremos en detalle en la sección 3.3.5, el llamado *radio de Schwarzschild*, definido por³

$$r = r_s \equiv 2M, \quad \text{radio de Schwarzschild} \quad (3.72)$$

corresponde a un punto interesante. Notamos especialmente que el intervalo parece singular en $r = r_s$. A pesar de que esto es más bien una manifestación de nuestra elección de coordenadas, sí existen observaciones interesantes en torno al valor r_s , como veremos en la sección 3.3.4.

Notemos que en el límite de campo lejano, $r \gg r_s$, recuperamos el intervalo en el límite Newtoniano (3.28),

$$ds^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{r_s}{r}\right) dr^2 - r^2 d\Omega^2. \quad (3.73)$$

Mientras que la métrica de Schwarzschild, codificada en (3.71), es válida para todas las intensidades del campo ϕ , el límite Newtoniano solamente es válido para campos gravitacionales débiles. Es decir, como en la relatividad especial, las expresiones gravitacionales Newtonianas son sólo una aproximación de los resultados relativistas.

La solución de Schwarzschild es particularmente especial debido al llamado *teorema de Birkhoff*. George David Birkhoff demostró en 1923 que *toda solución con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein en el vacío* ($T_{\mu\nu} = 0$) *debe ser estática y asintóticamente plana*. La solución de Schwarzschild ha sido construida exigiendo que el espacio-tiempo sea esféricamente simétrico, estático y en el vacío. Adicionalmente, no es difícil convencerse

³Incluyendo las constantes c y G_N , el radio de Schwarzschild se expresa como $r_s = 2G_N M/c^2$.

de que el espacio-tiempo en la *frontera* (o *fuera*) del espacio-tiempo de Schwarzschild debe ser el de Minkowski, es decir, debe ser asintóticamente plano. Consecuentemente, como la solución de Minkowski satisface todas las condiciones anotadas por Birkhoff, la solución de Schwarzschild no sólo es simple y elegante, sino también *única*.

3.3.2. Corrimiento al rojo en el espacio-tiempo de Schwarzschild

En la sección 3.1.2 hemos estimado el corrimiento al rojo en el límite de campo débil al aplicar el principio de equivalencia. Lejos de este límite, podemos calcular exactamente este efecto empleando la geometría de Schwarzschild.

La ecuación de movimiento de un observador o partícula masiva (incapaz de moverse con la rapidez de la luz) puede calcularse usando el intervalo y su relación con el tiempo propio,

$$ds^2 = d\tau^2 \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{ds^2}{d\tau^2} = 1. \quad (3.74)$$

Utilizando el intervalo de Schwarzschild (3.71), obtenemos

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\Omega}{d\tau}\right)^2 = 1, \quad (3.75)$$

donde t es el tiempo coordenado que, a diferencia del tiempo propio τ , no depende de cada observador. La trayectoria descrita por (3.75) es una geodésica, como se muestra en el apéndice A, porque se satisface que $\frac{d}{d\tau} \frac{d^2 s}{d\tau^2} = 0$.

En su propio marco de referencia, un observador tiene $dr = d\Omega = 0$, por lo que, si se encuentra en la posición r , su tiempo propio y el tiempo coordenado satisfacen

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad \Delta t = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2} \Delta\tau. \quad (3.76)$$

Supongamos que una partícula emite un fotón con periodo Δt . Cuando ese periodo es medido por dos observadores con tiempos propios τ_1 y τ_2 , ubicados en las posiciones r_1 y r_2 , estos encuentran los periodos

$$\Delta\tau_1 = \left(1 - \frac{r_s}{r_1}\right)^{1/2} \Delta t, \quad \Delta\tau_2 = \left(1 - \frac{r_s}{r_2}\right)^{1/2} \Delta t, \quad (3.77)$$

lo cual conduce a una relación entre las posiciones de los observadores y las frecuencias de la luz que ellos observan:

$$\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 - r_s/r_1}{1 - r_s/r_2}}. \quad \text{corrimiento al rojo gravitacional} \quad (3.78)$$

Para $r_i \gg r_s$ (como es el caso en cualquier planeta o estrella), esto implica que

$$\nu_2 \approx \left(1 - \frac{r_s}{2r_1} + \frac{r_s}{2r_2}\right) \nu_1. \quad (3.79)$$

Suponiendo que $r_2 > r_1$ e incluyendo unidades para comparar con resultados previos, encontramos que (3.79) puede reescribirse como

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \approx 1 - \frac{G_N M}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 1 - \frac{G_N M}{r_1 r_2} \frac{r_2 - r_1}{c^2} \approx 1 - g \frac{y}{c^2} < 1, \quad (3.80)$$

donde identificamos $y \equiv r_2 - r_1 > 0$ y la aceleración gravitacional con $g \approx \frac{G_N M}{r_1 r_2}$, lo cual es consistente con el resultado previo (3.8) y (3.9).

Como antes, debemos enfatizar que el corrimiento al rojo descrito por (3.78) corresponde a un efecto enteramente físico. Un observador ubicado en $r_2 > r_1$ observa que la luz detectada en esa posición es más roja (tiene menos energía) que cuando es detectada por otro observador ubicado en r_1 , i.e. $\nu_2 < \nu_1$. La luz pierde energía a medida que se aleja de la fuente del campo gravitacional.

3.3.3. Cantidades conservadas

Como hemos visto en la sección 2.9.1, las simetrías de la geometría del espacio-tiempo conducen a la conservación de cantidades físicas. Es posible obtener ese mismo resultado directamente de la ecuación de la geodésica que describe el movimiento de una partícula libre en espacio-tiempo con curvatura (ver ejercicio 2.19).

Sabemos que el movimiento de las partículas libres es regido por la ecuación de la geodésica (2.263),

$$U^\alpha U^\mu_{;\alpha} = 0. \quad (3.81)$$

Esta ecuación no está bien definida para partículas no masivas porque no es posible definir su tiempo propio τ y, consecuentemente, su 4-velocidad U . Considerando que la relación de dispersión relativista (1.78) es válida para todo sistema relativista, es correcto generalizar (3.81) en términos del 4-momento como

$$p^\alpha p^\mu_{;\alpha} = 0. \quad (3.82)$$

Multiplicando por $g_{\nu\mu}$ y luego sustituyendo $\mu \leftrightarrow \nu$ en (3.82), encontramos

$$p^\alpha p_{\mu;\alpha} = p^\alpha p_{\mu,\alpha} - \Gamma^\beta_{\mu\alpha} p^\alpha p_\beta = 0, \quad (3.83)$$

de donde

$$p^\alpha p_{\mu,\alpha} = \Gamma^\beta_{\mu\alpha} p^\alpha p_\beta. \quad (3.84)$$

Sustituyendo la expresión de los símbolos de Christoffel (2.221), simplificamos el lado derecho de esta ecuación:

$$\begin{aligned}\Gamma^{\beta}_{\mu\alpha}p^{\alpha}p^{\beta} &= \frac{1}{2}g^{\beta\gamma}(g_{\gamma\mu,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\mu} - g_{\mu\alpha,\gamma})p^{\alpha}p^{\beta} \\ &= \frac{1}{2}(g_{\gamma\mu,\alpha} + g_{\alpha\gamma,\mu} - g_{\alpha\mu,\gamma})p^{\alpha}p^{\gamma} \\ &= \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma,\mu}p^{\alpha}p^{\gamma},\end{aligned}\tag{3.85}$$

donde la tercera igualdad es consecuencia de que el producto $p^{\alpha}p^{\gamma}(g_{\gamma\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\gamma})$, bajo el intercambio de *índices mudos* $\alpha \leftrightarrow \gamma$, se convierte en $-p^{\alpha}p^{\gamma}(g_{\gamma\mu,\alpha} - g_{\alpha\mu,\gamma})$ y, por lo tanto, es cero. En consecuencia, la ecuación de la geodésica (3.84) se simplifica a

$$p^{\alpha}p_{\mu,\alpha} = \frac{1}{2}g_{\alpha\gamma,\mu}p^{\alpha}p^{\gamma}.\tag{3.86}$$

La ecuación (3.86) nos indica qué cantidades se conservan y bajo qué condiciones. En caso de que la métrica no dependa de x^{μ} , i.e. si $g_{\alpha\gamma,\mu} = 0$, encontramos que $p^{\alpha}p_{\mu,\alpha} = 0$, lo cual para una partícula masiva se puede escribir como

$$p^{\alpha}p_{\mu,\alpha} = m\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}p_{\mu} = 0.\tag{3.87}$$

Una forma más sugerente y útil de esta última expresión es

$$m\frac{d}{d\tau}p_{\mu} = 0 \quad \implies \quad p_{\mu} = g_{\mu\nu}p^{\nu} = \text{cte},\tag{3.88}$$

es decir, una partícula libre conserva la componente p_{μ} de su 4-momento en un espacio-tiempo con *coordenada cíclica* x^{μ} . Esta información puede ser empleada, entre otras cosas, para determinar las trayectorias de las partículas libres (con o sin masa) en cualquier espacio-tiempo, como haremos en la siguiente sección.

Un resultado menor adicional es que, dado que $g_{\alpha\gamma,\mu} = 0$ siempre es válido localmente, en el marco de referencia de una partícula libre un observador siempre mide que se conservan la energía y el momento. Este resultado no es sorprendente, ya que, como discutimos en la sección 3.1.1, para partículas libres en caída libre, el principio de equivalencia establece que un observador que se mueve con ellas las observa en estado inercial y, por lo tanto, se satisfacen los principios de conservación que son válidos en la relatividad especial.

3.3.4. Órbitas de partículas libres en espacio-tiempo de Schwarzschild

Debido a la simetría esférica del espacio-tiempo de Schwarzschild, es posible verificar que la trayectoria geodésica que siguen las partículas libres ocurre en un plano. Por simplicidad, elegimos el movimiento en el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$).

Además, en lugar de usar la ecuación geodésica, podemos aplicar nuestro conocimiento sobre cantidades conservadas, de acuerdo a lo discutido en la sección anterior y en la sección 2.9.1. Como la métrica es independiente de t y φ , para partículas masivas podemos definir dos cantidades conservadas:

$$p_0 = g_{00}p^0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) m \frac{dt}{d\tau} \equiv \varepsilon = \text{cte}, \quad m \neq 0, \quad (3.89)$$

$$p_\varphi = g_{\varphi\varphi}p^\varphi = -r^2 \sin^2 \theta m \frac{d\varphi}{d\tau} = -r^2 m \frac{d\varphi}{d\tau} \equiv \ell = \text{cte}, \quad (3.90)$$

donde hemos adoptado el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), ε es la energía por unidad de masa y ℓ es el momento angular. Una simplificación adicional es considerar $m = 1$. Aquí usamos nuevamente expresiones en términos de M para llegar a justificar lo especial del radio de Schwarzschild, $r_s = 2M$. Notemos que para ℓ constante, la ecuación (3.90) corresponde a la *segunda ley de Kepler: se barren áreas iguales en tiempos iguales*. Esta regla revela que el movimiento libre de cuerpos sujetos a un campo gravitacional esféricamente simétrico es precisamente el de los planetas alrededor de estrellas.

Debido a la invariancia del intervalo, es directo mostrar que también la cantidad

$$e \equiv g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \quad (3.91)$$

es una constante a lo largo de las geodésicas para un parámetro afín λ . Esta ecuación es válida para partículas masivas y sin masa. Claramente, para partículas masivas podemos elegir $\lambda = \tau/m = \tau$, lo que implica que $e = g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1$, mientras que para un fotón $e = 0$ debido a que el intervalo siempre es nulo en cualquier marco de referencia y $\lambda \neq \tau$ porque es imposible definir τ . Con esto, reescribimos (3.91) en general como

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = e. \quad (3.92)$$

Si reemplazamos $\tau \rightarrow m\lambda$ en las expresiones (3.89) y (3.90), se vuelven válidas para todo tipo de partículas. Con ayuda de esas ecuaciones y multiplicando (3.92) por $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, encontramos que para toda partícula se satisface

$$\varepsilon^2 - \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2} = e \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.93)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \varepsilon^2, \quad (3.94)$$

donde hemos definido el *potencial efectivo* $V(r)$, dado por

$$V(r) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(e + \frac{\ell^2}{r^2}\right). \quad (3.95)$$

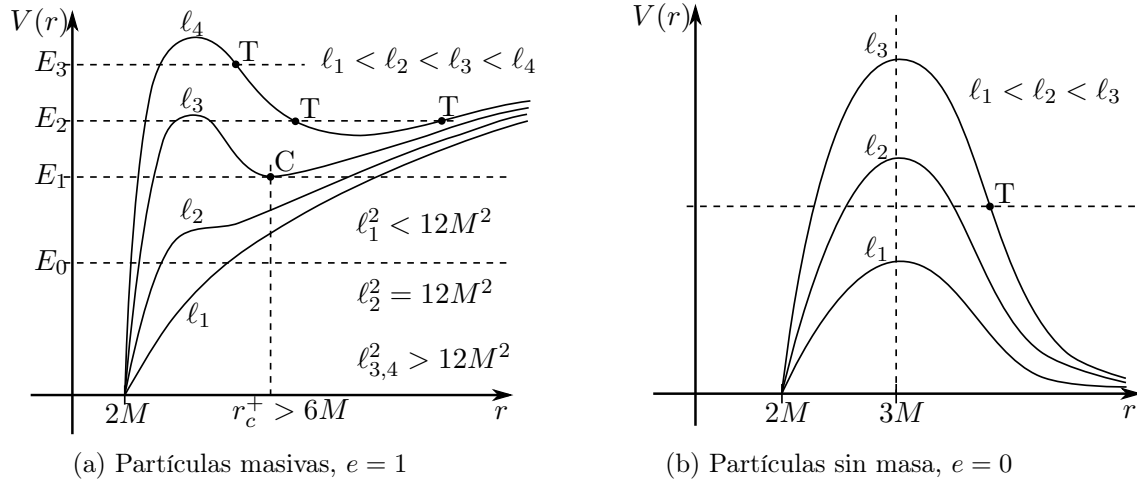


Figura 3.5: Potencial efectivo para partículas con masa (a) y sin masa (b) para diferentes valores de ℓ . Una partícula masiva libre con energía E “rebota” en los puntos de retorno T o permanece en los puntos fijos C , en órbitas circulares estables de radio r_c^+ . Las partículas sin masa no orbitan.

Consecuentemente, a partir de (3.94) obtenemos trivialmente la ecuación de movimiento de partículas masivas:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) = \frac{1}{2} \varepsilon^2. \quad (3.96)$$

Notamos que, si $E \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^2$ en (3.95) es identificado como la energía total del sistema, esta ecuación describe clásicamente el movimiento de una partícula en un potencial $V(r)$, como podemos verificar fácilmente tomando la derivada de la ecuación de movimiento (3.96):

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V(r) - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \right] &= 0 \iff \frac{d^2 r}{d\tau^2} \frac{dr}{d\tau} + V'(r) \frac{dr}{d\tau} = 0 \\ \implies \frac{d^2 r}{d\tau^2} &= -V'(r), \end{aligned} \quad (3.97)$$

que es equivalente a $\mathbf{f} = -\nabla V$ para el movimiento radial de una partícula con $m = 1$.

Las trayectorias radiales de las partículas de prueba dependen de sus energías $E = \frac{1}{2} \varepsilon^2$ y de los valores específicos de M y ℓ . Por supuesto, el tipo de partículas también es crucial ya que establece el valor de e en el potencial efectivo.

En las gráficas de la figura 3.5 se presentan las formas del potencial efectivo, para diferentes valores de ℓ , M y e fijos. La trayectoria de partículas masivas ($e = 1$) provenientes de $r \gg 2M$ con energía E puede comportarse de las siguientes maneras:

1. Arriba de cierto valor de E (muy por encima de E_3 en la figura 3.5a), la partícula inevitablemente colisiona con la fuente del campo, en $r = 0$.

2. Puede encontrar la barrera de potencial y *reflejarse* de regreso a r grandes, después de alcanzar un punto de retorno T (ver $E = E_3$ en la figura 3.5a).
3. Puede quedar atrapada entre dos puntos de retorno, oscilando en órbitas que, bajo ciertas condiciones, pueden ser aproximadamente elípticas (ver $E = E_2$).
4. Puede confinarse a un punto fijo C en r , de manera que describe órbitas circulares.

Si una partícula empieza en $r < 2M$ y con relativamente poca energía, vemos que golpea una barrera que impide que se escape. Esta barrera se sitúa alrededor del radio de Schwarzschild y aparece también para partículas sin masa, como los fotones. Como veremos en la sección 3.3.5, esto es en parte el corazón de la física de los agujeros negros. Sin embargo, debemos notar que este comportamiento clásico no puede ser la historia completa, pues sospechamos que a distancias pequeñas los efectos cuánticos deben ser importantes.

Retomando las órbitas circulares del comportamiento 4, encontramos que estas ocurren cuando

$$-\left. \frac{dV}{dr} \right|_{r=r_c} = 0 = \left. \frac{d^2r}{d\tau^2} \right|_{r=r_c}, \quad (3.98)$$

donde r_c es el radio orbital. Calculando V' y multiplicando por r^4 , encontramos que esta condición es equivalente a la ecuación cuadrática

$$Mer_c^2 - \ell^2 r_c + 3M\ell^2 = 0, \quad (3.99)$$

cuyas soluciones para $e = 1$ son

$$r_c^\pm = \frac{\ell^2 \pm \ell^2 \sqrt{1 - 12M^2/\ell^2}}{2M}. \quad (3.100)$$

Calculando ahora $V''(r)$ y evaluando en $r = r_c$, notamos que no existen órbitas circulares si $\ell^2 < 12M^2$; para $\ell^2 = 12M^2$, ambas soluciones coinciden en $r_c = 6M$ y corresponden a una órbita inestable por tratarse de un punto de inflexión de V ; finalmente, para $\ell^2 > 12M^2$, $r_c^+ > 6M$ ($r_c^- < 6M$) corresponde a una órbita circular estable (inestable) por ser un mínimo (máximo) de V . Además, en el límite con $\ell^2 \gg 12M^2$ la solución inestable se convierte en

$$r_c^- \approx \frac{\ell^2}{2M} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{12M^2}{\ell^2} \right) + \dots \right] = 3M, \quad (3.101)$$

y $r_c^+ \rightarrow \infty$. Este límite coincide con la solución de (3.99) para $e = 0$ ilustrada con los máximos de la figura 3.5b, lo que significa que la trayectoria de las partículas con masa y sin masa coinciden en este límite. Es decir, las órbitas circulares de fotones y partículas masivas son las mismas, pero son inestables.

Finalmente, para partículas sin masa ($e = 0$), como se ilustra en la figura 3.5b, la barrera de potencial no solamente evita que la luz penetre estrellas más allá de cierta $r > 3M$, sino que también evita que ésta escape por encima de $r = 2M$. Es debido a estas propiedades que hemos definido antes el llamado *radio de Schwarzschild*, $r_s = 2M$.

3.3.5. Singularidades de Schwarzschild y agujeros negros

Hemos visto que $r = r_s$ es un punto especial más allá del cual una partícula entrante no tiene oportunidad de escapar. Esta observación está relacionada con la estructura de la métrica de Schwarzschild codificada en (3.71). El intervalo y, por lo tanto, la métrica de Schwarzschild presentan dos singularidades *radiales*:⁴

$$\begin{aligned} r = 0 & \quad \text{conocida como la singularidad,} \\ r = r_s & \quad \text{conocida también como horizonte de eventos.} \end{aligned}$$

Aunque ambos puntos son considerados importantes físicamente, sólo uno de ellos corresponde a una singularidad física del espacio-tiempo de Schwarzschild.

En general, en variedades Riemannianas descritas por métricas en cierto sistema coordenado, la métrica exhibe dos tipos de singularidades:

- Singularidades del espacio: puntos donde la curvatura diverge.
- Singularidades de coordenadas: singularidades aparentes que desaparecen con un cambio de coordenadas apropiado. El ejemplo básico de este tipo de singularidades es $r = 0$ en coordenadas polares, donde $g^{\theta\theta} = 1/r^2$ diverge, aún cuando en $r = 0$ el espacio Euclídeo no tiene propiedades especiales.

Lo mismo ocurre en una variedad pseudo-Riemanniana o Lorentziana como la descrita por la métrica de Schwarzschild.

Podemos identificar las singularidades *físicas* al verificar si una combinación escalar del tensor de Riemann o Ricci diverge. Las combinaciones escalares incluyen las siguientes

$$R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}, R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu}R^{\alpha\beta}.$$

Para la solución de Schwarzschild, encontramos por ejemplo que

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{12r_s^2}{r^6}, \quad (3.102)$$

lo cual diverge solamente para $r = 0$. De hecho, se puede mostrar que no diverge ningún escalar de curvatura en $r = r_s$, lo que significa que el espacio-tiempo de Schwarzschild no exhibe divergencias en este punto. Sin embargo, como veremos en breve, $r = r_s$ tiene alguna importancia física en los pocos objetos que aún pueden describirse por este espacio-tiempo en esa posición, es decir, aquéllos para los que $T^{\mu\nu} = 0$ en $r = r_s$. Notemos que la mayoría de los objetos astrofísicos no satisfacen esta condición. Por ejemplo, para el Sol (y estrellas

⁴Existen otras singularidades no radiales. Por ejemplo, al invertir la métrica, encontramos que $\theta = 0$ es una singularidad. Como $r = r_s$, $\theta = 0$ es sólo una singularidad de coordenadas.

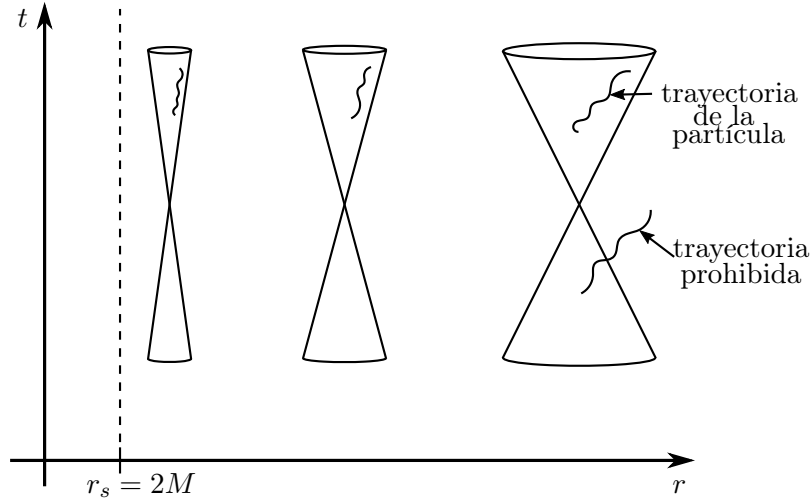


Figura 3.6: Conos de luz de partículas a distintas distancias del radio de Schwarzschild. Desde la perspectiva de un observador distante, una partícula tarda más tiempo en recorrer una cierta distancia a medida que se aproxima a $r = r_s$.

similares) $R_\odot \approx 10^6 M_\odot \gg 2M_\odot = r_s$, donde R_\odot y M_\odot son el radio y la masa del Sol, respectivamente.

Los objetos estelares que pueden ser descritos por la métrica de Schwarzschild, tal que $T^{\mu\nu} = 0$ incluso a $r \leq r_s$, son llamados *agujeros negros de Schwarzschild*. Estos agujeros negros corresponden a los más simples: son estructuras esféricamente simétricas, estáticas, sin momento angular ni carga eléctrica, que, desde un punto de vista clásico, concentran toda su masa en la *singularidad*, $r = 0$.

Exploremos la estructura causal de tales *agujeros negros*. Los conos de luz pueden determinarse fijando $d\theta = d\varphi = 0$ en el intervalo, tal que

$$ds^2 = 0 = \left(1 - \frac{r_s}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} dr^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1}, \quad (3.103)$$

lo que corresponde a las pendientes en el plano $t - r$ de las fronteras del cono de luz. Estas pendientes crecen a medida que r se aproxima desde r grande hacia $r = r_s$, divergiendo en este punto, como se ilustra en la figura 3.6. Las trayectorias permitidas de las partículas viven en el cono de luz. Entonces, a medida que una partícula se aproxima a $r = r_s$, tarda más tiempo en (casi) alcanzar r_s desde la perspectiva de un observador en reposo. Para entender mejor este comportamiento, podemos utilizar la ecuación de movimiento para una partícula masiva (3.96) con $\ell = 0$ (y $e = 1$)

$$\varepsilon^2 - \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = 1 - \frac{r_s}{r}. \quad (3.104)$$

Reexpresando $\frac{dr}{d\tau} = \frac{dr}{dt} \frac{dt}{d\tau}$ en términos del tiempo t medido por un observador distante, y empleando (3.89), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dt}{dr} = \varepsilon \left(1 - \frac{r_s}{r}\right)^{-1} \left(\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_s}{r}\right)^{-1/2}, \quad (3.105)$$

cuya integral indefinida (para $\varepsilon^2 < 1$) en la región $r_s < r < r_s/1 - \varepsilon^2$ es

$$t(r) = \frac{\varepsilon r \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + r_s/r}}{\varepsilon^2 - 1} - \frac{\varepsilon r_s (3 - 2\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1 + r_s/r}{1 - \varepsilon^2}} - 2r_s \operatorname{arctanh} \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1 + r_s/r}}{\varepsilon}. \quad (3.106)$$

Claramente, el tercer término diverge cuando r se aproxima a r_s . Esto significa que un observador distante en reposo nunca ve que la partícula que cae alcanza r_s .

