Lo que cabe en el espacio

La geometría como pretexto para explorar nuestra realidad física y matemática

Héctor Zenil

Ciudad de México - Viçosa - Cuernavaca
Madrid - Curitiba - Washington D.C.
CopIt-arXives
2011

Publicado en 2011 por CopIt-arXives

Este libro ha sido producido electrónicamente con Software Libre y acorde a una filosofía de acceso libre para publicaciones académicas.

ISBN 978-0-9831172-0-9

Índice general

Prefacio

“γεωμτρητος μηδες εστω”
(“Nadie entre aquí que no sepa geometría”)
A la entrada de la academia de Platón.

¿Cuánto cabe en nuestro espacio? ¿Por qué sólo pueden existir cinco poliedros regulares y no seis? ¿Qué figuras llenan el plano y el espacio? ¿Es el espacio una generalización trivial del plano? ¿Podemos notar si estamos en un plano curveado si estamos sobre él? En lenguaje casi coloquial, despegaremos figuras del espacio para rotarlas en 4 dimensiones, contaremos poliedros en dimensiones superiores y nos preguntaremos acerca de las propiedades fundamentales del espacio. Se trata de una historia que devela cómo una parte de las matemáticas describen las propiedades más fundamentales del espacio en que vivimos y por lo tanto de la realidad en la que estamos inmersos y solemos poner poca atención.

Lo que usualmente se ve y se conoce de las matemáticas es su sintaxis, y aunque éste también es parte de ellas no son mas que una parte de su lenguaje. Es como si se quisiera entender una novela analizando el significado de las palabras y no el de los enunciados, párrafos y capítulos. Desgraciadamente es el vocabulario y la gramática de las matemáticas lo que usualmente se enseña y se aprende. Por ello a veces las matemáticas son relacionadas con sumas y restas, como si una novela se pudiera describir y entender aprendiendo el alfabeto. A excepción de aquellos quienes una vez aprendido y dominado el lenguaje, se arrojan hacia la aventura temeraria, es una pena que el resto no conozca el profundo contenido de una disciplina intelectual que sostiene y comprende muchas de las preguntas que el humano ha considerado como de entre las más relevantes y que a veces tiene frente así, codificadas solamente.

Los filósofos y matemáticos se han hecho muchas preguntas acerca de las matemáticas durante su historia. ¿Las matemáticas ya existen y nosotros las descubrimos? o ¿son una invención humana? Si son una invención ¿por que parecen ajustarse y describir tan bien la naturaleza? Y si no son una invención ¿cómo accedemos a ellas? ¿Cómo podemos utilizarlas no sólo para ofrecer explicaciones coherentes y a veces precisas sino para modelar y predecir situaciones reales?

La historia alrededor de los sólidos platónicos y los poliedros en general es tan amplia que abarca muchas épocas de la civilización humana, al menos desde el año 2000 o 3000 a.c. hasta la actualidad, es decir, unos tres o cuatro mil años. Unas veces mejor documentada y preservada que otras, estos objetos han interesado e involucrado a matemáticos de leyenda. Pitágoras, Teeteto, Platón, Aristóteles, Euclides, Arquímedes, Descartes, Euler, Simson, Cauchy, Legendre, Gauss, Hilbert, Coxeter y Dehn son sólo algunos nombres de entre los que han hecho las mayores contribuciones al tema.

Estos objetos no sólo son interesantes como curiosidades matemáticas, nos hablan, sobre todo, de las propiedades del espacio en que vivimos, así como de otros que podemos concebir con particular exactitud sin jamás conocer. Nos hablan también acerca de la posibilidad o restricción de construir ciertos objetos de cierto tipo en nuestro propio espacio, y de relaciones y propiedades particulares en él.

Si acaso el lector se pregunta por la utilidad de estos interesantes objetos del espacio, debo advertirle que se encuentran presentes (a manera de aproximaciones) en toda la naturaleza: desde enlaces moleculares, superficies de organismos vivos, formas de virus, patrones emergentes en la dinámica de sustancias, modelos genéticos, modelos cosmológicos modernos, y en toda la arquitectura antigua y moderna. Basta pensar, por ejemplo, en las pirámides de Egipto o los rascacielos de las grandes ciudades. Esta ubicuidad se debe a dos motivos en particular: la estabilidad que estas formas proveen; y la simpleza en su construcción a partir de unidades auto semejantes. En ese sentido, son formas que preservan la propiedad natural de mínima energía, es decir, la generación y construcción óptima mediante el uso de la menor cantidad de recursos posibles.

Por otro lado, debo advertir que, con excepción del comentario anterior, la existencia o concepción de objetos matemáticos por sí solos, como respuesta a preguntas fundamentales del espacio, será mi único interés y no su aplicación o presencia en la naturaleza o la vida cotidiana.

Estoy convencido de que el conocimiento no está contenido en los libros, sino en las personas, esto parece obvio pero no pretendo realizar un ejercicio de retórica sino enfatizar el hecho de que en la lectura de un texto están contenidas las instrucciones para reconstruir los pensamientos que el escritor previamente concibió para tal fin y que ha depositado con tinta. Cuando estas ideas y pensamientos se leen interpretando las condiciones en las que el autor estaba inmerso (en lugar y tiempo) se hace un trabajo de hermenéutica, de reconstrucción, en la medida de lo posible, de los hechos necesarios y suficientes para hacer un aserto, afirmación, omisión, conjetura o conclusión.

En esta experimentación, esta forma de leer matemáticas como si se estuviera haciendo un experimento o leyendo una novela con personajes y trama, tuve la fortuna de ser guiado por un gran conductor que hace historia leyendo la historia y no los libros de historia. Él habría hecho la aclaración, sin duda, que cuando se refiere a leer bien, como cuando se lee una novela, no se trata de leer en las noches para dormirse, sino a analizar la obra, a identificar los protagonistas, el guión y las entre líneas, a conocer sus personajes e identidades, para detectar sus fortalezas y debilidades (en los Elementos de Euclides, por ejemplo, los personajes son el triángulo, el ángulo recto, el círculo, pero destaca la ausencia de la esfera). Para hacer este tipo de lectura de textos matemáticos se requiere por supuesto de concentración y doctrina matemática pero también una rica mezcla intelectual de historia y filosofía.

Hacer hermenéutica implica que no hay una verdad absoluta, sino interpretaciones históricas de las intenciones del autor (no de las matemáticas mismas). La hermenéutica es importante porque provee un trabajo de interpretación de expertos inmersos en un tiempo de los trabajos de los expertos de un tiempo anterior. Es una lectura de ese tiempo en este tiempo, con lo que se sabe y no se sabe de aquel tiempo, y lo que se sabe o no sabe de ahora (y la conciencia de ello).

Los poliedros están asociados, directa o indirectamente, al surgimiento de áreas importantes de las matemáticas, como el álgebra, el análisis matemático y la topología. Incluso desde el punto de vista de importantes autores, con los que coincido, éstos fueron en algunos casos, detonantes para el nacimiento y descubrimiento de estas ramas tan ricas en contenido de las matemáticas, que aunque probablemente hubieran de cualquier modo surgido, fueron éstos sin duda, una motivación enmarcada por un entorno. Así, por ejemplo, Lebesgue afirma que el estudio de los poliedros fue el punto de origen para la topología moderna. También los poliedros han estado ligados al comienzo y desarrollo de los dos pilares de las matemáticas modernas, por un lado la aritmética o teoría de números y, por el otro, la geometría. Hay quienes incluso aseguran que el estudio de los poliedros comenzó por una motivación proveniente de la teoría de números ya que estuvieron ligados, evidentemente (y sin duda lo siguen estando si se les ve desde esa óptica), a conceptos como el de magnitud y medida, así como al de inconmensurabilidad y a la llamada proporción extrema y media (conocida coloquialmente como proporción áurea o divina proporción) que tanto en polígonos como en poliedros se encuentra presente, más aún con los llamados números poligonales, objetos de estudio de personajes como Euler, Fermat y Goldbach.

Veremos más adelante, por ejemplo, cómo del estudio de los sólidos y su magnitud surge la necesidad del cálculo para luego evolucionar en lo que conocemos actualmente como análisis matemático y la teoría de la medida, a diferencia de una creencia muy popular y casi mito acerca de que su surgimiento fue producto de una motivación práctica, de una necesidad para calcular magnitudes físicas o de la mecánica celeste para el cálculo de velocidades. Sin duda el cálculo no es una herramienta motivada por la física sino por la geometría, y su surgimiento se cocinó por necesidad matemática en el concepto de exhaución que Arquímedes atribuyó a Eudoxo y que por supuesto era objetivo central en la obra de Euclides. Método que no tenía otro objetivo distinto que el de medir, el mismo objetivo del cálculo y del análisis matemático actual. El hecho de que el cálculo sea una teoría o herramienta que es y puede ser totalmente adecuada para el estudio y tratamiento de la física no implica que de ella surja o que de ella se haya ocupado únicamente durante su surgimiento. La línea continua de la que el cálculo es parte, es obvia cuando se conoce la historia del desarrollo de los conceptos matemáticos, desde el método de exhaución hasta lo que hoy conocemos como la teoría de la integración y el trabajo de Riemann, Lebesgue, Borel y Cantor.

Lo que haremos es un trabajo intelectual pero también un juego, jugaremos a ser Euclides, Euler, Legendre o Gauss. A hacernos sus preguntas, a respondernos en su forma y en su tiempo, y en nuestra forma y nuestro tiempo (inmersos unos dentro de otros), a encontrar diversos razonamientos pero también desviaciones, excesos y omisiones de hechos prácticamente evidentes para nosotros pero seguramente desconocidos e inalcanzables en su tiempo para ellos.

El concepto de espacio es uno difícil ya que lo que se diga de él es probable que se falso. Como ejemplo, el espacio se creía euclidiano, pero hoy sabemos que es muy probable que no sea el caso, y aún si lo fuera, el espacio permite otro tipo de geometrías sobre superficies. De hecho, algunos modelos físicos pretenden más de 3 dimensiones espaciales. Del espacio mucho y nada sabemos, asumiendo que una u otra propiedad de él deducimos unas u otras propiedades, preguntas fundamentales continúan sin respuestas (por ejemplo, ¿es el espacio continuo? y ¿qué tipo de continuo?). Para entender el concepto de espacio estudiaremos cómo lo entendemos a partir de lo que hacemos o podemos hacer con él y en él, lo que puede o no contener, por las propiedades que lo caracterizan, aquellas que le pertenecen y aquellas que dependen de los objetos que contiene o de otras posibles propiedades. Y, finalmente, llegaremos de manera novedosa, a través del concepto de poliedro, a las nociones que motivaron en gran medida y dieron origen a diversas teorías matemáticas, como la teoría de la medida, la teoría de grupos y la topología, áreas de estudio de la matemática actual.

Muchos libros se han escrito sobre la forma y propiedades del espacio, algunos del espacio en que vivimos, por mencionar uno está el de Javier Bracho *En qué espacio vivimos* publicado por el Fondo de Cultura Económica (FCE) de México y que trata la pregunta desde un punto de vista topológico, el área de investigación de Javier Bracho.

Entre las que considero aportaciones de este texto, está el tratamiento didáctico (a pesar de que le debo al lector muchas figuras que espero insertar en futuras ediciones) y el de su valor hermenéutico como innovación al servicio pedagógico para contar la historia de los conceptos que han ayudado a formular (explicita o implícitamente) la pregunta del espacio y que han dado origen y modelado las matemáticas modernas. La pregunta no es otra que la de Javier Bracho pero el esbozo de respuesta es desde una óptica distinta. No es tampoco un texto ni de matemáticas ni, necesariamente, de vulgarización de las matemáticas, aunque espero que ayude a vulgarizar conceptos y sobre todo historias, pero más que todo a proveer entendimiento y motivar al lector con un contexto distinto al comúnmente utilizado para explicar las matemáticas. El libro es sobre todo un estudio de ese contexto, de interpretación histórica del desarrollo de las matemáticas. El viaje nos lleva por el estudio de una piedras neolíticas, por un análisis de la obra de Euclides y a discusiones sobre las propiedades más fundamentales de nuestro espacio, como lo son el de dimensionalidad y el de su (posible) continuidad.

Por información de Alison Sheridan y sus colaboradores, a pesar de cierta atención alrededor de estas piedras, y las conjeturas que le acompañaron, las piedras de las que hablo en el primer capítulo del libro no habían sido parte de ninguna discusión matemática medianamente seria para determinar si se trata efectivamente de objetos que sugieren el conocimiento de una noción geométrica temprana de los poliedros regulares, más allá de su posible propósito ornamental o práctico. Esta es, por lo tanto, probablemente una de las primeras veces que estos objetos son incluidos en un libro de historia y filosofía de las matemáticas.

El libro se divide en dos grandes partes cada una constituida de diversos capítulos. La primera parte está dedicada a la historia que sugiere los inicios de la teoría de la medida, la que se ocupa de las magnitudes, y de las primeras nociones de grupo a partir de las de simetría que, sin duda, surgieron en gran medida de las preguntas alrededor de los poliedros. La segunda parte está dedicada a las primeras nociones que dieran origen a conceptos del análisis real, como el de curvatura o dimensión, y a las nociones que dieran origen a la topología como el de continuidad y propiedades no cuantitativas. La manera en que se estudian y entrelazan estos conceptos con los trabajos e ideas originales de los primeros autores, desde Euclides hasta Saccheri y Hilbert o de Aristóteles a Francisco Suárez, constituyen desde mi punto de vista una innovación y probable aportación.

Más que encontrar, intento colocar en el centro del desarrollo matemático, como motivación y guía, a los poliedros regulares que utilizo para contar una historia que espero el lector encuentre tan apasionante como tan apasionante me ha sido escribirla. Y la historia no es otra que la que me ha capturado, la del surgimiento del concepto de espacio como objeto de estudio (y lo que contiene en el sentido geométrico) y sus propiedades, como el de dimensión y continuidad (real o aparente). Intencionalmente he entonces evitado realizar un estudio exhaustivo y descriptivo de objetos matemáticos o áreas en particular sino sirven para entender la historia o son relevantes para contar la historia. Por ejemplo, este no es un libro en el que pueda encontrarse la lista de los nombres de los sólidos arquimedianos, sino acerca de las razones por las que sólo puede haber 13. Tampoco abarco el lado algebraico o más profundamente topológico más allá de su uso utilitario sujeto a la historia, ya que la topología no es parte central de esa historia sino sobre todo el resultado de ella (y un campo vivo de la matemática actual). No puedo sino recomendar al lector un libro de topología o de divulgación de la topología como el de Javier Bracho, ya citado anteriormente[12].

Héctor Zenil
Biblioteca Mazarín
París, Francia, 2011

Agradecimientos

Quiero agradecer primero a Carlos Álvarez de la Facultad de Ciencias de la UNAM, de quien en el curso y transcurso de dos seminarios de hermenéutica de las matemáticas nos guió y enseñó a hacer hermenéutica y a leer los textos de Euclides, Saccheri, Legendre y Hilbert.

Agradezco a Ana María Sánchez de la Dirección General de la Divulgación de la Ciencia (DGDC) de la UNAM, y a quien descargo de toda culpa en cuanto a posibles errores de redacción y ortografía contenidos en este texto, la lectura de una versión preliminar del texto y sus valiosos comentarios.

A Julie Clements, Sue Moss y al profesor Andrew Sherratt del departamento de antigüedades y publicaciones del Museo Ashmolean de Oxford y a Alison Sheridan del Departamento de Arqueología de los museos nacionales de Escocia.

No puedo dejar de agradecer a otros profesores cuya pasión me dio el impulso y conocimiento para escribir este libro y continuar mi paso por las matemáticas y la lógica. Se trata de Max Neumann, Javier Bracho y Axel Barceló, entre otros, de quienes aprendí geometría analítica, topología y filosofía de las matemáticas en la Facultad de Ciencias de la UNAM. Y a los profesores Jacques Dubucs, Philippe de Rouilhan, Gabriel Sandu y Jean Mosconi del IHPST de la Universidad de París 1.

Antes de ser creado el universo, no existían los números excepto la Trinidad que es Dios mismo... Dado que la línea y el plano no implican ningún número, entonces reina la infinidad. Consideremos por lo tanto a los sólidos. Primero debemos eliminar a los sólidos irregulares dado que sólo estamos interesados en la creación ordenada; quedan por lo tanto seis cuerpos: la esfera y los cinco poliedros regulares. A la esfera corresponde el cielo exterior, mientras que el mundo dinámico está representado por los sólidos de cara plana, de los cuales existen cinco, los cuales a la vez (cuando son vistos como límite) determinan seis cosas diferentes: los seis planetas que giran alrededor del sol. éste es el motivo por el cuál sólo hay seis planetas..."

"... los sólidos regulares se dividen en dos grupos: tres en uno y dos en otro. Al grupo mayor pertenecen primero el cubo, segundo la pirámide, y finalmente el dodecaedro. Al segundo grupo pertenecen primero el octaedro y segundo el icosaedro. Lo mencionado explica porqué la parte más importante del universo, que es la Tierra–donde la imagen de Dios se refleja en el hombre–, separa a los dos grupos. Por consiguiente, como posteriormente procedo a demostrar, los sólidos del primer grupo deben hallarse fuera de la órbita de la Tierra, mientras que los del segundo grupo deben encontrarse dentro... por lo tanto, asigno el cubo a Saturno, el tetraedro a Júpiter, el dodecaedro a Marte, el icosaedro a Venus y el octaedro a Mercurio".

"Mysterium Cosmographicum" (1596) Kepler (1571-1630)

Parte I

Hacia el concepto de medida y grupo

Capítulo 1

Nociones primeras

1.1. Figuras ancestrales

Los restos arqueológicos más antiguos que se conocen, en los que aparecen diferentes figuras poliedrales[28] al mismo tiempo, son unas piedras talladas del neolítico (de alrededor del año 2000 a.c.) encontradas en Escocia (véase la Figura 1.2).

Estos objetos de naturaleza *poliedral* son los primeros objetos encontrados de su tipo hechos por el humano. Algunos creen que estas piedras provienen de la cultura Celta tardía, pero no se ha logrado un consenso general. El origen más aceptado es el ubicado en la fecha alrededor del 2000 a.c. o entre la edad de piedra tardía y la edad de bronce, debido a que se han encontrado siempre directamente relacionados con asentamientos escoceses de dicha época. También se conservan un par de dados icosaédricos de la época de la dinastía de Tolomeo en el Museo Británico de Londres. Parece que este tipo de figuras geométricas ya tenían una utilidad lúdica como ocurre en la actualidad. Pensemos por ejemplo en los dados que se utilizan en los juegos populares de mesa; el dado del Scattergories es un icosaedro y en los juegos de rol se utilizan todo tipo de poliedros regulares.

Un poliedro es un cuerpo sólido limitado por una superficie que consta de un número finito de polígonos a los que se les denomina caras del poliedro. Si las caras de un poliedro son polígonos regulares y en cada vértice concurren un mismo número de ellas, se dice que el poliedro es regular, por ejemplo, en el tetraedro concurren tres triángulos iguales en cada vértice y en el hexaedro o cubo concurren tres cuadrados en cada vértice.

Lo que hace especial a los poliedros regulares, es que después de la esfera a la que sin importar desde dónde se le vea se ve siempre igual (excepto por su tamaño, y sin considerar color, textura, etc.), los poliedros son objetos que, en los mismos términos, bajo transformaciones geométricas preservan su forma. En otras palabras, se ven igual como si transformación alguna hubiera ocurrido.

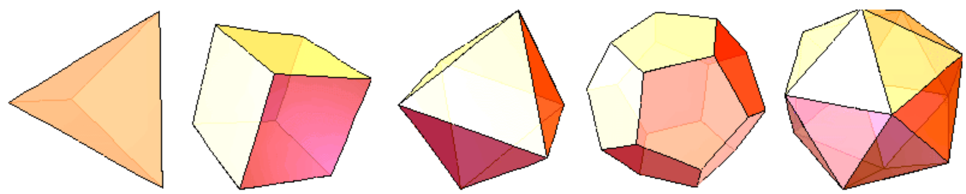


Figura 1.1: Poliedros regulares o sólidos platónicos

Aunque la Figura 1.2 muestra objetos que parecen tener cierta afinidad a los poliedros regulares, no hay evidencia concluyente acerca de si los autores de dichos objetos los conocieran, por las siguientes razones:

1. La forma de las piedras no es concluyente. Algunas de ellas parecen ser claramente construcciones poliedrales esféricas ya que los bordes de las mismas no son rectos sino más bien curvos. Sin embargo, la curvatura podría deberse a la restricción debido a la posible falta de herramientas adecuadas para construir bordes más finos y delineados. Aquel que pudiera parecer un cubo en el museo Ashmolean, más bien tiene ocho protuberancias (en la bibliografía aparecen referidos como nudos) divididos por surcos que no coinciden con el número de lados de un cuadrado. Sin embargo, la forma de la piedra tiene cierto parecido a un cuadrado. Las piedras que pretenden parecer un tetraedro son aún más irregulares, tienen lo que pudieran parecer cuatro caras pero en realidad son círculos y no polígonos planos, debido a ello quedan huecos entre los espacios de

dichos círculos que fueron rellenados con otras protuberancias más pequeñas. El pretendido tetraedro tiene ocho protuberancias circulares, cuatro de ellas grandes y otras cuatro más pequeñas entre las otras cuatro. Probablemente la piedra más polémica pudiera ser la que representa al dodecaedro, entre las diversas piedras encontradas, ya que sus caras son mucho más finas que las anteriores, son claramente pentágonos, la conciencia al esculpir esta piedra debió ser muy clara, su construcción no es trivial ya que los pentágonos muestran cierta regularidad en tamaño y en su número total (doce). Los surcos delinean perfectamente todos los pentágonos. De hecho esta piedra es más bien un poliedro esférico que tiene las propiedades evidentes de un dodecaedro. La siguiente piedra es tan irregular como el tetraedro, es el que representa al icosaedro, pero sus caras en lugar de ser triángulos equiláteros son también círculos, todos ellos del mismo tamaño. El número de círculos no es el número de lados de un icosaedro, pero si se unen los centros de los círculos se obtienen figuras triangulares que en número suman veinte. Veinte es el número de triángulos de un icosaedro. Por último, la piedra que parece o pretende ser un octaedro tiene las mismas irregularidades que el tetraedro y el icosaedro ya que se forma por grandes protuberancias curvas y no por lados poligonales. En suma, el único que parece ser intencionalmente un dodecaedro es una de las piedras en el museo Ashmolean en Oxford, el resto no lo parecen si no se les coloca una cinta que vayan del centro de las protuberancias al centro de las protuberancias adyacentes. Los listones colocados en las piedras de la imagen fueron colocadas recientemente con la intención de hacer notar cierta identificación con los poliedros regulares. Sin embargo, es claro que aunque la construcción del dodecaedro haya sido intencional, el conocimiento de los poliedros regulares sugiere el conocimiento de hechos mucho más trascendentes que el conocimiento de un solo poliedro regular. El conocimiento de la existencia de los poliedros regulares o sólidos platónicos trae consigo adjunto el conocimiento de la existencia y unicidad de los mismos, incluso probablemente la relación de unos con otros y la metodología para reproducirlos sistemáticamente.