Además, debido al corrimiento al rojo (3.78) asociado al campo gravitacional

$$\nu^{\text{obs}}(r) = \nu^{\text{emit}} \sqrt{\frac{1 - r_s/r}{1 - r_s/R}}, \quad (3.107)$$

un observador distante localizado en $R > r_s$ observa que la luz emitida con frecuencia ν^{emit} desde la posición r por un cuerpo que se aproxima a $r = r_s$ sufre un corrimiento al rojo hasta que $\nu^{\text{obs}} \rightarrow 0$.

Sin embargo, la historia de acuerdo a la partícula que cae en el agujero negro es bastante diferente. Usando la ecuación de movimiento (3.104) para una partícula masiva que se aproxima al agujero negro, obtenemos

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{\varepsilon^2 - 1 + \frac{r_s}{r}}, \quad (3.108)$$

(el signo menos se debe a que la partícula se aproxima y, por lo tanto, r disminuye a medida que τ aumenta) que conduce a

$$\tau = \begin{cases} \frac{r \sqrt{\varepsilon^2 - 1 + r_s/r}}{1 - \varepsilon^2} + \frac{r_s}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \arctan \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 1 + r_s/r}{1 - \varepsilon^2}} & \text{para } \varepsilon^2 < 1, \\ -r \frac{2}{3} \sqrt{\frac{r}{r_s}} & \text{para } \varepsilon^2 = 1. \end{cases} \quad (3.109)$$

Estos resultados son finitos. Esto muestra que $r = r_s$ no es un punto donde la física falla, relacionado a una singularidad del espacio-tiempo, aunque algunas características inusuales aparezcan ahí para observadores distantes.

Ahora, nos gustaría explorar qué sucede al interior de un agujero negro, es decir, para $r < r_s$. Usemos la variable $\rho = r_s - r$, tal que

$$r_s > r \geq 0 \quad \implies \quad 0 < \rho \leq r_s \quad (3.110)$$

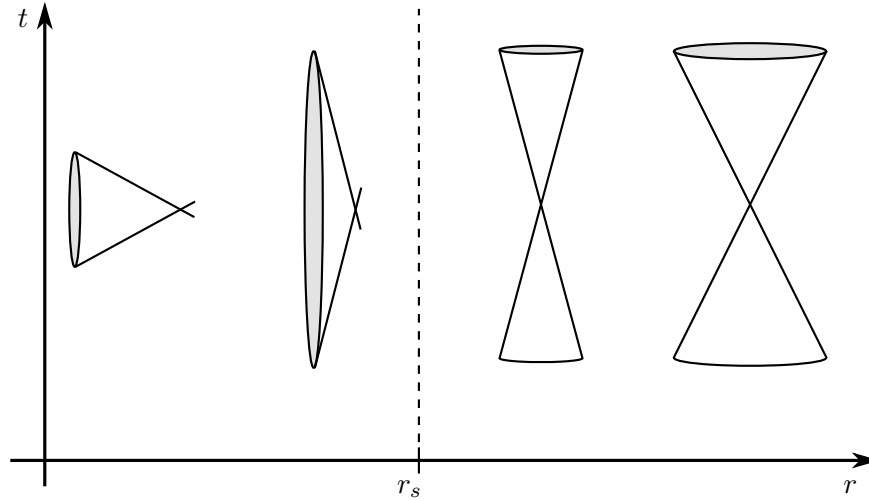


Figura 3.7: Las direcciones radial y temporal son intercambiadas al interior del agujero negro, por lo que el futuro de toda partícula ahí siempre es la singularidad $r = 0$. Este comportamiento peculiar puede ser eliminado mediante un cambio de coordenadas.

y ρ crece a partir de $r = r_s$. Con esta variable, el intervalo adopta la forma

$$ds^2 = -\frac{\rho}{r_s - \rho} dt^2 + \frac{r_s - \rho}{\rho} d\rho^2 - (r_s - \rho)^2 d\Omega^2. \quad (3.111)$$

Nos damos cuenta de que este cambio de variable provoca un cambio de signo en los coeficientes de dt^2 y $d\rho^2$, por lo que ρ se convierte en una coordenada temporal e t se convierte en una espacial, como se representa en los conos de luz de la figura 3.7.

Por consiguiente, para ir al futuro debemos incrementar ρ , que se traduce en reducir r . De esta manera, todas las trayectorias llevan inevitablemente a $r = 0$. Incluso los fotones tienen el mismo comportamiento, independientemente de la dirección en la que haya sido emitido. Los eventos que suceden en $r < r_s$ son atrapados en el agujero negro. Esta es la razón por la cual $r = r_s$ se le conoce como el *horizonte de eventos* y, simultáneamente, el origen del carácter oscuro de los agujeros negros de Schwarzschild: ni siquiera la luz puede escapar, incluso si una fuerza externa intenta extraerla.

Como $r = r_s$ es solamente una singularidad de coordenadas, debemos poder removerla al hacer un cambio de coordenadas apropiado. Usar las *coordenadas de Kruskal-Szekeres* resulta ser la mejor elección. Estas coordenadas se definen para $r > r_s$ como⁵

$$X = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right), \quad T = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right), \quad (3.112)$$

⁵La elección de las letras X y T hace más intuitiva la naturaleza de las coordenadas, pero la convención más aceptada en la literatura es u y v .

y para $r < r_s$ como

$$X = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \sinh\left(\frac{t}{2r_s}\right), \quad T = \left(1 - \frac{r}{r_s}\right)^{1/2} e^{r/2r_s} \cosh\left(\frac{t}{2r_s}\right). \quad (3.113)$$

En estas coordenadas, el intervalo de Schwarzschild es reescrito como

$$ds^2 = \left(\frac{4r_s^3}{r}\right) e^{-r/r_s} (dT^2 - dX^2) - r^2 d\Omega^2. \quad (3.114)$$

La primera observación es que la superficie $r = r_s$ ya no es singular; sólo $r = 0$ es una singularidad del espacio de Schwarzschild. Además, notamos que, en estas coordenadas, X es espacialoide mientras que T es temporaloide. También encontramos que las curvas nulas de los conos de luz están dadas por

$$dT = \pm dX,$$

como en el espacio-tiempo de Minkowski y, entonces, no sucede ninguna conversión *peculiar* de los conos de luz.

En estas coordenadas, una superficie con r constante está dada por la hipérbola

$$X^2 - T^2 = \left(\frac{r}{r_s} - 1\right) e^{r/r_s} = \text{cte}, \quad (3.115)$$

mientras que la superficie con t constante está dada por las líneas rectas

$$\frac{T}{X} = \tanh\left(\frac{t}{2r_s}\right) = \text{cte} \quad (\text{para } r > r_s). \quad (3.116)$$

Observamos que la singularidad $r = 0$ corresponde a la hipérbola

$$X^2 - T^2 = -1.$$

Adicionalmente, el horizonte de eventos está descrito por

$$X^2 - T^2 = 0 \quad \implies \quad T = \pm X,$$

que coincide con la superficie de tiempo para $t \rightarrow \pm\infty$, indicando, como se esperaba, que un observador en reposo observa que una partícula nunca alcanza el horizonte.

Con esta información, podemos trazar el *diagrama de Kruskal* de la figura 3.8, en el que se omiten las coordenadas angulares, por lo que cada punto representa los eventos que ocurren en una esfera de radio r . Formalmente, las coordenadas de Kruskal-Szekeres describen correctamente sólo las regiones I y II. Vemos que si trazamos un cono de luz en cualquier punto de la región I, el futuro de una partícula puede incluir hipérbolas asociadas

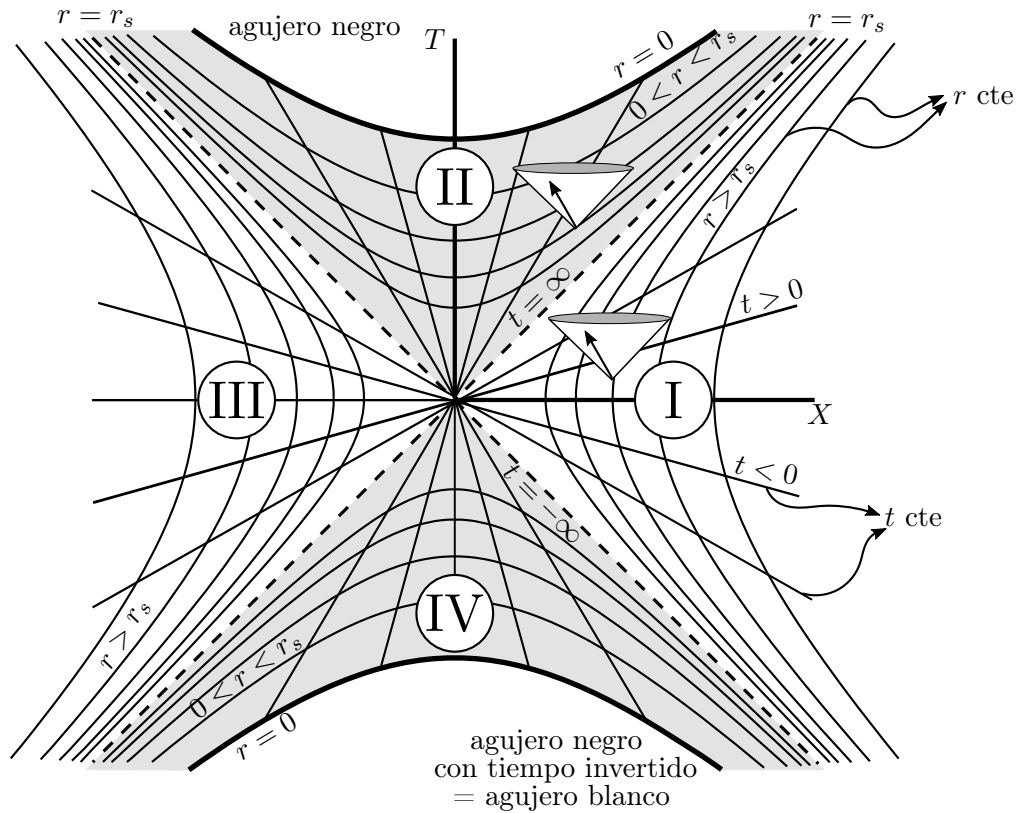


Figura 3.8: Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres. Debido a que no se muestran las coordenadas θ y φ , cada punto es una esfera de radio r . Las regiones I y II corresponden al exterior e interior de un agujero negro, respectivamente, mientras que las regiones III y IV, al exterior e interior de un “agujero blanco”. Las líneas punteadas corresponden al horizonte de eventos. Los únicos “bordes” del espacio-tiempo permitidos son los asociados a la singularidad.

a menores valores de r , hasta cruzar el horizonte de eventos, representado por la recta punteada, y llegar a la región II. Pero, lo que es más relevante es que el futuro del cono de luz de una partícula en la región II, debido al cambio de dirección de las hipérbolas, incluye sólo hipérbolas correspondientes a r más pequeños, impidiendo que la partícula escape del horizonte de eventos y provocando que concluya su travesía inevitablemente en la singularidad, donde el espacio-tiempo de Schwarzschild *acaba*. La región II corresponde al interior del agujero negro. Esta descripción coincide con nuestras observaciones en las coordenadas habituales y , y por lo tanto, es una descripción completa del espacio-tiempo de Schwarzschild.

Las regiones III y IV representan una extensión (máxima) del espacio-tiempo de Schwarzschild, en donde el comportamiento de las partículas difiere al que exhiben en el agujero negro. En especial, el cono de luz de una partícula que comienza en la singularidad, en la

región IV, conduce inevitablemente a valores de r cada vez mayores, hasta que es expulsada a través del horizonte de eventos, en la región III. Dado que, al contrario del agujero negro de la región II, la región IV expulsa toda partícula e información ahí contenida, es común llamarla *agujero blanco*.

La composición agujero blanco/agujero negro del diagrama de Kruskal revela una característica interesante. Si suponemos que las singularidades en II y en IV son independientes, entonces el universo descrito por el agujero negro y su exterior es independiente del descrito por el agujero blanco y su exterior. Pero, si consideramos que sólo existe una singularidad y que las parábolas correspondientes en las regiones II y IV son el mismo lugar del espacio-tiempo, entonces existe una conexión entre las dos regiones del universo denotadas por I y III a través de la singularidad, convirtiendo el agujero negro (y el blanco) en un *agujero de gusano*. Este tipo de conexiones son más formalmente conocidas como *puentes de Einstein–Rosen* y corresponden a las extensiones máximas del espacio-tiempo de Schwarzschild que garantizan que toda partícula tenga una trayectoria futura, incluso tras caer en la singularidad del agujero negro.

Los agujeros de gusano de Schwarzschild o puentes de Einstein–Rosen no pueden existir en nuestro universo, pues las singularidades de este tipo se desintegrarían mucho antes de que cualquier partícula, incluso un fotón, sea capaz de atravesarlo, si la conexión ocurre entre dos regiones del *mismo* universo.⁶ Una posibilidad de lograr la estabilidad de este tipo de conexiones, primeramente explorada por K. Thorne, es incluir materia formada de partículas con masa o energía negativas, aún no observada. Otra forma de que los puentes de Einstein–Rosen puedan existir es si éstos conectan dos universos diferentes, en un escenario en el que nuestro universo es sólo uno de muchos en un *multiverso*. Desafortunadamente, dado que la información no puede salir de un agujero negro, no es posible confirmar o descartar esta conjetura. Por lo tanto, por el momento, aunque los agujeros de gusano son una posibilidad interesante, se les considera una simple *curiosidad teórica*.

3.3.6. Formación y tipos de agujeros negros*

Se considera que los agujeros negros surgen del colapso de una estrella vieja. Cuando la fusión nuclear del hidrógeno de una estrella ha llegado a su etapa final debido a la escasez de protones libres, la presión producida por la fusión deja de ser suficiente para soportar la fuerza gravitacional. Este desequilibrio provoca primeramente la expulsión violenta de la capa exterior de la estrella, dejando el resto en forma de un denso cuerpo celeste (con densidades de entre 10^3 y 10^{11} kg/cm³), el cual puede ser una enana blanca o una estrella de neutrones, dependiendo de la masa de la estrella original.

Las enanas blancas están casi enteramente compuestas de electrones degenerados (con las mismas propiedades cuánticas) mientras que las estrellas de neutrones contienen casi

⁶Ver e.g. R.W. Fuller, J.A. Wheeler, *Causality and multiply-connected space-time*, Phys.Rev.**128**, 1962.

sólo neutrones degenerados. Es la degeneración cuántica de esas partículas la que impide, mediante el principio de exclusión de Pauli, el colapso total del material de las estrellas en $r = 0$. Sin embargo, esta estabilidad no es sostenible cuando la masa total es mayor al llamado *límite de Chandrasekhar*, equivalente⁷ a 1.44 masas solares M_{\odot} , donde $M_{\odot} \approx 1.99 \times 10^{30}$ kg. Si la masa de la enana blanca o la estrella de neutrones rebasa ese límite, el destino de la estrella es el colapso total en un agujero negro.

Considerando el origen de los agujeros negros, uno podría pensar que la estructura interna, la composición exacta, la presión de plasma, etc. de una estrella pueden contribuir a la naturaleza del agujero negro. Así, intuitivamente, habría tantos tipos de agujeros negros como diversidad de estrellas y de contenido en las estrellas hay en el universo. Pero no es así.

El (entre físicos) llamado *teorema sin pelo* o *de no pelo* limita el número de cantidades físicas que son necesarias para describir un agujero negro. Este teorema es en realidad una conjetura matemática que sugiere que, bajo la suposición de que el espacio-tiempo de un agujero negro es asintóticamente plano (es decir, que es descrito por la métrica de Minkowski para valores grandes de las variables espacio-temporales), las soluciones a las ecuaciones de Einstein–Maxwell,⁸

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + 2\Lambda) = -\frac{\kappa}{4\pi} \left(F^{\mu\alpha}F^{\nu}_{\alpha} - \frac{1}{4}g^{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta} \right), \quad (3.117)$$

están completamente caracterizadas por tres propiedades de un agujero negro que un observador externo puede medir: su masa M , su carga eléctrica Q y su momento angular (también llamado *espín* por los astrofísicos) J . Por supuesto que, antes de colapsar, una estrella posee más información (como el espín cuántico, números bariónico y leptónico, cargas de color y sabor, etc.), pero esta información, que es lo que algunos llaman el “pelo” del agujero negro, desaparece dentro del horizonte de eventos para un observador externo una vez que la estrella colapsa y se configura el agujero negro. Se dice entonces que *un agujero negro no tiene pelo* para un observador externo, como nosotros.

El “teorema” o, más bien, la conjetura de no pelo solamente ha sido probada parcialmente en algunos casos, bajo condiciones precisas del tipo de “pelo” o de los valores de la carga eléctrica del agujero negro.⁹ La obtención de una demostración general o para casos específicos complejos representa aún un área de investigación en progreso.

De ser correcta la conjetura de no pelo, sólo existen cuatro tensores métricos posibles para los agujeros negros, los cuales se clasifican de acuerdo con sus propiedades básicas de momento angular J y carga Q , empleando los nombres de sus descubridores:

⁷Este valor sólo es correcto para enanas blancas. El límite de Chandrasekhar para estrellas de neutrones es desconocido, pero hay razones para pensar que puede ser ligeramente mayor a $2M_{\odot}$. Gracias a Miguel Alcubierre por esta observación.

⁸Las ecuaciones de Einstein–Maxwell (3.117) son las ecuaciones de campo de Einstein aplicadas al caso de un tensor de energía–momento en espacio curvo, resultado de generalizar el introducido en (2.169).

⁹Ver e.g. P.O. Mazur. *Black hole uniqueness theorems*, [arXiv:hep-th/0101012], y sus referencias.

	$J = 0$	$J \neq 0$
$Q = 0$	Schwarzschild	Kerr
$Q \neq 0$	Reissner–Nordström	Kerr–Newman
	↓	↓
	Simetría esférica	Simetría axial

A pesar de que estos tensores comparten algunas propiedades, tales como las simetrías geométricas (esférica o axial) que determinan la forma de los agujeros negros, su estructura está definida por los detalles de cada caso. Como un ejemplo y sin discutirlo en detalle, la *métrica de Kerr* conduce al siguiente intervalo en coordenadas esférico–polares:

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & \left(1 - \frac{rr_s}{\Sigma}\right) dt^2 + \frac{2rr_s a \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\varphi \\
 & - \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 - \Sigma d\theta^2 - \left(r^2 + a^2 + \frac{rr_s a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (3.118)
 \end{aligned}$$

donde r_s es el radio de Schwarzschild, $a = J/M$ parametriza el momento angular del agujero negro de Kerr, $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ y $\Delta = r^2 - rr_s + a^2$.

Es directo notar que recuperamos el intervalo de Schwarzschild (3.71) a partir del intervalo de Kerr (3.118) en ausencia de momento angular, cuando $a = 0$. Sin embargo, para $a \neq 0$, ambas geometrías son muy diferentes.

Notamos que en un agujero negro de Kerr existen cuatro singularidades de coordenadas, en las que g_{rr} o g_{tt} divergen. Hay dos horizontes de eventos, correspondientes a las esferas de radios $r_h^\pm = \frac{1}{2}(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2})$, en las que g_{rr} diverge. Además, existen dos superficies delimitadas por $r_e^\pm = \frac{1}{2}(r_s \pm \sqrt{r_s^2 - 4a^2 \cos^2 \theta})$, que coinciden con los horizontes de eventos en los polos, pero están abultadas en el ecuador, y en las que $1/g_{tt} = 0$. El volumen entre un horizonte y estas superficies corresponde a las llamadas *ergósferas*, en las que todas las partículas ahí encontradas sufren una aceleración debida al arrastre que ejerce sobre ellas la rotación del propio espacio–tiempo.

Es probable que no todos estos agujeros negros sean estables. En ausencia de materia exterior, se sospecha que todos son estables, aunque la configuración más estable es la que posee simetría esférica. Sin embargo, en presencia de, por ejemplo, algunos campos escalares externos, hay indicios de que los agujeros negros rotantes podrían perder energía por medio de un proceso conocido como *superradiancia*. Otro mecanismo por el que agujeros negros rotantes podrían perder energía es el *proceso de Penrose*, en el que partículas externas atrapadas en la ergósfera ganan energía al ser aceleradas y luego expulsadas, disminuyendo el momento angular del agujero negro.

Aunque es imposible observar directamente a los agujeros negros porque (casi) no emiten radiación electromagnética¹⁰, típicamente se identifican por la detección de radiación

¹⁰Cerca del horizonte del agujero negro, como en todas partes, fluctuaciones cuánticas del vacío permiten

emitida por intensos discos de acreción de materia (caliente y densa) tragada por el agujero negro. En contraste con los discos de acreción de estrellas jóvenes, que emiten radiación infrarroja, estos agujeros negros emiten en la región de rayos X del espectro.

3.4. Pruebas de la relatividad general

Las estrellas comunes tienen, en buena aproximación, simetría esférica. Aunque están rotando, también pueden ser modeladas por medio de la métrica de Schwarzschild. Para comprobar la fortaleza de la relatividad general, dado que no vivimos atrapados en un agujero negro, consideramos lo que sucede alrededor de una estrella de Schwarzschild en la región con $r > r_s$.

La mayoría de nuestras pruebas de la relatividad general involucran el movimiento de nuestras *partículas de prueba* favoritas, los planetas, en la vecindad de un campo gravitacional esféricamente simétrico producido por el Sol.

Cuando Einstein concibió su teoría de la relatividad general, sugirió tres pruebas relativamente sencillas:

1. el corrimiento al rojo gravitacional, que hemos estudiado en las secciones 3.1.2 y 3.3.2, primero como una consecuencia inmediata del principio de equivalencia;
2. la desviación de la luz por una fuente gravitacional, que es una buena prueba de la relatividad general, aunque es detectable incluso en el límite de campo débil (Newtoniano); y
3. la precesión de los perihelios, la cual constituye la mejor prueba temprana de la relatividad general puesto que la mecánica Newtoniana no puede explicarla con precisión.

Una predicción adicional, usualmente ignorada en los textos, es la existencia de ondas gravitacionales, finalmente descubiertas un siglo después de la predicción por la colaboración LIGO en la probable coalescencia de agujeros negros distantes,¹¹ y posteriormente detectadas con comprobación óptica por la colaboración LIGO-Virgo y diversos observatorios astronómicos¹² en la coalescencia de estrellas de neutrones.

la creación de partículas y antipartículas, emitidas hacia adentro y hacia afuera del agujero negro. Hawking mostró en 1974 que la radiación emitida de esta manera puede causar la evaporación del agujero negro tras algún tiempo.

¹¹Ver B.P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. Phys. Rev. Lett. **116** (2016) no.6, 061102 [arXiv:1602.03837 [gr-qc]].

¹²Ver B.P. Abbott *et al.* (LIGO Scientific and Virgo Collaborations), *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral*. Phys. Rev. Lett. **119** (2017) no.16, 161101 [arXiv:1710.05832 [gr-qc]].

A continuación estudiamos algunos aspectos de las predicciones de la relatividad general aún no discutidas hasta este punto, importantes para entender las razones por las que la relatividad general fue aceptada como una teoría física.

3.4.1. Desviación de la luz

Consideremos que el campo gravitacional del Sol (y otras estrellas) está descrito por la solución de Schwarzschild y estudiemos el movimiento de fotones en el plano $\theta = \pi/2$, regido por las ecuaciones de movimiento (3.94) y (3.90) (con $e = 0$),

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 &= \varepsilon^2 - 2V(r), & V(r) &= \frac{\ell^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \\ \frac{d\varphi}{d\lambda} &= \pm \frac{\ell}{r^2}, \end{aligned} \quad (3.119)$$

donde los signos en la segunda ecuación provienen de restringir $\ell > 0$. Combinando la ecuación radial y angular, obtenemos

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \sqrt{\frac{\ell^2/r^4}{\varepsilon^2 - \frac{\ell^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}} = \pm \frac{1}{r^2 \sqrt{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}}, \quad (3.120)$$

donde hemos definido el parámetro b como

$$b \equiv \frac{\ell}{\varepsilon}. \quad (3.121)$$

Para simplificar la ecuación de movimiento (3.120), aplicamos el cambio de variable

$$u \equiv \frac{1}{r},$$

que conduce a

$$\frac{d\varphi}{du} = \mp \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2(1 - 2Mu)}}. \quad (3.122)$$

El límite de Newtoniano *estricto* se obtiene despreciando $2Mu$. Si consideramos un fotón llegando desde un punto muy lejano (donde $r \rightarrow \infty$ y $u \rightarrow 0$), escogemos el signo positivo para una partícula entrante, obteniendo

$$\frac{d\varphi}{du} \approx \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - u^2}} \quad \Longrightarrow \quad \varphi - \varphi_0 \approx \text{arc sen}(bu), \quad (3.123)$$

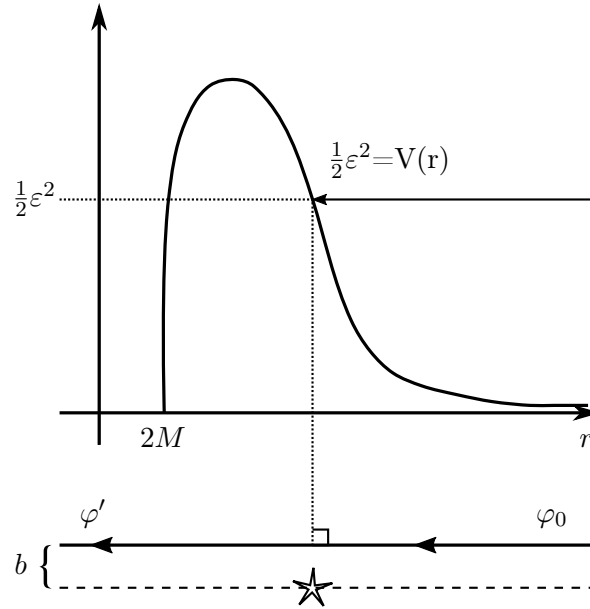


Figura 3.9: Distancia de máximo acercamiento a una estrella esférica y estática para una partícula no masiva con energía $\varepsilon^2/2$. Dado que se trata de movimientos clásicos sometidos al potencial estelar $V(r)$, la luz proveniente de $r \rightarrow \infty$ se acerca hasta que se satisface $V(r) = \varepsilon^2/2$, que es su punto de retorno. Cuando la energía de la luz está por encima del máximo del potencial, penetra hasta la estrella.

suponiendo que la dirección original del fotón es φ_0 . Vemos primero que esta ecuación puede reescribirse de una manera más sugerente, como

$$r \operatorname{sen}(\varphi - \varphi_0) = b, \quad (3.124)$$

lo que se parece a la ecuación de una línea recta en coordenadas polares. Para apreciar esto, consideremos qué sucede cerca de la estrella. La distancia de acercamiento máximo, como se ilustra en la figura 3.9, está determinada por $\frac{1}{2}\varepsilon^2 \stackrel{!}{=} V(r)$, que en términos de u y despreciando $2Mu$, como antes, conduce a

$$u^2 \approx \frac{1}{b^2}, \quad (3.125)$$

de donde observamos que b corresponde al *parámetro de impacto*. Sustituyendo este resultado en (3.123), encontramos

$$\varphi - \varphi_0 \approx \frac{\pi}{2}. \quad (3.126)$$

Esto, por supuesto, no es el resultado completo porque un fotón debe experimentar una

desviación idéntica cuando se aleja, tal que

$$\varphi' - \varphi_0 = (\varphi' - \varphi) + (\varphi - \varphi_0) \approx \pi, \quad (3.127)$$

donde φ' denota la dirección del fotón que se aleja. Esto es, por supuesto, el resultado Newtoniano, suponiendo que la masa de los fotones es nula.¹³

Sin embargo, esto se basa fuertemente en nuestra suposición de que $2Mu$ es enteramente despreciable, pero cerca de una estrella como la nuestra $2Mu \ll 1$ puede tener un efecto. Por lo tanto, propongamos un cambio de variable distinto

$$y \equiv u(1 - Mu), \quad Mu \ll 1, \quad (3.128)$$

lo que implica que

$$u = \frac{y}{1 - Mu} \approx y(1 + Mu) = y \left(1 + \frac{My}{1 - Mu} \right) \approx y(1 + My), \quad (3.129)$$

despreciando términos de orden $\mathcal{O}(M^2u^2)$. Entonces la ecuación de movimiento (3.122) puede recibirse como

$$\frac{d\varphi}{dy} \approx \frac{1 + 2My}{\sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2}}, \quad (3.130)$$

donde hemos usado que $y^2 = u^2(1 - 2Mu + M^2u^2) \approx u^2(1 - 2Mu)$. La solución de esta ecuación está dada por

$$\begin{aligned} \varphi - \varphi_0 &\approx \arcsen(by) - 2M \sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2} \Big|_0^y \\ &= \arcsen(by) - 2M \sqrt{\frac{1}{b^2} - y^2} + \frac{2M}{b}. \end{aligned} \quad (3.131)$$

Repetiendo los pasos del límite Newtoniano *estricto*, encontramos que la menor distancia a la que un fotón con energía $\frac{1}{2}\varepsilon^2$ se acerca a una estrella está dada por

$$y \approx \frac{1}{b}. \quad (3.132)$$

Sustituyendo este resultado en (3.131) se obtiene

$$\varphi - \varphi_0 \approx \frac{\pi}{2} + \frac{2M}{b}, \quad (3.133)$$

que, aplicando la misma lógica que en (3.127), conduce al resultado final

$$\varphi' - \varphi_0 \approx \pi + \frac{4M}{b}. \quad (3.134)$$

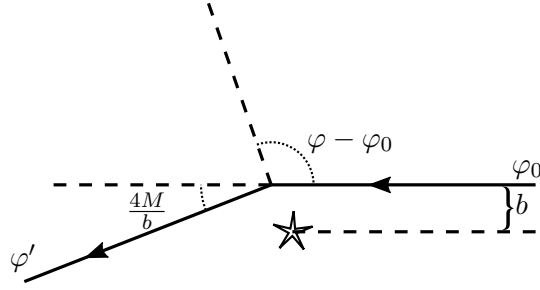


Figura 3.10: Ángulo de deflexión de la luz provocado por el campo gravitacional de una estrella modelada por la métrica de Schwarzschild.

Este resultado difiere del Newtoniano por $\frac{4M}{b}$, lo que implica que la luz se desvía gravitacionalmente. Podemos ver este efecto ilustrado en la figura 3.10.

Para el Sol, suponiendo que la distancia más cercana es $b = R_{\odot} \approx 6.96 \times 10^5$ km y $M_{\odot} = 1.47$ km (en unidades naturales), encontramos que

$$\frac{4M_{\odot}}{R_{\odot}} = 8.45 \times 10^{-6} \text{ rad} \approx 1.74''. \quad (3.135)$$

Este resultado fue confirmado primeramente por Arthur Eddington en 1919, quien reportó (utilizando una representación moderna de los datos), el valor¹⁴

$$\Delta\varphi = \varphi' - \varphi_0 - \pi = 1.98'' \pm 0.178'', \quad (3.136)$$

compatible en un intervalo de 2σ con el valor predicho. Posteriormente, se ha comprobado varias veces esta medición, de las cuales una de las más destacables es la observación de *Texas Mauritanian Eclipse Team* de 1973, en la que lograron determinar $\Delta\varphi = 1.66'' \pm 0.19''$, en coincidencia con los resultados teóricos.¹⁵

Quizá la mejor aplicación de esto son las *lentes gravitacionales*, una herramienta que ha revelado que hay más materia que interactúa gravitacionalmente de la que podemos observar con un telescopio; a esta materia extra se le conoce como *materia oscura*.

3.4.2. Precesión “anómala” del perihelio

Mercurio es el planeta más cercano al Sol y, por lo tanto, el más afectado por el campo gravitacional de nuestra estrella. Desde una perspectiva Newtoniana, no obstante, esto no

¹³Se obtienen resultados diferentes si se supone incorrectamente que los fotones tienen una masa pequeña.

¹⁴Ver M. Niaz, *Critical appraisal of physical science as a human enterprise*, cap 9. Springer, 2009.

¹⁵Texas Mauritanian Eclipse Team, *Gravitational deflection of light: solar eclipse of 30 June 1973 I. Description of procedures and final results.*, *Astronomical Journal* **81** p.452, 1976.

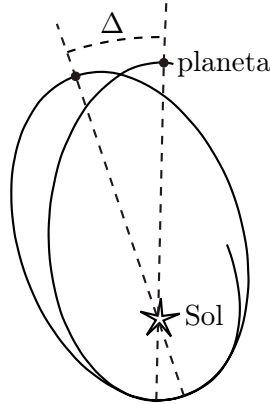


Figura 3.11: Desplazamiento precesional Δ del perihelio de un planeta.

puede alterar la forma elíptica de la órbita de Mercurio. A pesar de esto, se ha observado que el *perihelio*¹⁶ de Mercurio cambia de posición a una tasa de $\sim 43''/\text{siglo}$. Esto puede explicarse si las órbitas planetarias precesan, causando un desplazamiento precesional Δ del perihelio, como se ilustra en la figura 3.11.

Para calcular el desplazamiento Δ , consideremos la razón de las ecuaciones de movimiento (3.90) y (3.96) para una partícula masiva (con $e = 1$),

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 &= \varepsilon^2 - 2V(r), & V(r) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right), \\ \left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 &= \frac{\ell^2}{r^4}, \end{aligned} \quad (3.137)$$

que conduce a

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{\ell^2}{r^2}\right)}{\ell^2} r^4. \quad (3.138)$$

En términos de la variable $u = \frac{1}{r}$, esta ecuación adopta la forma

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = \frac{1}{r^4} \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{\ell^2} - \frac{1}{\ell^2} + \frac{2M}{\ell^2} u - u^2 + 2Mu^3. \quad (3.139)$$

Con la finalidad de simplificar esta ecuación, diferenciamos con respecto a φ , lo que resulta en

$$2 \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{2M}{\ell^2} \frac{du}{d\varphi} - 2u \frac{du}{d\varphi} + 6Mu^2 \frac{du}{d\varphi}, \quad (3.140)$$

¹⁶El *perihelio* es la posición de máximo acercamiento de un planeta a su estrella.

que para una $u(\varphi)$ no trivial equivale a

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{\ell^2} + 3Mu^2. \quad (3.141)$$

Incluso Mercurio, el planeta más rápido (para el cual ℓ es grande), se puede mostrar que el cociente $3Mu^2/(M/\ell^2)$ es del orden 10^{-7} y entonces podemos despreciar el segundo término del lado derecho de (3.141). Despreciar este término corresponde al límite Newtoniano estricto. Por lo tanto, tenemos que la ecuación de movimiento se reduce (en este límite) a

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 \approx \frac{M}{\ell^2}, \quad (3.142)$$

cuya solución es

$$u_0(\varphi) \approx \frac{M}{\ell^2}(1 - \lambda \cos(\varphi - \varphi_0)) = \frac{M}{\ell^2}(1 - \lambda \cos \varphi), \quad (3.143)$$

en donde la última igualdad resulta de tomar $\varphi_0 = 0$ por simplicidad. La solución (3.143) describe una elipse con excentricidad λ , es decir, hemos recuperado el resultado Newtoniano. Sustituyendo en la ecuación original (3.139), omitiendo el término $2Mu^3$, podemos verificar que la excentricidad está dada por

$$\lambda = \sqrt{1 + \frac{\ell^2}{M^2}(\varepsilon^2 - 1)}. \quad (3.144)$$

Para averiguar la corrección relativista a la solución Newtoniana $u_0(\varphi)$, podemos usar un método perturbativo. Definiendo $\eta \equiv \frac{3M^2}{\ell^2} \ll 1$, podemos reescribir (3.141) como

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{M}{\ell^2} + \eta \frac{\ell^2 u^2}{M}. \quad (3.145)$$

Proponemos un primer ansatz

$$u = u_0 + \eta u_1 + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (3.146)$$

que, tras reemplazarlo en (3.141), resulta en

$$\frac{d^2u_0}{d\varphi^2} + u_0 + \eta \frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + \eta u_1 = \frac{M}{\ell^2} + \eta \frac{\ell^2}{M}(u_0^2 + 2\eta u_0 u_1 + \eta^2 u_1^2). \quad (3.147)$$

Recordando (3.142), los primeros dos términos del lado izquierdo cancelan el primero del lado derecho. Entonces, a primer orden de η , encontramos

$$\begin{aligned} \frac{d^2u_1}{d\varphi^2} + u_1 &\approx \frac{\ell^2}{M} u_0^2 = \frac{M}{\ell^2} (1 - \lambda \cos \varphi)^2 = \frac{M}{\ell^2} (1 - 2\lambda \cos \varphi + \lambda^2 \cos^2 \varphi) \\ &= \frac{M}{\ell^2} \left(1 + \frac{1}{2} \lambda^2 \right) - \frac{2\lambda M}{\ell^2} \cos \varphi + \frac{M \lambda^2}{2\ell^2} \cos 2\varphi, \end{aligned} \quad (3.148)$$

donde usamos $\cos^2 \varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi)$. Para esta ecuación, proponemos un segundo ansatz

$$u_1 = A + B\varphi \operatorname{sen} \varphi + C \cos 2\varphi, \quad (3.149)$$

lo que nos lleva a

$$\frac{d^2 u_1}{d\varphi^2} + u_1 = A + 2B \cos \varphi - 3C \cos 2\varphi. \quad (3.150)$$

Comparando este resultado con (3.148), encontramos

$$A = \frac{M}{\ell^2} \left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right), \quad B = -\frac{\lambda M}{\ell^2}, \quad C = -\frac{M\lambda^2}{6\ell^2}, \quad (3.151)$$

La solución final a orden η está dada por

$$u \approx \frac{M}{\ell^2} (1 - \lambda \cos \varphi) + \eta \frac{M}{\ell^2} \left[\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\right) - \lambda \varphi \operatorname{sen} \varphi - \frac{\lambda^2}{6} \cos 2\varphi \right]. \quad (3.152)$$

Observamos que el primero y tercer términos en el paréntesis cuadrado son pequeñas correcciones al resultado Newtoniano, mientras que el segundo término crece con φ y se convierte en una corrección dominante. Por lo tanto, podemos aproximar nuestra solución por

$$\begin{aligned} u &\approx \frac{M}{\ell^2} (1 - \lambda \cos \varphi - \lambda \eta \varphi \operatorname{sen} \varphi) \\ &\approx \frac{M}{\ell^2} (1 - \lambda \cos[\varphi(1 - \eta)]), \quad \eta \ll 1. \end{aligned} \quad (3.153)$$

Los términos omitidos de (3.152) cambian el foco de la solución elíptica y su amplitud de oscilación. Sin embargo, de (3.153) vemos que los términos que conservamos cambian el periodo de oscilación siempre y cuando $\eta \neq 0$, de manera que de un perihelio al siguiente

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{1 - \eta} \approx 2\pi(1 + \eta). \quad (3.154)$$

La diferencia respecto al resultado Newtoniano se identifica con el desplazamiento precesional de la órbita

$$\Delta \equiv \Delta\varphi - 2\pi \approx 2\pi\eta = \frac{6\pi M^2}{\ell^2} \text{ rad/órbita}. \quad (3.155)$$

Para reescribir este resultado en términos del radio r_c de una órbita casi circular (como la de Mercurio), debemos recordar que en una órbita estable se satisface (3.99). Resulta que

$$\ell^2 = \frac{Mr_c}{1 - \frac{3M}{r_c}} \approx Mr_c \quad (3.156)$$

y, así, para órbitas casi circulares,¹⁷

$$\Delta \approx \frac{6\pi M}{r_c}. \quad (3.157)$$

Sustituyendo los datos de Mercurio y el Sol (con $M_\odot \rightarrow 1.989 \times 10^{30}$ kg $G_N/c^2 \approx 1.47$ km, $r_c \approx 5.5 \times 10^7$ km), obtenemos

$$\Delta \approx \frac{6\pi \cdot 1.47 \text{ km}}{5.5 \times 10^7 \text{ km}} \approx 5 \times 10^{-7} \text{ rad/órbita}. \quad (3.158)$$

Considerando un periodo orbital de Mercurio de 87.97 días ≈ 0.24 años, calculamos

$$\Delta \approx 43''/\text{siglo}, \quad (3.159)$$

que, comparado con el valor medido $\Delta = 42.98'' \pm 0.04''$, exhibe una precisión sobresaliente.

3.4.3. Ondas gravitacionales

Para apreciar la aparición y propiedades de las ondas gravitacionales, deberemos hacer una serie de simplificaciones de las ecuaciones de Einstein que permitirán identificar la dinámica del propio espacio tiempo, codificada en la dinámica de $h_{\mu\nu}$ en la aproximación de campo débil (3.10), debida a la presencia de materia en movimiento.

En la aproximación de campo débil, es posible obtener una linealización de las ecuaciones de campo de Einstein, frecuentemente llamada *gravedad linealizada*. Con este fin, retenemos los términos lineales en $h_{\mu\nu}$ de los elementos de las ecuaciones. Consideremos, para empezar, los símbolos de Christoffel (2.221). Empleando que $\eta_{\alpha\nu,\beta} = 0$, por lo que $g_{\alpha\nu,\beta} \approx h_{\alpha\nu,\beta}$ a orden lineal en h , encontramos

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (g_{\alpha\nu,\beta} + g_{\beta\nu,\alpha} - g_{\alpha\beta,\nu}) \\ &\approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\alpha^\mu,\beta} + h_{\beta^\mu,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}). \end{aligned} \quad (3.160)$$

Por otro lado, las únicas contribuciones lineales al tensor de Ricci (2.331) son las lineales en Γ , puesto que los otros términos son cuadráticos en h . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &\approx \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} \\ &\approx \frac{1}{2} (h_{\mu^\alpha,\nu\alpha} + h_{\nu^\alpha,\mu\alpha} - h_{\mu\nu}{}^{,\alpha}{}_\alpha - h_{\mu^\alpha,\alpha\nu} - h_{\alpha^\alpha,\mu\nu} + h_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\nu) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\mu^\alpha,\nu\alpha} + h_{\nu^\alpha,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu}), \end{aligned} \quad (3.161)$$

¹⁷Para facilitar los cálculos, este resultado, al incluir las constantes que omitimos al usar unidades naturales, se expresa como $6\pi G_N M / r_c c^2$.

donde hemos definido

$$h \equiv h^\alpha{}_\alpha = \eta^{\alpha\beta} h_{\alpha\beta}. \quad (3.162)$$

El escalar de Ricci linealizado está dado por

$$\begin{aligned} R \approx \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &\approx \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} (h_{\mu}{}^\alpha{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^\alpha{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (h_{\mu}{}^{\alpha,\mu}{}_\alpha + h^{\mu\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu,\alpha}{}^\mu{}^\alpha - h_{,\mu}{}^\mu) \\ &= h^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^\beta. \end{aligned} \quad (3.163)$$

Las ecuaciones de Einstein linealizadas pueden expresarse como $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}R \approx 8\pi T_{\mu\nu}$. Por lo tanto,

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^\alpha + h_{\nu\alpha,\mu}{}^\alpha - h_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\alpha}{}^\alpha) = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.164)$$

Ahora, para simplificar esta expresión, definimos el operador barra actuando sobre las componentes del tensor $h_{\mu\nu}$ como

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \quad (3.165)$$

Se utilizará la barra para implicar la misma operación para cualquier otro tensor simétrico. Entonces $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$ a primer orden en $h_{\mu\nu}$ y $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, es decir $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$. Con esta notación, las ecuaciones de Einstein linealizadas (3.164) se convierten en

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\nu + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{,\alpha}{}_\mu = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.166)$$

El primer término de esta ecuación es el usual d'Alembertiano en espacio plano, mientras que los otros términos se vuelven irrelevantes si e.g. se impone la *condición de norma de Hilbert*,

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0. \quad (3.167)$$

Estas condiciones de norma son las análogas tensoriales a la norma de Lorentz $A^\alpha{}_{,\alpha} = 0$ de la teoría electromagnética. Esta condición que imponemos no afecta la *física*, solamente es una elección para simplificar el álgebra. De esta manera, la ecuación (3.166) se convierte en

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu}. \quad \text{ecs. de Einstein linealizadas} \quad (3.168)$$

Escribiendo esta ecuación de manera que resulte más familiar, encontramos

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = \partial^\alpha \partial_\alpha \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.169)$$

que en el vacío se reduce a

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0. \quad (3.170)$$

Como el espacio es plano, el d'Alembertiano tiene la forma $\square = \partial_t^2 - \nabla^2$, es decir, la ecuación de campo tiene la forma de una ecuación de onda para $\bar{h}_{\mu\nu}$. En otras palabras, la dinámica de las fluctuaciones del espacio-tiempo es ondulatoria. Se propone una solución de onda plana en la forma de exponencial compleja para la solución de esta ecuación diferencial,

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}, \quad (3.171)$$

donde $A_{\mu\nu}$ es la amplitud de la onda plana, que corresponde a las componentes de un tensor constante simétrico de rango $(0, 2)$, y k^σ son las componentes de un vector de onda constante. Sustituyendo el ansatz (3.171) en (3.170) es fácil demostrar que para que (3.171) sea una solución válida se requiere que

$$k_\sigma k^\sigma = 0. \quad (3.172)$$

Por lo tanto, la onda plana (3.171) es una solución de la ecuación linealizada si el vector de onda es *nulo* o *luminoide*. Esto significa que las perturbaciones a la métrica plana codificadas en h se propagan a la velocidad de la luz. La componente temporal del vector de onda se refiere a la frecuencia de la onda, y escribimos $(k^\sigma) = (\omega, k^1, k^2, k^3)^T$.

Imponemos la condición de norma de Hilbert (3.167) en términos del ansatz (3.171),

$$\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = \partial_\mu (A^{\mu\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}) = iA^{\mu\nu} k_\mu e^{ik_\sigma x^\sigma} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.173)$$

que implica que

$$k_\mu A^{\mu\nu} = 0. \quad (3.174)$$

Esta condición significa que el vector de onda con componentes k_μ es ortogonal al tensor con componentes $A^{\mu\nu}$ en la norma de Hilbert.

Para simplificar aun más este tratamiento, proponemos la llamada *transformación de norma gravitacional*

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}, \quad (3.175)$$

donde ξ es un vector arbitrario suficientemente pequeño para no afectar la condición de campo débil, $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Si determinamos las cantidades físicas que aparecen en las ecuaciones de campo de Einstein, podemos comprobar que tanto el tensor de Riemann como los tensores de Einstein y de energía-momento son invariantes bajo la transformación de norma (3.175). Esta cualidad de las ecuaciones linealizadas es evidencia de una cualidad general de la relatividad general: es una teoría de norma.

Habiendo impuesto la condición de vector de onda nulo (3.172), la ortogonalidad del vector de onda con la amplitud de la onda (3.174), y usando las transformaciones de norma (3.175) en (3.171), obtenemos que el tensor $A^{\mu\nu}$ solamente tiene dos componentes independientes, que en su representación matricial aparecen como

$$(A_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12} & -A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.176)$$

Entonces, para una onda plana con esta norma, que viaja en la dirección x^3 , sus componentes A_{11} y A_{12} (junto con su frecuencia ω) caracterizan completamente la onda.

Para obtener los efectos de la onda, se considera el movimiento relativo de un anillo de partículas cercanas. Resulta que las componentes A_{11} y A_{12} corresponden a las dos polarizaciones de la onda gravitacional. Como se justifica a continuación, renombramos estas componentes independientes como $A_+ = A_{11}$ y $A_\times = A_{12}$.

Si empezamos con un anillo de partículas estacionario en el plano x^1-x^2 , a medida que pase la onda con polarización A_+ , estas *oscilan* horizontal y verticalmente con la forma de “+”, como se representa en la figura 3.12. Para el caso de la polarización correspondiente a A_\times , el anillo de partículas *oscila* con la forma de “×”, como se representa en la figura 3.13. Estas perturbaciones ondulatorias que se desplazan mediante vectores de onda luminoides son las que llamamos *ondas gravitacionales*.

Detección de ondas gravitacionales

La existencia de las ondas gravitacionales es, como la de los agujeros negros, una inesperada predicción de la relatividad general. Einstein notó en 1916 que su teoría indica que cualquier cuerpo es capaz de producir deformaciones ondulatorias en el espacio si sufre una aceleración repentina. Esto ocurre, por ejemplo, cuando dos objetos cuerpos colisionan, o cuando dos masas similares forman un sistema gravitacional binario, como el de los planetoides Plutón-Carionte.

Como hemos visto, las ondas gravitacionales, al desplazarse, alargan y contraen repetitivamente el espacio por el que transitan gracias a la energía que transportan. Desafortunadamente, debido a que la gravedad es la fuerza más débil de las fuerzas de la naturaleza, a pesar de que todo cuerpo puede producir ondas gravitacionales, son prácticamente inde-

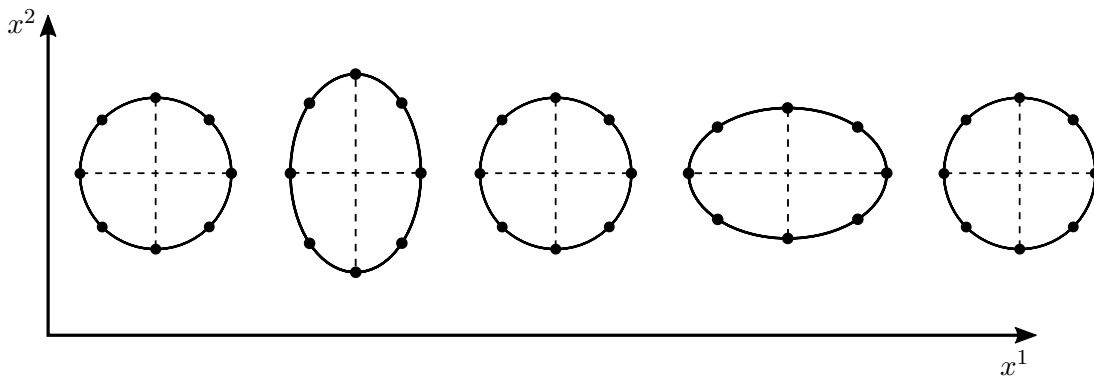


Figura 3.12: Movimientos de un anillo de partículas libres en el plano $x^1 - x^2$ provocados por una onda con polarización A_+ . En el gráfico, la dirección horizontal es x^1 ; sin embargo, las figuras a la derecha corresponden a configuraciones que ocurren en tiempos posteriores a las de la izquierda.