2. Las piedras son una muestra de cientos de piedras encontradas en lugares cercanos con todo tipo de formas geométricas y número de protuberancias colocadas simétricamente. La selección y orden de las piedras presentadas en el que se exhiben es intencional ya que no tenían ningún orden en particular cuando fueron descubiertas. De las 411 piedras 275 contienen seis estructuras circulares o nudos como algunos le llaman. Esta figura pudo haber sido la más fácil de esculpir debido a que el autor tenía que preocuparse sólo por generar puras caras opuestas, lo que evidentemente indica cierto conocimiento geométrico incluso si proviene simplemente de restricciones físicas.

Figura 1.2: Nociones geométricas del neolítico. Piedras esculpidas encontradas en asentamientos con al menos tres mil años de antigüedad. De un total de 411 piedras registradas en 1977 en el catálogo de Dorothy Marshall que se encuentran en el museo nacional de Escocia en Edimburgo, en el museo Ashmolean de Oxford, y en otros museos esparcidos en distintos lugares de Inglaterra. Foto de H. Zenil, Escocia, 2011.

Estas piedras encontradas en Escocia no indican necesariamente que se conocieran los poliedros regulares como objetos geométricos con propiedades particulares (si consideramos que el conocimiento de estos objetos implica que se tiene la conciencia de que no puede haber otros con las mismas características). Sin embargo, son una prueba de las nociones geométricas de la época. Sin duda, su grado de sofisticación indica cierto dominio del espacio y el sometimiento de las formas a las restricciones del espacio. Sin duda, los primeros hombres se habían encontrado con restricciones espaciales cuando manipulaban objetos o figuras (por ejemplo en sus dibujos rupestres) en forma de límites en el número de movimientos posibles de, por ejemplo, un objeto rígido, que queda casi fijo una vez que 2 puntos del mismo se fijan, y queda completamente fijo a un plano con 3 puntos fijos. Los autores de estas piedras no pudieron, por ejemplo, construir una figura con cuatro pentágonos (ni parece que lo hayan intentado) en cada vértice, en lugar de tres del dodecaedro, ya que como veremos más adelante esto es claramente imposible, de tal forma que la pura acción combinatoria (por ensayo, error e insistencia) pudo haberse llegado a las formas que se encontraron. También es cierto que esto debió ser el comienzo para que el humano se hiciera consciente del tipo de formas que podía construir, para finalmente derivar en lo que luego sería el estudio de las magnitudes y formas posibles, la geometría.

Muchas de estas piedras tienen adornos tallados en sus caras, lo indica claramente que había una intención artística en dichos objetos, independientemente de si además de su motivación artística había una intención práctica en el uso que se les diera. Debido a que tienen surcos, estos objetos pudieron haber servido, por ejemplo, para colocar cuerdas que los sostuvieran y que se usaran como arma de golpe en cacerías o como contrapeso para su lanzamiento a distancia con algún propósito lúdico, de caza o de guerra. Sin embargo, la determinación de su uso es meramente especulativa y desconocida debido a que no hay ningún registro ancestral acerca de ellos. Mark Edmonds, autor del artículo “Their Use is Wholly Unknown” asegura que no es posible saber el uso que se les daba a estos objetos. El hecho de que, por ejemplo, la mayoría contengan decoraciones distintas en cada cara podría sugerir que tenían algún significado de identificación para personas pertenecientes a un grupo elitista, familia o clan, como bienes de prestigio o parafernalia. Incluso podrían haberse utilizado como dados en el sentido de que cada cara tuviera alguna representación simbólica utilizada para un juego. Otros han sugerido que podían haberse usado como cabezas de mazos o martillos, incluso como parte de adornos o estructuras más grandes que representarían alguna escultura o monumento religioso. Otra interpretación dice que pudieron ser mapas o instrucciones para bailes ceremoniales o procesiones, mapas estelares o de cambio de estaciones. Una interpretación más sugiere que pudieron utilizarse como dispositivos para establecer estándares de unidades de peso. Sin embargo, una característica importante de la distribución de las piedras es que muchas se encontraron cerca de tumbas lo que podría sugerir que eran utilizadas también en ritos mortuorios indicando cierto rango o posición social del muerto. Parece no haber muchas dudas acerca de que jugaban algún papel importante en la estructura social de la cultura que las produjo.

Sin embargo, la idea de que estas piedras sugieran el conocimiento de los sólidos platónicos en la prehistoria, varios siglos antes de que fueran registrados en escritos griegos, parece ser un mito derivado de la imagen. El truco fotográfico (la elección y disposición deliberada de ellos) no sugiere, sin embargo, que los autores de dichas piedras no fueran ajenos a ciertas nociones geométricas evidentes de simetría y métrica fundamentales para el origen y desarrollo, primero de la construcción y luego de la teoría matemática de los poliedros regulares. Esto sobre todo porque la mayoría de las piedras tiene marcas de lo que identificamos hoy como los duales de los poliedros, y es que las piedras que resultan poderse identificar con algún poliedro tienden líneas entre caras y vértices sugiriendo una posible relación de dualidad entre algunas de ellas, lo que sin duda, y aunque no haya sido con el concepto de dualidad en mente, es una clara indicación de una anticipación de conceptos fundamentales de geometría. También es notorio que las piedras parecen poliedros esféricos, debido a su forma, esto sin embargo tampoco puede ser una indicación de la noción de geometría esférica y del concepto de proyección que Legendre y otros desarrollarían 2700 a nos más tarde con mucho más conocimiento (matemático) acumulado y muchas otras herramientas a su alcance, sino probablemente un accidente del tallado, o de una motivación deliberada pero seguramente ornamental.

1.2. Sólidos platónicos

La primera referencia escrita conocida acerca del surgimiento de la noción geométrica de los poliedros regulares a través de su construcción, proviene de la cultura griega temprana. En particular del estudio de Pitágoras y Teeteto, en donde describen propiedades de dos grupos de poliedros regulares, por un lado Pitágoras estudia el cubo, el tetraedro y el octaedro mientras que Teeteto el dodecaedro y el icosaedro. Sin embargo, el conocimiento completo de los poliedros regulares, que implica además el conocimiento acerca de la imposibilidad de que existan otros no es clara ni en el trabajo de Pitágoras ni el de Teeteto sino hasta el de Euclides y sus Elementos[38]. Sin embargo, debido a que Pitágoras y Teeteto son los primeros en describirlos (y de quienes se preservaron sus trabajos hasta la actualidad) se les atribuye el descubrimiento de estos objetos, al grado de llamárseles Sólidos platónicos.

Platón[57] (400 a.c.), estimuló considerablemente el desarrollo de las matemáticas en su academia de Atenas, ya que la consideraba una ciencia y arte, cuyo estudio era imprescindible para la formación de individuos en su dialéctica y enseñanza filosófica. La concepción de Platón acerca de las matemáticas colocaba a éstas como intermediarias entre el mundo de las ideas y el de las cosas. Así para él, y los que se suscribían a sus creencias, esta disciplina no sólo jugaba un papel fundamental en el conocimiento, sino que era considerado el único puente entre las ideas puras e inmutables y el mundo físico, imperfecto y cambiante.

A la entrada de la academia de Platón se leía "Que nadie entre aquí que no sepa geometría". La disciplina impuesta por Platón en su academia exigía a sus discípulos estudiar exclusivamente matemáticas durante diez años antes de acceder a su filosofía. Su academia contribuyó a la divulgación de resultados matemáticos y dio impulso a la motivación de *matematizar* los fenómenos naturales: "es el saber matemático el que concede carácter científico a todas las artes", Platón. Pero, por otra parte, su ideal de ciencia matemática y razonamiento puro no permitía ni justificaba el uso de las matemáticas para medir o ser aplicada en problemas prácticos. La regla y el compás fueron "santificados" como únicos medios auxiliares de construcción matemática, en correspondencia con el ideal de recta y círculo como perfección de lo recto y lo curvo. Así el estudio de las curvas cónicas y otras curvas algebraicas y trascendentes fue menospreciado por considerárseles vulgarizaciones de los objetos matemáticos perfectos.

En el estudio de los objetos ideales y perfectos Platón encontró cinco poliedros regulares que menciona en su obra "Timeo", obra que trata acerca de la formación del "Alma o Cuerpo del Mundo", una extraña combinación de filosofía, teología y numerología, cuyo objeto era el análisis del origen del universo, del hombre y de la sociedad. Para Platón, en el Timeo, la construcción y el desarrollo del cosmos se efectúa según una progresión geométrica. A los cinco poliedros regulares se les llama sólidos platónicos porque Platón en uno de sus diálogos más significativos: el Timeo, en el que se explica la construcción del universo, establece una asociación entre ellos y los elementos fundamentales de los que éste está compuesto, que según sostenían los griegos estaba hecho con átomos de agua, aire, tierra y fuego.

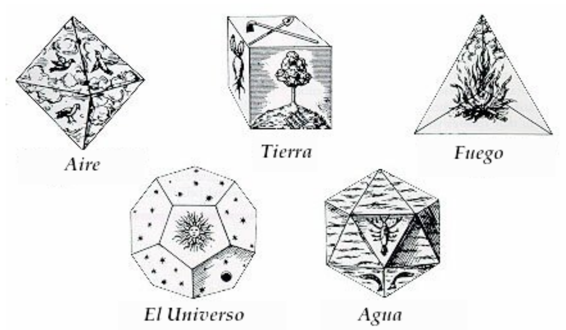


Figura 1.3: Los cinco sólidos platónicos: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro e icosaedro. Por Johannes Kepler.

Platón hace de los triángulos una figura fundamental, mostrando que todas las caras de los sólidos platónicos se pueden descomponer en triángulos. Por ejemplo, el dodecaedro está formado por 360 triángulos rectángulos que se obtienen al trazar en cada pentágono las cinco diagonales y las cinco medianas (las medianas son rectas que forman ángulos rectos y pasan por los puntos medios de los lados de la figura), de manera que cada una de las doce caras queda descompuesta en 30 triángulos rectángulos.

Acerca de la importancia de los triángulos para Platón (en el Timeo):

> "El dios, al idear una mezcla de todas las simientes para todo el género mortal, seleccionó de todos los elementos los triángulos primordiales que por ser firmes y lisos eran capaces de proporcionar con la máxima exac-

titud fuego, agua, aire y tierra, los mezcló en cantidades proporcionales y confeccionó con ellos la médula.”

Pueden leerse, en el texto original de Platón (de su obra Timeo), los argumentos:

“...porque cuando se disuelven los mayores de aquellos que por naturaleza están constituidos por un tipo de triángulo, se componen muchos pequeños a partir de ellos, que adoptan las figuras correspondientes y, a su vez, cuando muchos pequeños se dividieran en triángulos, al surgir una cantidad de volumen único, podría dar lugar a otra forma grande. ésta es, pues, nuestra teoría acerca de la génesis de unos en otros. A continuación deberíamos decir de qué manera se originó la figura de cada uno de los elementos y a partir de la unión de cuántos triángulos. En primer lugar, trataré la figura primera y más pequeña cuyo elemento es el triángulo que tiene una hipotenusa de una extensión del doble del lado menor. Cuando se unen dos de éstos por la hipotenusa y esto sucede tres veces, de modo que las hipotenusas y los catetos menores se orienten hacia un mismo punto como centro, se genera un triángulo equilátero de los seis. La unión de cuatro triángulos equiláteros según tres ángulos planos genera un ángulo sólido, el siguiente del más obtuso de los ángulos llanos. Cuatro ángulos de éstos generan la primera figura sólida, que divide toda la superficie de la esfera en partes iguales y semejantes. El segundo elemento se compone de los mismos triángulos cuando se unen ocho triángulos equiláteros y se construye un ángulo sólido a partir de cuatro ángulos planos. Cuando se han generado seis de tales ángulos, se completa así el segundo cuerpo. El tercer cuerpo nace de ciento veinte elementos ensamblados y doce ángulos sólidos, cada uno rodeado de cinco triángulos equiláteros planos y con veinte triángulos equiláteros por base. La función de uno de los triángulos elementales se completó cuando generó estos elementos; el triángulo isósceles, por otra parte, dio nacimiento al cuarto elemento, por composición de cuatro triángulos y reunión de sus ángulos rectos en el centro para formar un cuadrilátero equilátero. La reunión de seis figuras semejantes produjo ocho ángulos sólidos, cada uno de ellos compuesto según tres ángulos planos rectos. La figura del cuerpo creado fue cúbica con seis caras de cuadriláteros equiláteros. Puesto que todavía había una quinta composición, el dios la utilizó para el universo cuando lo pintó."

La importancia del triángulo así como la del ángulo recto, en particular para establecer las relaciones de congruencia (los tres teoremas de congruencia de los Elementos[38]), no es sólo evidente en la geometría de Euclides, sino como sabemos ahora, lo que la determina.

Capítulo 2

Los tres últimos libros de los Elementos

La obra que Euclides parece haber compilado por el año 300 a.c. muy probablemente en la biblioteca de Alejandría, es el libro que marca el punto de partida del desarrollo de las matemáticas modernas siguiendo el método axiomático y deductivo en gran medida utilizado hasta el día de hoy. Los Elementos contienen gran parte del conocimiento matemático que una persona aprenderá en su vida escolar antes de la educación preparatoria o media superior, y su contenido (no necesariamente los detalles) están tan vigentes en las bases de las matemáticas, como siempre lo han estado. Los Elementos es, sin duda, uno de los pilares sobre los que se sostiene la ciencia moderna. Es una obra tan rica y profunda que aún hoy continúa siendo objeto de estudio (por ejemplo, en este libro), de interpretación histórica y matemática. Puede pensarse en esta magnífica obra como un compendio magistral del conocimiento hasta la época de Euclides, donde su aportación más importante no fue sólo servir como puente de conocimiento, sino como origen del surgimiento de las matemáticas entendidas como una ciencia de deducción lógica: la ciencia de la demostración, como máximo reto racional.

La obra compilada de Euclides, acerca del estado de las matemáticas griegas probablemente datando del año 600 a.c., nos ha llegado por diversas fuentes, una

Figura 2.1: La nueva biblioteca de Alejandría, Egipto (ubicada cerca o en el mismo lugar que la antigua). Foto de H. Zenil, 2010.

es la original en griego (y consecutivas versiones en latín) del que por un tiempo se desconocía su existencia y por lo que muchas ediciones se basaron en fuentes de traducciones hechas por escritores islámicos. La obra se cree completa (debido a que todas las fuentes contienen más o menos los mismos capítulos excepto por claras adiciones externas) y se divide en trece libros, debe pensarse en cada libro como un capítulo de un libro único (aunque no independiente). Sin embargo, era común en la antigüedad llamarle libro a la división seccional de una obra. Los Elementos están claramente divididos en tres partes, aunque la siguiente división es realmente burda se puede decir que la primera, del libro I al VI trata de la geometría plana y la teoría de proporciones, la segunda parte, del libro VII al IX es la base de lo que conocemos como la teoría de números, y por último, del libro X al XIII acerca de la teoría de los poliedros. Esta presentación de la obra de Euclides es tan poco afortunada como decir que los libros III y IV tratan de la geometría del círculo, cuando efectivamente aunque tratan de éste hay que hacer una lectura cuidadosa para detectar las motivaciones profundas que le servirán a Euclides para la consecución de sus ideas y objetivos y cómo éstas van tomando forma y construyéndose hasta la culminación de una magnífica obra. El libro III y IV tratan más que del círculo, del ángulo recto y de cómo la geometría del círculo depende y se cumple por dependencia del quinto postulado. El personaje principal en los libros III y IV sigue siendo el ángulo recto, enamorado de su círculo.

Ocupa, con particular interés, a este texto el contenido de los libros XI al XIII, en donde Euclides trata del tema que nos concierne, la geometría del espacio, o mejor dicho, pues veremos más adelante que el término espacio merece un cuidado especial, de la geometría de los sólidos o los cuerpos sólidos.

Como toda sección de los libros de Euclides, el libro XI comienza con una serie de definiciones en donde la primera dice: "Un sólido es lo que tiene longitud, anchura y profundidad".

Es interesante analizar las expresiones y formas que Euclides decide utilizar para su primera definición, que abre ésta, sin duda alguna, la puerta hacia la geometría de los cuerpos en nuestro espacio de 3 dimensiones. Aristóteles en su obra Metafísica dice: "lo continuo en una dirección es longitud, en dos direcciones anchura y en tres profundidad longitud es una línea, anchura una superficie, profundidad un cuerpo".

Es clara entonces que la sospecha acerca de la posible influencia de Aristóteles sobre Euclides podría estar bien fundada. Por otro lado Platón, maestro de Aristóteles, en su obra Sofista habla de producir una imitación teniendo en cuenta las proporciones del modelo en largo, ancho y profundo; y en su obra Leyes coloca entre los tres *mathemata* el arte de medir longitud, profundidad y anchura. En la estructura lógica que siguen las demostraciones, Euclides podría haber sido también influenciado por la Teoría de los Silogismos de Aristóteles. Sería muy difícil poder argumentar con seguridad que hubiera podido presentarse un escenario en el que Euclides no se viera directa o indirectamente influenciado por la escuela Platónica o aristotélica, en tanto la obra de éstos era conocida en los círculos académicos e intelectuales y, como sabemos hoy, tuvo una gran relevancia en la dialéctica griega y el conocimiento en general, origen de lo que llamamos hoy cultura occidental. Sin embargo, esto no parece claro en el uso que Euclides hace del recurso de la reducción al absurdo en sus demostraciones, que consiste en suponer lo contrario de lo que se quiere demostrar para llegar a una contradicción. Este recurso además, es el que se ha utilizado como herramienta poderosa de demostración durante el resto de la historia de las matemáticas hasta la actualidad, un importante número de teoremas en todas las áreas de la matemática utilizan este invaluable recurso, incluso en ocasiones parece no haber demostración alternativa, haciendo de este recurso el único posible para mostrar la verdad de una proposición. Recurso además que ha sido criticado por la corriente intuicionista, pues su argumento en contra de él es que se fundamenta en el principio del tercero excluido, es decir, si no es lo uno es lo otro pero supone que no hay otra tercera posibilidad que no sea ni lo uno ni lo otro (los intuicionistas no aceptan la tautología lógica de que dos negaciones es la afirmación, al menos no para todos los casos).

Los últimos tres libros XI, XII y XIII son los dedicados a la geometría del espacio o magnitud (volumen) de los cuerpos (poliedros). Sin embargo, llama poderosamente la atención que Euclides no menciona la palabra "espacio" en ninguno de sus trece libros de los Elementos. Euclides se refiere siempre a "cuerpos" o "sólidos" y, sin mayor duda o cuestionamiento, determina la dimensionalidad obviándola mediante propiedades que hoy sabemos son heredadas de la dimensionalidad del espacio, por ejemplo, al establecer la incidencia de dos planos en una recta y, de manera más evidente en definiciones como la primera del libro XI que ya fue mencionada anteriormente, o proposiciones como la quinta del mismo libro o presente en donde se usa el concepto de ortogonalidad (perpendicularidad en modo generalizado) en definiciones y proposiciones ya que de otra forma el comportamiento de la relación de perpendicularidad, así como su unicidad, por ejemplo con respecto a un plano, sería distinta. Por supuesto, el hecho de que no se encuentre la palabra "espacio" en los Elementos no se debe a que ésta no existiera como parte del antiguo vocabulario griego, y seguramente no se debe tampoco a un descuido cometido por Euclides. Pensemos que Euclides haya omitido de manera intencional, la palabra "espacio" en toda su obra, cuando es evidente que el objetivo del libro son las magnitudes de los cuerpos en el espacio (volumen), es decir, la geometría del espacio! (el espacio en el sentido euclidiano, por supuesto).

2.1. La construcción matemática

En los libros XI y XII Euclides expone la forma de construir y relacionar objetos que le permitirán caracterizar los elementos necesarios para la construcción de los sólidos que le interesan. Durante el desarrollo de estos dos primeros libros Euclides expone tangencialmente el método por exhaución que según Arquímedes[37] habría sido descubierto por Eudoxo, también define y trabaja con los ángulos sólidos, que son regiones formadas por tres o más planos, así como algunos conceptos fundamentales como el de equidescomposición de cuerpos sólidos, en particular prismas y pirámides para definir un tipo de congruencia entre magnitudes de sólidos, congruencia además que Euclides percibe como una no generalización de lo que podía definir como congruencia en el plano, lo que probablemente le impida hablar de la esfera, el gran personaje ausente en la obra de Euclides, pues no es una mera generalización directa del círculo o de lo que cumple y debe cumplir la geometría plana. La geometría de la esfera sería mucho tiempo después estudiada por personajes importantes como Teodosio y Clavio. Parece claro en dónde pudo atorarse Euclides en su concepción de la esfera como mera generalización de sus resultados anteriores. Considérese, por ejemplo, que en la geometría del círculo dada una cuerda (una cuerda es la línea trazada de cualquier punto a cualquier otro de la circunferencia, si la cuerda pasa por el centro entonces es también el diámetro) y dado el ángulo y dirección que subtiende la cuerda se determina uno y sólo un círculo tenga como cuerda la dada y como ángulo interior (es decir, que el vértice del ángulo toca la circunferencia) el dado hay un círculo (y además único) que cumple (esto es equivalente a decir, como en los cursos de geometría analítica, que tres puntos determinan una circunferencia, recuérdese la ecuación de una circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$, así que una vez conocida la terna (x, y, r), es decir, las coordenadas del centro (x, y) y el radio r, la circunferencia queda determinada). Por supuesto, dada sola la cuerda no determina un solo círculo sino una infinidad (todas las circunferencias coaxiales, es decir, todas ellas que tienen como cuerda común la dada). De la misma forma, dado solo un ángulo es posible construir una infinidad de circunferencias, basta elegir un punto arbitrario sobre uno de los lados del ángulo y hacer pasar tantas circunferencias como se quiera que pase por dicho punto y por el vértice del ángulo. En principio, estos resultados de los libros III y IV de los Elementos de Euclides parecieran estar ajenos al ángulo recto, es decir, al quinto postulado y todo lo que de él se deduce. Sin embargo, es fácil ver por qué toda la geometría euclidiana del círculo depende también del ángulo recto ya que de en él se fundamentan sus propiedades características. Por ejemplo, sabemos que todo ángulo con vértice en la circunferencia y que subtiende una misma cuerda es igual a cualquier otro que tenga como vértice cualquier otro punto de la circunferencia y que subtienda la misma cuerda. Esto se debe a la relación que guardan estos ángulos con aquellos con vértice en el centro y que subtienden la misma cuerda. Sabemos, por supuesto, que aquel ángulo con vértice en la circunferencia es la mitad de aquel que subtiende la misma cuerda pero con vértice en el centro. Por lo tanto, si cualquiera es otro es la mitad del aquel en el centro, entonces tienen que ser iguales entre sí. Para probar todo ello se requiere del ángulo recto, ya que la suma de cualquier ángulo con vértice en la circunferencia más su ángulo suplementario, es decir, el que se encuentra del otro lado de la cuerda, deben sumar cuatro rectos, es decir, 360 grados, y ello depende de que la suma de los ángulos de cada triángulo de los dos triángulos en que se descompone cualquier cuadrilátero es dos rectos o 180 grados. A este tipo de cuadrilátero cuyos vértices pasan por una circunferencia se le conoce como cuadrilátero cíclico. Pero todo ello, depende, nuevamente, del ángulo recto, pues el hecho de que la suma de los ángulos interiores de un triángulo sea dos rectos o 180 grados es consecuencia del ángulo recto. Así, de todo ello, Euclides pudo preguntarse si de la esfera podía decirse lo mismo, por ejemplo, si dada una región esférica y el ángulo sólido que la subtiende quedaría determinada la esfera. ¿Qué implica considerar una región esférica? Que la geometría euclidiana sobre esa región pierde todo sentido en tanto el invariante del ángulo recto es imposible en ella, de alguna forma esto parece ser lo suficientemente problemático para su geometría, y lo es, como para siquiera considerarlo. ¿Habría alguna relación entre los ángulos sólidos dentro de la esfera? Tampoco parece poderse dar una respuesta fácil, al menos no una que sea una mera generalización directa de lo que sucede con el círculo. Mucho del problema proviene precisamente de la superficie de la esfera, aquello curvo que choca, y con toda razón, con la concepción de la geometría euclidiana, de las líneas rectas y del ángulo recto (nótese que la denominación de recto tanto en las líneas rectas como en los ángulos rectos tiene una misma connotación y significado, se conciben rectas y rectos en el plano, por eso una línea recta sobre la esfera, que en realidad sea curva, está fuera de cualquier consideración, de ahí, por ejemplo, que Saccheri en su contradicción al final de su libro[62] llamara curiosamente a esas líneas "rectas" (pero curvas), objetos que van en contra de la naturaleza de la línea recta cuando las analiza dentro de la hipótesis del ángulo agudo que, según él, lo llevó a la contradicción que esperaba.