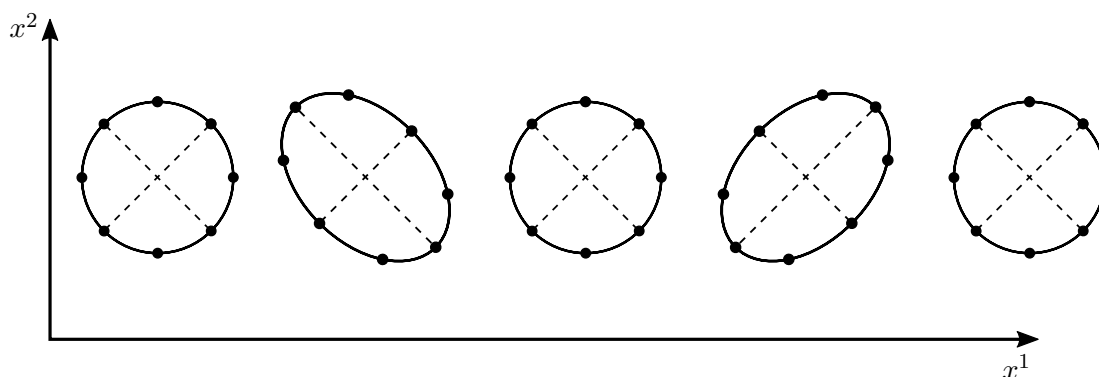


Figura 3.13: Movimientos de un anillo de partículas libres en el plano $x^1 - x^2$ producidos por una onda con polarización A_x .

tectables a menos de que sean producidas por fuentes gravitatorias inmensamente masivas o energéticas, tales como estrellas de neutrones o agujeros negros. Por si fuera poco, como la intensidad de las ondas es atenuada con la distancia recorrida y las posibles fuentes supermasivas no son cercanas a la Tierra, incluso en un caso óptimo, una onda que llegara a nosotros causaría deformaciones espaciales mucho más pequeñas que un núcleo atómico.

Uno de los pioneros en la búsqueda de las ondas gravitacionales fue el físico estadounidense Joseph Weber, quien diseñó cilindros de aluminio, de 2m de longitud y 1m de diámetro, que podrían absorber la energía de una onda gravitacional y resonar con la onda detectada. A pesar de que en 1968 Weber afirmó haber observado lo que esperaba, sus resultados fueron controvertidos porque no podían ser replicados y porque, entre otras cosas, describían la existencia de fuentes relativamente pequeñas y tan masivas como miles de galaxias juntas. Desde la predicción y hasta entonces, las ondas gravitacionales eran tan controversiales que muchos, incluyendo al mismo Einstein, dudaron de su existencia.

Poco después, entre 1974 y 1978, llegaría la reivindicación de las ondas gravitacionales. En 1974, los astrónomos Joseph H. Taylor Jr. y su ex-estudiante Russell A. Hulse descubrieron un sistema rotante de dos estrellas de neutrones separadas apenas por algunas veces la distancia entre la Luna y la Tierra. Cuatro años después de descubrir este sistema, Taylor notó que el sistema rotaba cada vez más rápido, pero en una órbita cada vez más pequeña. La única explicación consistente con los datos es que el sistema está en ruta de colisión porque pierde energía en forma de ondas gravitacionales. Esta constituyó la primera prueba indirecta de la existencia de las ondas gravitacionales. Tras el merecido premio Nobel de 1993 a Taylor y Hulse, se convirtió en consenso que las ondas gravitacionales existen, aunque nuestra tecnología debería aún desarrollarse para poder detectarlas directamente.

La colaboración LIGO fue fundada entre 1983 y 1992, en Estados Unidos, por los físicos experimentales Ronald Drever y Rainer Weiss y el teórico Kip Thorne con la misión de detectar directamente ondas gravitacionales mediante el uso de dos interferómetros,

similares al empleado por Michelson y Morley para descartar la hipótesis del éter, uno en Livingston, Louisiana, y otro en Hanford, Washington, a 3002 km de distancia.

Los interferómetros usados para medir ondas gravitacionales constan de dos túneles de la misma longitud formando una “L”, dotados con sofisticados sistemas para aislarlos lo mejor posible de las vibraciones ambientales. En ausencia de ondas gravitacionales los haces de luz empleados en los interferómetros no producen ninguna señal. Cuando una onda gravitacional atraviesa el interferómetro, contrae el espacio en una dirección mientras que lo expande en la dirección perpendicular. En el caso ideal en que las ondas llueven verticalmente sobre los interferómetros, uno de los brazos se encoje mientras el otro se alarga. Esto provoca que los haces de luz emerjan desincronizados porque uno viajó mayor distancia que el otro, y produzcan una señal oscilatoria de frecuencia compatible con la de la onda gravitacional que provocó la deformación del interferómetro.

Este mecanismo sería muy sencillo si las deformaciones del interferómetro fueran perceptibles a simple vista. Desafortunadamente, lo que LIGO y otros experimentos similares, como el de la colaboración Virgo en Italia, habían demostrado hasta 2010 es que las ondas gravitacionales deforman los brazos de los interferómetros por un factor menor a 10^{-21} , razón por la que los brazos de los detectores de LIGO miden 4 km de longitud. Y LIGO construyó dos interferómetros tan distantes para confirmar toda señal detectada.

Los gigantescos interferómetros de LIGO son capaces de detectar alteraciones en la longitud de los brazos de hasta 10^{-19} m. Con tal precisión, que rebasa la de todos los experimentos similares, finalmente el pasado 14 de septiembre de 2015 apareció una señal con duración de aproximadamente 0.2 s. La señal fue detectada por ambos detectores, con 6 ms de diferencia. Más allá de esta diferencia, que es consistente con la velocidad a la que se desplazan las ondas gravitacionales, las señales son idénticas, un breve pero notorio pulso oscilatorio con una amplitud de apenas 10^{-18} m. La señal tiene una certidumbre de 5.1σ . Y con una certeza del 90 %, la señal se debe a la coalescencia de dos agujeros negros ocurrida hace aproximadamente 1,300 millones de años en algún lugar del universo. Se trataría de un sistema binario compuesto por agujeros negros de Kerr, con masas de 36 y $29 M_{\odot}$, y que, al mezclarse, produjeron un agujero negro rotante con una masa equivalente a $62 M_{\odot}$. La energía liberada en forma de ondas gravitacionales durante esta colisión sería la equivalente a $3 M_{\odot}$.

Por este descubrimiento, Kip Thorne, Rainer Weiss y Barry C. Barish han sido galardonados con el premio Nobel en física 2017. Es posible que su descubrimiento, comparable con el descubrimiento del bosón de Higgs, permita el descubrimiento de distintos aspectos de la naturaleza que han sido invisibles a los observatorios astronómicos basados en telescopios electromagnéticos.

3.5. Principios relativistas de cosmología

La *cosmología* es el estudio del espacio–tiempo del universo: su origen, evolución, composición, estructuras, dinámica y las leyes físicas que la rigen. Este estudio se basa en los datos observacionales obtenidos a escalas tan grandes como 100 Megaparsecs o más.¹⁸

Una de las observaciones básicas es el antiguo descubrimiento de que, a esas grandes escalas, el contenido del cosmos que emite o refleja radiación electromagnética parece estar distribuido de manera uniforme en todo el universo. Es decir, las observaciones indican que la porción observable del universo es:

- *Isotrópica*: produce la misma evidencia observacional en cualquier dirección; y
- *Homogénea*: todo observador tiene la misma evidencia observacional independientemente de donde se encuentre.

Esta observación da lugar al llamado *principio cosmológico*, en el que, a pesar de que sabemos que sólo observamos una fracción del universo, se supone que *todo* el universo es isotrópico y homogéneo.

Si el principio cosmológico es válido, resulta fácil concebir la posible geometría del espacio–tiempo a grandes escalas. Adicionalmente, dada la velocidad finita de la luz, entendemos que las observaciones de e.g. las galaxias revelan datos de cómo era el universo cuando la luz detectada fue emitida y, por lo tanto, es posible establecer con cierta precisión aspectos de la dinámica del espacio–tiempo. Esta información es codificada en una métrica, sobre la que se coloca un tensor de energía–momento que contenga la información sobre el contenido del universo, el cual es modelado como un fluido ideal para lograr consistencia con el principio cosmológico.

Con esta información y estas suposiciones básicas, se consigue determinar la historia de la evolución de la fracción del universo que podemos observar, prácticamente desde su nacimiento hasta nuestros días, en una continua expansión que hoy llamamos *la gran explosión*. Desafortunadamente, también surgen preguntas que forzan la introducción de elementos adicionales. Una de las observaciones más intrigantes es precisamente la uniformidad del universo. Dado que lo más lejano que hemos podido observar se encuentra a una distancia de 14.25 Gpc en todas direcciones y dada la velocidad finita de la luz, la luz proveniente de, por ejemplo, nuestra izquierda aún no ha llegado al extremo del universo que observamos a la derecha. Sin embargo, a pesar de no haber tenido contacto causal, ambas regiones del universo son “iguales”. La única explicación posible es que *sí* han tenido contacto causal en algún momento de la historia del universo, por lo que se requiere algún mecanismo que permita esta aparente contradicción. Otro problema está relacionado con el hecho de que no observamos regiones del universo dominadas por antimateria.

¹⁸Un parsec (denotado pc) equivale aproximadamente a 3.26 años luz o 3.08×10^{13} km.

En un universo uniforme, que lo haya sido durante toda su historia, podemos concebir que la simetría materia–antimateria debería haber sido respetada siempre. La solución a este problema exige un contacto entre la física de partículas, la dinámica relativista y la termodinámica del universo en evolución.

3.5.1. Espacio–tiempo de Friedmann–Robertson–Walker

La *métrica de Friedmann–Robertson–Walker* (FRW) representa la geometría que mejor se adapta al principio cosmológico y a las observaciones de la expansión del universo. El intervalo correspondiente está dado por

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right], \quad (3.177)$$

donde $a(t)$ es conocido como el *factor de escala* y aquí tiene dimensiones de longitud,¹⁹ por lo que la coordenada radial r no tiene unidades. El factor de escala, por lo tanto, es una medida de la tasa de crecimiento de las distancias en (o expansión de) el universo y no una medida del tamaño del universo. La constante k representa el tipo de curvatura del espacio, y puede adquirir los siguientes valores:

$$k = \begin{cases} +1 & \text{universo cerrado,} \\ 0 & \text{universo plano,} \\ -1 & \text{universo abierto.} \end{cases} \quad (3.178)$$

Estos valores son independientes del tamaño del universo; sin embargo, resulta claro que si nuestro universo es plano o abierto, puede ser infinitamente grande, mientras que, si $k = +1$, es fácil mostrar que la métrica de FRW corresponde a la métrica de una esfera y que, por lo tanto, vivimos en un universo con un tamaño preciso que aún no podemos medir porque no hemos alcanzado a observar los objetos celestes que habitan en los límites de la esfera.²⁰

Supongamos ahora que la dinámica del universo está gobernada por las ecuaciones de Einstein,

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.179)$$

y que el contenido del universo puede ser modelado como un fluido perfecto, por lo que el tensor de energía–momento tiene la estructura (2.160) y satisface la ecuación de estado (2.162), $P = \omega\rho$. En principio, ω puede variar en el tiempo, pero suponemos aquí que

¹⁹En otras convenciones, el factor de escala es adimensional.

²⁰Sin embargo, mediciones indirectas de k arrojan que la descripción más aceptable del universo observable corresponde a $k = 0$. Esta observación no descarta del todo las otras opciones porque cabe la posibilidad de que la porción observable del universo tenga $k = 0$ mientras que el universo *entero* (mucho más grande) posea otro tipo de geometría.

se trata de una constante adimensional, cuyos valores dependen del contenido del universo, de acuerdo a (2.163). Por lo tanto, el tensor de energía-momento adopta la forma

$$(T^\mu{}_\nu) = \text{diag}(\rho, -P, -P, -P), \quad (3.180)$$

donde ρ y P corresponden respectivamente a la densidad de energía y presión del fluido que modela el contenido del universo. Como el lector puede mostrar fácilmente (ver ejercicio 3.12), las componentes no nulas del tensor de Ricci y del escalar de Ricci están dadas por

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{ij} &= -\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2}\right]g_{ij}, \\ R &= -6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right]. \end{aligned} \quad (3.181)$$

Empleando (3.181), la componente $(\mu, \nu) = (0, 0)$ de las ecuaciones de campo de Einstein (3.179) conduce a

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2}6\left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2}\right] = 8\pi\rho, \quad (3.182)$$

que, al simplificarse, puede escribirse como

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho. \quad (3.183)$$

Definiendo el *parámetro de Hubble* al tiempo t como

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}, \quad (3.184)$$

y sustituyendo en (3.183), llegamos a la llamada *ecuación de Friedmann*

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho. \quad \text{ecuación de Friedmann} \quad (3.185)$$

La ecuación de Friedmann es también expresada en la forma

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \frac{8\pi}{3H^2}\rho - 1 \equiv \frac{\rho}{\rho_c} - 1, \quad (3.186)$$

donde la llamada *densidad crítica* $\rho_c = 3H^2/8\pi$ define el valor que la densidad de energía ρ debe tomar a un tiempo t para que el lado derecho de (3.186) se anule y, por lo tanto, el

espacio-tiempo (al tiempo t) sea plano, es decir, $k = 0$. Por ejemplo, al tiempo actual t_0 , con el valor medido del parámetro de Hubble

$$H_0 \equiv H(t_0) \approx 67.8 \text{ km/s Mpc}, \quad (3.187)$$

obtenemos que la densidad crítica presente es $\rho_{0,c} \equiv \rho_c(t_0) = 3H_0^2/8\pi \approx 4.844 \text{ keV/cm}^3$.

Definimos ahora el *parámetro de densidad* o *abundancia*²¹ $\Omega \equiv \rho/\rho_c$, que permite reescribir la versión (3.186) de la ecuación de Friedmann como

$$\frac{k}{a^2 H^2} = \Omega - 1. \quad (3.188)$$

Con estos elementos, es posible obtener algunas consecuencias importantes para la dinámica y forma de nuestro universo a todo tiempo. Primero, la ecuación de Friedmann (3.188) es una relación entre la curvatura del espacio y el contenido del universo parametrizado por Ω , de donde observamos que

$$\text{sgn}(k) = \text{sgn}(\Omega - 1). \quad (3.189)$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} k = +1 &\implies \Omega > 1, \\ k = 0 &\implies \Omega = 1, \\ k = -1 &\implies \Omega < 1. \end{aligned}$$

Segundo, reescribiendo la ecuación de Friedmann como

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho a^2 - k, \quad (3.190)$$

notamos que, si la densidad de energía ρ es positiva, la expansión del universo, codificada en el crecimiento de a con el tiempo, sólo puede cesar si $k = +1$.

Por otra parte, debido a la homogeneidad del espacio-tiempo de FRW, las componentes espaciales $(\mu, \nu) = (i, i)$ de las ecuaciones de campo de Einstein (3.179) bajo la métrica de FRW conducen a la misma ecuación. Por ejemplo, tomando $\mu = \nu = 2$ encontramos

$$\left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + 2 \frac{k}{a^2} \right] r^2 a^2 - 3 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{k}{a^2} \right] r^2 a^2 = 8\pi(-P)(-a^2 r^2), \quad (3.191)$$

que, tras un poco de álgebra, conduce a la ecuación de aceleración cosmológica

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -4\pi P - \frac{1}{2} \left(H^2 + \frac{k}{a^2} \right) \implies \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3P), \quad \text{ec. de aceleración} \quad (3.192)$$

²¹En la literatura, es habitual que Ω sólo se refiera a la fracción *actual* de energía con respecto a la densidad crítica. Aquí, la abundancia actual se denota como $\Omega_0 \equiv \Omega(t = t_0)$.

donde hemos usado la definición del parámetro de Hubble y la última igualdad surge al sustituir la ecuación de Friedmann (3.185). Notamos que si $\rho + 3P > 0$, la expansión del universo se desacelera, mientras que si $P < -\rho/3$, el universo se expande cada vez más velozmente.

Dependiendo del tipo de sustancia que es descrita por el fluido perfecto, la ecuación de estado $P = \omega\rho$ puede tener

$$\omega = \begin{cases} 1/3 & \text{radiación,} \\ 0 & \text{materia,} \\ -1 & \text{energía del vacío.} \end{cases}$$

Por lo tanto, observamos que un universo poblado solamente de materia y radiación tiene una expansión que se ralentiza. Por lo tanto, si $k = +1$ y el universo contiene sólo materia y radiación, tras alcanzar su tamaño máximo, comienza a contraerse hasta reducirse a una singularidad con $a = 0$. Por el contrario, si el universo está vacío pero posee una cantidad de energía intrínseca (probablemente de naturaleza cuántica), la correspondiente ecuación de estado es $P = -\rho$ (ver ejercicio 3.2) y el universo se expande aceleradamente. Esta misteriosa energía de presión negativa es habitualmente denominada *energía oscura*; su existencia es conjeturada debido a la observación de que el universo se expande hoy aceleradamente.

Combinando la ecuación de Friedmann y (3.192), o bien, empleando $D_\mu T^\mu_0 = 0$, obtenemos la expresión de la *ecuación de continuidad* o conservación de energía en el universo de FRW,

$$\begin{aligned} D_\mu T^\mu_0 &= T^\mu_{0,\mu} + \Gamma^\mu_{\lambda\mu} T^\lambda_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu_\lambda \\ &= \dot{\rho} + 3H(\rho + P) = 0, \quad \text{ec. de continuidad de FRW} \end{aligned} \quad (3.193)$$

donde hemos utilizado (3.180) y que $\Gamma^\mu_{0\nu} = H\delta^\mu_\nu$ para $\mu \neq 0$ y se anula para $\mu = 0$. Reemplazando ahora la ecuación de estado (2.162), obtenemos

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1 + \omega)\frac{\dot{a}}{a}. \quad (3.194)$$

Integrando (3.194) con $\omega \neq -1$, obtenemos²²

$$\rho \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (3.195)$$

y ρ es constante para $\omega = -1$. Entonces, para los distintos tipos de contenido del universo (ver (2.163)), obtenemos

$$\rho \propto \begin{cases} a^{-4} & \text{radiación,} \\ a^{-3} & \text{materia,} \\ \text{cte} & \text{energía oscura,} \end{cases} \quad (3.196)$$

²²La solución para ρ , considerando ρ_0 y a_0 como valores dados, es $\rho = \rho_0(a/a_0)^{-3(1+\omega)}$.

donde la constante de proporcionalidad se determina midiendo, por ejemplo, las densidades de radiación, materia y energía oscura actuales (i.e. a t_0).

La relación entre la densidad de energía del universo y el factor de escala (3.196) indica que la densidad de energía disminuye a medida que el universo se expande a menos de que esté dominado por energía de vacío. Aunque este comportamiento es típico de un sistema termodinámico en expansión, es destacable que $\rho(t)$ disminuye más rápido cuando el universo contiene sólo radiación que cuando contiene sólo materia. Consecuentemente, si la densidad de energía del universo está distribuida en una parte de radiación, otra de materia y otra de energía oscura (etiquetada ρ_Λ),

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda, \quad (3.197)$$

la radiación desaparecerá antes que la materia, pero la energía oscura persistirá, conduciendo, como discutimos antes, a un periodo de expansión acelerada sin límites. Notemos también que una curiosa consecuencia de (3.196) es que, para un determinado volumen, la energía no se conserva durante la evolución del universo.

3.5.2. Corrimiento al rojo cosmológico y ley de Hubble

Como hemos discutido en el contexto de la relatividad especial en la sección 1.10.1, la luz emitida por una fuente que se aleja de un observador es detectada con frecuencia corrida al rojo. Dadas las frecuencias de la luz emitida ν_{emit} y observada ν_{obs} , el efecto Doppler es caracterizado por el parámetro de *corrimiento al rojo* z , definido en (1.139) como

$$z + 1 \equiv \frac{\nu_{\text{emit}}}{\nu_{\text{obs}}}. \quad (3.198)$$

Un resultado adicional de la relatividad especial es que, cuando las fuentes se alejan con una *velocidad de recesión* pequeña, $\beta \ll 1$, el corrimiento al rojo puede aproximarse como $z \approx \beta$ (ver (1.140)). Es decir, z puede interpretarse como la velocidad de recesión de las fuentes cuando el corrimiento al rojo no es grande.

En un universo en expansión, las fuentes luminosas para observadores actuales son estrellas, galaxias, cúmulos y otros cuerpos celestes que se alejan de nosotros. Por lo tanto, es natural que ocurra un corrimiento al rojo gravitacional, basado en la métrica de FRW. Para determinar este corrimiento al rojo, consideremos que la luz proveniente de una determinada dirección, $d\Omega = 0$, satisface

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0. \quad (3.199)$$

Considerando que la luz se aproxima desde la posición r hacia la posición de un observador ubicado en $r = 0$, notamos que r decrece a medida que t aumenta, por lo que (3.199)

conduce a

$$\frac{dt}{a(t)} = -\frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}. \quad (3.200)$$

Si un rayo de luz es emitido por una fuente en la posición r al tiempo t y detectado en $r = 0$ al tiempo $t = t_0$, entonces se satisface

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{1-kr'^2}}. \quad (3.201)$$

Por otra parte, considerando la luz como una onda clásica, podemos imaginar que dos crestas consecutivas son emitidas a los tiempos t y $t + \Delta t$, pero son detectadas a los tiempos t_0 y $t_0 + \Delta t_0$. Dado que el lado derecho de (3.201) es fijo para una misma fuente, tenemos que

$$\int_t^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{t+\Delta t}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt'}{a(t')}, \quad (3.202)$$

que es equivalente a

$$\int_t^{t+\Delta t} \frac{dt'}{a(t')} + \int_{t+\Delta t}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} = \int_{t+\Delta t}^{t_0} \frac{dt'}{a(t')} + \int_{t_0}^{t_0+\Delta t_0} \frac{dt'}{a(t')} \quad (3.203)$$

Por lo tanto, si el periodo de la onda asociada a la luz es tan corto como para que el factor de escala sea constante durante la emisión de la luz, obtenemos

$$\frac{\Delta t}{a(t)} = \frac{\Delta t_0}{a(t_0)}, \quad (3.204)$$

que establece una relación entre la frecuencia de la luz al ser emitida y cuando es observada

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t} = \frac{\nu_{\text{emit}}}{\nu_{\text{obs}}} = \frac{a_0}{a(t)}. \quad (3.205)$$

De esta forma, concluimos que el corrimiento al rojo en la cosmología de FRW está dado por

$$z + 1 = \frac{a(t_0)}{a(t)}. \quad \text{corrimiento al rojo cosmológico} \quad (3.206)$$

Observamos que si los objetos celestes están relativamente cerca, la luz que permite detectarlos fue emitida alrededor de $t = t_0$ y, por lo tanto, $z = 0$.

Es interesante notar que para objetos celestes un poco más distantes, cuya luz es emitida al tiempo $t < t_0$, tal que la distancia que los separa de nosotros se puede aproximar por $d \approx t_0 - t$ (en unidades naturales) y es menor a algunos cientos de Megaparsecs, es posible expresar el corrimiento al rojo (3.206) como

$$\frac{1}{z+1} = \frac{a(t)}{a_0} \approx \frac{a_0 + \dot{a}_0(t-t_0)}{a_0} \approx 1 - H_0 d. \quad (3.207)$$

Dado que z también es pequeño en este caso, tenemos que $1/z + 1 \approx 1 - z$, lo que permite concluir que, para objetos celestes no tan distantes se satisface

$$z \approx H_0 d, \quad \text{ley de Hubble} \quad (3.208)$$

conocida como la *ley de Hubble*, que establece una relación lineal entre la velocidad de recesión de las galaxias cercanas codificada en z y su distancia (propia) a la Tierra d a través de la constante H_0 . Fue precisamente Hubble, quien en 1929 descubrió y luego confirmó observacionalmente la relación cuasi-lineal (3.208), razón por la que H_0 es conocida como la *constante de Hubble*.²³

3.5.3. Evolución de un universo plano

Al analizar el lado derecho de la ecuación de Friedmann (3.190) con las soluciones para la densidad de energía (3.196), vemos que, cuando $a \rightarrow 0$, ρa^2 tiende a infinito como a^{-2} o a^{-1} dependiendo de si el universo está dominado por radiación o materia, respectivamente. Dado que en el pasado remoto el factor de escala debió tener valores minúsculos, para esa época el valor de k resulta irrelevante y la densidad de energía del universo es, en buena aproximación, la densidad crítica, $\rho \approx 3H^2/8\pi$. Es decir, en sus orígenes, el universo puede ser considerado plano si su contenido se puede caracterizar como materia o radiación, como se supone habitualmente. Curiosamente, diversas mediciones astrofísicas conducen a la conclusión de que la densidad de energía del universo actual es también muy cercana a la crítica, por lo que nuestro universo hoy puede modelarse por la métrica de FRW con $k = 0$.

La observación de que el universo puede ser considerado como plano tanto en sus primeros instantes como en el presente representa una interrogante conocida como el *problema de planitud*. Una posible solución a esta cuestión es simplemente adoptar $k = 0$ como una propiedad de la geometría de nuestro espacio-tiempo, para todo tiempo. Aunque, como estudiaremos en esta sección, esta es una excelente aproximación para muchos propósitos, no es necesario en general suponer que $k = 0$ si se acepta que el universo experimentó hace casi 14,000 millones de años un proceso de expansión exponencial con duración de alrededor de 10^{-34} s, que permitió que la región observable del universo escalara su tamaño entre 10^{25} y 10^{30} veces. La hipótesis de la existencia de este periodo de expansión acelerada del universo temprano, conocido como *inflación* cosmológica, será discutido con mayor detalle en la sección 3.5.6 y se encuentra actualmente bajo constante escrutinio experimental y teórico.

²³La ley de Hubble (3.208) sólo es válida para corrimientos al rojo en el intervalo $0.01 \lesssim z \lesssim 0.1$, pues para valores menores, las estrellas y galaxias también son afectadas por los campos gravitacionales cercanos, y para valores mayores las aproximaciones dejan de ser válidas.

Supongamos ahora que el universo es plano. En este escenario, la ecuación de Friedmann (3.185) se simplifica a

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho, \quad (3.209)$$

que con (3.195) conduce a la ecuación diferencial para el factor de escala $a(t)$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \propto a^{-3(1+\omega)}, \quad (3.210)$$

cuyas soluciones para $\omega \neq -1$ están dadas por²⁴

$$a(t) \propto t^{2/3(\omega+1)}. \quad (3.211)$$

Como $\rho = \rho_c = \text{cte}$ para un universo plano repleto de energía de vacío, con $\omega = -1$, el parámetro de Hubble es constante y, por lo tanto, $a(t)$ escala exponencialmente. Por lo tanto, en resumen, obtenemos que el factor de escala para los distintos contenidos del universo se expresa en función del tiempo como

$$a(t) \propto \begin{cases} t^{\frac{1}{2}} & \text{radiación,} \\ t^{\frac{2}{3}} & \text{materia,} \\ e^{H_* t} & \text{energía oscura,} \end{cases} \quad H_* = \sqrt{8\pi\rho_c/3} = \text{cte.} \quad (3.212)$$

Es interesante notar que el universo crece más rápidamente cuando contiene materia que cuando sólo contiene radiación; pero, si H_* es lo suficientemente grande, la energía oscura provoca la expansión más veloz. Además, confirmamos que la expansión es acelerada, $\ddot{a} > 0$, sólo en el caso de la energía oscura.

Por otra parte, si dividimos la ecuación de Friedmann en un universo plano (3.209) por H_0^2 , obtenemos la relación

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \frac{8\pi}{3H_0^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_{0,c}}. \quad (3.213)$$

Igualmente, podemos reexpresar la ecuación de aceleración (3.192) como

$$\frac{\ddot{a}}{aH_0^2} = -\frac{4\pi}{3}\frac{\rho}{H_0^2}(3\omega + 1) = -\frac{1}{2}\frac{\rho}{\rho_{0,c}}(3\omega + 1), \quad (3.214)$$

donde la primera igualdad resulta de sustituir la ecuación de estado, mientras que la segunda de la definición de densidad crítica actual.

Como mencionamos antes, es razonable suponer que el tipo de contenido del universo no es único, sino que está distribuido, como en (3.197), en tres *especies* distintas de fluidos perfectos,

$$\rho = \rho_r + \rho_m + \rho_\Lambda,$$

²⁴De forma exacta, en un universo plano, $a(t) = a_0(H_0 t)^{2/3(\omega+1)}$, considerando $a(t=0) = 0$.

con $\rho_r = \rho_{0,r}a^{-4}$, $\rho_m = \rho_{0,m}a^{-3}$ y $\rho_\Lambda = \rho_{0,\Lambda}$, de acuerdo con (3.196), donde $\rho_{0,i}$ denota la densidad de energía actual correspondiente a la especie i , con $i = r, m, \Lambda$, y hemos adoptado la normalización $a_0 = 1$. En este caso, (3.213) se debe reescribir como

$$\begin{aligned} \frac{H^2}{H_0^2} &= \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{0,c}} = \frac{\rho_{0,r}}{\rho_{0,c}}a^{-4} + \frac{\rho_{0,m}}{\rho_{0,c}}a^{-3} + \frac{\rho_{0,\Lambda}}{\rho_{0,c}} \\ &= \Omega_{0,r}a^{-4} + \Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}, \end{aligned} \quad (3.215)$$

en términos de los parámetros de densidad de las distintas especies. De manera similar, es posible mostrar que la ecuación de aceleración (3.214) en la época actual adopta la forma²⁵

$$\frac{\ddot{a}_0}{a_0 H_0^2} = -\frac{1}{2} \sum_i \Omega_{0,i}(3\omega_i + 1) = -\frac{1}{2}(2\Omega_{0,r} + \Omega_{0,m} - 2\Omega_{0,\Lambda}) \quad (3.216)$$

para un contenido no único en el universo. De (3.216), notamos que, como anticipamos, la aceleración puede ser positiva hoy (es decir, $\ddot{a}_0/a_0 H_0^2 > 0$) sólo si $2\Omega_{0,\Lambda} > 2\Omega_{0,r} + \Omega_{0,m}$, es decir, si la energía oscura domina hoy el contenido del universo. Dado que la evidencia indica que en el pasado ρ_Λ no dominaba el contenido del universo, la cosmología busca explicar por qué justamente en la época que nos tocó existir se presenta esta situación. Frecuentemente, esta cuestión es denominada el problema de *¿por qué hoy?*

Las observaciones más recientes realizadas por la sonda *Planck*²⁶ han revelado que las *abundancias* actuales de las especies que nuestro universo contiene, codificadas en $\Omega_{0,i}$, tienen los valores

$$\Omega_{0,r} \approx 5.38 \times 10^{-5}, \quad \Omega_{0,\Lambda} \approx 0.692 \pm 0.012, \quad \Omega_{0,m} \approx 0.308 \pm 0.012. \quad (3.217)$$

Asimismo, mediciones de luminosidades de rayos X de cúmulos de galaxias han permitido notar que sólo un 16 % de $\Omega_{0,m}$ puede vincularse con la materia que nos es familiar y que, en particular, emite y refleja luz. Esta observación (entre muchas otras) constituye una prueba indirecta de que existe una enorme cantidad de materia que no podemos observar mediante telescopios, por lo que, además de la materia ordinaria, típicamente apodada *materia bariónica* con abundancia $\Omega_{0,b}$, debe existir *materia oscura* con abundancia $\Omega_{0,DM}$, tales que

$$\Omega_{0,b} \approx 0.0484, \quad \Omega_{0,DM} \approx 0.258. \quad (3.218)$$

Una de las mayores incógnitas de la cosmología es el origen y la naturaleza de esa materia oscura. Las propuestas actuales incluyen partículas elementales con masas frecuentemente

²⁵ Por razones históricas, $q_0 \equiv -\ddot{a}_0/a_0 H_0^2$ es conocido como *parámetro de desaceleración* y mide qué tanto se desacelera la expansión del universo actualmente. Las observaciones reportadas en 1998 de la velocidad de recesión de supernovas tipo IA probaron que $q_0 < 0$ y, por lo tanto, el universo se expande aceleradamente hoy. Estas observaciones merecieron la distinción del Premio Nobel 2011 en Física.

²⁶ C. Patrignani *et al.* [Particle Data Group], *Review of Particle Physics*, Chin. Phys. C **40** (2016), página 120: *Astrophysical constants and parameters*.

por encima de las de todas las partículas elementales conocidas. Desafortunadamente, ninguno de los varios observatorios configurados para la detección de las hipotéticas partículas ha conseguido una *detección directa*.

Edad del universo

Suponiendo que el universo es plano, las abundancias de materia y energía determinan la edad del universo observable. Para calcularla, basta con resolver la ecuación diferencial (3.215) para el factor de escala, tomando como condición inicial $a = 0$. Con este propósito, tomamos la raíz cuadrada de (3.215), que conduce a

$$\frac{da}{dt} = aH_0\sqrt{\Omega_{0,r}a^{-4} + \Omega_{0,m}a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}} \quad (3.219)$$

con $\Omega_{0,r} + \Omega_{0,m} + \Omega_{0,\Lambda} = 1$ y $\Omega_{0,m} = \Omega_{0,DM} + \Omega_{0,b}$. Invirtiendo (3.219) e integrando desde el valor inicial $a = 0$ hasta un valor posterior del factor de escala, conseguimos una fórmula para el tiempo transcurrido desde el inicio del universo en función del valor final del factor de escala,

$$t(a) = \int_0^a \frac{da'}{a'H_0\sqrt{\Omega_{0,r}a'^{-4} + \Omega_{0,m}a'^{-3} + \Omega_{0,\Lambda}}} \quad (3.220)$$

Debido a que el factor de escala a no es una cantidad que podamos medir directamente, al contrario del corrimiento al rojo z , resulta más conveniente expresar la integral en (3.220) en términos de la variable $x \equiv a/a_0 = (z+1)^{-1}$ como

$$t(z) = \int_0^{(z+1)^{-1}} \frac{dx}{H_0\sqrt{\Omega_{0,r}x^{-2} + \Omega_{0,m}x^{-1} + \Omega_{0,\Lambda}x^2}} \quad (3.221)$$

Una estrella que emite su luz en nuestra época (como e.g. el Sol y Alfa Centauri) no exhibe ningún corrimiento al rojo debido a la expansión del universo, de donde sigue que $z_0 = 0$. Por lo tanto, empleando los datos observacionales del parámetro de Hubble actual (3.187) y las abundancias presentes (3.217), la edad del universo hasta el día de hoy resulta ser el conocido valor $t_0 \equiv t(z_0 = 0) \approx 13.8 \times 10^9$ años.

La expresión para la edad del universo (3.221) permite determinar la edad posible de una estrella, galaxia, cúmulo o cualquier otro objeto astrofísico, cuyo espectro de emisión (y absorción) sea medido. Si, al compararla con el espectro asociado al objeto identificado, la medición resulta con un corrimiento al rojo $z \neq 0$ ajeno al movimiento del objeto, concluimos que éste no pudo haber existido antes del tiempo $t(z)$. Sabemos, por ejemplo, que muchas de las estrellas más antiguas tienen corrimientos al rojo de $z \sim 11$. Esto indica que las primeras estrellas pudieron haber aparecido cuando el universo tenía apenas como 4×10^8 años.

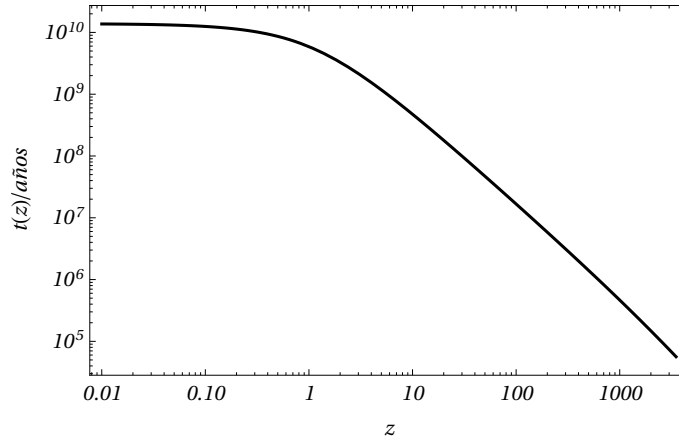


Figura 3.14: Edad en años del universo para distintos valores de corrimiento al rojo z . La época actual corresponde a $z_0 = 0$ y $t(z_0) \approx 1.38 \times 10^{10}$ años. El máximo corrimiento al rojo posiblemente detectable es alrededor de $z = 3,500$, cuando el universo observable habría existido por alrededor de 60,000 años.

En la figura 3.14 se muestra el comportamiento de $t(z)$ para valores de corrimiento al rojo $3,500 > z \geq 0$, que son los únicos observables por medios astrofísicos actualmente. Es decir, nos es imposible conocer mediante observaciones astrofísicas cómo era el universo cuando tenía una edad menor a $t(3,500) \approx 60,000$ años. La principal razón de esta limitación es que la radiación generada en épocas anteriores a esa época era absorbida y reemitida por la enorme masa de partículas ultra-energéticas que poblaban el universo, impidiendo que la luz se desplazara libremente en nuestra dirección. Salvo por una pequeña fracción, la única radiación que logró escapar y hoy detectamos es conocida como *radiación cósmica de fondo* o CMB (por *Cosmic Microwave Background*) y representa hoy la fuente más rica de información sobre el universo temprano. Desafortunadamente, esta radiación fue emitida en la época correspondiente a $z \sim 1,100$, como discutiremos en la sección 3.5.4.

Dinámica con curvatura

La suposición de que el universo es plano, como hemos discutido, no es arbitraria. Sin embargo, es posible relajarla y hacer una serie de observaciones relevantes que, entre otras cosas, nos permiten justificar esa suposición.

Considerando la ecuación de Friedmann (3.188) con $k \neq 0$, notamos que para todo tiempo se debe satisfacer

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1, \quad \text{con} \quad \Omega_k \equiv -\frac{k}{a^2 H^2}, \quad (3.222)$$

donde hemos definido la “densidad de curvatura” Ω_k para k constante. Observamos que,

dada la normalización $a_0 = 1$, la densidad de curvatura actualmente toma el valor

$$\Omega_{0,k} = -\frac{k}{H_0^2}. \quad (3.223)$$

Dividiendo la ecuación de Friedmann general por H_0^2 , como en (3.215), obtenemos

$$\frac{H^2}{H_0^2} = \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{0,c}} - \frac{k}{H_0^2 a^2} = \Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} a^{-2} \quad (3.224)$$

donde hemos sustituido la densidad de curvatura (3.223).

De la definición de la densidad de curvatura y las dos ecuaciones anteriores, obtenemos que

$$\Omega_k = \frac{H_0^2}{H^2} \Omega_{0,k} a^{-2} = \frac{\Omega_{0,k} a^{-2}}{\Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} a^{-2}}. \quad (3.225)$$

Esta ecuación describe la dinámica de la densidad de curvatura en términos de los valores observados de las densidades de energía actuales del contenido del universo. Notamos particularmente que si el universo es perfectamente plano actualmente, $\Omega_{0,k} = 0$, el universo debió haber sido plano en el pasado y siempre lo será. El valor medido de la densidad de curvatura presente de acuerdo a los datos más recientes de *Planck* es

$$\Omega_{0,k} = -0.005_{-0.017}^{+0.016}, \quad (3.226)$$

pequeño y consistente con cero, pero posiblemente no nulo.

En caso de que $k \neq 0$, la dinámica de la densidad de curvatura (3.225) muestra que para valores cercanos a $a = 0$, la densidad de curvatura $\Omega_k \approx \Omega_{0,k}/\Omega_{0,m} a^{-1} + \Omega_{0,r} a^{-2}$ prácticamente se anula. Es decir, tanto en el pasado remoto como actualmente la curvatura es cercana a cero. Sin embargo, dadas la estructura de (3.225) y el signo en la definición de Ω_k , la curvatura debe exhibir un máximo (correspondiente a un mínimo de Ω_k) para algún valor $a = a_{max}$ entre 0 y 1. Observamos que a_{max} está determinado por la condición

$$\left. \frac{d\Omega_k}{da} \right|_{a_{max}} \propto -\Omega_{0,m} - 2\Omega_{0,r} a_{max}^{-1} + 2\Omega_{0,\Lambda} a_{max}^3 \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.227)$$

lo que, con las abundancias observadas (3.217) y (3.226), conduce a $a_{max} \approx 0.606$ y consecuentemente a $\Omega_{max,k} \approx -0.006_{-0.023}^{+0.021}$. Es interesante notar a partir de la ecuación de aceleración (3.214) que, considerando las especies que llenan el universo, el valor del factor de escala al que la expansión del universo comenzó la etapa de aceleración presente está dado por la condición

$$\frac{\ddot{a}}{aH_0} = -\frac{1}{2} \sum_i \frac{\rho_i}{\rho_{0,i}} (3\omega_i + 1) = -\frac{1}{2} (2\Omega_{0,r} a^{-4} + \Omega_{0,m} a^{-3} - 2\Omega_{0,\Lambda}) \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.228)$$

que, comparando con (3.227), conduce a que el inicio de la expansión acelerada del universo coincide con a_{max} . A partir de estos resultados llegamos a una importante conclusión: el universo siempre ha sido casi plano, como supusimos antes, y el momento en el que se alejó más de esta descripción está determinado por el instante en el que se inició la expansión acelerada que hoy observamos.

Esta conclusión, no obstante, no explica por qué, dados todos los eventos cósmicos que el universo ha sufrido, las mediciones indican que hoy el universo es plano, $\Omega_{0,tot} = \Omega_{0,r} + \Omega_{0,m} + \Omega_{0,\Lambda} + \Omega_{0,k} \approx 1$. Esta observación tiene poco sentido porque, a partir de (3.196), notamos que en el universo temprano la energía oscura fue despreciable en el contenido del universo, y por lo tanto, de la definición de la densidad de curvatura (3.222), la curvatura del universo crece con el tiempo como

$$|\Omega_k| = \frac{|k|}{a^2 H^2} = \frac{|k|}{\dot{a}^2} \propto t^{(6\omega+2)/3(\omega+1)} \quad (3.229)$$

con $\omega = 0, 1/3$. Es decir, si $k \neq 0$, no importa qué tan cercano a cero haya sido $\Omega_k(t=0)$, la curvatura debería ser hoy muy diferente. Esta es una forma más precisa de establecer el llamado *problema de planitud*.

Finalmente, discutamos la edad de nuestro universo en el caso de que $k \neq 0$. A partir de (3.224) y repitiendo los pasos que conducen a (3.221), obtenemos

$$t(z) = \int_0^{(z+1)^{-1}} \frac{dx}{H_0 \sqrt{\Omega_{0,r} x^{-2} + \Omega_{0,m} x^{-1} + \Omega_{0,\Lambda} x^2 + \Omega_{0,k}}} \quad (3.230)$$

con $x = a/a_0$. Incluyendo la información de la densidad de curvatura (3.226), encontramos entonces que la edad del universo actualmente está en el intervalo $13.7 \times 10^9 < t_0 < 14 \times 10^9$ años, estableciendo el intervalo de error de la edad del universo calculada previamente.

3.5.4. Radiación cósmica de fondo

Hasta antes del descubrimiento de las ondas gravitacionales y desde la invención del telescopio, el único método para explorar el cosmos a distancias cosmológicas ha sido la radiación electromagnética que detectamos en nuestro planeta. La mayor cantidad de la radiación detectada proviene de planetas, estrellas, (super)novas, galaxias, cúmulos y otros fenómenos como la acreción de materia en agujeros negros.

Sin embargo, en 1964 los radioastrónomos estadounidenses Arno Penzias y Robert Wilson, quienes hacían experimentos de radiocomunicación satelital para los laboratorios Bell con una gigantesca antena enfriada con helio líquido, notaron que es posible detectar a cualquier hora del día radiación isotrópica (proveniente de todas direcciones), ajena a toda fuente observable, en el canal de microondas con frecuencia de 4,080 MHz, equivalente a longitud de onda de 7.35 cm. Aunque pensaron al principio que se trataba de algún tipo de “ruido” experimental, lograron identificar que se trata de un fondo de radiación cósmica.

Pronto, otros telescopios terrestres, satelitales y a bordo de globos aerostáticos confirmaron la existencia de radiación como la descubierta por Penzias y Wilson en otras frecuencias de microondas, conduciendo a una distribución espectral similar a la que emite un cuerpo negro con una temperatura de $T = 2.726$ K.

De acuerdo a la descripción cuántica de un cuerpo negro caliente, éste emite radiación en todas las frecuencias. La densidad de energía de radiación de cuerpo negro depende de la frecuencia ν de la radiación emitida y de la temperatura T del cuerpo. La *distribución espectral* de energía por unidad de frecuencia está dada por la llamada *ley de Planck*

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{\exp(h\nu/k_B T) - 1}, \quad (3.231)$$

donde h y k_B son respectivamente las constantes de Planck y Boltzmann y hemos incluido todas las constantes para mayor claridad.²⁷

En la figura 3.15a se muestra la distribución espectral asociada a un cuerpo negro con $T = 2.726$ K, que coincide con la de la radiación observada por distintos detectores. El máximo del espectro corresponde a la frecuencia que concentra la mayor cantidad de radiación emitida. En el espectro de la radiación *de fondo* detectada, el máximo ocurre en la frecuencia 160.24 GHz, en la región de microondas. Por esta razón y porque su origen no se puede asociar a ninguna fuente puntual terrestre o astrofísica, esta radiación es llamada *radiación cósmica de fondo* o *radiación de fondo de microondas* (CMB). Por su descubrimiento, Penzias y Wilson fueron galardonados en 1978 con el premio Nobel en Física.

Afortunadamente, trabajos teóricos especialmente de Robert Dicke y Yakov Zel'dovich habían ya mostrado que la cosmología predice la existencia de la CMB. Para empezar, consideremos que la radiación del universo puede ser descrita como radiación de cuerpo negro con temperatura T . Entonces, la densidad de energía (total) independiente de las frecuencias está dada por

$$\rho_r = \int_0^\infty d\nu u(\nu) = \alpha T^4, \quad \text{con} \quad \alpha \equiv \frac{8\pi^5 k_B^4}{15h^3 c^3} \approx 4.72 \times 10^{-6} \text{ GeV K}^{-4} \text{ m}^{-3} \quad (3.232)$$

donde α es llamada *constante de densidad de radiación*. Como, por otra parte, la ecuación de Friedmann conduce a $\rho_r = \rho_{0,r}(a/a_0)^{-4}$, encontramos la relación

$$a = a_0 \left(\frac{\rho_{0,r}}{\alpha} \right)^{1/4} \frac{1}{T} \equiv a_0 \frac{T_0}{T}, \quad (3.233)$$

entre el factor de escala y la temperatura, donde $T_0 \equiv (\rho_{0,r}/\alpha)^{1/4} \approx 2.726$ K define la temperatura de la radiación en nuestra época que, como esperamos, coincide con la medición de la CMB.

²⁷En esta sección evitamos el uso de unidades naturales para evitar confusiones.

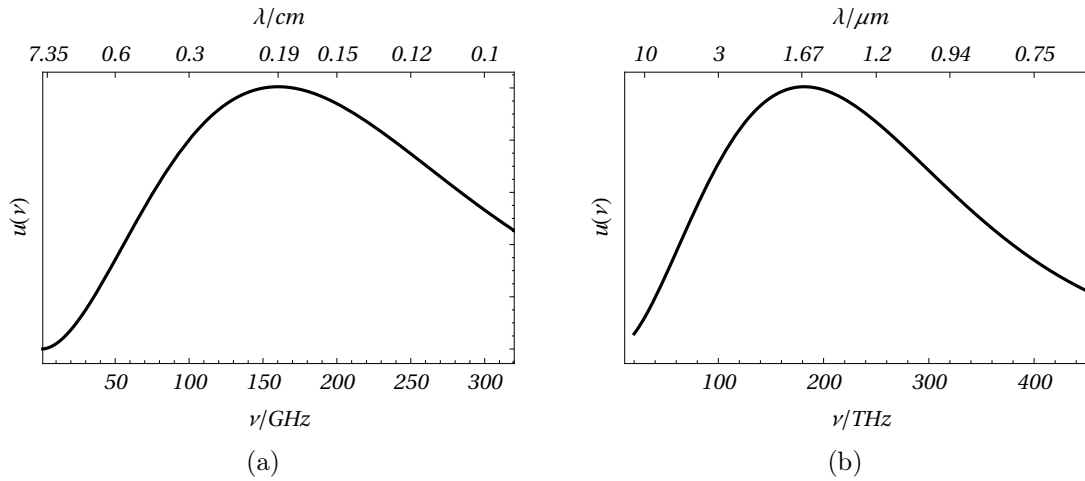


Figura 3.15: Distribución espectral de radiación de cuerpo negro (a) en microondas con $T = 2.726$ K y (b) en el infrarrojo distante con $T = 3,090$ K.

La primera consecuencia de (3.233) es la confirmación de que, a medida de que el universo se expande, también se enfría. Pero además aprendemos que la radiación se enfría en la misma proporción que el universo crece. Si reexpresamos la relación (3.233) en función del corrimiento al rojo como $T = T_0(z + 1)$, basta con conocer el valor de la temperatura a la que fue emitida para saber con precisión cuándo fue emitida.

Para conseguir una estimación de la temperatura a la que la CMB fue emitida, consideremos primero la información contenida en la estructura de ρ para las distintas especies, de acuerdo a (3.196) con los valores medidos hoy (3.217). Es fácil notar que para valores pequeños del factor de escala $a \lesssim 3 \times 10^{-4} a_0$ (o, en términos del corrimiento al rojo, $z \gtrsim 3,500$), ρ_r domina el contenido del universo. A esa época temprana del universo la llamamos *época de radiación*. A medida que el factor de escala crece (y ρ_r decrece), ρ_m domina el contenido del universo, conduciendo a la llamada *época de materia* para valores del factor de escala en el intervalo $3 \times 10^{-4} a_0 \lesssim a \lesssim 0.7 a_0$ (o $3,500 \gtrsim z \gtrsim 0.42$). Posteriormente, ρ_Λ domina el contenido del universo, iniciando la *época de energía oscura*, en la que se formó nuestro sistema solar.

En la época de radiación, la temperatura es superior a 16,000 K, aproximadamente equivalentes a 1.4 eV. Si consideramos temperaturas un millón de veces más altas, la energía de los fotones es suficiente para crear electrones, que tienen energía en reposo de $m_e c^2 \approx 511$ keV. Temperaturas 2,000 veces aún más altas permitirían la creación de protones. En consecuencia, podemos concebir que en la época de radiación la interacción y las conversiones entre fotones y materia eran constantes. Una vez que la temperatura disminuyó lo suficiente como para que los fotones fueran incapaces de crear electrones y protones, los electrones y protones sobrevivientes (y en igual número) interactuaron electromagné-

ticamente para comenzar a formar átomos simples, empezando por el hidrógeno, en un proceso conocido como *recombinación*. Durante algún tiempo debió suceder la siguiente reacción en ambas direcciones:



donde γ denota un fotón arbitrario. Este equilibrio termodinámico es roto cuando la temperatura desciende lo suficiente para impedir que los fotones libres ionicen los átomos de hidrógeno recién formados. Si consideramos que la energía de ionización del hidrógeno (en su estado base) es $E_i \approx 13.6$ eV, esto requeriría temperaturas tan altas como 160,000 K. No obstante, es claro que los primeros átomos formados deben haberse encontrado en estados excitados, por lo que la energía requerida para ionizarlos fue considerablemente menor, incluso menor que el umbral de 16,000 K que establece el inicio de la época de materia.