2.2. El libro trece de Euclides

El libro XIII de Euclides trata, sin lugar a dudas, de un tema evidente, la geometría del espacio. Algunos creen que la estructura lógica de las demostraciones en el libro XIII difieren cualitativamente a las del resto de los libros ya que hace uso de un recurso hoy denominado método analítico, este método consiste en suponer que el problema está resuelto para entonces identificar las condiciones necesarias para que así fuera. Este recurso es explotado también en obras de Platón y Aristóteles (La República de Platón o los Textos Políticos de Aristóteles) y ampliamente estudiado por Pappus, pero ausente por completo de los libros anteriores de Euclides (del I al XII). El método analítico es la base y fundamento de la geometría analítica de Descartes y de gran parte del desarrollo moderno de las matemáticas con el uso de una técnica tan poderosa que le otorga el formalismo necesario, el álgebra. Piénsese en la traducción de un problema geométrico en una ecuación, la ecuación en sí misma representa la suposición de que se cumple una relación para luego encontrar qué valores la satisfacen y entonces resolver el problema. Según Pappus el método analítico puede identificarse por dos acciones que la componen y caracterizan, el análisis y la síntesis, en el análisis se parte del supuesto de que el problema está resuelto para luego encontrar lo necesario, luego en la síntesis se escribe el análisis pero invertido, de tal forma que entonces la solución del problema queda en el orden secuencial correcto, de los datos y relaciones conocidas a la solución final (que había sido supuesta cierta en el inicio del análisis). Esto no siempre es claro cuando se utiliza el método analítico, pero finalmente puede reducirse a este procedimiento por lo que en esencia, efectivamente, el método analítico puede ser siempre bien identificado a la manera de Pappus. La diferencia sustancial entre los 12 libros anteriores de Euclides con el decimotercero es que en los primeros Euclides expone, generalmente, una demostración constructiva sin manifestar nunca cómo fue ésta deducida. Es muy distinto encontrar la verdad que recorrerla. Una demostración es para Euclides y para el lector en general una secuencia, de hechos previamente demostrados o establecidos, con los suficientes argumentos para que sea verdadera, sin embargo, nunca se expone el camino por la cual se llega a ésta, lo cual trae consigo un problema, determinar si la demostración constructiva no somete o impone la verdad de una proposición. Es decir, no es posible asegurar que dicha construcción que pertenece al bagaje argumentativo de la demostración es única, o si no es única, que es efectivamente equivalente a cualquier otra de tal forma que cualquiera tenga como resultado la misma verdad y no una distinta, y además, podría sugerir que no existen otros caminos para encontrarla. Este problema es claro cuando parte de los argumentos demostrativos se introducen elementos geométricos que podrían estar sometiendo la verdad de una proposición más general que la instancia determinada por el diagrama o dibujo. En un análisis profundo de cada proposición de Euclides se pueden explorar los caminos que seguramente Euclides consideró para encontrar el que le permitiera asegurar la verdad de una proposición y las razones por las cuales no eligió otro camino o por qué prefirió uno sobre otro. Sin embargo, el libro XIII es en esencia distinto en este sentido, aunque no muy evidente en una lectura superficial, pues la forma de exponer una demostración es suponiendo su verdad para luego buscar las condiciones que la hacen verdadera, con ello se expone no sólo la verdad de una proposición sino el camino para llegar a ella. Es decir, en la misma demostración se exponen los argumentos de la verdad así como el camino para llegar a ella. En este sentido las demostraciones del libro XIII contienen doble información.

El inicio del libro XIII contiene curiosas particularidades, en principio Euclides parece regresarnos a la geometría plana cuando nos presenta las primeras siete proposiciones en donde expone la manera de, por medio de la proporción extrema y media (conocida también como proporción áurea), triplicar, cuadruplicar, y quintuplicar directamente el área de un cuadrado. En principio esto pareciera no tener relación alguna con el desarrollo del estudio y exposición para la construcción de los sólidos que le interesan (los poliedros regulares o sólidos platónicos), sin embargo basta releer con atención y continuar con la lectura para percatarse de la peculiaridad de los números 3, 4 y 5 (triplicar, cuadruplicar, y quintuplicar) que son, por si acaso el lector no se había percatado, el número de lados del triángulo, del cuadrado y del pentágono, es decir, exactamente los polígonos que componen, de los cuales están hechos, los únicos cinco sólidos platónicos o poliedros regulares que pueden construirse. En la proposición ocho demuestra que en un pentágono dos líneas rectas trazadas desde vértices consecutivos (dejando un vértice en medio) se cortan una a la otra en proporción extrema y media (áurea) y que los segmentos mayores son iguales al lado del pentágono. Luego algunas otras propiedades referentes al mismo pentágono.

Luego comienza a construir los poliedros regulares, comienza por la que él llama pirámide (tetraedro pues pirámide puede confundirse con la figura cuya base es un cuadrado y el resto de sus lados triángulos equiláteros, sin embargo éste no es un poliedro regular), omite el cubo pensando en que su construcción es obvia pues es el único cuyos ángulos en las aristas son rectos (una arista es la unión de dos caras o lados y forman un ángulo que se conoce como ángulo diedro), además es un caso particular de todos los paralepípedos que construyó previamente (un paralepípedo es un sólido formado por planos paralelos opuestos dos a dos). De hecho en el cubo todos los ángulos involucrados son rectos y es el único poliedro regular que es a su vez un prisma, los prismas fueron explorados por Euclides al principio de su exploración de los cuerpos sólidos. Luego continúa con el octaedro para seguir con aquellos que parecen un tanto más complicados de construirse. El siguiente a construir es el icosaedro, el de 20 caras, para terminar con el de 12, el dodecaedro.

Figura 2.2: Los *Elementos* de Euclides (Euclidis-Elementorum libri XV), Hieronymum de Marnef & Guillaume Cavelat, París, 1573. Catalogado por Thomas-Stanford, *Early Editions of Euclid's Elements*, n. 32. Edición mencionada en la traducción de Heath. Colección personal de H. Zenil.

2.3. El orden importa

Podría obviarse un hecho que en principio pudiera parecer trivial, el orden en que Euclides construye los poliedros regulares. Sin duda el orden que elige es el que cualquiera hubiera elegido teniendo en cuenta el número de caras, de menor a mayor número, a excepción de los últimos dos, cuya construcción, siguiendo un probable orden por su número de caras, lo hace en el orden inverso. Parece obvio que el orden que elige Euclides para construir los poliedros se basa en la complejidad de cada uno, entendida como la cantidad de caras, aristas y vértices, un hecho no poco relevante en el sentido de que Euclides tenía bien presente un orden más topológico que geométrico. Por supuesto no estoy sugiriendo que Euclides tuviera ya algún atisbo de topología, sino que este orden más topológico fue obviado por Euclides como lo hubiera obviado cualquiera de nosotros sin un análisis de la relación entre el número de caras, aristas y vértices. Al contrario, parece haber tenido, sin duda alguna, mucho más peso un orden geométrico en sus construcciones. Es decir, empieza con la construcción de los poliedros regulares cuya cara es un triángulo, luego como segundo criterio de orden los construye por el número de triángulos de cada uno, iniciando por el tetraedro que tiene cuatro, luego por el octaedro de ocho y una vez terminado el octaedro opta por construir el icosaedro que contiene 20 triángulos en lugar del dodecaedro que contiene 12 pentágonos. Sería interesante saber dónde hubiera colocado Euclides al cubo e hexaedro, considerando que está formado por cuadrados y que ocupa seis de éstos. Parecen haber tres opciones, siguiendo el probable orden elegido por Euclides. Pudo haber elegido al cubo como el primer poliedro regular a construir en tanto su complejidad, como ya señalamos, parece ser trivial, más aún después de haber construido varios paralepípedos (un cubo es también un paralepípedo cuyos ángulos entre todos los planos son rectos), sin embargo, sin considerar este hecho pudo haberlo colocado al principio por la facilidad de construirlo, pudo haberlo colocado antes del dodecaedro pensando en que no está formado por triángulos como los primeros tres sólidos y por tanto dejarlo al final pero antes del dodecaedro cuyos lados son pentágonos. Es decir, Euclides parece haber utilizado dos criterios de orden. El primer criterio parece ser topológico en el sentido de menor a mayor complejidad, por tanto es el tetraedro el elegido, luego aplica otro criterio que en caso de conflicto prevalece, es decir, luego del tetraedro pudo haber venido el hexaedro o cubo como debió haber construido el dodecaedro antes del icosaedro pero decidió continuar aplicando un criterio más bien geométrico, el hecho de que el octaedro también está formado por triángulos. Esto, aunque pudiera parecer ocioso, nos dice que Euclides, aunque pudo haber deducido de su propia geometría, propiedades que ahora llamaríamos topológicas, no tenía los elementos para hacerlo en tanto sus preocupaciones e intereses se ocupaban de las propiedades geométricas. Aún así es interesante el hecho de que dentro de sus criterios geométricos pudo haber habido algunas consideraciones topológicas que obvió y que muestran la forma en que ubicó su atención y dirigió sus esfuerzos matemáticos.

Por otro lado, en cada una de sus construcciones usa al personaje ausente como auxiliar: la esfera. Cada proposición incluye, además de la forma para construir un sólido regular, la forma para inscribirlo dentro de una esfera. Sin embargo, al usar a la esfera como elemento auxiliar, que incluso pareciera necesaria, para la construcción de los sólidos, se ahorra una construcción o método adicional para la inscripción de éste en una esfera. Pareciera que una vez que resuelve el problema de construir los sólidos regulares con la ayuda de la esfera, regresa al planteamiento de la proposición para incluir que además de construirlos está proveyendo de un método para inscribirlos, por ello podría explicarse por qué, como lo hizo en los libros dedicados al círculo, no propone el problema de una vez inscritos circunscribirlos, es decir, encerrar esferas dentro de los poliedros que ha construido. Tampoco dedica espacio a preguntarse y resolverse la posibilidad de que dado un poliedro se quiera inscribir (o circunscribir) a éste en una esfera. Sólo considera, producto del uso auxiliar y necesario en su construcción, dada una esfera, construir el poliedro inscrito en ella (y por tanto construirlo a secas). Sin embargo esto implica que siempre que Euclides quiera construir un poliedro requerirá de una esfera, es decir, dada una esfera, construye el poliedro, pero no el poliedro sin el uso de la esfera. La esfera no sólo le proporciona el tamaño del poliedro a construir sino que le permite la construcción misma del poliedro. Euclides hace entonces de un elemento que debió ser auxiliar, necesario para la construcción de un objeto, en principio, ajeno totalmente al necesario. De donde surge nuevamente y finalmente la interrogante, que parcialmente podemos contestarnos mediante esta lectura, de por qué un elemento que hizo indispensable en su geometría de los sólidos regulares, no es analizado por sí mismo, a mérito propio. En otras palabras, Euclides pudo haber concluido mucho más del libro XIII, el único que da la impresión (tal vez falsa) de estar incompleto, y que pudo haber habido, otros libros dedicados a la esfera. No a la geometría sobre la esfera, pero a la esfera como objeto con volumen y como objeto geométrico inmediato luego del estudio de los sólidos regulares.

Una de las innovaciones de los Elementos, es que Euclides no parecía tener una agenda. La mayoría de los textos, en gran medida no matemáticos hasta ese tiempo que se conocen, tenían alguna motivación filosófica, y cuando eran utilizados objetos matemáticos, se les utilizaba con la intención de mostrar o justificar una u otra posición ontológica. En el caso de Euclides, sin embargo, la agenda está en el mejor o peor de los casos, oculta debajo o entre las líneas. Por la secuencia que sigue, parece claro que hay una sucesión u orden matemático hacia la geometría del espacio y los objetos que el espacio contiene o puede contener, notablemente por la discusión final de los poliedros regulares (Euclides no empieza con ellos, construye un largo camino hacia ellos). Se puede mostrar que las construcciones de Euclides requieren cada vez un mayor número uso de teoremas previamente demostrados [70] pág. 1176b. El teorema de Euclides que requiere la prueba más larga (en número de teoremas requeridos) es precisamente el último que muestra que sólo pueden existir cinco sólidos platónicos. La innovación en la obra de Euclides consiste en convencer empezando por unas cuantas proposiciones de las que nadie en su juicio "sano" podría dudar, para luego realizar proposiciones más elaboradas basadas en construcciones consecutivas de los hechos en los que se acordó en un principio.

Es claro también que intencionalmente Euclides omite toda referencia, fuera de su uso auxiliar o exclusivamente necesario, a cualquier propiedad que involucre a la esfera y a la esfera misma. A diferencia de los libros dedicados al círculo en los que tanto inscribe como circunscribe polígonos y describe propiedades del círculo por sí mismo (intrínsecas al círculo dentro de la geometría euclidiana). Sin embargo, también puede deducirse más o menos las razones por las cuales esto sucedió (descartando por supuesto la posibilidad de que se le haya acabado la vida a Euclides o cualquier otro evento fortuito o circunstancial). El problema es que muchas de las propiedades del círculo no son fácilmente generalizables a la esfera. En principio su complejidad es mucho mayor, hablar de la geometría de la esfera es hablar incluso de su superficie, en donde las propiedades que descansan sobre el quinto postulado y la existencia del ángulo recto ya no es posible, al menos no de manera directa pues pareciera poderse hablar del ángulo recto en tanto la esfera puede seguir siendo un objeto tridimensional de la geometría euclidiana, sin embargo representa retos para los cuales la geometría euclidiana de Euclides (no es pleonasmo) parece no haber estado preparada, al menos no en una secuencia coherente de eventos históricos en el desarrollo de las matemáticas. En principio podemos decir que representaba un reto importante el hecho de que sobre una esfera (en su superficie) parece haber una geometría distinta incluso aunque ésta sea contenida en una geometría tridimensional euclidiana. El problema es nuevamente, un asunto de propiedades intrínsecas. No será sino hasta que Legendre empieza a sentirse más o menos cómodo mezclando geometrías plana y esférica pasando casi indiscriminadamente del espacio bidimensional (sobre la esfera o sobre un plano) a la tridimensional (un ángulo sólido, por ejemplo) que Legendre se ocupará de esta cuestión. Sin embargo, no es Legendre quien primero estudia la esfera por sí misma, pero sí quien parece empezar a reconocer unas propiedades de otras y por tanto atreverse a aventurarse, no sin tropezarse, a explorar una u otra alternativa geométrica. Vale entonces la pregunta de cuánto está resuelto acerca de las propiedades cuantitativas de la geometría euclidiana (tanto plana como espacial) en la obra de Euclides. Finalmente Euclides nos deja muchos recursos invaluables para medir magnitudes pero también deja incompleto lo que pudo concluir y deducir él mismo de su geometría (y que ocuparían a muchos matemáticos por siglos). Euclides proporciona métodos para calcular longitudes de aristas, la superficie de los poliedros en tanto dice la forma de las caras y proporciona las áreas de éstas, incluso los ángulos de las caras pero parece no poder concluir para lo que se preparó en gran parte de los 13 libros, el volumen de los poliedros. Probablemente este fue el gran pendiente de Euclides al final de su vida, así como el Pitágoras la existencia de los números irracionales (obsérvese que el mismo término irracional refleja la incomodidad de Pitágoras hacia dichos objetos sin racionalidad alguna para él, objetos que aún para las matemáticas del siglo XXI siguen siendo un tanto misteriosos, discutibles e imponentes). No es especulación alguna la descripción de un Euclides desesperado por encontrar la fórmula para calcular los volúmenes de sus recién construidos poliedros regulares, pues él mismo parece encontrar otros resultados (comparaciones entre los volúmenes de los sólidos) que incluye en el libro XIII al final de las construcciones, éstos resultados son, seguramente, producto de la búsqueda de lo que probablemente nunca encontró.

Capítulo 3

Construcciones y restricciones

Parte de la atracción matemática y filosófica por los sólidos platónicos objetos proviene del hecho de que en el espacio (euclidiano) tridimensional, sólo pueden existir cinco y no más poliedros regulares o sólidos platónicos. Así lo muestra Euclides probablemente de una demostración previa (el trabajo de Platón sugiere que ya se sabía). Ahora bien, dado que la importancia de los poliedros regulares o sólidos platónicos radica en el conocimiento de que sólo cinco y no más son posibles, no se puede afirmar que estos poliedros, más allá de objetos geométricos ornamentales o lúdicos (por ejemplo, en la forma de dados) hayan sido descubiertos con anterioridad, aunque ello no se descarte. No es, sin embargo, la conciencia de la existencia de ellos como un conjunto de figuras que comparten propiedades en común, que ninguna otra figura puede compartir, que el descubrimiento de estas figuras como tales puede atribuirse. En este caso, si como algunos sugieren, tres de los poliedros fueron descubiertos por Pitágoras y los otros dos por Teeteto, puede ser que la motivación de sus propiedades matemáticas que los caracterizan haya surgido antes de que se supiera que sólo podían haber cinco, y por lo tanto es razonable pensar que su descubrimiento data de ese periodo.

Una demostración matemática consiste en mostrar de manera clara la veracidad o falsedad de una proposición con una secuencia lógica de argumentos que son axiomas o proposiciones demostradas con anterioridad. En la proposición 18 del libro XIII de los Elementos, la última proposición de sus trece libros. Esta restricción, sin duda, determina y restringe las posibles construcciones que podemos hacer en nuestro espacio, el espacio en que vivimos, otorgándole la propiedad de realidad en el sentido de que es aquello que nos opone resistencia, en este caso, resistencia a construir un sexto sólido Platónico.

Desdoblando las figuras, se puede remarcar fácilmente la razón por la cual sólo pueden existir cinco sólidos platónicos y por qué no puede, por ejemplo, existir uno con hexágono de cara.

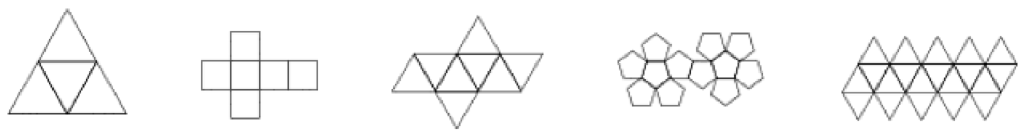


Figura 3.1: Sólidos platónicos desdoblados. A la manera que describió Platón para trazar, recortar y armar los cinco sólidos platónicos.

Por ejemplo, para construir un tetraedro, el cual consiste en cuatro triángulos equiláteros, se debe comenzar por construir los triángulos y colocarlos en cada uno de los lados de uno en particular. Luego se doblarán para juntar los bordes y armar el sólido.

El espacio disponible alrededor de un vértice es de 360 grados (una vuelta completa). Entonces, sabemos que para formar un ángulo de un sólido la suma de los ángulos en cualquier vértice debe ser menor a 360 grados, de otra forma no habrá manera alguna de doblarlo y cerrarlo. El triángulo es el polígono con menos lados posibles pues con solo dos rectas es imposible construir un polígono. Comenzaremos entonces construyendo poliedros regulares que tengan como caras triángulos equiláteros. Cuando se unen tres triángulos equiláteros de modo que se toquen en un solo vértice del cual emerjan, la suma de los ángulos de todos los triángulos alrededor del vértice es $3(60) = 180$ grados, ya que cada uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero mide 60 grados, así entonces podemos construir un tetraedro (colocando el resto de los triángulos), si colocamos cuatro triángulos $(4(60) = 240$ grados) alrededor de un vértice se formará el octaedro, y con cinco triángulos equiláteros $(5(60) = 300 grados)$ el icosaedro, pero con seis triángulos (6(60) = 360 grados) ya no es posible pues no queda espacio alguno para cerrar el poliedro y nuestros triángulos quedan pegados al plano, compartiendo cada uno de sus lados, formando lo que se conoce como un teselado (figuras que cubren completamente un plano o espacio). Si no es posible con seis triángulos equiláteros, mucho menos lo es con más triángulos, así que no vale la pena ni intentarlo, pues quedarán unos encima de los otros. Ahora, si usamos al cuadrado, que es el siguiente polígono regular después del triángulo equilátero resulta que también necesitamos de tres para cerrar el poliedro, así tres cuadrados (3(90) = 270 grados) forman un cubo o hexaedro, mientras que con cuatro $(4(90) = 360 grados)$ ya no es posible por que sus ángulos suman 360 grados y no queda espacio para cerrarlo, por lo tanto, los cuadrados forman también un teselado. En cambio, cuando se unen tres pentágonos alrededor de un vértice, la suma de los ángulos será 3(108) = 324 grados, ya que cada uno de los ángulos internos es de 108 grados, de manera que si los tres pentágonos colocados de la forma en que se describió suman 324 grados, quedan 36 grados de espacio vacío para unir los lados de los pentágonos y formar un poliedro que podrá cerrarse en el espacio. Pero además, como solamente quedan disponibles 36 grados ya no es posible insertar otro pentágono en medio, por lo que un pentágono no forma un teselado. En cambio, si se colocan tres hexágonos, la suma de los ángulos alrededor del vértice en común será de 3(120) = 360 grados, quedando entonces los tres hexágonos sobre un mismo plano tocándose uno con otro lado con lado, lo cual impide doblar y cerrar el poliedro a falta de espacio, en cambio, el hexágono si forma un teselado. Todo esto nos proporciona información valiosa y fundamental de nuestro espacio ya que nos proporcionan información de lo que cabe en él en el sentido más literal y profundo.

De los Elementos de Euclides, al final de la proposición 18 del libro XII se puede leer:

> “Digo ahora que, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares iguales entre sí.

> “Porque no se construye un ángulo sólido con dos triángulos o, en absoluto, con dos planos. Sino que el ángulo de la pirámide se construye con tres triángulos, el del octaedro con cuatro, el del icosaedro con cinco; pero no se construirá un ángulo sólido mediante seis triángulos equiláteros y equiangulares (colocados) en un solo punto; porque si el ángulo del triángulo equilátero es dos tercios de un recto, los seis serán iguales a dos rectos; lo cual es imposible, porque todo ángulo sólido es comprendido por menos de cuatro rectos [XI.21]. Por lo mismo, tampoco se construye un ángulo sólido con más de seis ángulos planos. Y el ángulo del cubo es comprendido por tres cuadrados; por cuatro es imposible, porque serán a su vez cuatro rectos. Y el (ángulo) del dodecaedro es comprendido por tres pentágonos equiláteros y equiangulares; por cuatro es imposible, porque, siendo el ángulo del pentágono un recto más un quinto, los cuatro ángulos serán mayores que cuatro rectos; lo cual es imposible. Y un ángulo sólido tampoco será comprendido por otros polígonos en razón de la misma imposibilidad.
>
> “Por consiguiente, aparte de las cinco figuras antedichas, no se construirá otra figura sólida comprendida por (figuras) equiláteras y equiangulares. Q.E.D.”

Debe entenderse equiláteros y equiangulares simplemente como regulares en tanto el término actual regular se refiere a una figura con lados iguales (equilátero) y ángulos iguales (equiangular), así cuando dice pentágono equilátero y equiangular Euclides se refiere a un pentágono regular. Por otro lado, de la definición nueve del libro XI se desprende que Euclides concibe y llama planos a los lados de los sólidos. Sin embargo, también es frecuente el hecho de que Euclides trate a los planos como superficies extendidas indefinidamente (que no es lo mismo que infinitamente), un ejemplo de esto es el uso de planos en la proposición 5, proposición que además llama la atención por el hecho de que se hacen dos construcciones (una prolongación del plano y la incidencia de un plano sobre otro en una línea), que Euclides no postula con anterioridad pero que son fundamentales para su demostración. De hecho, que la incidencia de un plano sobre otro sea, o ningún punto (si son paralelos) o una línea, determina la dimensionalidad (3) del espacio (en menos de 3 dimensiones no pueden haber dos planos, en 4 dimensiones un plano puede cortarse con otro en un solo). Hilbert reconoce este hecho fundamental y lo incluye en su grupo de axiomas de incidencia (si dos planos comparten un punto, comparten otro) en su libro Fundamentos de la Geometría publicado en 1899. De hecho para Hilbert lo único que se requiere para determinar la dimensionalidad del espacio son las relaciones de incidencia. Aquí es oportuno mencionar una famosa frase del matemático Félix Klein: "La geometría proyectiva es toda la geometría". La geometría proyectiva contiene al resto de las geometrías, euclidianas (afines) y no euclidianas (hiperbólica y elíptica). De donde entonces, al hacer restricciones sobre la geometría proyectiva, se obtienen el resto, incluyendo a la Euclidiana. Este hecho es fundamental, por ejemplo, para el desarrollo de los Fundamentos de la Geometría, ya que Hilbert al percatarse de ello reescribe su versión axiomática de la geometría euclidiana en términos de precisas restricciones sobre la geometría proyectiva en un trabajo a la inversa. En una aproximación hermenéutica de excelencia, ya que con el conocimiento moderno de la geometría proyectiva reconstruye una geometría antigüa imponiendo restricciones sobre la generalización, una interpretación matemática moderna de una geometría de tiempos remotos.

Por ello es que el trabajo de Hilbert llega a finales del siglo XIX luego de los trabajos de Pasch[52] (Vorlesungen ́uber nuere Geometrie, 1882), Peano[53] (I principii di geometria, logicamente esposti, 1889) y Pieri (Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo, 1899) fuera posible una axiomatización de la geometría más acorde con la exigencia creciente del rigor matemático y más completa en el sentido de que fue hasta entonces que las geometría podían ser identificadas por el grupo de transformaciones que permiten, o dicho en otras palabras, clasificarlas por lo que se puede hacer, permitir o construir y cómo todas ellas están relacionadas o contenidas en un marco más grande que proporciona una visión más amplia. Por lo tanto, no se puede acusar a Euclides a la geometría euclidiana antigua de falta de rigor en tanto no se contaba con esa visión global que pudiera determinar el tipo de axiomatización formal necesaria y suficiente, al contrario, los Elementos es la obra magistral en donde hablar de axiomatización o fundamentos de las matemáticas comienza a tener sentido.

3.1. Teselados

De hecho, seguido del capítulo anterior, una pregunta íntimamente relacionada con el proceso de desdoblado de los poliedros regulares está relacionada directamente con las propiedades de otro espacio, un espacio contenido en el nuestro: el plano. Se trata de las figuras que dispuestas una junto a la otra se acomodan de tal forma que ocupan todo el plano, es decir, forman un *teselado*. La respuesta es corolario de lo que hemos discutido con anterioridad y nuestro encuentro con los cinco sólidos platónicos, y es que son sólo tres los polígonos regulares que producen teselados en el plano euclidiano.

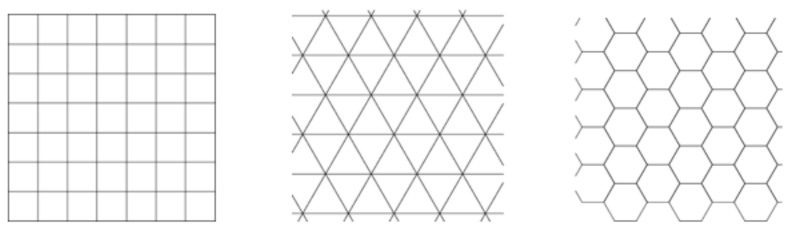


Figura 3.2: Teselados posibles en el plano euclidiano: de cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos.

Cuando transportemos nuestras preguntas a espacios con un mayor número de dimensiones, la respuesta estará siempre relacionada con el número de poliedros regulares que al desdoblarse en el espacio con una dimensión menos lo ocupan todo sin dejar suficiente espacio para aumentar el número de *caras* sin que se superpongan, que evidentemente está relacionado con el concepto de teselado. Así, curiosamente, un camino para conocer el número de teselados que pueden haber en nuestro espacio tridimensional consiste en hacerse la pregunta en el espacio de 4 dimensiones y el número de poliedros regulares que en ese espacio son posibles.

También existen teselados semiregulares, formados por dos o más polígonos regulares y colocados en el mismo orden en cada vértice. De un razonamiento como el que hemos hecho anteriormente, y del hecho de que ciertas combinaciones de polígonos regulares no permiten espacios intermedios para acoplarse a ningún otro polígono regular, se deduce que sólo ocho teselados semiregulares son posibles en el plano, ya que ninguna otra combinación de polígonos regulares permite la existencia de otros teselados diferentes a pesar del número infinito de polígonos regulares posibles y por lo tanto el número infinito de configuraciones posibles. Los polígonos que estos 8 teselados semiregulares utilizan son combinaciones de triángulos, cuadrados, octágonos y dodecágonos.

3.2. Simetría y perfección

Ahora bien, el número de dimensiones de un espacio no sólo determina el número de poliedros regulares, también determina una lista de todo tipo de poliedros, por ejemplo, el número de poliedros arquimedianos (llamados también semiregulares). Es decir, aquellos sólidos convexos (como los platónicos) con caras regulares (no necesariamente iguales) y mismo número de aristas que concurren en cada vértice (propiedad que denominada *vértices uniformes*). Un polígono es convexo si es una región convexa, es decir, dados dos puntos cualesquiera en su interior, el segmento rectilíneo que los une está también contenido en el interior. Si además todos los lados y ángulos del polígono son iguales entre sí se dice que el polígono es regular. La mayoría (siete) de los sólidos arquimedianos se obtienen truncando los sólidos platónicos, substituyendo vértices opuestos de los cinco sólidos platónicos por uno o más polígonos regulares. Los otros dos sólidos arquimedianos se pueden obtener mediante sucesivas operaciones de truncamiento y desplazamiento de las caras de un cuboctaedro. Por las mismas razones por las que sólo hay cinco sólidos platónicos, sólo hay 13 sólidos arquimedianos.

Los únicos poliedros convexos posibles restantes son los prismas y antiprismas, pero debido a que éstos forman una familia infinita de posibles poliedros ya que, a

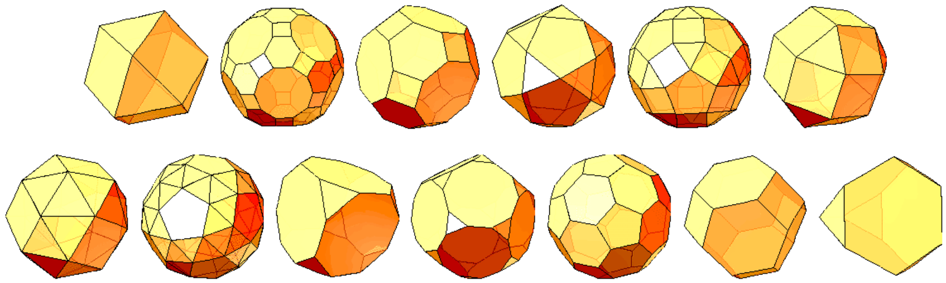


Figura 3.3: Los 13 sólidos arquimedianos.

diferencia de los otros, pueden tener cualquier altura, cada uno es estructuralmente distinto a los otros. En otras palabras, descartando el tamaño de, por mencionar un ejemplo de entre los sólidos platónicos, el tetraedro, éste es estructuralmente igual que cualquier otro ya que sólo puede variar en tamaño pero una vez magnificado o disminuido se le puede *superponer* a cualquier otro tetraedro. Se puede considerar, de hecho, que excepto por los prismas y antiprismas, cada poliedro platónico o arquimediano es uno y el mismo, excepto por una transformación de escala (ya que es característica de los poliedros regulares y semiregulares ser simétricos bajo ciertas rotaciones, que es lo que los hace especiales a cualesquiera otros objetos). Cuando dos objetos matemáticos son estructuralmente iguales en el sentido descrito (bajo transformaciones simétricas de escala, reflexión, traslación o rotación), se dice que son isomorfos, y por lo tanto se les considera el mismo y único objeto.

Para entender el fenómeno imaginemos una esfera monocromática. Si por un instante la deja de ver, no hay forma de que sepa si alguien la rotó en cualquier dirección. En el caso de los poliedros regulares, ciertas rotaciones mantienen, de la misma forma que a la esfera, el objeto indistinguible. Y no hay más objetos ni con mayor número de transformaciones que los preserven que estos poliedros.

En el cubo, por ejemplo, cada cara puede intercambiarse por cualquier otra, con seis caras entonces el cubo tiene 6×4 posibles transformaciones que lo hacen verse igual. De hecho el cubo tiene 48 simetrías, 24 de las cuales implican desdoblar el cubo e invertir las caras exteriores por las interiores y el resto de las 24 pueden realizarse sin destruir (o desdoblar y redoblar del cubo) haciendo rotaciones, cada una de 90 grados a la vez.

Por último, están los sólidos de Johnson, también convexos, que se obtienen al quitar la restricción de vértices uniformes y que no son ni platónicos ni arquimedianos (ni los prismas ni antiprismas). De estos, Zalgaller (en 1969) demostró que son sólo 92 los posibles. Sólo polígonos de 3, 4, 5, 6, 8 o 10 lados son utilizables, las razones son las mismas que restringen en número a los sólidos platónicos y que determinan finalmente, o son consecuencia de, lo que cabe en nuestro espacio.

Hay que remarcar que, aunque hemos estado hablando de ello todo el tiempo, es la simetría de estos objetos lo que los hace especiales. Una esfera es simétrica bajo cualquier transformación, por lo tanto geométricamente perfecta. El interés de los poliedros es que luego de la esfera son éstos los objetos más simétricos posibles.

Aunque no profundizaremos en ello, las posibles rotaciones que preservan un objeto forman un grupo que es estudiado por sí mismo como objeto matemático. De hecho la teoría de grupos es el estudio matemático de las simetrías. Es llamado de *grupos* porque estudia *grupos* de operaciones de simetría.

3.3. Los cinco elementos

De hecho, con la intención de explicar la creación del Universo, Platón asocia en el Timeo a cada uno de los poliedros regulares uno de los elementos esenciales descritos inicialmente por Empédocles: fuego, tierra, aire y agua. A cada objeto casi perfecto lo relacionó con un elemento fundamental del mundo. Así al tetraedro lo relacionó con el fuego, al cubo o hexaedro con la tierra, al octaedro con el aire y al icosaedro con el agua; al quinto, el dodecaedro, lo relacionó con el universo en su conjunto. Platón especuló acerca de su perfección simétrica como bloques constructores de la naturaleza, y por lo tanto, consideró a estas formas como los componentes fundamentales del Universo. Curiosamente aunque esta concepción acerca de los poliedros regulares parece un tanto absurda y por supuesto anticuada varias veces más se han utilizado para dar explicaciones del Universo, así lo hizo Kepler con su modelo geométrico del Cosmos. Aún en la actualidad son utilizados para explicar formas y estructuras, desde cuerpos virales y enlaces moleculares hasta la estructura del Universo debido a fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo producto de la llamada gran explosión.

Figura 3.4: Placa conmemorativa en una residencia cerca del puente Carlos en Praga, República Checa. Foto H. Zenil, 2011.

Según lo que en el Timeo de Platón se expone, el mundo real es una copia imperfecta del mundo perfecto, el de las ideas hecha por el Demiurgo, ser inteligente y bueno al que le atrae la belleza y trata de recrearla. Este personaje crea en primer lugar el alma del mundo y la esfera celeste (lo hace dándole forma esférica, la más perfecta) en cuyo centro está la Tierra. Después se ocupa de la materia con la que está hecho el mundo; según se creía éste se compone de cuatro elementos: fuego, tierra, aire y agua, que han de tener la propiedad de ser "sólidos" (pues las cosas no solamente son planas sino que tienen profundidad) y han de ser capaces de recomponerse unos en otros. Puesto que han de ser sólidos, esto es, limitados por planos y un plano está compuesto por piezas sencillas (principalmente triángulos), el Demiurgo elige de éstos los más bellos: el triángulo rectángulo (con un ángulo recto) e isósceles (con dos lados iguales) y el triángulo rectángulo escaleno que posee la propiedad de tener la hipotenusa del doble de longitud que uno de sus catetos. A partir de ellos construye el triángulo equilátero y, con estas piezas, a tres de los sólidos: el tetraedro, el octaedro y el icosaedro. Con cuatro triángulos rectángulos isósceles construye el cuadrado y con seis de éstos cuadrados al cubo.

Extracto del “Timeo” de la traducción en español:

> “... Antes de la creación, por cierto, todo esto carecía de proporción y medida. Cuando dios se puso a ordenar el universo, primero dio forma y número al fuego, agua, tierra y aire, de los que, si bien había algunas huellas, se encontraban en el estado en que probablemente se halle todo cuando dios está ausente. Sea siempre esto lo que afirmamos en toda ocasión: que dios los compuso tan bellos y excelsos como era posible de aquello que no era así. Ahora, en verdad, debo intentar demostraros el orden y origen de cada uno de los elementos con un discurso poco habitual... En primer lugar, creo que para cualquiera está más allá de toda duda que fuego, tierra, agua y aire son cuerpos. Ahora bien, toda forma corporal tiene también profundidad. Y, además, es de toda necesidad que la superficie rodee la profundidad. La superficie de una cara plana está compuesta de triángulos. Todos los triángulos se desarrollan a partir de dos, cada uno con un ángulo recto y los otros agudos. Uno tiene a ambos lados una fracción de ángulo recto dividido por lados iguales, el otro tiene partes desiguales de un ángulo recto atribuida a lados desiguales... suponemos que éste es el principio del fuego y de los otros cuerpos... Ciertamente, debemos explicar cuáles serían los cuatro cuerpos más perfectos, que, aunque disímiles entre sí, podrían nacer unos de otros cuando se desintegran. En efecto, si lo logramos, tendremos la verdad acerca del origen de la tierra y el fuego y de sus medios proporcionales. Pues no coincidiremos con nadie en que hay cuerpos visibles más bellos que éstos, de los que cada uno representa un género particular. Debemos, entonces, esforzarnos por componer estos cuatro géneros de cuerpos de extraordinaria belleza y decir que hemos captado su naturaleza suficientemente...”

Debe haber cuatro elementos por el siguiente razonamiento, según Platón: las cosas deben tener fuego, puesto que se ven, y tierra, puesto que son materiales;

dos cosas necesitan de una tercera para poder ser unidas. Si el universo fuese plano bastaría con un tercer elemento, pero, como tiene profundidad, necesita de otro más para poder hacer esta unión. Así, para unir el fuego y la tierra se precisan otros dos: el aire y el agua. Analizando las propiedades de los elementos y la proporción en la que deben estar en la naturaleza, llega a la conclusión de que los átomos de fuego son tetraedros, los de tierra son cubos, los de aire octaedros y los de agua icosaedros. Queda una única combinación, el dodecaedro, que lo reserva para el Universo.

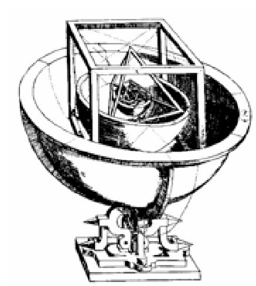


Figura 3.5: Dibujo realizado por Kepler en su libro Harmonice Mundi (1619) con la intención de explicar las distancias entre planetas interponiendo los cinco sólidos platónicos entre los seis planetas entonces conocidos.

En esencia, los integrantes más elementales son los triángulos rectángulos isósceles y los escalenos. Puesto que el fuego, el agua y el aire están integrados por escalenos, se pueden romper en sus escalenos y recombinarse entre sí de modo que se genera un ciclo de reacciones circular al no poderse crear una situación de equilibrio.

> "A partir de todo aquello cuyos géneros hemos descrito antes, muy probablemente se daría lo siguiente. Cuando el fuego choca con la tierra y con su agudeza la disuelve, ésta se trasladaría, ya sea que se hubiera diluido en el mismo fuego o en una masa de aire o de agua, hasta que sus partes se reencontraran en algún lugar, se volvieran a unir unas con otras y se convirtieran en tierra–pues nunca pasarían a otra especie–, pero si el agua es partida por el fuego, o también por el aire, es posible que surjan un cuerpo de fuego y dos de aire. Cuando se disuelve una porción de aire,

sus fragmentos darían lugar a dos cuerpos de fuego. A la inversa, cuando el fuego, rodeado por el aire o el agua o alguna tierra, poco entre muchos, se mueve entre sus portadores, lucha y, vencido, se quiebra; dos cuerpos de fuego se combinan en una figura de aire; mas cuando el aire es vencido y fragmentado, de dos partes y media se forjará una figura entera de agua. Reflexionemos esto nuevamente así: cuando el fuego encierra alguno de los otros elementos y lo corta con el filo de sus ángulos y sus lados, dicho elemento deja de fragmentarse cuando adquiere la naturaleza de aquél –pues nada es capaz de cambiar a un género semejante e igual a él ni de sufrir nada a causa de lo que le es semejante e idéntico–, pero mientras el que se convierte en otro elemento, aunque inferior, luche contra uno más fuerte, no cesa de disolverse. Y, a su vez, cuando unos pocos corpúsculos más pequeños, rodeados por muchos mayores, son destrozados y se apagan, si mutan en la figura del que domina, cesan de extinguirse y nace del fuego el aire y del aire, el agua. Pero siempre que se concentran y alguno de los restantes géneros los ataca y combate, no cesan de disolverse hasta que, batiéndose en retirada y dispersados, huyen hacia lo que es del mismo género, o, vencidos, de muchos cuerpos pequeños surge uno semejante al vencedor y permanece junto a él. Además, todos los elementos cambian de región por estos fenómenos. En efecto, la cantidad principal de cada uno de los elementos está separada en un lugar propio por el movimiento del receptáculo y cuando unos corpúsculos se diferencian de sí mismos para asemejarse a otros, se trasladan, a causa de la vibración existente, al lugar donde se encuentran los cuerpos a los que eventualmente se han asemejado.”

“... Debemos pensar que todas estas cosas son en verdad tan pequeñas que los elementos individuales de cada clase nos son invisibles por su pequeñez, pero cuando muchos se aglutinan, se pueden observar sus masas y, también, que en todas partes dios adecuó la cantidad, movimientos y otras características de manera proporcional y que todo lo hizo con la exactitud que permitió de buen grado y obediente la necesidad. A partir de todo aquello cuyos géneros hemos descrito antes, muy probablemente se daría lo siguiente. Cuando el fuego choca con la tierra y con su agudeza la disuelve, ésta se trasladaría, ya sea que se hubiera diluido en el mismo fuego o en una masa de aire o de agua, hasta que sus partes se reencontraran en algún lugar, se volvieran a unir unas con otras y se convirtieran en tierra–pues nunca pasarían a otra especie–, pero si el agua es partida por el fuego, o también por el aire, es posible que surjan un cuerpo de fuego y dos de aire. Cuando se disuelve una porción de aire, sus fragmentos darían lugar a dos cuerpos de fuego. A la inversa, cuando el fuego, rodeado por el aire o el agua o alguna tierra, poco entre muchos, se mueve entre sus portadores, lucha y, vencido, se quiebra; dos cuerpos de fuego se combinan en una figura de aire; mas cuando el aire es vencido y fragmentado, de dos partes y media se forjará una figura entera de agua.”