Si definimos la *fracción de hidrógeno ionizado* x_e como la fracción de número de átomos ionizados (electrones o protones libres) por número de átomos de hidrógeno ionizados o no ionizados,²⁸ vemos que durante el proceso de recombinación x_e debió disminuir paulatinamente hasta que el número de electrones y protones libres se redujo tanto que imposibilitó la formación de nuevos átomos. Es al final de la recombinación que quedan algunos fotones producto de la reacción (3.234) completamente libres. Estos fotones, cuyo camino libre medio de interacción es compatible con la distancia que recorrerían en la edad del universo, son los que hoy llamamos CMB. De forma un tanto arbitraria, típicamente se define que el tiempo en el que esta radiación fue emitida coincide con el tiempo al que x_e se redujo a un 10% de su valor original, es decir, $x_e = 0.1$. A la época del nacimiento de la CMB se le conoce como periodo de *última dispersión* o *desacoplamiento* de los fotones, pues corresponde al tiempo en el que esta radiación interactuó por última vez, desacoplándose de la materia.

La evolución de x_e como función de la temperatura T puede determinarse mediante la llamada termodinámica en equilibrio, a partir de las reglas de conservación en el proceso (3.234) y de las distribuciones estadísticas (cuánticas) de los protones, electrones y átomos de hidrógeno. La relación exacta es muy complicada. Sin embargo, suponiendo entre otras cosas que el único estado en el que se forma el hidrógeno es el estado base, la dinámica de la fracción de hidrógeno ionizado está determinada por la llamada *ecuación de Saha* cosmológica,²⁹

$$\frac{x_e^2}{1 - x_e} = \frac{1}{0.76n_b} \left(\frac{2\pi m_e k_B T}{h^2} \right)^{3/2} e^{-E_i/k_B T}, \quad \text{ec. de Saha} \quad (3.235)$$

²⁸Formalmente, $x_e \equiv n_p/(n_p + n_H)$, donde n_p es la densidad de número de protones (o electrones) y n_H la densidad de número de átomos de hidrógeno.

²⁹Una derivación detallada y confiable de (3.235) puede encontrarse en la sección 2.3 de S. Weinberg, *Cosmology*. Oxford Univ. Press, 2008. Esta ecuación es una aplicación de la ecuación general de Saha, válida para todos los procesos de ionización en equilibrio.

donde la densidad de bariones en el universo está dada por $n_b = n_{0,b} (T/T_0)^3$ ya que escala con la temperatura como la densidad de materia (ver (3.196) y (3.233)) y la densidad actual observada es $n_{0,b} \approx 0.2503 \text{ m}^{-3}$.

La ecuación de Saha (3.235) sólo puede ser resuelta numéricamente. Sustituyendo $x_e = 0.1$, encontramos que la temperatura de la CMB al tiempo de última dispersión es $T_{rec} \approx 3,090 \text{ K}$, correspondiente mediante (3.233) a $z_{rec} \approx 1,133$ y, de acuerdo a (3.230), a la época en la que el universo tenía la edad $t(z_{rec}) \approx 380,000$ años. En la figura (3.15b) se presenta el espectro de la CMB en el infrarrojo distante, correspondiente al tiempo cuando fue emitida.

A partir de los datos obtenidos, notamos que $z_{rec} < 3,500$ y, por lo tanto, la emisión de la CMB ocurrió durante la época de dominio de la materia. Por otra parte, dado que la luz existente antes de esta época desapareció debido a las grandes interacciones que mantenía con la materia, la CMB es la luz más vieja que podemos observar hoy. Esta radiación isotrópica forma una esfera alrededor de nosotros llamada la *superficie de última dispersión*, delimitando los puntos más distantes que nos es posible observar. Esta es la información astrofísica más antigua que podemos emplear para entender la evolución de nuestro universo.

Los valores obtenidos para la temperatura, corrimiento al rojo y tiempo de emisión de la CMB son del orden de magnitud correcto, pero son sólo valores aproximados. La razón es que hemos hecho un número de suposiciones. La primera es que el régimen de equilibrio del proceso (3.234) es válido durante todo el periodo de recombinación, lo cual ciertamente se viola fuertemente sobre todo al final de esta época. Es decir, la ecuación de Saha (3.235) debe ser sustituida por una descripción que tome en cuenta las desviaciones del equilibrio. La segunda es que consideramos que el hidrógeno no tiene estados excitados, de tal forma que los protones y electrones se combinan directamente en el estado base del hidrógeno, lo cual tampoco es totalmente correcto.

Un último pero crucial aspecto de la verdadera naturaleza de la CMB es que, contrario a nuestra suposición, no es del todo isotrópica y homogénea. De hecho, la dinámica cósmica durante la época de última dispersión es registrada por la CMB, produciendo pequeñas anisotropías (de una parte en cien mil) que revelan diminutas acumulaciones de materia aquí y allá, consideradas hoy las *semillas* de la formación de la estructura (estelar, galáctica, etc.). El estudio de las anisotropías, por lo tanto, puede revelarnos aspectos de la época de materia, posterior a la formación de los primeros átomos de hidrógeno. Pero además puede revelar aspectos del universo anterior a ese tiempo, pues si, por ejemplo, había algún tipo de ondas gravitacionales *primigenias* en el plasma de hidrógeno ionizado de los últimos años de la época de radiación, éstas podrían haber tenido un efecto en la CMB. El estudio de estos aspectos es, al momento de escribir este texto, investigación en progreso y tema de grandes debates.

3.5.5. Problema del horizonte cosmológico

Como hemos mencionado, las mediciones de la CMB han mostrado que es bastante homogénea. Para lograr esta homogeneidad, sería preciso que, si bien hoy distintas regiones del cosmos no se encuentran en contacto causal, debieron haber estado en contacto causal en algún momento del pasado. Por lo tanto, una pregunta natural es ¿qué región del espacio-tiempo de FRW pudo haber estado en contacto causal antes de la emisión de la radiación cósmica de fondo al tiempo t_{rec} ?

Una pregunta similar es la que resolvimos para el espacio-tiempo de Minkowski en el contexto de la relatividad especial, en la sección 1.8.2. En ese caso, entendimos que si los conos de luz de dos puntos del espacio-tiempo se intersecan, entonces los puntos han estado en contacto causal.

Para repetir este procedimiento en el espacio-tiempo de FRW, es conveniente definir el *tiempo conforme* τ por medio de (retomando unidades naturales)

$$d\tau \equiv dt/a(t). \quad \text{tiempo conforme} \quad (3.236)$$

Lo especial acerca del tiempo conforme es que permite reescribir el intervalo de FRW (3.177) como (eligiendo $d\Omega = 0$ sin pérdida de generalidad, por la isotropía del espacio-tiempo)³⁰

$$ds^2 = a^2 (d\tau^2 - d\chi^2), \quad \text{con} \quad d\chi^2 \equiv \frac{dr^2}{1 - kr^2}, \quad (3.237)$$

que es *conformemente equivalente* al intervalo de Minkowski, es decir, es equivalente al intervalo de Minkowski salvo por un *factor conforme* que, en este caso, es el factor de escala. Una consecuencia de la forma del intervalo (3.237) es que la trayectoria de la luz está regida por

$$d\tau = \pm d\chi, \quad (3.238)$$

donde el signo $+$ ($-$) es para rayos de luz que se alejan (acercan). Por lo tanto, los conos de luz en el plano $\tau - \chi$ están delimitados por rectas, como en el espacio-tiempo de Minkowski.³¹ Con esta información, sabemos que, por ejemplo, todos los eventos dentro del cono de luz sombreado por debajo del punto o en la figura 3.16 están relacionados causalmente con él.

Llamemos *horizonte cosmológico* u *horizonte de partícula* h a la mayor distancia a partir de la cual un observador puede recibir un rayo de luz emitido en el universo de FRW. Para un observador al tiempo t , esta distancia está dada por el tiempo conforme total $\tau(t)$ multiplicado por el factor conforme, es decir,

$$h(t) \equiv a(t) \int_0^{\tau(t)} d\tau' = a(t) \int_0^t \frac{dt'}{a(t')} = a(t) \int_0^{a(t)} \frac{da'}{a'^2 H'}, \quad \text{horizonte cosmológico} \quad (3.239)$$

³⁰ χ es conocido como coordenada comóvil.

³¹En el plano $t - r$, las trayectorias luminoides son curvas.

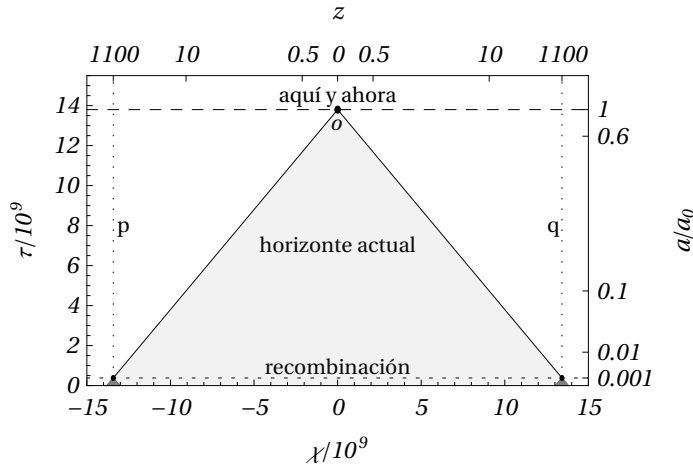


Figura 3.16: Ilustración del problema del horizonte cosmológico. Al momento de su emisión, la CMB pudo haber sido afectada sólo por los eventos en su horizonte cosmológico. Debido a que la CMB fue emitida cuando el universo tenía apenas 380,000 años ($z \sim 1,100$), correspondiente a $\tau \sim 0.4 \times 10^9$, fotones que nos alcancen desde dos posiciones opuestas en nuestro horizonte cosmológico actual, $\chi = p, q$, no pudieron haber tenido un pasado común. Por lo tanto, resulta inexplicable que tengan las mismas propiedades.

donde hemos empleado la definición del parámetro de Hubble, $H = \dot{a}/a$. De esta definición, observamos que $h(t)$ es la mayor distancia entre una partícula y su entorno desde la que los eventos pueden afectarla al tiempo t . En especial, eventos más allá del horizonte $h(t)$ al tiempo t no pueden ser observados a ese tiempo, aunque podrían ser observados en el futuro. Entonces, si o en la figura 3.16 corresponde a nuestra posición en el tiempo presente, podemos observar todas las partículas y eventos en una esfera con radio $h_0 \equiv h(t_0)$, pero otro observador distante podría observar otras partículas y eventos. Cada observador tiene su propio horizonte de eventos. Sólo en la medida en que las observaciones de dos observadores distantes coincidan aunque sea en una pequeña región (cuando los horizontes se intersecan) pueden ambos tener una conexión causal.

Por otra parte, conforme pasa el tiempo, incluso horizontes cosmológicos que no se intersecan pueden aparecer en el horizonte cosmológico de un observador futuro. Consideremos con más detalle la situación descrita en la figura 3.16. Dos haces de luz emitidos durante el periodo de recombinación desde puntos opuestos p y q en la esfera de nuestro horizonte cosmológico actual pudieron haber sido afectados sólo por los eventos contenidos en sus respectivos horizontes cosmológicos. Debido a que la CMB fue emitida en $t = t_{rec} \approx 380,000$ años y $a_{rec} \approx 10^{-3}$, entonces $\tau_{rec} \approx 0.38 \times 10^9$. Como se muestra en la figura, ese tiempo conforme no es suficiente para que los conos de luz asociados a sus horizontes cosmológicos se intersequen. Por esta razón, uno esperaría de forma natural que la radiación emitida desde p y q tenga e.g. temperaturas diferentes. Peor aún: dado que entre p y q hay un

número grande de regiones que no sostienen relación causal, se esperaría un número grande de temperaturas diferentes en la CMB, contrastando con las observaciones. Este es el *problema del horizonte*, probablemente el mayor de los problemas del modelo de la gran explosión.

Para cuantificar este problema, podemos medir cuántas veces cabe el horizonte de la CMB, medido al día de hoy, en nuestro horizonte cosmológico presente. Dado que $d\chi$ no depende del tiempo en el que se mida, su integral hasta $r = r_{rec}$ tiene el mismo valor que tuvo durante la época de recombinación. Por lo tanto, escalando ese tamaño con el factor de escala, encontramos que el horizonte cosmológico de la CMB al tiempo t está dado por

$$h_{rec}(t) = a(t) \int_0^{\chi_{rec}} d\chi = a(t) \int_0^{\tau_{rec}} d\tau = a(t) \frac{h(t_{rec})}{a(t_{rec})}. \quad (3.240)$$

Expresiones análogas son válidas para otros horizontes cosmológicos antiguos. Claramente, el horizonte cosmológico actual es mucho más grande que el horizonte cosmológico de recombinación escalado al día de hoy, tal que $h(t_0)/h_{rec}(t_0)$ cuenta el número de regiones en el horizonte actual que estuvieron causalmente desconectadas durante el periodo de recombinación.

Estimemos el número de regiones que, desde la perspectiva actual, estuvieron desconectadas durante la emisión de la CMB. Para conseguirlo, (sobre)simplificaremos la evolución del cosmos, suponiendo que hasta que se completó la recombinación el universo estaba enteramente dominado por radiación y que la evolución posterior se efectuó en un universo dominado por materia. Además, supondremos que nuestro espacio-tiempo es plano y que la época de dominio de la energía oscura ha sido tan breve que no ha afectado mucho nuestra apreciación del pasado (lo cual es falso). Bajo estas suposiciones, el horizonte cosmológico actual está dado por

$$h(t_0) = a(t_0) \int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \approx t_0^{2/3} \int_0^{t_0} t^{-2/3} dt = 3t_0. \quad (3.241)$$

Por otra parte, el horizonte cosmológico durante recombinación escalado al día de hoy de acuerdo a (3.240) está dado por

$$h_{rec}(t_0) \approx a^{\text{mat}}(t_0) \int_0^{t_{rec}} \frac{dt}{a^{\text{rad}}(t)} = (H_0 t_0)^{2/3} 2\sqrt{\frac{t_{rec}}{H_0}} = 2H_0^{1/6} t_0^{2/3} t_{rec}^{1/2}, \quad (3.242)$$

donde hemos tomado $a = a^{\text{rad}} \propto \sqrt{t}$ entre $t = 0$ y $t = t_{rec}$, mientras que $a = a^{\text{mat}} \propto t^{2/3}$ después de t_{rec} . Entonces, el número de regiones desconectadas causalmente durante recombinación es en nuestra perspectiva

$$\frac{h(t_0)}{h_{rec}(t_0)} \approx \frac{3t_0}{2H_0^{1/6} t_0^{2/3} t_{rec}^{1/2}} \sim 300, \quad (3.243)$$

en donde hemos reemplazado los valores obtenidos para la edad del universo hoy y cuando ocurrió la recombinación. Este resultado es problemático porque implica que deberíamos observar al menos 300 temperaturas diferentes en el CMB que no son detectadas.

Analicemos ahora la fórmula para el horizonte cosmológico (3.239). Al considerar $a \propto t^{2/3(\omega+1)}$ con $1 - 3\omega \geq 0$, notamos que (los factores de proporcionalidad se cancelan y)

$$h(t) = \frac{3\omega + 1}{3(\omega + 1)} t^{2/3(\omega+1)} t^{+1-2/3(\omega+1)} = \frac{3\omega + 1}{3(\omega + 1)} t. \quad (3.244)$$

Por otro lado, el inverso del parámetro de Hubble, frecuentemente llamado *radio de Hubble* u *horizonte de Hubble*, para los mismos casos es

$$H^{-1}(t) = \frac{3(\omega + 1)}{2} t. \quad (3.245)$$

Comparando ambos resultados, notamos la interesante relación entre el horizonte cosmológico y el horizonte de Hubble

$$h(t) \approx H^{-1}(t). \quad (3.246)$$

Esta relación conduce a que ambos horizontes sean usualmente empleados de forma intercambiable; sin embargo, esto es incorrecto porque sólo coinciden cuando $1 + 3\omega > 0$. Particularmente, difieren para el caso $\omega = -1$ que estudiaremos en la siguiente sección, cuando a crece de forma exponencial en el tiempo.

En términos de la relación (3.246), podemos reexpresar el problema del horizonte. El número de veces que cabe hoy el horizonte cosmológico de recombinación en nuestro horizonte actual está dado por

$$\frac{h(t_0)}{h_{rec}(t_0)} = \frac{h(t_0)a_{rec}}{a_0 h(t_{rec})} \approx \frac{(H_0 a_0)^{-1}}{(a_{rec} H_{rec})^{-1}} \gg 1. \quad (3.247)$$

Es decir, el problema del horizonte es resultado de que $(aH)^{-1}$ crezca con el tiempo.

3.5.6. Inflación cosmológica

El problema de planitud está relacionado con la imposibilidad de explicar que hoy nuestro espacio-tiempo sea prácticamente plano sin considerar que siempre ha sido plano, dado que la curvatura del universo tiene la tendencia natural de crecer con el tiempo. En términos de la ecuación de Friedmann (3.222) con densidad de curvatura no trivial, vemos que se satisface

$$\left| \sum_i \Omega_i - 1 \right| = \frac{|k|}{a^2 H^2} = \frac{|k|}{\dot{a}^2}, \quad (3.248)$$

donde Ω_i denota las abundancias de las distintas especies de contenido en el universo y k es el parámetro de curvatura.

Como la curvatura siempre crece, entonces tenemos en estos términos que (3.248) satisface

$$\frac{d}{dt} \left| \sum_i \Omega_i - 1 \right| = |k| \frac{d}{dt} (aH)^{-2} = |k| \frac{d}{dt} \dot{a}^{-2} = -2|k| \frac{\ddot{a}}{\dot{a}^3} > 0. \quad (3.249)$$

Dado que en un universo en expansión $\dot{a} > 0$, entonces encontramos que el crecimiento de la curvatura está asociado a la desaceleración de la expansión, $\ddot{a} < 0$. Asimismo, a partir de la primera igualdad, notamos que el problema de planitud se relaciona con el crecimiento de $(aH)^{-1}$ con el tiempo. Coincidentemente, este es el origen también del problema de horizonte, como discutimos al final de la sección previa.

Una propuesta para resolver los problemas de planitud y de horizonte a la vez es incluir, durante la época de radiación ($z > 3,500$), una fase de expansión acelerada en el universo temprano llamada *inflación cosmológica*. La primera consecuencia de tal periodo sería que $(aH)^{-1}$ decrezca, de tal forma que la curvatura del universo inicial sea diluida. Simultáneamente, si $(aH)^{-1}$ decrece, sería posible lograr que las regiones que aparentan hoy siempre haber estado en desconexión causal hayan tenido un traslape durante el periodo de expansión acelerada.

Como hemos visto, una forma de satisfacer $\ddot{a} > 0$ es permitir que la ecuación de estado del fluido perfecto que describe el contenido del universo esté regida por $\omega \approx -1$. Hemos discutido que esta situación ocurre de manera exacta cuando la energía oscura o de vacío domina el contenido del universo, pero no es la única opción. Desafortunadamente, por requerir elementos de teoría cuántica de campos, no discutiremos los detalles de los mecanismos inflacionarios en este texto. Baste decir que es requerido que el universo en los primeros instantes esté dominado por un campo cuántico llamado *inflatón*, el que sólo evoluciona en el tiempo, produciendo una expansión exponencial del universo, $a \propto e^{H_{\text{inf}} t}$ con $H_{\text{inf}} \approx \text{cte}$, y reduciendo los problemas de planitud y horizonte (entre otros) por un factor $e^{-H_{\text{inf}} \Delta t_{\text{inf}}}$, donde $\Delta t_{\text{inf}} = t_{\text{fin}} - t_{\text{ini}}$ es la duración de la fase inflacionaria del universo.

Existen diversos modelos de inflación cosmológica, actualmente contrastados con las observaciones, pero todos conducen a ciertas propiedades comunes. Para resolver los problemas cosmológicos, la duración de inflación debe satisfacer

$$\mathcal{N}_{\text{inf}} \equiv \ln \frac{a(t_{\text{end}})}{a(t_{\text{ini}})} = \int_{t_{\text{ini}}}^{t_{\text{fin}}} H_{\text{inf}} dt \approx 50 - 70, \quad (3.250)$$

donde \mathcal{N}_{inf} es conocido como el número de *e-folios* de inflación y corresponde a un crecimiento de aproximadamente 10^{26} veces en el factor de escala, iniciando cuando la edad del universo era alrededor de 10^{-34} s. Durante la duración de la inflación cosmológica, en caso de considerar que el universo estuvo caliente en sus inicios, éste se enfría de forma exponencial y el inflatón acumula una enorme cantidad de energía debido a su evolución. Al término de la inflación, toda la energía acumulada en el inflatón es liberada en forma de partículas elementales (conocidas) con energías ultrarrelativistas, que calientan nuevamente el universo, completando la época de radiación. Este periodo es conocido como *recalentamiento*.

Los detalles de esta fase también son tema de investigación moderna. Durante el periodo de inflación, pequeñas fluctuaciones de campos cuánticos pudieron haber sido magnificadas a tamaños clásicos, produciendo las pequeñas anisotropías de la CMB y las semillas de la estructura a grandes escalas que observamos.

3.5.7. Breve cronología cosmológica

En esta sección, hemos estudiado algunos de los aspectos más relevantes de la cosmología directamente a partir de la relatividad general, sin incorporar muchos elementos adicionales de física estadística y física de partículas. Sin embargo, un tratamiento exhaustivo de esta área de investigación moderna rebasa los objetivos de este texto. Con la finalidad de complementar nuestra discusión y como referencia, en la tabla 3.1 se presentan los principales eventos cosmológicos que, con base en diversos tipos de evidencia (teórica y experimental), hoy consideramos parte de la historia del cosmos.

La cronología puede dividirse en tres etapas con base en la forma en la que la evidencia ha sido acumulada. La primera etapa comprende el universo temprano, entre $t = 0$ y $t \approx 10^{-10}$ s. En esta etapa es donde existe mayor incertidumbre, ya que hasta ahora ningún experimento ni observación ha sido capaz de confirmar alguna de las hipótesis y conjeturas planteadas. Por esta razón, es adecuado decir que es la etapa con más incógnitas y también la más activa de la cosmología. Todos los eventos de este periodo son consideraciones emanadas de modelos de física más allá de la física convencional, aún bajo diseño e investigación. Salvo por la fase inflacionaria, se cree que la dinámica de la evolución del universo está dominada por la radiación.

Para empezar, se sospecha que la física por debajo del llamado *tiempo de Planck*, $t_{Pl} \equiv \sqrt{\hbar G_N / c^5} \sim 10^{-43}$ (que es la unidad de tiempo que se puede formar al combinar las constantes fundamentales de la naturaleza conocidas), es una mezcla de la relatividad general con la mecánica cuántica, proveyendo una forma de gravedad cuántica que aún no es posible descifrar completamente. En esta época, llamada frecuentemente *era de Planck*, algunos sospechan que el contenido del universo sostenía una dinámica similar a la descrita por la teoría de cuerdas o la gravedad cuántica por lazos. Por encima de este tiempo y hasta aproximadamente 10^{-36} s, se conjetura que el universo pudo haber evolucionado en un estado de vacío regido probablemente por campos de una teoría de gran unificación, en la que todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza se comportan como una sola gran fuerza. El campo del inflatón comienza a tener un peso importante en la evolución del universo alrededor de 10^{-34} s, cuando su energía cinética y potencial se combinan para dar lugar a una expansión casi-exponencial. Al término de la inflación, cuando el universo multiplicó su tamaño por un factor $\sim 10^{26}$ en apenas 10^{-32} s, los valores del campo del inflatón comienzan a oscilar, acumulando una enorme energía que es finalmente emitida al universo en forma de radiación ultra-energética. La radiación eleva la temperatura del universo hasta temperaturas tan altas como 10^{26} K, por lo que denominamos a este proceso

evento	tiempo	energía	ρ	
época de Planck	$< 10^{-43}$ s	$> 10^{18}$ GeV	?	
gran unificación	$\sim 10^{-36}$ s	$\sim 10^{16}$ GeV	?	
inflación	$\geq 10^{-34}$ s	$\leq 10^{15}$ GeV	ρ_{inf}	
recalentamiento	$\geq 10^{-32}$ s	$\leq 10^{13}$ GeV	ρ_r	
rompimiento de supersimetría	$\leq 10^{-10}$ s	> 4 TeV		
bariogénesis	$\leq 10^{-10}$ s	> 1 TeV		
rompimiento electrodébil	$\sim 10^{-10}$ s	~ 100 GeV	ρ_r	
confinamiento	$\sim 10^{-4}$ s	~ 100 MeV		
enfriamiento nucleónico	$\sim 10^{-2}$ s	~ 10 MeV		
desacoplamiento de neutrinos	~ 1 s	~ 1 MeV		
nucleosíntesis	~ 3 min	~ 100 keV		
				z
igualdad materia-radiación	$\sim 10^4$ años	~ 1 eV	$\rho_m = \rho_r$	$\sim 3, 365$
recombinación (CMB)	$\sim 380,000$ años	~ 0.1 eV	ρ_m	$\sim 1, 100$
época oscura	$4 \times 10^5 - 10^8$ años			> 11
reionización	$10^8 - 10^9$ años			$6 - 11$
formación de galaxias	$\sim 10^9$ años			~ 6
dominio de energía oscura	$\sim 8 \times 10^9$ años		ρ_Λ	~ 0.5
formación del sistema solar	$\sim 9 \times 10^9$ años			~ 0.45
hoy	$\sim 13.8 \times 10^9$ años	~ 1 meV		0

Cuadro 3.1: Cronología de eventos según el modelo Λ CDM o de la gran explosión. Los eventos del recuadro superior son hipotéticos y están basados en diversos modelos *más allá del modelo estándar* de partículas. Los eventos en el segundo recuadro se basan en la física de partículas ya verificada. Los eventos del recuadro inferior están basados en observaciones astrofísicas. ρ indica la *especie* que domina cada época: inflatón ρ_{inf} , materia ρ_m , radiación ρ_r y energía oscura ρ_Λ . z se refiere al corrimiento al rojo gravitacional debido a la expansión del universo.

recalentamiento. Las transformaciones continuas entre fotones y materia dan, a su vez, lugar a todas las partículas (y antipartículas) del modelo estándar de partículas elementales y, en caso de confirmarse, de los modelos supersimétricos. El universo continúa su expansión dominado por esa radiación, enfriándose paulatinamente. Poco antes de que el universo tenga 10^{-10} s de edad, ocurre el proceso de bariogénesis, en el que la violación del equilibrio termodinámico combinada con una mínima violación de conservación de carga eléctrica, paridad y de cantidad de materia, conduce al dominio de la materia sobre la antimateria.