Parte II

Nociones de cálculo y topología del espacio

Capítulo 4

Congruencia y descomposición

4.1. Coincidencia

Son bien conocidos los teoremas de congruencia de la geometría euclidiana plana, todos los hemos escuchado comúnmente nombrados como el teorema de lado-lado-lado o (LLL), lado-ángulo-lado (LAL) y ángulo-lado-ángulo (ALA). Este último teorema ALA puede ser mal interpretado pensando que, como en los dos primeros teoremas, el orden en que se colocan es relevante, sin embargo para éste último basta con tener cualesquiera dos lados y cualquier ángulo para que el teorema se cumpla. En este sentido, el teorema ALA puede denotarse también como LAA o AAL, de cualesquiera tres formas. Estos teoremas permiten, en la geometría plana, determinar si dos figuras planas son congruentes (iguales en el sentido de que coincidan sus partes al encimarse una en la otra "coincidir"), ya que aunque los teoremas de congruencia se aplican únicamente a triángulos, Euclides demuestra algunas proposiciones adelante, que cualquier figura rectilínea (cuyos lados sean líneas rectas) puede "triangularse", es decir, dividirse en triángulos.

El fundamento de la geometría euclidiana es, sin duda, el conjunto de teoremas de congruencia. Es decir, la geometría euclidiana es una geometría de congruencias ya que en ello se fundamenta pues no hay forma de determinar magnitudes sin determinar congruencias, todo lo demás es lo que se puede hacer a partir de ello. Veamos cómo incluso el quinto postulado (conocido como el de las paralelas) es para Euclides un asunto de magnitudes y de congruencias, a pesar de no parecerlo pues uno podría suponer que el hecho de que una recta corte a otra o no es una relación de incidencia exclusivamente, es decir, nada que ver con magnitud (o medida), es decir, se cortan o no las líneas rectas. El postulado original de Euclides dice (traducido de la versión en inglés de Heath):

> "Si una línea recta cayendo sobre otras dos líneas rectas forma los ángulos interiores del mismo lado menores que dos rectos, las dos líneas rectas, si se prolongan indefinidamente se encontrarán en el lado en el que los ángulos son menores que dos rectos."

De la versión en español de María Luisa Puertas Castaños para la editorial española Gredos:

> "Si una recta al incidir sobre dos rectas hace los ángulos internos del mismo lado menores que dos rectos, las dos rectas prolongadas indefinidamente se encontrarán en el lado en que están los (ángulos) menores que dos rectos".

Veamos en principio que hay diferencias entre uno u otro texto por lo que tendremos que irnos al texto original en griego. En la traducción que yo hago de Heath al español *falling* lo traduzco como *cayendo* y no como *incidencia* pues lo segundo tiene, al menos en geometría, otro sentido que Euclides no está reconociendo (la idea y conciencia de incidencia viene con la geometría proyectiva). A pesar de que la traducción de Gredos no es mala, es una lástima que no sea hecha por expertos en el tema que, sin duda, habrían detectado inmediatamente este desafortunado hecho, que además, se comete con cierta frecuencia e inocencia.

También podemos darnos cuenta cómo el hecho de utilizar otras versiones del mismo postulado (que lo implican) desvía el sentido que Euclides le otorga, perdiéndose información vital para encontrar la forma en que Euclides concebía su geometría. Por ejemplo, es común que se refieran al quinto postulado de las siguientes maneras:

- "Dado un punto y una recta, solo existe una paralela a la recta dada que pasa por el punto dado".
- "La suma de los ángulos de un triángulo es dos rectos o 180 grados".

Todas ellas son equivalentes, y existen muchas otras formas de expresarlo, pero todas ellas ocultan la forma en que Euclides se expresó y que reflejan sus motivaciones y pensamientos más profundos. Por ejemplo, la primera es una relación de incidencia y no de magnitud. Las diversas versiones para usos pedagógicos son completamente justificables ya que generalmente las expresiones de Euclides son confusas, más aún en nuestro intento por conservar el sentido original de los escritos griegos o incluso, en ocasiones, árabes, precisamente para perder la menor información posible de aquello que nos interesa de Euclides. Por ejemplo, el hecho de que en el texto traducido al español se refieran a "incidencia", es efectivamente desafortunado a pesar de que el término no está muy lejana a su traducción literal griega, pero si al sentido que se le da en español, o al menos, al sentido que ahora se le da a la incidencia en geometría, en español y en cualquier idioma.

Lo más importante es detectar cómo la geometría de Euclides, en el sentido de Euclides, es una geometría de magnitudes, y éstas a su vez, de congruencias. Por ejemplo, que los ángulos internos de un triángulo sumen dos rectos o 180 grados, (proposición 32 del libro I) depende de que los ángulos alternos internos formados con una recta auxiliar sean iguales (relación de congruencia).

Sin embargo, en los Elementos, no existen teoremas de congruencia para los sólidos en el espacio. El único recurso que tiene para comparar poliedros es su definición 10 del libro XI, que como veremos más adelante, es un tipo de congruencia que depende a su vez de la congruencia de la geometría euclidiana plana y no es por lo tanto independiente. Podemos suponer que al darse cuenta Euclides que su recurso de "superposición" (encimar una figura sobre otra para determinar si coinciden y entonces demostrar su congruencia o igualdad en esos términos, proposición I.IV) utilizado en los teoremas de congruencia no podrían aplicarse como criterio de congruencia para los sólidos o cuerpos en el espacio en tanto es imposible encimarlos. El uso del recurso de la superposición es ahora considerado no como proposición sino como axioma, ya que su demostración, al estilo Euclides, requiere de supuestos que en principio no fueron ni postulados ni demostrados como, por ejemplo, una rotación o traslación para encimar las figuras. Incluso una transformación de tipo rotación o traslación no resolvería el problema para los casos en los que se requiriera de una congruencia antisimétrica, es decir, cuando las figuras son congruentes (cumplen los teoremas de congruencia) pero no simétricamente, en la que se requeriría de sacar a la figura del plano para voltearla en el espacio, es decir, dejar el plano de dimensión dos para voltear la figura en el espacio de dimensión tres para entonces encimarla en la otra para verificar la coincidencia. Uno podría pensar entonces que hubiera quedado resuelto el mismo problema si se transportara el sólido a un espacio de 4 dimensiones, en donde estos cuerpos de 3 dimensiones pudieran encimarse o empalmarse sin problema alguno. Pero sin dejar el espacio de dimensión 3, habría entonces que desensamblar los sólidos para encimarlos o empalmarlos para establecer una relación de congruencia o coincidencia en el espacio de 3 dimensiones. No deja de llamar la atención, sin embargo, que Euclides no hace la distinción entre la proposición I.IV y una posible proposición análoga para los casos antisimétricos, es decir, una proposición I.IV antisimétrica enfrentando el problema que surge en la I.IV. Sin embargo, percatarse del posible problema de I.IV, dejando de lado incluso el problema de que Euclides en proposiciones anteriores no muestra la forma de rotar o trasladar figuras para encimarlas, para presentar una probable proposición adicional esta vez antisimétrica para descartar el problema más grave de pensar en salir del plano para voltear la figura, podría haber expuesto también el problema de trasladar y rotar en la proposición original. Por supuesto no sabremos nunca si Euclides eludió esta situación o simplemente no pudo verla. A mi me parece que no lo vio y lo eludió a la vez, pues por un lado es evidente que estaba consciente del hecho de la coincidencia o coincidencia, es decir, que cada parte de una figura incidiera en la otra, así que seguramente no sólo Euclides imaginó esta transformación en su mente sino la utilizó para argumentar su demostración, pero al mismo tiempo parecía no incomodarle el hecho de transportarlo al espacio para hacer la verificación física o visual, parece obvio entonces que menos le importaría el hecho de no haber expuesto con anterioridad que se valiera y se pudiera hacer todo tipo de transformaciones (rotaciones, traslaciones o reflexiones) sin necesidad de otras proposiciones, axiomas o definiciones. Y por otro lado, sin embargo, si parece haberle incomodado pensar en una transportación de un sólido a un espacio de 4 dimensiones para realizar una verificación en el espacio de tres. Lo más probable, por el marco histórico, es que simplemente no haya sido concebido por Euclides, mientras que una transportación del plano al espacio para el otro caso, parecía no solo fácil sino obvia, tan obvia que no requería para él mayor comentario o justificación alguna.

Por su relevancia, la proposición I.IV de Euclides:

> “ Pues si se aplica el triángulo ABC al triángulo DEF y el punto A se coloca sobre el punto D y la recta AB sobre la recta DE, coincidirá también el punto B sobre el punto E por ser igual AB a DE, al coincidir también AB con DE, la recta AC coincidirá también con DF por ser igual el ángulo BAC al EDF; de modo que también el punto C coincidirá con el punto F por ser igual a su vez AC a DF. Pero también el punto B había coincidido con el punto E; de modo que la base BC coincidirá con la base EF (pues si habiendo coincidido el punto B con el punto E y el punto C con el punto F, no coincide la base BC con la base EF, dos rectas encerrarán un espacio; lo cual es imposible. Por tanto, coincidirá la base BC con la base EF) y será igual a ella; de modo que también el triángulo entero ABC coincidirá con el triángulo entero DEF y será igual a él, y los ángulos restantes coincidirán con los ángulos restantes y serán iguales a ellos, el (ángulo) ABC, al (ángulo) DEF y el (ángulo) ACB al (ángulo) DFE.
>
> “Por consiguiente, si dos triángulos tienen dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también las respectivas bases iguales y un triángulo

> será igual al otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por lados iguales, serán también iguales, respectivamente. Q.E.D.”

Euclides nos enseña, en dos proposiciones anteriores, a transportar rectas, por lo que no debería haber problema alguno en encimar las rectas de un triángulo sobre otro, aunque esto implique lo que actualmente conocemos como una transformación en el plano, la de traslación, y aunque Euclides haya pensado o no en una transformación de este tipo, no es necesaria más que la justificación del hecho constructivo, dada una recta construir otra igual, asunto que en dicha proposición, la I.4, ya puede llevarse a cabo. Sin embargo, Euclides no provee, hasta ese momento, la manera de transportar ángulos como lo supone, de alguna forma la posibilidad de transportar ángulos es la posibilidad de transportar triángulos, lo cual es precisamente lo que quiere demostrar, entrando entonces a un argumento cíclico, una bien clasificada falacia lógica desde ese punto de vista. Sin embargo, tampoco es del todo justo o correcto mencionar que Euclides haya fallado en su demostración, pudo haberlo hecho desde un punto de vista axiomático moderno, pero para él es sin duda claro y válido el hecho de poder encimar figuras para demostrar la congruencia de éstas viendo que coincidían todas sus partes tanto ángulos como rectas y verificando que de no suceder así habría una contradicción. Este argumento de superposición lo utiliza en dos ocasiones más dentro de los Elementos y el uso de estas proposiciones no es irrelevante para el resto de las proposiciones del libro, es imposible por tanto prescindir de ellas sin que se vea modificado y alterado la mayor parte de la estructura y sentido del libro. Es evidente que la proposición I.4 no sólo es necesaria para la consecución del resto del libro, sino que es además una de las proposiciones más relevantes. Basta mencionar las proposiciones I.16 y I.17 como consecuencia directa de I.4.

Sin embargo, Euclides define la congruencia entre cuerpos sólidos en el libro XI como:

> Definición 10: Figuras sólidas similares e iguales son aquellas contenidas por un número similar de planos iguales en multitud y magnitud.

Por supuesto, el gran objetivo de Euclides, lo que persigue, es poder medir un sólido, es decir, calcular su volumen. Para ello requiere de la determinación de una relación de congruencia, es decir, cuándo podrá reconocer dos sólidos como iguales, pues si puede hacer esto puede entonces reconocer los que no lo son para compararlos. Sin embargo, la definición de Euclides, en tanto se sustenta en la congruencia en el plano (son aquellas contenidas por un número similar de planos iguales en multitud y magnitud") debía ser demostrada.

Simson da cuenta de estos hechos y propone que así como las proposiciones de congruencia en el plano fueron demostradas, el criterio de congruencia en el espacio debía ser demostrado y no postulado o definido. Esto es luego retomado por Cauchy.

4.2. El tercer problema de Hilbert

Para mostrar que dos polígonos tienen la misma área, éstos se descomponen en otros polígonos. No es difícil demostrar que cualesquiera polígonos de área igual pueden descomponerse de tal forma que los polígonos en que se descomponen son congruentes y en mismo número, a este proceso se le conoce como equidescomposición y es tratado desde los Elementos de Euclides.

Por ejemplo, muchas de las demostraciones del teorema de Pitágoras están basadas en la equidescomposición ya que la mayor parte de ellas se apoyan y justifican en que el cuadrado de la hipotenusa puede dividirse en algún número de piezas que luego resultan ser la suma de los cuadrados de los catetos. El procedimiento para mostrar esto puede ser incluso constructivo, una de las demostraciones utiliza triángulos congruentes a uno dado para construir un cuadrado de cuyas relaciones algebraicas se obtiene directamente el teorema de Pitágoras.

Dos figuras son equicompuestas cuando una se divide en un número finito de piezas de manera que con ellas es posible armar la otra. Si una figura P puede descomponerse para formar una figura Q, entonces se dice que P es equicompuesto de Q, por lo tanto P y Q tienen la misma área. Por supuesto el método de equidescomposición es muy útil como criterio de congruencia (en el sentido de área), entre dos polígonos cualesquiera, ya que si se demuestra que uno puede descomponerse en el otro, entonces se deduce directamente que contienen la misma área, y que por lo tanto, en este mismo sentido, son congruentes. Es natural que se planteé la pregunta recíproca: ¿dos figuras de la misma área son equicompuestos? La respuesta afirmativa fue dada a principios del siglo XIX por Bolyai, Gerwein y Wallace, de donde proviene el nombre del teorema. Su demostración es la siguiente:

Como la propiedad de ser equicompuesto es transitiva, es decir, si una figura A es equicompuesta de B y B equicompuesta de C, entonces A es equicompuesta de C. Basta entonces verificar que un polígono es equicompuesto al cuadrado de área igual al polígono dado. El polígono se divide en un número finito de triángulos, cada triángulo es equicompuesto con un rectángulo y éste a su vez en un cuadrado, así el polígono es equicompuesto a varios cuadrados y por el teorema de Pitágoras cada dos cuadrados son equicompuestos a otro, y esto aplicado iterativamente nos llevará, en un número finito de pasos, al resultado deseado.

Luego, puede extenderse la pregunta del plano, para polígonos; al espacio, para poliedros, es decir, si es posible determinar la congruencia entre poliedros mediante la equidescomposición, y si es ésta la única forma de hacerlo, esta es la pregunta que Hilbert se hace y expone en la famosa conferencia del congreso de matemáticas. Presentado en un congreso de matemáticas en el año 1900 en la Sorbona de París, define como el tercer problema (de un total de 19 que según ocuparían el desarrollo de las matemáticas en ese siglo y que, con su fama e influencia, probablemente lo motivó en gran medida). El tercer problema de Hilbert es: dado cualesquiera dos poliedros de igual volumen ¿es siempre posible diseccionar (cortar o descomponer) el primero en un número finito de piezas que se puedan volver a montar para construir el segundo? El problema puede reformularse como: ¿es posible diseccionar cualquier poliedro en piezas para construir un cubo de igual volumen? Evidentemente si ello fuera posible, el cálculo del volumen de cualquier poliedro quedaría garantizado una vez reconstruido un cubo del mismo volumen y para el cuál conocemos un método extremadamente sencillo para calcularlo.

Aunque dados dos poliedros, si éstos pueden equidescomponerse, entonces contienen el mismo volumen, el converso no es cierto. El mismo año de 1900, en que Hilbert expusiera el tercer problema como parte de su lista de problemas abiertos por resolver en el siglo XX, Dehn dio respuesta negativa al problema de Hilbert y demostró que el único método para calcular volúmenes de poliedros es mediante el llamado método por exhaución. Este método consiste en "rellenar" poliedros de figuras cuyo volumen es conocido, cubos o pirámides. En otras palabras se requieren de las herramientas del cálculo integral para calcular el volumen de un poliedro en general ya que Dehn[23] muestra que el tetraedro no puede descomponerse en un número finito de piezas para construir un cubo del mismo volumen.

Por lo tanto, en este sentido, la geometría del espacio no es una generalización trivial del plano, tiene, intrínsicamente, una geometría propia y distinta en aspectos trascendentales que no son deducibles ni reducibles a la geometría plana. No es, como la convexidad de un poliedro, un accidente, como en el armado del poliedro en el que uno puede dejar una cara dentro sumida, haciendo del poliedro uno cóncavo. Esto deja claro que la dimensión es una característica fundamental del espacio en tanto que no es común a todos los casos aún cuando la generalización del número de dimensiones es relativamente trivial (es decir, el añadir 1 a una dimensión n). Y no es una generalización porque hay una relación de orden que en el espacio de dimensión inferior está indefinida (porque simplemente no se usa y es ajena a ese espacio).

Capítulo 5

Exhaución y contención

5.1. Sólidos para medir superficies y espacios

Proclo en su comentario al libro I de los Elementos, asegura que el objetivo principal de Euclides es precisamente cerrar su obra con los poliedros regulares. Este argumento puede considerarse respaldado por el hecho de que el estudio de los sólidos en la obra de Euclides se expone hacia el final de su obra (de hecho el último teorema del último libro es la demostración de que sólo hay y no pueden haber más de cinco poliedros regulares). Sin embargo, es también evidente que todas las herramientas para acceder al estudio de éstos fueron presentados y demostrados en los libros anteriores, en particular en los primeros libros, ya que en los intermedios Euclides trata de aritmética, lo que conocemos como teoría de números y aunque hay quienes argumentan que en el resto también está haciendo teoría de números esto no parece obvio, sin duda todo el trabajo de Euclides puede ser leído desde la perspectiva de la teoría de números, pero no parece claro que haya sido la motivación o intención de Euclides.

De alguna forma puede asegurarse que los cuerpos sólidos son el objetivo de la obra de Euclides, pues aunque no hay duda que el objetivo es el concepto de magnitud (calcular áreas y volúmenes), es precisamente primero la construcción y luego la magnitud de los cuerpos sólidos lo que parece colocar Euclides como uno de los objetivos primordiales, objetivo, por cierto que no consigue del todo, pues es evidente que Euclides no logra (ni parece intentarlo aunque no por ello no lo intentó) determinar un método para calcular el volumen de los poliedros regulares o en general, método que siguió buscándose y que según Arquímedes fue desarrollado por Eudoxo. El método que diera origen al cálculo integral que ha ocupado a matemáticos desde Newton y Leibniz y hasta Hilbert y su tercer problema.

En 2 dimensiones cualquier polígono regular puede imaginarse como el resultado de dividir una circunferencia en n partes iguales y tomar los puntos de división obtenidos como el número de lados del polígono resultante. El procedimiento inverso, es por lo tanto, una manera de aproximar y calcular el área de una circunferencia por medio del cálculo del área de un polígono de n lados haciendo variar n hacia el infinito. El proceso requiere sin embargo la construcción de dichos polígonos y de un método sistemático para hacerlo *ad infinitum*.

Respecto a la posibilidad de construir con regla y compás los polígonos regulares, Euclides, en sus Elementos da la construcción del triángulo equilátero en el Libro I (Prop. 1) y la del cuadrado, pentágono, hexágono y uno de quince lados en el Libro IV (Prop. 6, 11, 15 y 16 respectivamente); y la proposición 9 del Libro I garantiza la duplicación sucesiva del número de lados por bisección. El problema abierto de la construcción con regla y compás de cualquier polígono regular fue parcialmente resuelto por Gauss (quien construyó a los diecinueve años uno de diecisiete lados) afirmando que es condición suficiente que los factores primos impares de n sean primos de Fermat diferentes entre sí (un número de Fermat tiene la forma $F_k = 2^{2^k} + 1$). En 1837, Wantzel probó que también la anterior condición es necesaria (al probar que la duplicación del cubo y la trisección del ángulo son problemas irresolubles con regla y compás).

La lectura de estos hechos indica que el cálculo infinitesimal, al menos sus primeras nociones, surge de las matemáticas mismas y no necesariamente de necesidades físicas, a diferencia probablemente de la creencia general derivada del trabajo y motivaciones de Newton[51] en el desarrollo de su cálculo de fluxiones (pero no a Leibniz).

Sin embargo, las motivaciones de Leibniz no eran las mismas que las de Newton (asumiendo que las de Newton fueran motivaciones (únicamente) físicas). Se sabe que Pascal, por ejemplo, pudo haber deducido de su propio trabajo las herramientas básicas que darían surgimiento al cálculo, que poco tiempo después Newton y Leibniz construirían. Si Pascal no lo hizo es porque probablemente no podía verlo, tal como Euclides omitiría la geometría (euclidiana) del espacio.

De acuerdo a [48], el uso de sólidos para medir áreas y volúmenes es un concepto con el que nuestros métodos tradicionales de geometría comenzar a alienarse. A diferencia de su concepción habitual, el cálculo infinitesimal (o integral), no necesariamente fue consecuencia única de necesidades físicas, sino de la matemática misma en su camino hacia el desarrollo del concepto de medida, con antecedentes en la idea griega de exhaución incluso antes de Euclides y que paralelamente a Newton se fueran desarrollando, como lo es hoy el desarrollo de la teoría de la medida independiente (y en gran medida ajena) a motivaciones físicas.

Ahora bien, el lector puede no estar de acuerdo con esta apreciación, pero a manera de provocación diré que, por un lado Newton escribe en su Principia cuando comienza su estudio euclidiano del espacio que no había aún (hasta ese punto) explicado el fenómeno de la gravedad. Sin embargo, cuando lo hace, lo hace sin hacer recurso alguno del cálculo que había y estaba desarrollando (y que más adelante alegaría fue el precursor primero, antes de Leibniz). Aunque no tengo una agenda en contra de Newton, quien fue un extraordinario físico y matemático, no me parece evidente que las motivaciones que dieran surgimiento al cálculo, como generalmente se puede sostener, necesariamente estén ligadas a motivaciones físicas, en particular cuando este razonamiento está fundado en el trabajo de quien, preocupado por cuestiones físicas y matemáticas al mismo tiempo, y con toda la capacidad de haber usado una en la otra, no lo haya hecho (al menos no explícitamente), y si lo haya omitido explícitamente (es decir, el uso de su cálculo para explicar fenómenos naturales) en sus tratados (notablemente su Principia).

En mi defensa, no es sino Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647), algunas décadas antes que Newton (1643–1727) y Leibniz (1646–1716), que en su *Geometria* *indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota* (Geometría de los indivisibles continuos presentada según un nuevo método) introduce las primeras nociones del cálculo integral. A pesar de las motivaciones astronómicas de Cavalieri, como lo muestran las al menos 112 cartas que le enviara a Galileo, su trabajo hacia las primeras nociones del análisis infinitesimal parecen motivadas por la geometría misma (aunque eventualmente evidentemente conectada a la medida de objetos físicos) como lo atestigua Galileo mismo *pocos, si algunos, desde Arquímedes, han develado tanto y tan profundamente en la ciencia de la geometría*[1] haciendo referencia de Cavalieri.

La teoría de Cavalieri estudia las magnitudes geométricas descompuestas en un número infinito de elementos (o indivisibles). La medida de longitudes de superficies y volúmenes se es entonces la suma del número infinito de indivisibles que se encuentra al centro del principio del cálculo integral sin la utilización del concepto moderno de límite. El principio del análisis infinitesimal de Cavalieri es simple y profundo: el volumen de dos objetos son iguales si la suma de las áreas de sus correspondientes secciones transversales son iguales. Sin embargo, su trabajo fue considerado obscuro pues no fue sino hasta la madurez que el concepto de límite en matemáticas traería que la idea fundamental de Cavalieri se concretizó al origen de lo que hoy conocemos como análisis infinitesimal y al centro del concepto de integral. A pesar de la dificultad que caracterizaba el concepto, Cavalieri consideraba su método correcto en tanto que proporcionaba resultados correctos, en este sentido su aproximación era pragmática pero no física ya que de hecho se desconecta de la realidad física en tanto que físicamente no se puede ni considerar un objeto infinitamente delgado ni la suma infinita de objetos, objetos además infinitamente delgados. El método de Cavalieri contenía la complejidad de dos infinitos utilizados en una operación matemática para medir el área o volumen de un objeto matemático o físico. La exposición de Cavalieri no estaba adaptada al estado de la geometría de su tiempo y fue objeto de fuertes críticas. Una introducción histórica al tema es [71].

[1] Traducción del autor.

5.2. Curvas que llenan el espacio

Las curvas que llenan el espacio o curvas de Peano[13] son *curvas* unidimensionales atípicas que "llenan" cualquier espacio de cualquier dimensión, son un caso especial de fractales. En general, las curvas, por ser unidimensionales, no encierran un área. Sin embargo, estas curvas son capaces de llenar un espacio limitado, cualquier región del espacio.

Para eliminar el vago concepto de una curva, que generalmente se considera como un objeto continuo, en 1887 Camille Jordan[42] introduce una definición rigurosa de *curva continua.*

> Una curva (con puntos extremos) es una función continua cuyo dominio es el intervalo unitario [0,1].

En 1890, sólo tres años después de la definición precisa de Jordan, Peano define la curva que ahora lleva su nombre como contra ejemplo a la hipótesis de que una curva puede encerrarse en un conjunto tan pequeño como se quiera.

Otras curvas (iteraciones) de este tipo le siguieron, como la de Hilbert, que no es sino una variación interesante, ya que es una curva que mantiene dos puntos de la curva tan cerca como posible cuando se le utiliza para rellenar un espacio de una dimensión mayor.

En este sentido, la curva de Hilbert, además de preservar los puntos más cercanos de la curva en el plano (u otro espacio) mantiene (como corolario) los puntos más distantes más distantes. En ese sentido preserva un concepto de distancia, que paradójicamente pierde sentido cuando el proceso se lleva al infinito, y que es cuando llena el espacio (mostrando que evidentemente la curva tiene que pasar por cualquier punto, en tiempo finito, y por todos ellos en un tiempo infinito). No es sino el límite al objeto que se le llama la curva de Hilbert.

Estas curvas no llenan el espacio a menos que se asuma un procedimiento infinito. La curva de Peano no es sino un algoritmo para construir un objeto matemático,

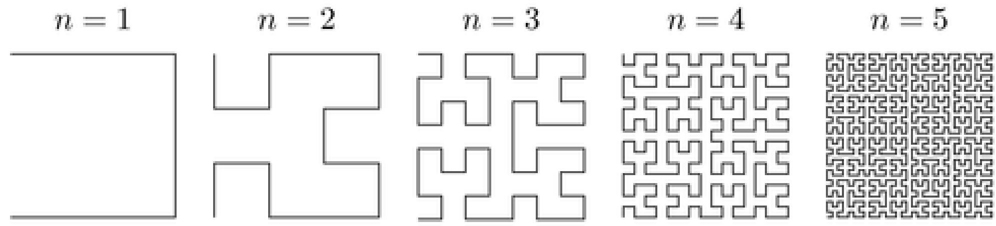


Figura 5.1: La *curva* (iteración) de Hilbert: se comienza con un cuadrado. Se divide en cuatro partes iguales. Se unen los centros de los cuatro cuadrados y se repite el proceso con los cuadrados resultantes. La *curva* hace un recorrido tal, que comenzando en el cuadrado superior izquierdo ésta acaba como en el cuadrado superior derecho y, continuando el procedimiento, termina abarcando todo el cuadrado.

es propiamente una función continua que no rompe la curva pero la mantiene no diferenciable en cada punto (en el límite del proceso) y con ciertas propiedades que llevadas al infinito llenan un espacio de cualquier dimensión mayor a la dimensión (unidimensional) de la curva original. Al realizar este proceso o aplicar la función en sí misma iterativamente la curva que se obtiene se acerca asintóticamente a cualquier forma, en particular a un cuadrado cuando se trata de la curva de Peano.

Lo sorprendente es evidentemente que con una *curva* sin espesor pero de infinita longitud pueda llenarse un espacio de cualquier otra dimensión para cubrir un región cualquiera por completo.

5.3. El concepto de dimensión

Curvas que llenan el espacio pueden verse como ilustraciones de los resultados de Cantor sobre el (los) infinito(s) ya que contra intuitivamente descubrió que el número de puntos en el intervalo de los números reales [0, 1] es el mismo que el de un cuadrado (incluyendo su interior). En otras palabras, la cardinalidad de una curva es la misma que la del plano. Cantor procede mediante una biyección que pone en relación uno a uno los puntos del segmento y el cuadrado. La función de Cantor, sin embargo, no era continua a diferencia de las funciones de Peano y Hilbert, éstas últimas sin embargo perdieron la biyección. En efecto, una *curva* que *llena* el espacio debe intersectarse a si misma en todas partes y en número infinito de veces y por lo tanto la "curva" no es inyectiva. El hecho de intersectarse tampoco significa en este contexto que la curva se cruza a sí misma, pues de hecho no lo hace, se queda infinitamente cerca de si misma, se toca, pero no se cruza por la forma en que es construida.

Evidentemente si una función continua y biyectiva existiera entre el plano y un segmento de línea el concepto de dimensión quedaría en entredicho y es que es Brouwer quien en 1911 prueba que no existen tales correspondencias (biyectivas y continuas al mismo tiempo). El resultado es importante porque la dimensión es entonces un invariante topológico que no puede alterarse mediante deformaciones continuas. Como consecuencia, se llega a una definición rigurosa de dimensión. La diferencia topológica entre un segmento de línea y un cuadrado es que la primera tiene puntos extremos o de corte, mientras que un cuadrado no.

La idea cartesiana de dimensión que podría parecernos obvia pero que no lo fue cuando se propuso, la hizo Riemann durante su tesis de habilitación en 1854 (con Gauss presente en el jurado), cuando extendía los resultados de curvatura intrínseca de Gauss a otras dimensiones. Su definición de espacio n-dimensional es un espacio que requiere de n coordenadas cartesianas para definir un punto. La aportación de Riemann es la ruptura del concepto de espacio y geometría, así como de objetos básicos en ella. En los espacios multidimensionales de Riemann no era necesaria la definición de ningún objeto sino de coordenada y distancia solamente.

El concepto de dimensión, en una otra de sus tantas formas, regresaría, por ejemplo, en el desarrollo de la geometría fractal de Mandelbrot o de dimensión de Hausdorff.

5.4. Empacamientos y empilamientos

Una pregunta fundamental cuando se trata de preguntarse cuánto cabe en nuestro espacio, es el de empacamiento óptimo. Cuando uno vierte azúcar en un recipiente, es común que al llenarse se le de ligeros golpes para compactar los granos de azúcar o arroz para hacer más espacio y poder verter aún más. Hay un momento, sin embargo, en el que no hay forma de hacer descender el nivel del azúcar o arroz en el recipiente porque los granos de alguna forma han llegado a una configuración estable en el que difícilmente puede ocupar menos espacio llenando los huecos entre los granos.

Empacar cuadrados y cubos del mismo tamaño en una caja no representa, evidentemente, ninguna complicación ya que basta colocarlos cara con cara para ocupar el espacio sin dejar ningún espacio libre. Cualquier empacamiento de cubos que coincidan en caras es un empacamiento óptimo. Un empacamiento óptimo es uno en el que la diferencia entre el volumen ocupado (el interior de los poliedros) y el volumen libre que dejan entre ellos es el menor posible.

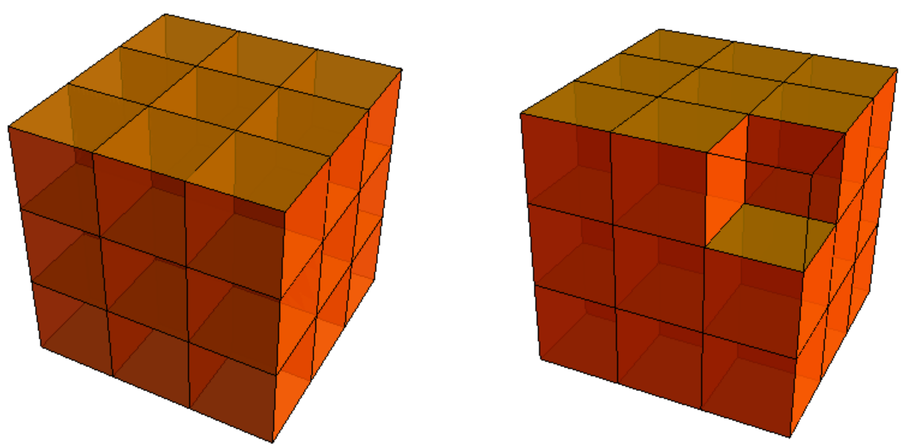


Figura 5.2: En el caso de cubos y prismas, por ejemplo, el empacamiento óptimo tiene densidad 1.

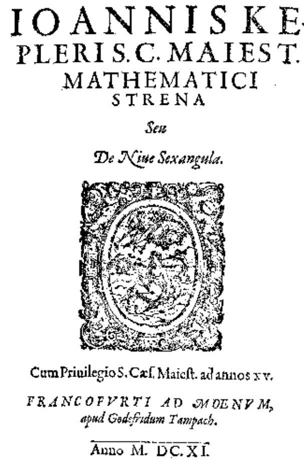
Aparte del cubo, ningún otro sólido platónico por sí solo puede llenar el espacio, es decir, no puede *teselar* el espacio. Usando el tetraedro, por ejemplo, el mejor empacamiento tiene una densidad de .85. Sin embargo, usando dos poliedros regulares, el tetraedro y el octaedro juntos pueden llenar el espacio en un arreglo que se conoce como *panal tetraedro-octaedral* (o *tetrahedral-octahedral honeycomb* en inglés).

Si hay alguna figura que pueda imaginarse como difícilmente acoplable con alguna otra es la esfera, ya que sin contener ninguna cara plana, no hay forma de encajarla o hacer coincidir alguna de sus partes con otro objeto convexo, menos aún con otra esfera. Experimentos muestran que esferas aleatoriamente depositadas en un recipiente pueden alcanzar una densidad de ocupación de alrededor de 65 % solamente, sin embargo, esta densidad puede mejorarse colocando las esferas de cierta manera ordenada.

El problema es que evidentemente uno puede elegir cualquier configuración entre las infinitas posibles, lo que imposibilita su enumeración ya que además muchas de esas configuraciones son irregulares (o no periódicas), es decir, las distancias entre las figuras no siempre es el mismo. Un empacamiento periódico posible de esferas del mismo tamaño, por ejemplo, consiste en colocar encima de cada cresta de cada una, otra esfera. A esta configuración se le llama configuración simétrica con una densidad de $\pi/6$, es decir, alrededor de 0.52 (casi la mitad del espacio es *desperdiciado*). En una caja, la pregunta se reduce al número máximo de esferas que se pueden meter en ella.

En 1611 Johannes Kepler se interesó en este problema y realizó algunos cálculos que lo llevaron a creer que el empacamiento óptimo (la forma en que las naranjas en el mercado de frutas son comúnmente apiladas ocupando los valles formados por la capa inferior) de esferas del mismo tamaño es de $\pi/3\sqrt(2)$ o aproximadamente 0.74, desde entonces a esta estimación se le conoce como la conjetura de Kepler.

Hilbert se da cuenta que este tipo de simetrías en la configuración de las capas era un camino posible de investigación sistemática del problema. En el congreso internacional de matemáticos en la Sorbona de Paris en 1900, Hilbert incluye entre sus 23 problemas uno relativo a este problema precisamente. Se trata del problema 18 que incluye en su tercera parte la conjetura de Kepler. Hilbert se pregunta por la posible clasificación de las simetrías de los empacamientos en el espacio euclidiano e hiperbólico.



IOANNIS KE-
PLERI S.C. MAIEST.
MATHEMATICI
STRENA
Seu
De Niue Sexangula.

Cum Priuilegio S. Cæs. Maiest. ad annos xv.
FRANCOFVRTI AD MOENVM,
apud Godefridum Tampach.
Anno M. DC. XI.

Figura 5.3: El “Strena Seu de Nive Sexangula”(Un regalo de nieve hexagonal de año nuevo) de Kepler (1611), con su conjetura. El texto original en latín se encuentra en `http://www.thelatinlibrary.com/kepler/strena.html`.

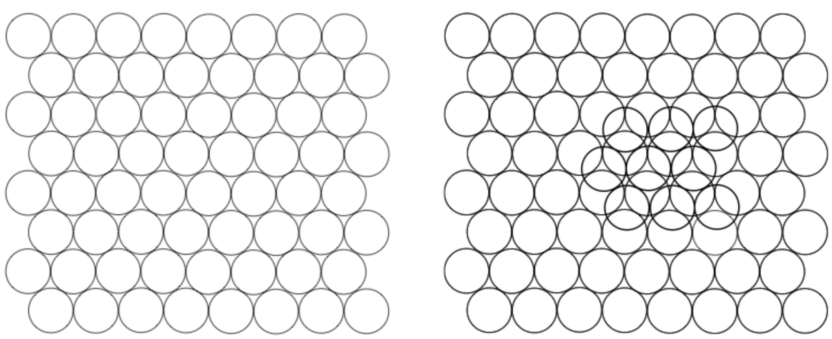


Figura 5.4: Arreglo regular en 2 dimensiones (izquierda) y arreglo regular con periodo 2 (derecha) comúnmente empleado y conocido como empilamiento de naranjas o FCC (de *face-centered cubic*) Otro arreglo regular igualmente óptimo es el HCP (de *hexagonal close-packed*).

En 1831, Gauss había probado que la conjetura de Kepler se cumple cuando las esferas se acomodan en un arreglo regular, pero no es probada en el caso general hasta 1998 por Thomas Hales con ayuda de programas de cálculo y su solución publicada en 2006. La prueba por computadora de que FCC es el empacamiento más eficiente

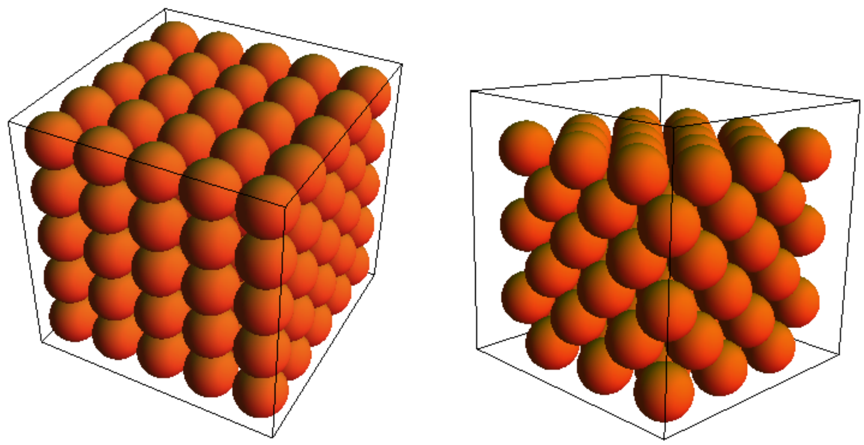


Figura 5.5: Una manera de pensar en estos arreglos es por simetrías de las capas. Por ejemplo, cada capa es idéntica (izquierda), mientras que para el arreglo FCC cada capa ocupa los huecos dejados por las esferas de la capa inferior, cada dos capas la configuración de esferas es la misma.

es difícil de seguir por un humano (o incluso un grupo de humanos) por lo que no sólo no se tiene la certeza absoluta de su veracidad (aunque el comité de expertos ha declarado que está 99 % seguro) sino que estamos desprovistos de un argumento que proporcione la razón de la eficacia del empacamiento, que comúnmente es proveída por una prueba matemática, en el mejor de los casos.

Resulta que Hilbert tenía la buena intuición (como era comúnmente el caso) de concentrar parte de los esfuerzos en estudiar y atacar el problema por el lado de la clasificación de las simetrías, ya que los empacamientos más densos de figuras en 2 dimensiones en espacios euclidianos resultaron estar íntimamente relacionados entre sí y con las simetrías de los empacamientos más eficaces en dimensiones mayores también. La abstracción del problema resulto en una generalización hacia todos los espacios. Hilbert se interesó también por la pregunta de los empaques menos eficientes y se conocen algunos resultados definitivos.

En espacio euclidianos con dimensiones mayores a tres, los empacamientos regulares más densos de hiper esferas se conocen hasta en ocho dimensiones pero se sabe muy poco de arreglos irregulares. Es posible que en alguna dimensión, a diferencia de nuestro espacio con tres, algún arreglo irregular resulte ser el más eficiente. ya que en ciertas dimensiones, por ejemplo en 10, el mejor empacamiento irregular conocido es más eficiente que el mejor empacamiento regular conocido. La dimensión 24 es un caso especial debido a la existencia de lo que se conoce como el arreglo de Leech con el mejor número de osculación (*kissing number*) y por largo tiempo se sospechó que era el empacamiento más eficiente. El número de osculación es número de esferas unitarias que tocan otra esfera unitaria dada. En un empacamiento regular el número de osculación es el mismo para todas las esferas. En 2004, de demostró que efectivamente el arreglo de Leech era el más eficiente entre los arreglos regulares, pero se demostró también que existía un empacamiento irregular que era más eficiente que el arreglo de Leech, no mejor, sin embargo, que de 2×10^{-30}. De hecho, Charles Radin y Lewis Bowen mostraron en el 2002 que los empacamientos más densos en espacios hiperbólicos eran casi siempre empacamientos irregulares.

Capítulo 6

La característica de Euler

El gran resultado relativo a la relación entre el número de vértices, aristas y caras de un poliedro se conoce como la relación de Euler[29], relación a la que haremos referencia también como la fórmula, el invariante o la característica de Euler, después señalaremos, en contexto, las diferencias en cuanto a sus respectivas connotaciones. Esta relación se deduce también del trabajo que el matemático francés René Descartes (1596-1650) realizó en la teoría de poliedros pero no fue sino hasta el siglo XVIII que el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) lo señaló explícitamente. Euler mostró que, si se suma el número de caras y el número de vértices de un poliedro cualquiera y, del valor obtenido, se resta el número de aristas, el resultado es siempre igual a dos. La relación encontrada por Euler entre el número de vértices (v) con las caras (c) y las aristas (a) de estos poliedros se escribe usualmente como:

$$v + c - a = 2 \tag{6.1}$$

La ecuación de Euler6.1 describe una propiedad del espacio en que vivimos, en la que esta relación entre caras, vértices y aristas para los poliedros regulares se cumple.

Sólido	Tetraedro	Cubo	Octaedro	Icosaedro	Dodecaedro
vértices	4	8	6	12	20
aristas	6	12	12	30	30
caras	4	6	8	20	12
lados	3	4	3	3	5
cara	triángulo	cuadrado	triángulo	triángulo	pentágono

Cuadro 6.1: Se verifica manualmente que para los poliedros regulares, esta relación se cumple tal cual Euler propuso. Sin embargo, la relación no es sólo para poliedros regulares, lo es para cualquier poliedro.

Un año después de proponer esta relación Euler propuso la demostración. Su demostración consiste en quitarle sucesivamente vértices a un poliedro para verificar que su relación se seguía manteniendo en el nuevo poliedro. Según Euler, continuando este proceso se podía llegar hasta un poliedro formado por un mínimo de caras, aristas y vértices, pues hay un límite dictado por la cantidad de dichos elementos ya que es imposible, por ejemplo, construir un poliedro con sólo dos aristas, dos vértices o una cara, pues al menos se requieren de cuatro caras, cuatro vértices y seis aristas (equivalente a un tetraedro si de poliedros regulares se tratara). De alguna forma, su demostración es la manera inversa de lo que cualquier matemático reconocería inmediatamente por el método de inducción, que consiste en un procedimiento recursivo en el que si la propiedad se cumple para un caso básico y luego se muestra que se cumple siempre para el siguiente, entonces se cumple para todos (el método de inducción se divide en: caso base y paso inductivo, en donde en el paso inductivo se supone verdadera la hipótesis inductiva y se muestra que si se cumple la propiedad para uno cualquiera y para el siguiente entonces se cumple para el resto). Sin embargo, no es claro cómo aplicar la inducción en casos geométricos, por ejemplo, en el procedimiento de Euler existe un problema, que no siempre al quitarle vértices a un poliedro el resultado es otro poliedro, se dice entonces que la operación de quitar vértices a poliedros no es cerrada pues el resultado podrían ser objetos que no son poliedros. Uno podría suponer que el problema se resolvería sabiendo numerar los vértices de tal forma que siempre al quitar el siguiente el resultado siga siendo un poliedro, sin embargo esto no lo resuelve sino que traslada el problema a cómo enumerar, en general, los vértices de cualquier poliedro. Así, la demostración de Euler no es muy formal ni válida para todos los casos, por lo tanto es una demostración incompleta. Lo más interesante es reconocer que este problema no es exclusivo del procedimiento Euleriano, sino de llevar a cabo pruebas geométricas mediante recursos y herramientas matemáticas de demostración general, como la inducción. Es decir, saber determinar cuándo una herramienta, como la inducción (y en general), puede aplicarse a un caso geométrico y cuándo, como en este caso, la relación entre la herramienta y el hecho geométrico que pretende demostrarse no tiene una interpretación bien definida.

Pero de esto surge una pregunta ¿Pudo haberse deducido esta relación a partir de la geometría construida por Euclides? Reformulándola: ¿Tenía Euclides las herramientas necesarias para demostrar este importante resultado? Y si es así ¿Por qué no lo hizo? Para respondernos, también de manera matemática como pretendemos, podemos intentar demostrar la relación de Euler "a la manera de Euclides", y le llamo tramposamente "relación" y no "invariante" por que ese será precisamente el argumento para encontrar una muy probable razón por la cual Euclides si podía haber deducido y demostrado este hecho con sus propios argumentos pero ni siquiera pudo concebir una pregunta de ese tipo. Primero veamos cuál podría ser una demostración Euclidiana la relación de Euler, para ello nos apoyaremos en otro resultado equivalente, otra relación:

Proposición: El número mínimo de triángulos (sin aumentar vértices) en los que se puede descomponer un polígono de n lados es $n-2$.