La segunda etapa de evolución cosmológica está basada en la física de partículas conocida; esta etapa seguramente ocurrió cuando el universo tenía entre $t \approx 10^{-10}$ s y $t \approx 200$ s, y está dominada por partículas ultrarrelativistas, descritas como radiación. Entendemos los eventos de esta época bastante bien gracias a experimentos en colisionadores de partículas que permiten conocer la dinámica de las partículas elementales a muy altas temperaturas.

Suponiendo que la dinámica a altas energías no ha cambiado en la historia del universo, llegamos a una descripción precisa de lo que ocurrió.

Tras el proceso de bariogénesis, las abundantes partículas elementales continuaron sin masa hasta que el universo se enfrió lo suficiente para alcanzar una temperatura de alrededor de 10^{15} K a los 10^{-10} s de haberse iniciado la gran explosión. A esa temperatura ocurre el llamado mecanismo de Higgs, responsable de dotar con masa a todas las partículas elementales, salvo el fotón y los mediadores de las interacciones fuertes. Ya con masa, los quarks comienzan a combinarse hasta que, a los 10^{-4} s, con una temperatura de 10^{12} K, les es imposible aparecer libremente fuera de los llamados hadrones, entre los que dominan esencialmente una enorme cantidad de protones y neutrones. Las interacciones entre fotones, protones, neutrones, electrones y neutrinos son muy constantes, produciendo conversión de unas partículas en otras. Cuando el universo alcanza la edad de 1 s, la distancia entre una partícula y otra ya es lo suficientemente grande como para que los ligerísimos neutrinos escapen, dejando de interactuar con el resto del contenido del universo. Parte de esos neutrinos deberían ser detectables en nuestra época. Entre este momento y los 200 s, los protones y neutrones del universo se combinan para formar los primeros núcleos; además del hidrógeno, se forman los núcleos del deuterio, del ^3He , del ^4He y ^7Li en el proceso conocido como *nucleosíntesis de la gran explosión*. La radiación de este tipo, poblada de los primeros núcleos, electrones, neutrones libres y luz, sigue dominando todavía algún tiempo, hasta que el universo alcanza una edad de aproximadamente 10,000 años.

La última etapa en la historia cosmológica es la que conocemos gracias a las observaciones astrofísicas. Esta corresponde al periodo entre $t = 10,000$ años y $t_0 \sim 13.8 \times 10^9$ años. En esta etapa dos transiciones ocurren: la transición del dominio de la radiación a la materia y la transición de materia a energía oscura. La temperatura disminuye de 10^4 K a 2.73 K, haciendo de nuestro universo el lugar frío y casi vacío que conocemos hoy.

Alrededor de los 10,000 años, la radiación se ha enfriado hasta 10^4 K y la cantidad de materia ha aumentado tanto que se equilibra su contribución en la dinámica cosmológica. A esta fase se le llama periodo de *igualdad radiación-materia* y marca el inicio del dominio de la materia, un periodo en el que la expansión del universo es ligeramente más veloz que antes. Aún abundan protones, electrones y fotones en interacciones continuas, situación que dura hasta que el universo alcanza la edad de 380,000, en la que los protones y electrones se combinan para formar los primeros átomos de hidrógeno (*recombinación*), dejando escapar la radiación cósmica de fondo (CMB) con las propiedades de los fotones de ese momento. Son estos fotones la luz más vieja que somos capaces de detectar, la cual es descrita en el espectro de microondas como radiación de cuerpo negro, según discutimos en la sección 3.5.4.

Tras la liberación de la CMB, no hubo ninguna fuente de luz más que los átomos de hidrógeno. La luz emitida por las transiciones entre niveles de energía del hidrógeno es muy poco energética, por lo que es prácticamente inobservable. Debido a la ausencia de luz hasta que se empiezan a formar las primeras estrellas, al periodo que dura entre 380,000 y $150 \times$

10^6 años se le llama *época oscura*. Las primeras estrellas y cuásares se forman al concluir la época oscura mediante la acumulación gravitacional de grandes cantidades de hidrógeno, emitiendo fotones con suficiente energía para ionizar los átomos de hidrógeno libres en las cercanías de los astros. Como resultado de este proceso conocido como *reionización*, el contenido del universo se convierte en un plasma que perdura hasta que el universo alcanza la edad de 10^9 años. A esa edad cosmológica, las diferentes estrellas, regidas por concentraciones de materia oscura, comienzan a formar galaxias que poseen en sus núcleos las primeras estrellas muertas convertidas en agujeros negros. Las galaxias se expanden y distribuyen, atrayendo polvo estelar que formará cuerpos celestes sin brillo propio, tales como los planetas, planetoides, asteroides, etc. Hace casi 6×10^9 años, la disminución continua de ρ_m consiguió que la energía oscura comience a dominar; desde entonces la expansión del universo es cada vez más veloz. Aproximadamente mil millones de años más tarde se formó nuestro sistema solar y otros parecidos.

Ejercicios

3.1 Límite Newtoniano.

Suponga un espacio-tiempo Newtoniano con coordenadas cartesianas $x^a = (t, x^i)$. En el formalismo Newtoniano la métrica es plana, pero las partículas masivas sienten una fuerza generada por el potencial gravitacional $\phi(x)$ y la aceleración de una partícula masiva está dada por $\mathbf{a} = -\nabla\phi$.

- (a) Muestre que una partícula masiva en caída libre se mueve a lo largo de una curva $x^a = x^a(\lambda)$ que satisface

$$\frac{d^2 t}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 = 0.$$

- (b) De las ecuaciones anteriores identifique las componentes de la conexión Newtoniana (símbolos de Christoffel).
 (c) Utilizando los resultados del inciso anterior, deduzca que

$$R^j{}_{0k0} = -R^j{}_{00k} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^j \partial x^k}$$

y todas las demás componentes se anulan.

- (d) Analice las simetrías que deberían tener las componentes de R_{abcd} . ¿Puede la conexión Newtoniana ser obtenida a partir de una métrica?

3.2 Ecuaciones de Einstein y constante cosmológica.

La forma más general de las ecuaciones de campo de Einstein

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (3.251)$$

- (a) Si reescribimos (3.251) de la forma $G_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} + 8\pi T_{\mu\nu}$, podemos definir un tensor de energía-momento efectivo asociado a la constante cosmológica como $T_{\mu\nu}^\Lambda \equiv \Lambda g_{\mu\nu}/8\pi$. Muestre que

en ese caso la constante cosmológica se puede interpretar como un “fluido perfecto” uniforme con densidad de energía $\rho = \Lambda/8\pi$ y ecuación de estado $P = -\rho$. Es decir, la constante cosmológica se puede asociar con la *energía del vacío*.

- (b) ¿Qué significa físicamente que la presión del vacío P sea negativa?

3.3 Preguntas conceptuales.

Considere dos observadores fijos localizados cerca de un agujero negro de Schwarzschild de masa M . Un observador localizado en $r_1 = 3M$, emite un pulso de luz violeta ($\lambda = 400 \text{ nm}$) a un segundo observador localizado en $r_2 = 8M$. ¿De qué color es el pulso para el observador localizado en r_2 ? ¿Qué tipo de corrimiento al rojo se observaría si el segundo observador se localizara en el radio de Schwarzschild?

3.4 Solución de Schwarzschild.

La solución de Schwarzschild es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en el vacío que es estática y esféricamente simétrica. El elemento de línea está dado por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right].$$

- (a) Para la métrica anterior, encuentre (con un cálculo explícito) los 9 símbolos de Christoffel diferentes de cero.
- (b) Muestre que para una métrica $g_{\mu\nu}$ cuyas componentes son independientes de la coordenada x^0 , entonces $q_0 \equiv g_{0\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ es constante a lo largo de una trayectoria geodésica, i.e. muestre que se satisface

$$\frac{dq_0}{d\tau} = 0.$$

- (c) Considere nuevamente el caso particular de la métrica de Schwarzschild. Muestre que en el límite no relativista y para movimiento radial en un plano, en el punto $\theta = \pi/2$ y $\varphi = \varphi_0 = \text{cte}$, la cantidad conservada adopta la forma

$$m \left(g_{0\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \approx m - \frac{Mm}{r} + \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + \dots.$$

¿Puede identificar la cantidad física que se conserva?

- (d) Existe otra coordenada x^i de la que no dependen los elementos de la métrica de Schwarzschild. De acuerdo con los incisos anteriores, proponga la forma general de la cantidad conservada q_i (para algún i). Calcule explícitamente la expresión de q_i para la solución de Schwarzschild. ¿Con qué cantidad física está relacionada?

3.5 Vectores de Killing.

Un vector de Killing o campo vectorial de Killing ξ^μ es un vector sobre una variedad (pseudo-)Riemanniana que define un grupo de isometrías de la variedad, i.e. define transformaciones en la variedad que dejan invariante el intervalo y, por lo tanto, la métrica. Dada esta definición, cada ξ^μ corresponde a una simetría de la métrica. Un vector de Killing satisface la ecuación de Killing

$$\xi_{\mu;\nu} + \xi_{\nu;\mu} = 0,$$

de donde es posible concluir que a lo largo de curvas geodésicas la siguiente cantidad se conserva

$$p^\mu \xi_\mu = \text{cte.}$$

Consecuentemente, en relatividad general, los vectores de Killing permiten definir leyes de conservación (asociadas a simetrías del espacio-tiempo).

Determine los vectores de Killing para las cantidades conservadas del problema anterior.

3.6 Preguntas conceptuales.

- ¿En qué sistemas sometidos a la acción gravitacional es válida la relatividad especial?
- Un astrofísico reporta en un artículo con datos bastante precisos que la teoría de Einstein tiene un grave error porque predice resultados incorrectos para un objeto estelar cónico. Lo eligieron a usted como árbitro del artículo. ¿Considera que es un artículo aceptable o no? Justifique.
- ¿Cuáles son las diferencias principales entre un agujero negro de Schwarzschild y uno de Kerr?

3.7 Agujero negro de Schwarzschild.

La métrica de Schwarzschild está determinada por el intervalo (3.71). Definimos aquí $A(r) = (1 - \frac{2M}{r})$.

- Como se determinó en el ejercicio 3.5, las cantidades $\epsilon = A(r)dt/d\tau$ y $\ell = -r^2 \sin^2 \theta d\varphi/d\tau$ son constantes de movimiento. Debido a una simetría adicional, el movimiento está confinado a un plano, que puede ser elegido como el plano ecuatorial $\theta = \pi/2$. Escriba ds^2 en términos de ϵ , ℓ , $A(r)$, $(dr/d\tau)^2$ y $d\tau$.
- Muestre que $e \equiv g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\tau}$ es constante a lo largo de una geodésica.
- Un observador cae radialmente hacia un agujero negro de Schwarzschild con velocidad inicial $dr/d\tau = u_0$ a una distancia R del centro del agujero negro. Expresé la constante ϵ en esa trayectoria en términos de M , R y u_0 .
- Calcule la 4-velocidad U^μ del observador cayendo, como función de ϵ , R y M .
- ¿Cuál es el tiempo propio que le toma al observador alcanzar el horizonte en $r = 2M$? (Por simplicidad, considere $\epsilon = 1$.)

3.8 Órbitas luminosas en un agujero negro de Schwarzschild.

El movimiento de fotones en las cercanías de un agujero negro estático puede determinarse a partir del intervalo de Schwarzschild (3.71), imponiendo $ds^2 = d\tau^2 = 0$, y analizando las ecuaciones de conservación, como hemos hecho en el texto, o las trayectorias geodésicas. Exploremos aquí la segunda opción.

- Muestre que la ecuación radial de la geodésica para una órbita *circular* en el espacio-tiempo de Schwarzschild conduce a la dinámica angular dada por

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{r_s}{2r^3 \sin^2 \theta},$$

donde $r_s = 2M$ denota el llamado radio de Schwarzschild.

2. A partir de $d\tau = 0$, muestre que se satisface

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(1 - \frac{r_s}{r}\right).$$

Concluya que el radio de las órbitas circulares tienen radio $3r_s/2$.

3.9 Movimiento uniformemente acelerado, *coordenadas de Rindler* y agujeros negros.

Chana se sube a una nave espacial y parte de la Tierra desplazándose rectilíneamente con aceleración propia $\alpha \sim 10 \text{ m/s}^2$.

- Encuentre cuánto tiempo medirá un observador terrestre que le toma a la nave alcanzar la velocidad $0.999c$. ¿Cuánto tiempo mide Chana?
- ¿Cuánto tiempo tardará la nave en viajar 30,000 años luz para un observador terrestre y para Chana? ¿Qué tanto envejecería Chana si viajara a la galaxia Andrómeda, a 2 millones de años luz de la Tierra?
- Con base en las ecuaciones obtenidas para los tiempos y la posición de objetos acelerados, se definen las *coordenadas de Rindler* en dimensión $1 + 1$ como

$$t = \frac{1}{c}\rho \sinh(\alpha\xi), \quad x = \rho \cosh(\alpha\xi), \quad \text{coordenadas de Rindler} \quad (3.252)$$

las cuales representan el sistema coordenado usado por un observador acelerado con aceleración propia α .

Demuestre que el elemento de línea de las coordenadas de Rindler es

$$ds^2 = \alpha^2 \rho^2 d\xi^2 - d\rho^2. \quad (3.253)$$

- Considere trayectorias puramente radiales en un espacio de Schwarzschild (con $d\theta^2 = d\varphi^2 = 0$). Demuestre que muy cerca del horizonte de sucesos de un agujero negro de Schwarzschild, i.e. cuando $r \approx 2M$, las coordenadas de Rindler son una buena aproximación a las coordenadas de Schwarzschild. ¿Cuánto vale la aceleración propia en este caso? (*Sugerencia: realice el cambio de variable $\sigma^2/8M = r - 2M$, de tal manera que cuando $r \rightarrow 2M$, entonces $\sigma \rightarrow 0$. Quizá le sea útil la aproximación $(Ax)^2/(1 + (Ax)^2) \approx (Ax)^2$.)*)

3.10 Solución de De Sitter.

Considere las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica distinta de cero, tal que

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0.$$

- Encuentre el escalar de curvatura R en este caso.
- En unidades naturales, considere una métrica con simetría esférica, i.e. una métrica de la forma

$$ds^2 = a(r)dt^2 - b(r)dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Encuentre las cuatro componentes diferentes de cero del tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$.

- (c) Resuelva las ecuaciones de Einstein con constante cosmológica y muestre que

$$ds^2 = (1 - \Lambda r^2/3)dt^2 - (1 - \Lambda r^2/3)^{-1}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\phi^2. \quad (3.254)$$

A esta solución se le conoce como *espacio-tiempo de De Sitter*.

3.11 Dualidad ds^4/M_5 .

La métrica (o espacio-tiempo) de *De Sitter* para dimensión $d = 3 + 1$, cuyo elemento de línea está dado por la ecuación (3.254), representa un espacio-tiempo esféricamente simétrico que satisface las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío con constante cosmológica Λ y que tiene centro en $r = 0$ (aquí denotaremos la coordenada temporal por T).

Considere ahora una hipersuperficie **4-dimensional** Σ descrita por la ecuación

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = a^2, \quad (3.255)$$

e inmersa en un espacio Euclídeo **5-dimensional** con elemento de línea

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + du^2 + dv^2. \quad (3.256)$$

- (a) ¿Qué objeto geométrico es la hipersuperficie Σ ?
- (b) Aplique la rotación de *Wick* $v \rightarrow it$ seguida de la *inversión métrica* $g_{\mu\nu} \rightarrow -g_{\mu\nu}$ en el elemento de línea (3.256). ¿Qué espacio representa este elemento de línea? Claramente, la inversión métrica no afecta la superficie Σ . ¿Cuál es el efecto de la rotación de Wick en Σ ?
- (c) Considere ahora adicionalmente el cambio (parcial) de coordenadas (y, z, u) a coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) , i.e. e.g. $y = r \sin\theta \cos\phi$, etc.. ¿Cómo cambia la ecuación de la hipersuperficie (3.255) bajo este cambio de coordenadas? ¿Cuál es ahora el elemento de línea?
- (d) Por último, sustituya $a^2 - r^2 = X^2$, de tal manera que $dX^2 = (a^2 - r^2)^{-1}r^2dr^2$, y aplique el cambio de coordenadas $x = X \cosh(T/a)$ y $t = X \sinh(T/a)$ (es sencillo verificar que, salvo por un renombramiento de las constantes, estas son las coordenadas de Rindler, mencionadas en el ejercicio 3.9. Verifique que el elemento de línea obtenido es el mismo que el presentado en (3.254). ¿Cuál es el valor de la constante a en este caso? *Sugerencia: calcule $dt^2 - dx^2$ en términos de T, X, dT^2 y dX^2 .*

3.12 Métrica de Friedmann–Robertson–Walker y ecuación de Friedmann.

El elemento de línea de Friedmann–Robertson–Walker (FRW) se emplea para describir modelos cosmológicos simples (homogéneos e isotrópicos) y está dado por la ecuación (3.177), donde $a(t)$ que es una función que depende sólo del tiempo es el llamado *factor de escala* y tiene unidades de longitud. k es una constante que determina si el universo es cerrado ($k = +1$), plano ($k = 0$) o abierto ($k = -1$). Claramente, las coordenadas usadas son $\{x^0 = t, x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \phi\}$.

Suponga que el contenido del universo está dado por el tensor de energía–momento (3.180), donde la densidad de energía ρ y la presión P dependen sólo de t y satisfacen la ecuación de estado (2.162).

- (a) Utilizando la expresión genérica para el elemento de línea, $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$, halle a partir de la métrica de FRW las componentes de la métrica.
- (b) Determine los símbolos de Christoffel. Para simplificar la notación, a las derivadas de a con respecto a t denótelas como \dot{a} .

- (c) Muestre que las componentes no nulas del tensor de Ricci son R_{00} y R_{ij} (donde $i, j = 1, 2, 3$) y que éstas están dadas por

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}, \quad R_{ij} = -\left(\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{k}{a^2}\right)g_{ij},$$

donde \ddot{a} denota la segunda derivada de a respecto a t .

- (d) Utilizando las expresiones del inciso anterior y la métrica, muestre que el escalar de curvatura, o escalar de Ricci, está dado por

$$R = -6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2}\right).$$

- (e) Con los resultados anteriores halle las componentes no nulas del tensor de Einstein $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$.
- (f) Escriba explícitamente las ecuaciones de Einstein $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$.
- (g) Una de las ecuaciones de Einstein que debió obtener en el inciso anterior es

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho.$$

Muestre que en términos del parámetro de Hubble, definido como $H \equiv \dot{a}/a$ y del cociente $\Omega \equiv \rho/\rho_c$, donde ρ es la densidad energética del contenido del universo y $\rho_c \equiv 3H^2/(8\pi)$ la llamada densidad crítica del universo, la ecuación anterior se puede escribir como

$$\frac{k}{H^2 a^2} = \Omega - 1,$$

que es conocida como la *ecuación de Friedmann*.

3.13 Fluido perfecto en el límite Newtoniano.

Como se vio en un problema anterior, la ecuación de la geodésica se puede considerar como una generalización de la segunda ley de Newton. No obstante, podemos preguntarnos qué es lo que ocurre en el sentido contrario, es decir, ¿qué ocurre con la ecuación geodésica en el límite Newtoniano?

- (a) Para $\lambda = \tau$, reescriba la ecuación de la geodésica en términos de la velocidad propia U y utilice la regla de la cadena para obtener la forma covariante de la ecuación geodésica

$$(U^\mu{}_{,\lambda} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\lambda}U^\alpha)U^\lambda = 0. \quad (3.257)$$

- (b) En el límite Newtoniano (con rapidez local $u \ll c$ y $\tau = t$), obtenga la expresión para

$$\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau}.$$

- (c) Utilice la aproximación de campo débil,

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon h_{\mu\nu},$$

donde $h_{\mu\nu}$ es una pequeña desviación de la métrica independiente del tiempo y $\varepsilon \ll 1$ para mostrar que (3.257) se reduce a

$$(U^\mu{}_{,t} + U^\mu{}_{,i}v^i) + \varepsilon\eta^{\mu\sigma}(\phi)_{,\sigma} = 0.$$

- (d) Muestre en este límite para la componente espacial $\mu = i$ que la ecuación anterior implica la ecuación de Euler para un fluido en presencia del potencial gravitacional ϕ .

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \nabla(\varepsilon\phi) = 0.$$

3.14 Propiedades de las ondas gravitacionales.

Existen muchas similitudes entre el electromagnetismo y la gravedad. En particular, las ecuaciones que relacionan al campo con sus fuentes, son ecuaciones de Poisson; para el electromagnetismo se tiene

$$\square A^\nu = 4\pi J^\nu,$$

donde J^ν es la 4-corriente electromagnética. En el caso gravitacional se tiene, en el límite de campo débil,

$$\square\phi^{\mu\nu} = -16\pi T^{\mu\nu} \quad \text{o} \quad \partial_\alpha \partial^\alpha (h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h) = -16\pi T^{\mu\nu}.$$

Recuerde que la métrica es $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con η la métrica de Minkowski y el campo $\phi^{\mu\nu}$ está definido por

$$\phi^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}h \rightarrow h^{\mu\nu} = \phi^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\phi,$$

donde ϕ y h representan las trazas de $\phi^{\mu\nu}$ y $h^{\mu\nu}$. El campo satisface la condición de norma $\partial_\mu \phi^{\mu\nu} = 0$.

Tanto las ecuaciones de Maxwell como las ecuaciones linealizadas de Einstein tienen soluciones dadas como ondas propagándose a la velocidad de la luz. La solución de onda plana *en el vacío* es

$$\phi^{\mu\nu} = A^{\mu\nu} \cos k_\alpha x^\alpha,$$

donde $A^{\mu\nu}$ y k_α son las componentes de un tensor y un vector constante, respectivamente, llamados tensor de polarización y vector de onda.

- (a) Muestre que la solución de onda plana es solución a $\square\phi^{\mu\nu} = 0$ siempre y cuando

$$k_\alpha k^\alpha = 0 \quad \text{y} \quad A^{\mu\nu} k_\mu = 0. \quad (3.258)$$

Esto quiere decir que $k^0 = \omega = k$, donde $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}$, lo que nos dice que la onda gravitacional se propaga a la velocidad de la luz.

- (b) Sin pérdida de generalidad, suponga que la onda se mueve en la dirección x^3 , es decir $(k^\alpha) = (\omega, 0, 0, \omega)$. Muestre que la condición (3.258) y el requisito de que $h^{\mu\nu}$ sea simétrico implica que sólo existen 6 polarizaciones independientes.
- (c) Dos de las polarizaciones independientes pueden ser

$$(A_+^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A_\times^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Muestre que estas polarizaciones no tienen traza y son transversales a la dirección de propagación. La afirmación aquí es que estas dos polarizaciones son las únicas entre las polarizaciones independientes que pueden transportar energía y momento.