Supongamos que nuestro problema es determinar el mínimo de triángulos en que se puede descomponer un polígono (es decir, sin agregar vértices interiores). En principio el procedimiento geométrico parece más o menos claro, lo que se hace es unir vértices trazando diagonales (aunque no precisamente de manera indiscriminada pues a veces los resultados no son triángulos, en ese caso se dice que el procedimiento de trazar diagonales no es cerrado) hasta que el resultado final sea una figura compuesta únicamente de triángulos.

Aunque este tipo de procedimiento no es ajeno a Euclides pues se preguntó en el libro XI de sus Elementos, cómo y en cuántas pirámides podía descomponer un paralepípedo con la intención de comparar áreas entre paralepípedos (siempre en tres), que es, sin duda, lo que reconoceríamos como un caso reducido del método de exhaución (equidescomposición). Incluso Euclides fue exitoso al plantearse el problema y darle solución a cómo y en cuántos paralepípedos podía descomponer cualquier pirámide para medir su área para compararla con otra. Sin embargo, la forma en que está planteado nuestro problema si podría ser ajeno a la forma en que Euclides se plantea problemas y se formula proposiciones ya que en los casos anteriores en los que Euclides realiza estos procedimientos tiene en mente y como objetivo uno muy claro: la magnitud de sus objetos, en otras palabras, el área. Es decir, para Euclides pudo haber sido irrelevante el hecho de que un polígono se pudiera dividir en triángulos, lo relevante para él, en donde el procedimiento de triangulación jugó sólo un papel de herramienta, era la determinación de magnitudes y las comparaciones con otras magnitudes. Efectivamente, nuestra pregunta no sólo es válida en la geometría euclidiana, no sólo es también válida la relación, si no incluso es soluble mediante herramientas que el mismo Euclides desarrolló y construyo en sus 13 libros. Veamos cómo pudo haber sido una proposición de este tipo en los Elementos de Euclides (si el lector me cree que puede demostrarse con herramientas euclidianas a la manera de Euclides, puede saltarse los detalles de la demostración):

> Demostración: Sabemos, por Eu.I.16 que la suma interior de los ángulos de un triángulo es 180 grados o dos rectos. Es claro que la suma de los ángulos de un polígono es la suma de los ángulos de los triángulos que se pueden formar dentro de él triangulando de la siguiente forma: Agréguese un vértice ubicado en el centro del polígono (Sabemos por Euclides que el centro de un polígono es el centro de la circunferencia con radio r, donde r es la longitud de n, es decir, la longitud de cualquier lado del polígono), luego trácense del nuevo vértice, es decir, del centro

del polígono, líneas hacia cada uno de los vértices del polígono, entonces el polígono queda, efectivamente, triangulado. Sea entonces E la suma de los ángulos del polígono triangulado, entonces $E = n(2R)$, es decir, E es igual a n que es el número de lados del polígono multiplicado por dos ángulos rectos, que es la medida de cada triángulo pues E es la suma de los ángulos interiores de los triángulos del poliedro que acabamos de descomponer en n triángulos (uno por cada lado del polígono, usando como vértice común a todos los triángulos el centro del polígono) y sabemos que la suma de los ángulos interiores de cada triángulo es igual a $2R$ y que hay n triángulos. Entonces, despejando tenemos que $n = E/2R$. Ahora, sabemos que al haber descompuesto en n triángulos el polígono agregamos cuatro ángulos rectos, pues no son ángulos del polígono aquellos alrededor del vértice del cual nos auxiliamos (aquel que se colocó en el centro del polígono), pues alrededor del vértice hay cuatro ángulos rectos. Entonces sea S la suma de los ángulos interiores del polígono, entonces $S = E - 4R$. Ahora despejando E tenemos que $E = S + 4R$. Entonces, sustituyendo E en la relación pasada en donde despejamos n, podemos escribir que: $(S+4R)/2R = n$, de donde separando la división nos queda que: $S/2R+4R/2R = n$, haciendo las operaciones respectivas nos queda: $S/2 + 2 = n$ de donde $S/2 = n - 2$ y donde $S/2$ es el mínimo número de triángulos en los que se puede dividir un polígono de n lados. Q.E.D.

En esta demostración puede verse que no se ha utilizado ningún argumento que Euclides no reconociera como alguna de sus proposiciones de sus 13 libros, por lo tanto no sólo es consistente con la geometría que construyó sino deducible de ella. Sin embargo, esta demostración tiene dos inconvenientes (que en realidad es uno solo), por un lado depende del hecho de que la suma de los ángulos interiores de cualquier triángulo son dos rectos, lo cual descansa directamente en la existencia y unicidad del ángulo recto, el invariante de la geometría euclidiana, lo que la sustenta, cuando en realidad la relación de Euler es independiente de la geometría euclidiana, de hecho de cualquier geometría, es un invariante cualitativo (topológico). Por otro lado, la demostración depende de la dimensionalidad, pues no es cierto, en general, que siempre alrededor de un vértice hayan cuatro rectos, ya que, por ejemplo, en el espacio de dimensión tres son ocho ángulos (sólidos) rectos los que hay alrededor de un vértice. En cambio, nuevamente, el invariante de Euler es independiente de la dimensión. Por lo tanto, esta demostración no es falsa, pero no muy buena, pues depende de hipótesis no contenidas en la proposición (la dimensionalidad y el tipo de geometría: la Euclidiana).

Euclides no pudo deducirlo no porque no fuera posible de la geometría que construyó sino por que no hacía sentido formularse la pregunta. No era concebible en su geometría el tipo de pregunta y la forma en que la planteamos. A Euclides no le interesaban las relaciones cualitativas, sino las cuantitativas, el cálculo de magnitudes: áreas, volúmenes. Si Euclides hubiera demostrado este resultado o la relación de Euler, la topología hubiera comenzado 20 siglos antes de cuando comenzó, pero esto era imposible una vez inmersos en las circunstancias de Euclides, simplemente estaba fuera de su objeto y concepción.

Se considera que el invariante de Euler, junto con su solución al problema de los puentes de Königsberg, son los hechos matemáticos que dan origen a la topología. La topología matemática es el estudio cualitativo de las formas, a diferencia de la geometría que es el estudio cuantitativo de las formas, las magnitudes: longitudes, superficies o áreas, regiones o volúmenes.

Las pruebas de la formula de Euler pueden encontrarse en diversas bibliografías, algunas de ellas son brillantes, existen al menos diecisiete, todas ellas pueden encontrarse en: `http://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`

6.1. El defecto de Descartes

La contribución de Descartes en nuestra historia acerca del espacio es de fundamental interés. Digamos que lo que se sabía hasta Descartes culminó con él en el sentido siguiente. Hasta Descartes, el espacio físico parecía desconectado, aunque íntimamente relacionado, con el espacio matemático (euclidiano). Newton había de alguna forma unificado el espacio celestial con el espacio terrenal con su teoría de la gravedad, una distinción común desde Copérnico, Galileo y Kepler. Pero Newton aplicaría sus leyes al espacio más allá de la luna y debajo de la luna sin distinción alguna. Ahora bien, la geometría de Descartes proveería a la geometría de Euclides con coordenadas, y su aplicación se extendería no sólo a argumentos generales del espacio sino a todo tipo de aplicaciones. Los problemas podían ahora reformularse como ecuaciones, nuevas preguntas y nuevas respuestas surgieron. Poco tiempo después de Descartes, marcado por las demostraciones de resolución de ecuaciones, la geometría euclidiana sería vista como completa, en el sentido de que poco más podría conocerse, ya todo o casi todo estaba dicho. Entre los problemas que pudieron reescribirse están los famosos problemas de la cuadratura del círculo y de la trisección del ángulo, que con el trabajo de Descartes y su correspondencia entre geometría y álgebra se solucionarían en el sentido negativo (ninguno de los dos problemas serían resolubles con regla y compás ya que, por su grado algebraico, no permitían la resolución de las ecuaciones asociadas a estos problemas).

Aunque se sigan utilizando los términos cuerpo y sólido, ahora con el entendimiento de la sutil diferencia, es necesario y se requiere hacer notar la diferencia. En general nos hemos referido a ellos de manera indiferente pero es importante señalar (y percatarnos) de la diferencia. En primera instancia, el término cuerpo, es frecuentemente recurrido en los textos antiguos, en los Elementos de Euclides, lo cual nos muestra que no había una conciencia (en los términos actuales) acerca del concepto de espacio, dimensionalidad, superficie ni mucho menos gráfica. Precisamente es lo que hemos estado explorando, lo cual pudiera reflejar que hubiera bastado con percatarnos de la diferencia en dichos términos para entender todo lo que hemos escrito, sin embargo, como ejercicio paradójico, probablemente no sabremos si ese hecho ling´uístico se detectó, precisamente, mediante el estudio de la evolución de la teoría de poliedros. Cuerpo es un término que tiene una connotación de táctil, es algo que se puede tocar, que convive (en espacio y dimensión–3 dimensiones) con el que pretende estudiarlo y que por tanto es objeto de estudio, aunque sea objeto matemático. Por otro lado, en el trabajo de Euler[29], ya en el siglo XVIII, y luego

Legendre[46] y Descartes[26], el término al que se recurre es al de sólido, incluso poco tiempo antes se bautizaron, en el Renacimiento, a los cuerpos platónicos como sólidos platónicos, lo cual nos habla de que, a pesar del esfuerzo que Euler haría para deshacerse de conceptos anteriores y encaminarse hacia una dirección más topológica, no podían aún desprenderse del todo del conocimiento anterior, de los viejos conceptos de la geometría sólida (y de la plana), aunque ya había en ellos claros asomos para empezar a alejarse definitivamente de las concepciones anteriores para dar lugar a las áreas que hoy conocemos como topología y teoría de gráficas, sobre todo al plantearse, como una cuestión válida, un asunto meramente cualitativo expresado en la forma en que Euler lo hace y que por supuesto para Euclides hubieran carecido de todo sentido en tanto no era un asunto de magnitudes y por tanto impensable o inconcebible siquiera, y por otro lado, la concepción de Legendre de una geometría sobre una superficie bidimensional distinta a un plano (no hay redundancia), es decir, distinto a un plano euclidiano. Sin embargo, Legendre tampoco se deshace por completo del interior de la esfera, no es del todo una geometría de superficie, pues todo su trabajo continúa fundándose en la geometría sólida que a su vez continúa siendo geometría euclidiana en el espacio, de hecho geometría euclidiana en el espacio que sigue además dependiendo de la geometría euclidiana plana, ya que las definiciones o teoremas de congruencia en el espacio se fundan en las definiciones o teoremas de congruencia en el plano. Legendre es incapaz aún, sin restarle mérito alguno por supuesto, sino entendiendo a cada uno de los personajes en su entorno histórico y evolutivo, de deshacerse de los ángulos planos, de los ángulos sólidos, de las proyecciones y de los puntos interiores de la esfera, incluso el mismo Cauchy, en su intento exitoso por dar el siguiente paso importante hacia las nuevas áreas de las matemáticas modernas sigue pensando en sólidos y en el interior de los sólidos, aunque éste, al igual que Euler, avanzaron de manera muy importante hacia las concepciones topológicas que hoy conocemos (o estrictamente de la teoría de gráficas). No es hasta el siglo XIX que la idea de poliedro, en el sentido de “poli” (muchos) y “edro” (del griego edra, que se traduce como eje o arista y que inicialmente se refería a base), se concibe en el sentido que la misma palabra indica y al que ahora se hace referencia topológicamente.

De Descartes se conoce indirectamente un documento[26] que habría escrito poco tiempo antes de morir en 1650. Es un documento relativo a la teoría de poliedros con título “Progymnasmata de Solidorum Elementis”. El viaje del documento original que provenía de Estocolmo, donde vivió Descartes sus últimos meses, se hundió en el mar[31] hacia su llegada a París en 1653, no sin que hubiera quedada asentada su existencia como el objeto M en un inventario levantado previamente por el embajador francés, amigo de Descartes, Chanut y cuyo contenido fue conocido. El documento estuvo sumergido tres días y luego fue recuperado y secado. No fue publicado hasta casi 200 años después de que Leibniz[21] hiciera copias de varios documentos no publicados de Descartes cuando estuvo en París en 1676. Finalmente se publicó en 1830 después de haber sido encontrado por Carril de entre la colección no catalogada de los trabajos de Leibniz en la biblioteca real de Hanover. No fue hasta entre 1890 y 1908 que estuvieron disponibles versiones recuperadas del latín, traducidas y corregidas en francés. Luego en 1920 se publicó una versión en italiano y una versión a inglés hasta 1982, no parece haber ninguna otra traducción en ningún otro idioma[31].

Lo que sorprende en el trabajo de Descartes, más allá de que haya llegado a un resultado que le permitía deducir directamente la relación de Euler casi 100 años antes, es la similitud que los argumentos de Descartes tienen con los de Legendre, pues a pesar de que ambos parecen estar hablando y argumentando de manera completamente distinta lo que quieren exponer, en el fondo están, como ya había comentado, fundados en la geometría sólida. Ambos, por ejemplo, usan en el fondo el hecho fundamental de que la suma de los ángulos sólidos externos de un poliedro es ocho rectos que descubre por analogía, al generalizar lo que sucede en el plano, en donde la suma de los ángulos externos de un polígono convexo es cuatro rectos, es decir, un círculo completo. Legendre, por otro lado, por la misma analogía deduce que la superficie de una esfera debe ser ocho rectos y por tanto esto le permite definir su unidad de medida, el triángulo que abarca un cuarto de hemisferio, o un octavo de la esfera, por tanto ese triángulo debe medir un ángulo recto. Pero la forma en que define Legendre el área de su triángulo que es un octavo de la esfera y que por tanto debe ser un recto es idéntica a la definición que Descartes proporciona al principio de su documento en el que dice:

> "Un ángulo sólido recto es aquel que abarca una octava parte de la esfera, aún incluso cuando no esté formado por tres ángulos planos rectos."

Debe entenderse por ángulos planos a los ángulos que forman el ángulo sólido, es decir, las paredes que salen de un punto interior hacia la superficie interna de la esfera y que por supuesto forman un ángulo, un ángulo plano en el sentido plano y en el sentido euclidiano.

La primera parte es idéntica a la de Legendre como definición de su unidad de medida del cual partirá, pero a pesar de que a Descartes no parece importarle, pues no la requiere además, la geometría esférica, la segunda parte "aún incluso cuando no esté formado por tres ángulos planos rectos" llama la atención pues en el fondo es una definición que si está hablando de área sobre la superficie de una esfera en los mismos términos que Legendre utiliza, aunque por supuesto Descartes está pensando en lo que después le permitirá ver a las caras de los poliedros como esos ángulos sólidos que define.

Luego Descartes expone una proposición interesante en donde empieza a mostrar su interés por las relaciones entre los distintos componentes de los sólidos (obsérvese como utilizo la palabra sólido), pues comienza a relacionar el número de ángulos planos con el número de ángulos sólidos:

> "Si uno multiplica cuatro ángulos planos rectos por el número de ángulos sólidos y del producto se restan ocho ángulos rectos planos, el resultado será la suma de todos los ángulos planos que están en la superficie del cuerpo sólido"

En otras palabras, si E es la suma de las medidas de todos los ángulos planos, Descartes dice que E = (4S - 8) ángulos rectos. Donde S es el número de ángulos sólidos.

Por supuesto no es poco común que Descartes no se preocupe por demostrar lo que dice, su soberbia queda bien reflejada en todos sus trabajos, en particular los matemáticos. No habría duda, si es que la hubiera, de que este documento fue escrito por Descartes, sobre todo por su particular forma de enunciar sus proposiciones sin comentario adicional alguno, muy al estilo de su más importante obra, "La Géométrie" de donde, se dice comúnmente y no sin razón, surge la geometría analítica, un salto enorme para las matemáticas que permitirían poco tiempo después, por supuesto, el surgimiento del cálculo, el trabajo fructífero del álgebra y más adelante el del análisis matemático. En aquel momento decirse "analítico" (por ejemplo, las funciones analíticas) era no sólo estar de moda con la invención de Descartes sino estar actualizado en cuanto a la metodología que estaba permitiendo el avance en muchas áreas de las matemáticas. Metodología además que había sido estudiada por personajes como Aristóteles y Pappus, y que consiste, como ya se había mencionado, en el método analítico que supone la existencia de la solución para encontrar las condiciones que la satisfacen (expresar una ecuación para resolverla supone esta metodología, primero se expresa como si ya estuviera resuelta y luego se buscan los valores que se requieren).

De hecho el trabajo de Descartes en la teoría de poliedros depositado en el documento que estamos estudiando es extremadamente corto, se trata de unas cuantas proposiciones sin demostrar, pero que son verdaderas. Es obvio que Descartes se ocupaba de asegurarse de la veracidad de sus asertos pero no queda claro si le haya parecido indiferente si el lector deducía o no esa veracidad y por lo tanto el último resultado. Henri Lebesgue escribiría que Descartes no había llegado al resultado de Euler porque nunca lo vio, aunque se haya acercado sorpresivamente. La diferencia fundamental, y que sugiere que Lebesgue está en lo correcto, es que Descartes no define el concepto de arista, un concepto que no vendría sino hasta Euler, ya que hasta Descartes una arista sólo era una parte de la cara de un poliedro y no un objeto por sí mismo como se desprende de la fórmula de la característica de Euler.

El documento de Descartes, así como el resto de los que hemos explorado y exploraremos, más que un reflejo de genialidad es un reflejo del estado del conocimiento en la época en la que estaban insertados. Por supuesto se necesitaba del talento de Descartes, Euler, Legendre, Newton, Gauss o Cauchy, pero todos fueron producto de una motivación presente enmarcada en su entorno social, cultural e histórico. La discusión, por ejemplo, de quien fue primero en descubrir la relación de Euler, si Descartes o Euler, no sólo no es fructífera y pertenece a la literatura ligera que argumentan asuntos de justicia cuando dudo que al Descartes muerto le interese, sino que además desvía la atención del estudio de los elementos que nos permiten ver a mucho mayor profundidad. No tengo ninguna duda de que Descartes pudo haber deducido y visto lo que ya casi tenía enfrente, tampoco me atrevo a asegurarlo, el simple hecho de que no lo escribiera nos indica o que no lo dedujo o que no le dio importancia, y aunque esta última posibilidad es un tanto absurda e improbable podría decirnos el hecho de que aún para Descartes, una pregunta relativa exclusivamente a los elementos del poliedro (no del sólido, es decir, no aún independiente de la geometría sólida) podía tener sentido pero aún no surgía de su conjunto de ideas e intereses. Esto nos dice, entre líneas, que era el tiempo de la geometría sólida y no, obviamente, de la topología o la teoría de gráficas, pero que sí comenzaban a cobrar sentido preguntas y respuestas acerca de asuntos meramente cuantitativos y ya no precisamente, como en el texto de Euclides, únicamente de magnitudes. A Descartes ya no le interesa calcular el área o el volumen, le interesa expresar y hacer notar las relaciones que encuentra acerca de los sólidos, aunque estas relaciones sigan fundadas en una geometría de magnitudes como la geometría sólida, tal cual como sucede en Legendre, quien definitivamente no tuvo nunca acceso al trabajo de Descartes, lo que nos indica una vez más el estado del conocimiento matemático de la época y sobre todo la forma paulatina en que fue evolucionando.

Descartes analiza indirectamente que ciertas relaciones se cumplen para algunos de los poliedros regulares, por ejemplo, para las pirámides (como el tetraedro), para los prismas (el cubo) y las bipiramides (el octaedro), con lo que generaliza y enuncia dos desigualdades relativas al número de ángulos sólidos y caras de un poliedro con las fórmulas $S \geq F/2 + 2$ y $F \geq S/2 + 2$, donde F es el número de caras y S de ángulos sólidos. Luego, al más estilo analítico de Descartes, encuentra dos ecuaciones que involucran estas cantidades (caras y ángulos sólidos) y cuyas únicas soluciones son los números 4, 8, 6, 20 y 12, que son precisamente el número de caras de los cinco sólidos platónicos. Las ecuaciones que encuentra son: $(2S - 4)/F = a$

Figura 6.1: Placa funeraria en la capilla de Saint Benoît en la iglesia de Saint-Germain-de-Prés con posiblemente algunos de los restos de René Descartes quien muriera en Suecia y cuyo cuerpo se trajera a Francia varios siglos después. Fotos de H. Zenil a unas cuadras de su actual residencia en el barrio que lleva el nombre de la misma iglesia.

y $(2F-4)/S = b$, donde para que a y b sean números enteros las únicas soluciones son los números ya mencionados. Estas ecuaciones se derivan de la primera ecuación que encontró acerca de la relación entre la suma total de las medidas de todos los ángulos planos y el número de ángulos sólidos $E = (4S-8)$ ángulos rectos y de las propiedades de los cinco sólidos regulares. Por ejemplo, la primera se deriva del hecho de que todas las caras de los sólidos regulares tienen el mismo número de ángulos, digamos n, luego la suma de los ángulos de cada cara es $2(n-2)$ ángulos rectos (basta triangular y sumar los ángulos de cada triángulo pues un polígono regular siempre se puede triangular trazando sus diagonales), y para todas las caras (F) la suma total es $E = 2(n-2)F$ ángulos rectos. Sustituyendo este resultado en $E = (4S-8)$ nos queda:

$$2(n-2)F \text{ ángulos rectos} = (4S-8) \text{ ángulos rectos de donde:}$$

$$(2S-4)/F = n-2 = a$$

y de la misma forma para b pues todos los ángulos sólidos tienen el mismo número de ángulos planos, digamos m, y entonces el número de ángulos planos (P) es igual a mS. Sustituyendo en una proposición que veremos a continuación queda $E/no.\ \acute{a}ngulos\ rectos = 2mS - 4F$ de donde nuevamente sustituyendo en $E = (4S - 8)$ resulta:

$$2mS - 4F = 4S - 8$$

y luego:

$$(2F - 4)/S = m - 2 = b$$

En una proposición siguiente, Descartes muestra otra relación que describe de la siguiente forma:

$$P = (4F + E/no.\ \acute{a}ngulos\ rectos)/2$$

la cual conecta el número ángulos planos, caras y la sima de los ángulos planos.