Apéndice A

Ecuación de la geodésica utilizando el principio de mínima acción

Consideremos la curva $x^\mu(\lambda)$ en un espacio-tiempo arbitrario, con tiempo propio definido como

$$c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (\text{A.1})$$

La 4-velocidad a lo largo de la curva está dada por

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (\text{A.2})$$

y en una parametrización (afín) arbitraria, la tangente es $T^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. El tiempo propio a lo largo de la curva está dado por

$$c\tau = \int_0^\tau \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} = \int_0^\tau \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} d\lambda. \quad (\text{A.3})$$

Las curvas a lo largo de las cuales $c\tau$ o, equivalentemente, la longitud propia $s = c\tau$, es *extremal* pueden encontrarse fijando $\delta\tau = 0$, es decir, calculando la derivada funcional $\frac{\delta\tau}{\delta x^\alpha}$ y extremizándola.

$$\begin{aligned} c \frac{\delta\tau}{\delta x^\alpha} &= \int_0^\tau \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \frac{\delta}{\delta x^\alpha} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right) d\lambda \\ &= \int_0^\tau \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \left(\frac{\delta g_{\mu\nu}}{\delta x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{d}{d\lambda} \frac{\delta x^\mu}{\delta x^\alpha} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \frac{\delta x^\nu}{\delta x^\alpha} \right) d\lambda \\ &= \int_0^\tau \frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} \left(g_{\mu\nu,\beta} \frac{\delta x^\beta}{\delta x^\alpha} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{d}{d\lambda} \frac{\delta x^\mu}{\delta x^\alpha} \frac{dx^\nu}{d\lambda} + g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{d}{d\lambda} \frac{\delta x^\nu}{\delta x^\alpha} \right) d\lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Integrando por partes los últimos dos términos, bajo la suposición de que x^μ y $g_{\mu\nu}$ se anulan para λ muy grande (en las fronteras de λ), encontramos

$$c \frac{\delta\tau}{\delta x^\alpha} = \int_0^\tau \frac{d\lambda}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} g_{\mu\nu,\beta} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \frac{\delta x^\beta}{\delta x^\alpha} - \int_0^\tau d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\lambda} \right] \frac{\delta x^\mu}{\delta x^\alpha} - \int_0^\tau d\lambda \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{1}{2\sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}}} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right] \frac{\delta x^\nu}{\delta x^\alpha}. \quad (\text{A.5})$$

Escogemos ahora $\lambda = \tau \implies \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}} = \sqrt{g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu} = c$, lo que implica

$$\begin{aligned} c \frac{\delta\tau}{\delta x^\alpha} &= \frac{1}{2c} \int_0^\tau d\tau' \left(g_{\mu\nu,\beta} U^\mu U^\nu \frac{\delta x^\beta}{\delta x^\alpha} - \frac{d}{d\tau'} (g_{\mu\nu} U^\nu) \frac{\delta x^\mu}{\delta x^\alpha} - \frac{d}{d\tau'} (g_{\mu\nu} U^\mu) \frac{\delta x^\nu}{\delta x^\alpha} \right) \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\tau d\tau' \left(g_{\mu\nu,\beta} U^\mu U^\nu - \frac{d}{d\tau'} (g_{\beta\nu} U^\nu) - \frac{d}{d\tau'} (g_{\mu\beta} U^\mu) \right) \frac{\delta x^\beta}{\delta x^\alpha} \\ &= \frac{1}{2c} \int_0^\tau d\tau' \left(g_{\mu\nu,\beta} U^\mu U^\nu - g_{\beta\nu,\mu} U^\mu U^\nu - g_{\beta\nu} \frac{dU^\nu}{d\tau'} - g_{\mu\beta,\nu} U^\nu U^\mu - g_{\mu\beta} \frac{dU^\mu}{d\tau'} \right) \frac{\delta x^\beta}{\delta x^\alpha} \\ &\stackrel{!}{=} 0. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Para extremizar esta derivada, el integrando debe ser cero, lo cual ocurre para

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (-g_{\nu\mu,\beta} + g_{\beta\nu,\mu} + g_{\mu\beta,\nu}) U^\mu U^\nu + \frac{1}{2} g_{\beta\nu} \frac{dU^\nu}{d\tau} + \frac{1}{2} g_{\mu\beta} \frac{dU^\mu}{d\tau} &= 0 \\ \iff g^{\alpha\beta} \left(g_{\beta\mu} \frac{dU^\mu}{d\tau} + \frac{1}{2} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}) U^\mu U^\nu \right) &= 0 \\ \iff \frac{dU^\alpha}{d\tau} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (g_{\mu\beta,\nu} + g_{\beta\nu,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}) U^\mu U^\nu &= 0 \\ U^\mu U^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} U^\mu U^\nu &= 0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

La última ecuación coincide con la ecuación de la geodésica. Entonces, hemos obtenido que la ecuación de la geodésica describe la trayectoria a lo largo de la cual el tiempo y longitud propia son extremales.

Apéndice B

$R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ es tensor

Como se dijo anteriormente, $R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}$ son las componentes de un tensor y, por lo tanto, deben transformarse apropiadamente bajo difeomorfismos, de acuerdo a

$$R^{\alpha'}{}_{\beta'\mu'\nu'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}} \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} R^\alpha{}_{\beta\mu\nu}.$$

Para demostrar que es así, empecemos por la propiedad de transformación de la conexión afín, ecuación (2.241),

$$\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha}, \quad (\text{B.1})$$

lo que puede resolverse para la segunda derivada como

$$\frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\nu \partial x^\alpha} = - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu}, \quad (\text{B.2})$$

donde hemos multiplicado por $\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}$ y $\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu}$ en la izquierda y realizado las sumas de (B.1).

Ahora podemos obtener una derivada de (B.2) con respecto de x^λ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x^{\mu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu \partial x^\alpha} &= \frac{\partial^2 x^{\mu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\mu} \Gamma^\mu{}_{\alpha\nu} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \Gamma^\gamma{}_{\alpha\nu,\lambda} \\ &\quad - \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha'}}{\partial x^\lambda \partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu} \right) \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu',\lambda'}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

El último término se obtuvo usando la regla de la cadena porque $\Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'}$ solamente depende de las componentes primadas; por lo tanto,

$$\frac{\partial}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'} = \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\beta'}} \Gamma^{\mu'}{}_{\alpha'\nu'}. \quad (\text{B.4})$$

La ecuación (B.3) puede reescribirse usando (B.2) como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x^{\mu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu \partial x^\alpha} &= \left(\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\gamma} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} \right) \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} + \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu,\lambda} \\ &- \left(\frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\tau'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\alpha'}_{\lambda'\tau'} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} \Gamma^\beta_{\lambda\nu} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\gamma'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\nu'}_{\lambda'\gamma'} \right) \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'} \\ &- \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu',\lambda'}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Renombrando índices contraídos en (B.5) y factorizando términos similares, encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x^{\mu'}}{\partial x^\lambda \partial x^\nu \partial x^\alpha} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} (\Gamma^\rho_{\lambda\gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\nu,\lambda}) - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu',\lambda'} - \Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\lambda'} \Gamma^{\mu'}_{\gamma'\nu'} - \Gamma^{\gamma'}_{\nu'\lambda'} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\gamma'} \right) \\ &- \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\gamma_{\lambda\alpha} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \Gamma^\gamma_{\lambda\nu} \right) \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'}. \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Permutando los índices λ y α de (B.6), el lado izquierdo no cambia, pero el lado derecho se ve ligeramente modificado a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 x^{\mu'}}{\partial x^\alpha \partial x^\nu \partial x^\lambda} &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} (\Gamma^\rho_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\lambda\nu} + \Gamma^\rho_{\lambda\nu,\alpha}) - \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \left(\Gamma^{\mu'}_{\lambda'\nu',\alpha'} - \Gamma^{\gamma'}_{\lambda'\alpha'} \Gamma^{\mu'}_{\gamma'\nu'} - \Gamma^{\gamma'}_{\nu'\alpha'} \Gamma^{\mu'}_{\lambda'\gamma'} \right) \\ &- \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\alpha} \Gamma^\gamma_{\lambda\nu} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \Gamma^\gamma_{\alpha\lambda} + \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\lambda} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} \right) \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\gamma} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu'}. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Restando (B.6)–(B.7) obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\rho} (\Gamma^\rho_{\lambda\gamma} \Gamma^\gamma_{\alpha\nu} + \Gamma^\rho_{\alpha\nu,\lambda} - \Gamma^\rho_{\alpha\gamma} \Gamma^\gamma_{\lambda\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu,\alpha}) \\ &- \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \left(\Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu',\lambda'} - \Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\lambda'} \Gamma^{\mu'}_{\gamma'\nu'} - \Gamma^{\gamma'}_{\nu'\lambda'} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\gamma'} - \Gamma^{\mu'}_{\lambda'\nu',\alpha'} + \Gamma^{\gamma'}_{\alpha'\lambda'} \Gamma^{\mu'}_{\gamma'\nu'} + \Gamma^{\gamma'}_{\nu'\alpha'} \Gamma^{\mu'}_{\lambda'\gamma'} \right), \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde los términos subrayados se cancelan. Notemos que los términos en (B.6) y (B.7) con productos de Γ y Γ' también se cancelan. Finalmente reescribiendo el último paréntesis y multiplicando por los factores apropiados de la inversa de la matriz Jacobiana, obtenemos

$$\begin{aligned} R^{\mu'}_{\nu'\lambda'\alpha'} &= \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\nu',\lambda'} - \Gamma^{\gamma'}_{\nu'\lambda'} \Gamma^{\mu'}_{\alpha'\gamma'} - \Gamma^{\mu'}_{\lambda'\nu',\alpha'} + \Gamma^{\gamma'}_{\nu'\alpha'} \Gamma^{\mu'}_{\lambda'\gamma'} \\ &= \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} R^\mu_{\nu\lambda\alpha}, \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

que es justo lo que se quería demostrar.

Apéndice C

Ecuaciones de Einstein y la acción de Einstein-Hilbert

Las ecuaciones de campo de Einstein pueden obtenerse mediante el principio variacional, como en el apéndice A, a partir de la llamada *acción de Einstein-Hilbert*, dada por

$$S = -\frac{1}{2\kappa} \int dx^4 \sqrt{-|g|} (g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} + 2\Lambda) - \int dx^4 \sqrt{-|g|} \mathcal{L}_M, \quad (\text{C.1})$$

con constante cosmológica Λ . Aquí $R_{\alpha\beta}$ denota las componentes del tensor de Ricci (2.329) y $g^{\alpha\beta}$ las componentes del tensor métrico inverso; $\kappa = 8\pi$ en unidades naturales, $|g|$ es el determinante de la métrica, y \mathcal{L}_M es la densidad Lagrangiana que describe la materia del sistema que depende, en general, de campos que no aparecen en la primera integral. Como explicamos en la sección 2.10, el término $\sqrt{-|g|}$ es requerido para que la integral sea covariante relativista, donde el signo negativo surge del hecho de que, en el espacio-tiempo, la métrica corresponde a un producto escalar que no es positivo-definido.

El principio variacional establece que las ecuaciones de movimiento pueden obtenerse extremizando la acción, es decir, cuando se satisface

$$\delta S = 0. \quad (\text{C.2})$$

Aplicando esta condición a la acción de Einstein-Hilbert (C.1) y considerando que la parte relevante de la variación de la acción es la proporcional a la del campo gravitacional, $\delta g_{\mu\nu}$, obtenemos

$$\int dx^4 \sqrt{-|g|} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta \sqrt{-|g|}}{\delta g_{\mu\nu}} (R + 2\Lambda) + \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} R_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} + \kappa T^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (\text{C.3})$$

donde hemos usado la definición del escalar de Ricci (2.330) y la de las componentes del

tensor de energía-momento, en términos de la densidad Lagrangiana,

$$T^{\mu\nu} \equiv \frac{2}{\sqrt{-|g|}} \frac{\delta(\sqrt{-|g|}\mathcal{L}_M)}{\delta g_{\mu\nu}}. \quad (\text{C.4})$$

Empleando el resultado (2.223) para la derivada del determinante de la métrica, obtenemos que la variación en el primer sumando está dada por

$$\frac{\delta\sqrt{-|g|}}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{1}{2\sqrt{-|g|}} \frac{\delta|g|}{\delta g_{\mu\nu}} = -\frac{|g|g^{\mu\nu}}{2\sqrt{-|g|}} = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\sqrt{-|g|}. \quad (\text{C.5})$$

Por otra parte, variando la identidad (2.63), $g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, encontramos que

$$\delta(g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma}) = \delta g^{\alpha\beta}g_{\beta\gamma} + g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\gamma} = 0, \quad (\text{C.6})$$

lo que conduce a

$$\delta g^{\alpha\eta} = -g^{\alpha\beta}\delta g_{\beta\gamma}g^{\gamma\eta} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = -g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta}. \quad (\text{C.7})$$

Sustituyendo nuestros resultados (C.5) y (C.7) en (C.3) y (C.4), podemos simplificar la variación de la acción,

$$\int dx^4 \sqrt{-|g|} \delta g_{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(R + 2\Lambda) - R^{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} + \kappa T^{\mu\nu} \right] = 0, \quad (\text{C.8})$$

y la expresión del tensor de energía-momento,

$$T^{\mu\nu} = 2 \frac{\delta \mathcal{L}_M}{\delta g_{\mu\nu}} - g^{\mu\nu} \mathcal{L}_M. \quad (\text{C.9})$$

Por último, calculamos la variación del tensor de Ricci. Para lograrlo, lo expresamos en términos de las componentes del tensor de Riemann, mediante $R_{\alpha\beta} = R^{\gamma}_{\alpha\gamma\beta}$, y empleamos la expresión de las componentes del tensor de Riemann en términos de la conexión de Christoffel (2.309). De esta forma, encontramos que

$$\begin{aligned} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} &= \left(\frac{\delta \Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\gamma} - \frac{\delta \Gamma^{\gamma}_{\eta\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} - \Gamma^{\gamma}_{\eta\beta} \frac{\delta \Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} \\ &\quad - \left(\frac{\delta \Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} \right)_{,\beta} + \frac{\delta \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma}}{\delta g_{\mu\nu}} \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} + \Gamma^{\gamma}_{\eta\gamma} \frac{\delta \Gamma^{\eta}_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}}. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Por otro lado, las derivadas covariantes de las variaciones $\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ y $\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma}$ se pueden escribir mediante (2.213) como

$$\begin{aligned}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta;\gamma} &= \delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta,\gamma} + \Gamma^\gamma_{\eta\gamma}\delta\Gamma^\eta_{\alpha\beta} - \Gamma^\eta_{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\gamma_{\eta\beta} - \Gamma^\eta_{\gamma\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\eta}, \\ \delta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma;\beta} &= \delta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma,\beta} + \Gamma^\gamma_{\eta\beta}\delta\Gamma^\eta_{\alpha\gamma} - \Gamma^\eta_{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\eta\gamma} - \Gamma^\eta_{\gamma\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\eta}.\end{aligned}\quad (\text{C.11})$$

Recordando que la métrica conmuta con la derivada covariante, entonces

$$g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta;\gamma} = D_\gamma \left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \right) = D_\gamma \left(g^{\alpha\beta} \frac{\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} \right). \quad (\text{C.12})$$

Esta información aplicada a ambas variaciones en (C.11) y combinada con la variación del tensor de Ricci (C.10), conduce a

$$g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} \delta g_{\mu\nu} = D_\gamma \left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} \right) - D_\beta \left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\gamma} \right) = D_\gamma \left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma}\delta\Gamma^\beta_{\alpha\beta} \right). \quad (\text{C.13})$$

Esta expresión implica que el tercer término de (C.8) se anula,

$$\int dx^4 \sqrt{-|g|} \delta g_{\mu\nu} g^{\alpha\beta} \frac{\delta R_{\alpha\beta}}{\delta g_{\mu\nu}} = 0, \quad (\text{C.14})$$

porque se trata de una derivada total y, como tal, de un término de superficie que se anula si consideramos la frontera del espacio-tiempo al infinito.

Finalmente, notamos que para que la variación de la acción (C.8) sea cero para cualquier $\delta g_{\mu\nu}$, es preciso que se satisfaga

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu} (R + 2\Lambda) = \kappa T^{\mu\nu}, \quad \text{ecuaciones de campo de Einstein} \quad (\text{C.15})$$

con $T^{\mu\nu}$ dado por (C.9), que coincide justamente con las ecuaciones de campo de Einstein.

Índice alfabético

- 1-forma, 73
 - componentes de, 73
 - gradiente, 75
- 4-fuerza, 24
 - inercial, 124
- 4-momento, 24
- 4-vector de onda, 26
- 4-vectores, 23
- 4-velocidad, 23

- aberración de Bradley, 53
- acción de Einstein-Hilbert, 235
- aceleración propia, 24
- adición relativista de velocidades, 23, 24
- afín
 - parámetro, 124
 - transformación, 124
- agujero blanco, 181
- agujero de gusano, 181
- agujero negro
 - de Kerr, 183
 - de Schwarzschild, 176

- Bianchi, identidad de, 93, 96
 - geométrica, 135
- big bang, 198
- Birkhoff, teorema de, 168
- Bradley, aberración de, 53

- campo escalar, 75
- causalidad, 16, 36
- centro de inercia, 47
- Chandrasekhar, límite de, 182

- Christoffel, símbolos de, 106
 - como función de la métrica, 110
 - simetría, 110
- CMB, 209, 211, 212, 214
- conexión, 119
- conexión de Levi-Civita, 119
- configuración estándar, 5
- conservación de energía-momento, 101, 115
- constante de Hubble, 205
- continuidad, ecuación de, 57, 92
 - en cosmología, 202
- contracción de índices, 72, 88
- contracción de Lorentz, 36
- contracción de Lorentz-FitzGerald, 4
- coordenada cíclica, 138, 171
- coordenadas de Kruskal-Szekeres, 178
- coordenadas de Rindler, 227
- corrimiento al rojo, 51
 - cosmológico, 204
 - gravitacional, 156, 157, 169
- cosmología, 198
- covariante
 - derivada de un vector, 107
 - divergencia de un vector, 107
 - ecuación, 115
 - Laplaciano de un vector, 108
 - notación, 55, 90, 115
- cuerpo negro, radiación de, 212
- curva geodésica, 117, 123

- De Sitter, espacio-tiempo de, 228
- deflexión gravitacional de la luz, 185
- delta de Kronecker, 71

- densidad crítica, 200
 densidad de carga, 60
 densidad de curvatura, 209
 densidad de masa, 99
 densidad tensorial, 143
 derivada covariante
 de vectores, 107
 desaceleración, parámetro de, 207
 diagrama de Kruskal, 179
 difeomorfismo, 70
 dilatación temporal, 20
 diagrama de espacio-tiempo, 31
 Doppler, efecto
 longitudinal, 50
 transversal, 51
 dual de Hodge, 96, 144, 146

 ecuación de continuidad, 57, 92
 en cosmología, 202
 ecuación de estado de fluido perfecto, 100
 ecuación de Friedmann, 200, 229
 ecuación de Killing, 138
 ecuación de Klein-Gordon, 54
 ecuación de Poisson, 160
 ecuación de Saha, 214
 ecuación de Schrödinger, 54
 ecuaciones de campo de Einstein, 136, 162, 237
 ecuaciones de Einstein-Maxwell, 182
 ecuaciones de Euler-Lagrange, 151
 edad del universo, 208, 211
 efecto Doppler
 longitudinal, 50
 transversal, 51
 Einstein
 ecuaciones de campo de, 237
 Einstein, ecuaciones de campo de, 136, 162
 Einstein-Maxwell, ecuaciones de, 182
 Einstein-Rosen, puentes de, 181
 Einstein-Hilbert, acción de, 235
 enana blanca, 182

 energía oscura, 202
 energía-momento
 conservación de, 62, 101, 115
 tensor de, 99, 236
 tensor electromagnético de, 101
 época de materia, 213
 época de radiación, 213
 ergosfera, 183
 escalar de Lorentz, 27
 escalar de Ricci, 135
 espacio Euclídeo, 102
 espacio tangente, 118
 espacio-tiempo de De Sitter, 228
 espacio-tiempo, 16
 diagramas Galileanos, 7
 estrella de neutrones, 182
 éter, 2
 Euler-Lagrange, ecuaciones de, 151
 experimento de Michelson-Morley, 2

 factor de escala, 199
 factor de Lorentz, 3, 14
 Faraday, tensor de, 91
 Feynman-Stückelberg, interpretación de, 59, 61
 fluido perfecto, 97, 148
 ecuación de estado, 100
 Friedmann, ecuación de, 200, 229
 Friedmann-Robertson-Walker, espacio-tiempo de, 199, 228
 función de masa, 165, 167

 Galileo
 grupo de, 6
 principio de relatividad, 1, 4
 geodésica, 117, 123
 ecuación, 123, 170
 gradiente, 75
 gran explosión, 198
 gravedad linealizada, 192
 grupo de Galileo, 6

- grupo de holonomía, 127
- grupo de Poincaré, 45, 142
- Hilbert, norma de, 193
- Hodge, dual de, 96, 144, 146
- holonomía, grupo de, 127
- horizonte
 - cosmológico, 216
 - de eventos (agujeros negros), 175, 178
- horizonte de Hubble, 219
- Hubble
 - constante de, 205
 - horizonte de, 219
 - ley de, 205
 - parámetro de, 200
 - radio de, 219
- identidad de Bianchi, 93, 96
 - geométrica, 135
- índice mudo, 72
- inflación cosmológica, 205, 219
- integral covariante, 144
- intervalo, 18, 43, 78
 - invariancia, 20
 - tipos, 19
- intervalo de Schwarzschild, 168
- isometría, 136
- Kerr, métrica de, 183
- Killing
 - ecuación de, 138
 - vector de, 138
- Killing, vector de
 - en espacio-tiempo plano, 139
- Klein-Gordon, ecuación, 54
 - límite no relativista, 56
 - notación covariante, 55
- Kronecker, delta de, 71
- Kruskal
 - coordenadas de, 178
 - diagrama de, 179
- Kruskal-Szekeres, coordenadas de, 178
- Levi-Civita, símbolo de, 45, 142
- ley de Hubble, 205
- ley de Planck, 212
- límite de Chandrasekhar, 182
- límite Newtoniano, 158
 - intervalo, 161
- Lorentz
 - boosts de, 14
 - cantidades conservadas del grupo de, 45, 140
 - contracción de, 4, 36
 - derivación de boosts de, 11–13
 - escalar de, 27
 - factor de, 3, 14
 - grupo de, 42
 - invariante de, 27
 - norma de, 95
 - rotaciones hiperbólicas de, 40
- marco de referencia, 4
- masa gravitacional, 153
- masa inercial, 153
- materia bariónica, 207
- materia oscura, 207
- métrica, 43, 76, 82
 - de Kerr, 183
 - de Minkowski, 43
 - de Schwarzschild, 168
 - inverso de la, 80
 - transformación de, 82
- métrica de Kerr, 183
- métrica de Schwarzschild, 168
- Michelson-Morley, experimento de, 2
- Minkowski
 - espacio-tiempo, 43, 71
 - métrica, 76
 - métrica, 43
- momento propio, 26
- multiverso, 181
- muón, 21
- Noether, teorema de, 45

- norma, 95
 transformación de, 95
 norma de Hilbert, 193
 notación covariante, 55, 90
- $O(3,1)$, grupo de Lorentz, 44
 ondas gravitacionales, 184, 192, 230
 operador estrella, 144, 146
- paralelismo, postulado de, 117
 parámetro afín, 124
 parámetro de densidad, 201
 parámetro de desaceleración, 207
 parámetro de Hubble, 200
 parámetro hiperbólico, 42
 partícula virtual, 59
 perihelio, 188
 Planck, tiempo de, 221
 planitud, problema de, 205
 Poincaré, grupo de, 45, 142
 Poisson, ecuación de, 160
 postulado de paralelismo, 117
 postulados
 relatividad especial, 10
 Poynting, vector de, 101
 precesión de perihelia, 188
 principio cosmológico, 198
 principio de covariancia, 115
 principio de equivalencia, 153
 principio de relatividad, 1, 4
 principio variacional, 235
 problema de planitud, 205, 211, 219
 problema del horizonte, 218, 219
 producto escalar, 27, 76
 producto tensorial, 82
 pseudotensor, 143
 puentes de Einstein–Rosen, 181
- radiación cósmica de fondo, 209, 211, 212, 214
 radiación de cuerpo negro, 212
 radio de Hubble, 219
- radio de Schwarzschild, 168, 174, 176
 rango, 84
 recombinación, 214
 Ricci
 escalar de, 135
 tensor de, 135
 Riemann, tensor de, 132
 Riemanniana, variedad, 118
 Rindler, coordenadas de, 227
 rotación de Wigner, 43
- símbolo de Levi-Civita, 45
 símbolos de Christoffel, 106
 Saha, ecuación de, 214
 Schrödinger, ecuación diferencial de, 54
 Schwarzschild
 agujeros negros de, 176
 intervalo de, 168
 métrica de, 168
 radio de, 168, 174, 176
- simetría, 45
 de norma, 95
 simultaneidad, 31
 singularidades, 175
 $SO(3,1)$, grupo de Lorentz, 45
 superradiancia, 183
- tensor, 84
 componentes, 84
 componentes antisimétricas, 87
 componentes simétricas, 86
 rango, 84
 tensor de Einstein, 136
 tensor de energía–momento, 99, 236
 tensor de Faraday, 91
 tensor de Ricci, 135
 tensor de Riemann, 132
 componentes independientes, 134
 definición covariante, 132
 relaciones de simetría, 133
 tensor de torsión, 150

- tensor métrico, 82
- tensor métrico, 43, 76
 - inverso, 80
- teorema de Birkhoff, 168
- teorema de Noether, 45
- tiempo conforme, 216
- tiempo de Planck, 221
- tiempo propio, 11, 21, 124
- torsión, 110, 150
- transformación afin, 124
- transformaciones de Galileo, 5, 6
- transformaciones de Lorentz
 - boosts, 14
 - derivación, 11–14, 40, 42
 - rotaciones hiperbólicas, 41
- transporte paralelo, 125

- última dispersión, 214
- unidades naturales, 163

- variedad, 118
 - pseudo-Riemanniana, 121
 - Riemanniana, 118
- vector de Killing, 138
 - en espacio–tiempo plano, 139
- vector de Poynting, 101
- vectores, 69
 - invariancia, 71
 - propiedades de, 69
- vectores duales, 74
- velocidad de recesión, 203
- velocidad propia, 23
- virtual, partícula, 59