La penúltima proposición trata acerca de la relación que existe entre el número de ángulos planos, caras y ángulos sólidos

$$P = 2F + 2S - 4$$

Algunas proposiciones se pueden hacen notar por su contenido algebraico y otras por su contenido geométrico, pero las que son notables son aquellas precisamente que enuncian relaciones entre los elementos de los sólidos. Algunas parecen requerir demostraciones meramente geométricas aunque no hace intento alguno por esbozar alguna. Descartes estudia un conjunto específico de casos y hace generalizaciones a partir de sus resultados particulares en una especie de inducción matemática. Se sabe que los resultados de la primer parte del documento ya eran conocidos en el tiempo en el que fueron escritos por Descartes, sin embargo es novedosa la segunda parte de donde incluso podría obtenerse directamente la fórmula de Euler, pues

P, que son los ángulos planos que conforman los ángulos sólidos del poliedro, es el doble de las aristas, ya que por cada dos ángulos planos hay una arista pues recordemos que un ángulo plano es parte de un ángulo sólido y también del ángulo sólido vecino (al igual que una arista comparte dos caras), entonces la fórmula queda como $2A = P$ donde A es el número de aristas, y sustituyendo:

$$2A = 2F + 2S4$$

dividiendo entre dos:

$$A = F + S - 2$$

De hecho, la característica de Euler puede deducirse de otras dos proposiciones anteriores de Descartes. Su deducción es tan directa y simple que algunos autores se la atribuyen a Descartes. Tratar de asegurar que Descartes la sabía o la hubiera descubierto por que de su trabajo se puede deducir es equivalente a decir entonces que sabía todo lo que se pudiera deducir de sus asertos, lo cual es imposible hacer y saber, ni para el caso general ni para el particular. Lo que si queda claro es que Descartes estaba pensando en un sólido como tal y no como la superficie, que es una diferencia sustancial con el trabajo de Euler, por lo que es mas o menos claro que Euler tenía mejores elementos y argumentos para formular su relación que hoy le atribuimos, sobre todo en los términos en los que está expuesta, en términos de vértices, aristas y caras, deshaciéndose del interior y dando un paso fundamental y definitivo para hablar de superficie, de una superficie real y de sus elementos, de un poliedro y no necesariamente un sólido, y todo lo que ello implica.

Por otro lado, al teorema que se deduce del trabajo de Descartes que he descrito con cierto detalle, se le conoce como el teorema del *defecto total* de un poliedro. El defecto angular es la diferencia entre la suma de los ángulos de las caras en un vértice de un poliedro y 2π. El teorema de defecto total de Descartes, de las derivaciones anteriores, dice entonces que si un poliedro (convexo) es homeomorfo a una esfera (es decir, topológicamente equivalente), entonces puede ser deformado en una esfera por estiramiento sin desgarrarse o romperse, y el "defecto total" (la suma de los defectos de todos los vértices) es 4π radianes (dos vueltas a la esfera) que se reconecta al resultado y teorema de GaussBonnet que generaliza el resultado de Descartes y demuestra que de hecho el valor característico de Euler indica el número de vueltas del defecto total del poliedro para ajustarse a una esfera y que se conecta al caso especial del trabajo y resultados de la propiedad intrínseca de curvatura de Gauss[33].

En efecto, el resultado de Descartes puede efectivamente ser utilizado para calcular el número de vértices de un poliedro por medio de la cuenta total de los ángulos de todas las caras más el defecto total.

6.2. Rigidez y la característica de Euler

Legendre[46] dice haber inspirado a Cauchy[15] con respecto a la relación de congruencia euclidiana: dos cuerpos sólidos son iguales si tienen el mismo número de caras congruentes entre sí, pues todos los ángulos, incluidos los ángulos sólidos entre las aristas son iguales, se está hablando en el fondo del concepto de volumen, pues lo que dice Cauchy es que la superficie del objeto, es decir las caras del poliedro, determinan los ángulos sólidos entre las aristas y por lo tanto el volumen. Es lo que Euclides buscó sin encontrar, la forma de comparar dos cuerpos sólidos y decidir cuándo uno es congruente con otro, en el sentido del volumen.

Si suponemos que dos polígonos son iguales entre sí si tienen el mismo número de lados y de misma longitud, es obvio que en el triángulo estas dos condiciones lo determinan, es decir, no hay manera de deformar un triángulo sin deformar sus lados, o lo que es lo mismo, no hay manera de construir dos triángulos de distinta área con las mismas rectas. Sin embargo, esto no sucede a partir del cuadrado, un cuadrado se puede deformar sin que sus lados sufran modificación alguna (piénsese en todos los paralelogramos que se pueden formar con cuatro rectas iguales entre sí), lo mismo para el pentágono y n-ágono. Entonces la siguiente pregunta se desprende:

¿Pueden deformarse los poliedros sin que se deformen las caras? Es decir, ¿Puede construirse un poliedro con distinto volumen a partir de las mismas caras? De la misma forma, es mas o menos claro que en el caso del tetraedro no puede éste deformarse sin que se deformen los triángulos equiláteros que forman sus caras, pero que algo sea más o menos claro no se parece a demostrarlo, mucho menos si se pretende dar una respuesta en general para el resto de los poliedros o, si incluso se quiere determinar cuáles poliedros podrían deformarse sin deformar sus caras, si acaso éstos existen. Sin embargo, Cauchy[15] se da cuenta, y así lo demuestra, que si se trata de deformar un poliedro deformaría sus ángulos diedros, es decir, los ángulos entre las aristas, pues las caras se suponen fijas. Sin embargo, todos los ángulos sólidos están conectados entre sí, pues uno mismo es parte del otro, por lo tanto es imposible modificar uno sin modificar el resto, pero el resto impide al mismo tiempo que se modifique el primero pues se alteraría el invariante de Euler ya que supondría que existe algún vértice desconectado del resto por sus aristas, es decir, un vértice adicional que provoca un desbalance en la fórmula de Euler. Cauchy prueba entonces que los poliedros son estructuras rígidas y estables, que su superficie determina su volumen en tanto no permite deformaciones. Cauchy de hecho prueba un resultado con aún mayor alcance e impacto histórico pues al probar que los ángulos diedros de un poliedro convexo están completamente determinados por los ángulos de las caras y la estructura combinatoria, la prueba de Cauchy no hace uso de ninguna magnitud. El hecho de que la superficie del poliedro determine el volumen del poliedro (sólido ahora con justicia, ya que es indeformable), el resultado es uno de los primeros que relacionan la frontera de un objeto con su interior. Luego vendrían los teoremas del cálculo debidos a Green, el mismo Gauss y Stockes quienes desarrollan herramientas para a partir del cálculo de superficies calcular áreas y volúmenes. Presenciamos los origines del cálculo y de la topología modernas.

El teorema de Cauchy puede reescribirse y generalizarse como: dos poliedros con caras iguales son iguales (congruentes). En otras palabras, la *red* formada al desdoblar un poliedro en una superficie plana y con las instrucciones de pegado describiendo qué caras se tocan unas con otras, determina de manera única la forma del poliedro (su volumen y rigidez).

Lo que es curioso en el resultado de Cauchy, es que recurre, nuevamente a la manera de Legendre, al invariante de Euler, que es una relación cualitativa (o topológica), para demostrar un hecho a todas luces cuantitativo, de magnitud, como el volumen de los poliedros, es decir meramente geométrica.

Puede preguntarse entonces cuál es la conexión entre una relación meramente cualitativa o topológica y otra cuantitativa o de magnitud. Si la característica de Euler tiene esa influencia en la geometría que incluso permite deducirse de casos muy particulares, la pregunta inversa parece tener sentido. ¿Es posible deducir de la característica de Euler la geometría entendida como magnitudes? ¿Puede ser la característica de Euler un criterio de congruencia en el espacio? Ya vimos por Cauchy que si dos sólidos tienen el mismo número de caras congruentes entre sí, entonces ambos son iguales (o congruentes) pues contienen el mismo volumen, pues son rígidos, ya que si no lo fueran no se cumpliría la característica de Euler.

6.3. De regreso a los fundamentos

El teorema de Desargues (si dos triángulos están en perspectiva desde un punto, entonces están en perspectiva desde una recta) o de Pascal (si los seis vértices de un hexágono están situados en una cónica y los tres pares de lados opuestos se cortan, entonces los puntos de intersección están alineados) pueden sustituir todos los axiomas de congruencia en el plano que Hilbert define en sus Fundamentos de la Geometría[39]. Es decir, Hilbert puede deducir del teorema de Desargues (o del de Pascal) toda la geometría euclidiana plana, basta sólo agregar el axioma de las paralelas (o quinto postulado de Euclides). ¿Es posible entonces que la formula de Euler cumpla el mismo papel en el espacio que el teorema de Desargues en el plano? Es decir, del teorema de Desargues (o del de Pascal) se pueden deducir todos y cada uno de los axiomas de congruencia del plano (LLL, LAL, ALA). ¿Qué tipo de congruencia puede obtenerse de la característica de Euler? Pues bien, precisamente la topológica, de ahí que a la característica de Euler se le conozca también como el invariante o la característica de Euler en topología. Dos objetos son congruentes topológicamente si existe una transformación continua de un objeto que me lleve al otro. Efectivamente, la relación de Euler se conserva cuando esa transformación se lleva a cabo. Este tipo de congruencia es mucho más amplia que la congruencia de la geometría euclidiana, por supuesto esta congruencia topológica no serviría para los fines de la geometría de magnitudes, entre ellas la geometría euclidiana. Pero basta agregar un axioma de congruencia adicional a la característica de Euler para deducir entonces sí el resto de los teoremas de congruencia de la geometría euclidiana, curiosamente el axioma adicional que debe agregarse es uno que descanse en una dimensión menor, por ejemplo, un axioma de congruencia entre magnitudes de rectas o magnitudes de planos (áreas). Así, por ejemplo, de la característica de Euler más un axioma que permita determinar la longitud de las rectas proporciona la congruencia de magnitudes que se requiere. Esto es obvio si consideramos por ejemplo el esqueleto de un poliedro. Es obvio que la relación de Euler no se ve alterada si estando sin determinar las longitudes de las aristas el poliedro se deforma tanto como se quiera (por supuesto sin cortar ni pegar), y ese es precisamente el problema pues una vez deformados dos poliedros que cumplan la relación de Euler no necesariamente tendrán el mismo volumen, ni área en la superficie, pero una vez determinadas las longitudes de sus aristas el poliedro queda determinado. Así, el esqueleto de un poliedro determina la superficie (área) e interior (volumen) del poliedro. De otra forma, sin un axioma de magnitudes adicional, el tipo de congruencia posible con el invariante de Euler es la topológica. Y aunque este tipo de congruencia parece demasiado holgada como para ser útil, lo es, y mucho. Topológicamente se pueden diferenciar distintos tipos de objetos topológicos por su invariante o característica de Euler, por ejemplo, el invariante sobre una dona (se le conoce como toro en matemáticas) u otro objeto topológico equivalente a una dona es cero, es decir:

$$v + c - a = 0 \qquad (6.2)$$

Mientras que para esferas, poliedros, elipsoides y muchas otras formas (todas aquellas que son resultado de las deformaciones topológicas de esferas, poliedros, etc.). De esta forma, por el invariante de Euler, se puede identificar a un objeto equivalente o distinto topológicamente (congruente o no) a otro.

La contribución de Hilbert es relevante, ya que traslada la atención de lo que uno debe asumir como verdad a lo que uno puede asumir como verdad para derivar un resultado geométrico u otro. Así que Hilbert divide sus axiomas en cinco grupos dependiendo de las nociones que capturan, pero también se asegura que cada grupo es consistente (es decir, que no ninguno de los axiomas que contiene se contradicen). De esta forma encuentra, por ejemplo, que el teorema de Desargues es independiente de la geometría proyectiva del plano, lo que quiere decir que agregando el teorema o la negación del teorema como axioma, el grupo de axiomas que dan origen a la geometría proyectiva en el plano son consistentes. De ello se deduce que el teorema de Desargues podría ser falso en el plano, lo que es muy poco intuitivo. Finalmente, Hilbert muestra que la negación del quinto postulado en uno u otro sentido dan origen a una u otra geometría. El tratado de Hilbert es meramente lógico, desprovisto de toda interpretación de objetos en el espacio.

6.4. Los excesos de Legendre

La obra geométrica de Legendre “Les Éléments de Géométrie”[46] (1794) tiene una riqueza impresionante. No deja lugar a dudas de que se trata de un matemático orgulloso de lo que sabe y de lo que intenta hacer. Su libro VII trata de lo que nos compete: la esfera, la gran ausente en la obra de Euclides. Legendre está bien consciente de este hecho y no sólo la presenta sino que la sobre explota. Si Euclides omite este objeto Legendre lo utiliza y manipula a su antojo.

Inicia presentándonos al protagonista de la historia: “La esfera es un sólido terminado por una superficie curva, donde todos los puntos son igualmente distantes de un punto interior llamado centro”. Luego sigue definiendo propiedades, como el radio, diámetro y polos de la esfera, o que si un plano la corta forma un círculo, el círculo mayor es aquel que pasa por el centro de la esfera, mientras que un plano que sólo la toca en un punto (el círculo menor), se dice tangente a la esfera. Inmediatamente, en la definición VI introduce a su personaje coestelar: el triángulo esférico, aquel que es una parte de la superficie de la esfera comprendido entre tres arcos de círculos mayores, cada arco es un lado del triángulo y los ángulos entre los arcos son los ángulos del triángulo. Finalmente nos presenta a su personaje secundario, pero no por ello menos importante: el polígono esférico, que es una parte de la superficie de la esfera, y es regular cuando los arcos que lo forman son iguales (subtienden un ángulo sólido de misma magnitud). Una vez exploradas diversas propiedades de estos personajes nos dirige hacia un lugar nunca antes explorado. Legendre se convierte un maestro saltando de una geometría a otra, de una dimensión a otra. Define efectivamente sus objetos esféricos sobre la superficie de la esfera, es decir, un espacio bidimensional pero, sin vacilación alguna, sugiere y demuestra propiedades moviéndose al espacio tridimensional haciendo uso del ángulo sólido para decidir cuando dos arcos, dos ángulos en la superficie o incluso dos triángulos son iguales o congruentes. En este sentido, en el de la congruencia, Legendre resuelve tramposa pero elegantemente el problema que exploramos acerca de la condición asimétrica que no consideran los conocidos teoremas de congruencia de la geometría euclidiana en donde se hace uso de la superposición, que no puede llevarse a cabo cuando las figuras a comparar son congruentes, a menos que, se haga una transformación fuera del plano (dejando la geometría que se está definiendo y estudiando) para "voltear" el objeto, superponerlo, y verificar la coincidencia. Legendre no hace algo muy distinto, pero si nuevo y elegante. Legendre se apoya en una reflexión del ángulo sólido que determina un triángulo esférico sobre el centro de la esfera al prolongar las líneas que determinan el ángulo esférico y proyectarlo hacia el lado contrario, quedando otro triángulo esférico "igual" pero antisimétrico que ahora puede superponer a un tercero y verificar la congruencia de los tres (por transitividad, pues si uno es igual a un segundo y el segundo al tercero, entonces el primero lo es al tercero). Sin embargo, es claro que Legendre no omite la transformación que se le tendría prohibida si no se quisiera salirse del objeto de estudio, es decir, la geometría esférica y bidimensional, al hacer una transformación que habría de definir en libros anteriores, como lo es la reflexión sobre un punto y luego la traslación y/o rotación. Aún así, la superposición sigue estando fuera del ámbito matemático ya que depende finalmente de una apreciación subjetiva (referente al sujeto) y no únicamente de la teoría matemática que se está definiendo y describiendo. En una edición anterior, Legendre hace la reflexión con respecto a uno de los lados del triángulo esférico, lo que, ciertamente, le permite quedarse en la superficie de la esfera, sin tener que salirse de ella pues lo que hace es prolongar las líneas del triángulo, sin embargo, los ángulos de sus triángulos esféricos continúan estando determinados por los ángulos sólidos que define él mismo desde el centro de la esfera, lo cual implica nuevamente estar fuera de la superficie bidimensional de la esfera.

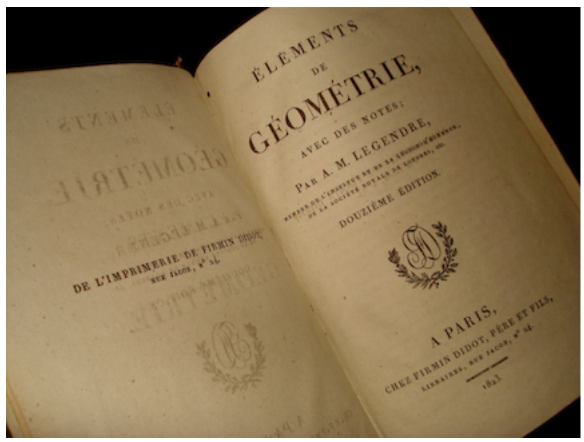


Figura 6.2: *Éléments de géométrie* de Legendre (1794), doceava edición, *Chez Firmin Didot, Père et Fils*, París, 1823. Colección personal de H. Zenil.

Legendre, aparente e inconscientemente, está haciendo evidentemente lo que luego será un siguiente gran paso, como el que él mismo está haciendo, la identificación de propiedades extrínsecas e intrínsecas, paradójicamente al estarlas mezclando sin pudor o reserva alguna en una aventura sin precedentes. Sin embargo, Legendre es víctima de su proceder. Luego de una lectura del texto a conciencia no hay muchas dudas que el objetivo del libro VII de Legendre es dar una nueva y distinta demostración del invariante de Euler acerca de los poliedros (él mismo así lo expresa en sus propias observaciones), así que mucho de la aventura tiene un claro objetivo, aunque el legado de la aventura por si misma parece haber sido mucho más fructífera para la consecución evolutiva de la geometría que su pretendida demostración. Si bien la demostración de Legendre es elegante, es también intrigante y en cierto sentido, no mejor que la de Euler, de hecho es restrictiva a su geometría, cayendo de alguna forma, en la misma trampa en la que Euclides cayó 19 siglos antes.

El peso de los argumentos de Legendre descansa en la concepción de área que define. El área de un triángulo en la geometría esférica de Legendre es el exceso o la diferencia entre la suma de los ángulos internos de un triángulo (que sabemos que en la geometría plana euclidiana es igual a dos rectos, es decir, 180 grados) y dos rectos o 180 grados, es decir, es exactamente lo que reconoceríamos como la curvatura, la diferencia entre una superficie plana y una superficie curva. Como la geometría de Legendre es esférica, la diferencia siempre es positiva, obsérvese que si la geometría en cuestión fuera hiperbólica, la diferencia sería negativa, con lo que nos aproximamos cada vez más a la distinción buscada de las propiedades intrínsecas del espacio que estudia Gauss, y que de hecho a esa diferencia se le puede asociar, sin problema alguno, el número de Riemann que determina precisamente el tipo de curvatura que Gauss reconoce y sobre la que Legendre ya está trabajando.

Ahora bien, Legendre empieza su demostración para cualquier polígono esférico, pensando en que cualquier polígono esférico se puede partir en triángulos esféricos sin que sobre o falte parte alguna del polígono. Según Legendre este paso es claro y obvio, sin embargo no lo es. Es fascinante como en un paso que obvia está depositada la fuerza argumentativa que hace de la demostración un hecho verdadero y válido. Hay otro argumento de peso en la demostración, que analizaremos más adelante y que se refiere a algo mucho más poderoso que le permite a Legendre sostener el tipo de geometría que está haciendo (los invariantes del círculo generalizados a la esfera, así como la suma de los ángulos opuestos de un cuadrilátero debe ser igual a dos rectos para que por los cuatro vértices pase una circunferencia, en la esfera se debe pedir que también, dos a dos, los ángulos sólidos sean suplementarios, es decir, formen un ángulo sólido plano como en el círculo la suma de los ángulos planos de un cuadrilátero cíclico forman un ángulo rectilíneo, todo ello descansa en el hecho de que no hay semejanza en la esfera y la congruencia que define Legendre, y a su vez que descansa en las propiedades del triángulo polar, que se relaciona con el invariante que también encuentra Descarte, que la suma de los ángulos exteriores de los poliedros es ocho rectos, así como la suma de los exteriores de un polígono es cuatro rectos, y los interiores depende de los lados, se obtiene también de la idea de descomponer en triángulos y en el caso tridimensionalidad en sólidos triedros). De alguna forma cuando Legendre está hablando de partir un polígono está hablando ya de lo que pretende demostrar. Obsérvese que al trazar las líneas (o arcos) en un polígono para descomponerlo en triángulos (esféricos o planos) lo que se hace es generar otra figura a partir de la anterior aumentando el número de aristas y de caras, incluso de vértices cuando la descomposición se auxilia de puntos interiores. Legendre deduce (para él de manera clara y obvia) que el número mínimo de triángulos en los que se descompone cualquier polígono de n lados es $n-2$. De donde deduce que el área de un polígono es la suma de los ángulos de los triángulos en los que lo descompuso menos el producto de dos ángulos rectos por el número de lados del polígono menos dos. De donde entonces obtiene que: $s - 2(n - 2)$.

Sin embargo, este resultado parece ser un caso reducido al plano de la característica de Euler que quiere demostrar. De hecho luego Cauchy lo demostrará para el plano.

Legendre introduce un elemento métrico (el concepto de área), cuantitativo en algo que aparentemente es independiente de cualquier magnitud, la característica de Euler, de hecho lo relaciona directamente con su concepto de área, y el área la define en términos exclusivos de los ángulos (del triángulo esférico, aunque esto permite generalizar a cualquier polígono esférico pues siempre se puede descomponer en triángulos), como el exceso de la suma de los ángulos internos del triángulo menos dos rectos.

El problema de la demostración de Legendre, por supuesto no es que esté errónea sino que al igual que nuestro ejemplo anterior, es restrictiva a la geometría que construyó, su *geometría esférica*. Depende de su definición de área, pues en el plano, por ejemplo (plano euclidiano), el exceso o la diferencia entre la suma de los ángulos internos cualquier triángulo y dos rectos es cero.

Así, una relación que no dependía de magnitudes ni de geometría alguna, queda restringida a una demostración a una geometría en particular. Por otro lado, es cierto que su geometría esférica no parece jugar un papel primordial en su argumento demostrativo pues parece ser un elemento auxiliar para demostrar algo que, aunque no es asunto de magnitudes, está tan relacionado, es tan propio de toda geometría que puede deducirse de cualquiera, incluso a partir de magnitudes. Curiosamente en la demostración de Legendre de la característica de Euler no se utilizan tantos argumentos esféricos como en proposiciones anteriores. Hay tres pilares sobre los que descansa la demostración de Legendre, el primero es una proyección que hace de un poliedro cualquiera (debe entenderse cualquiera por convexo ya que aunque Cauchy muestra que el invariante de Euler se cumple incluso para casos cóncavos Legendre sólo está considerando casos convexos para que al proyectar no se traslapen elementos, como aristas o vértices, aunque muestra también Cauchy que siempre hay manera de elegir una proyección correcta o incluso proyectar o apachurrar el poliedro en un plano sin alterar la relación de Euler) sobre la esfera, esto permite justificar una relación que tiene que ver con el área que Legendre define y que Legendre demuestra en una proposición anterior, así su segundo pilar es su concepto de área, que descansa, a su vez, en el tercer y último pilar, en un invariante que no es exclusivo de la esfera sino también de los poliedros, que la suma de los ángulos sobre la esfera es igual a ocho rectos (o para el caso de los poliedros, que la suma de los ángulos externos del poliedro es ocho rectos, como Descartes lo deduce), y por tanto que un recto es un octavo de la esfera, es decir, una cuarta parte de un hemisferio, y esa será la unidad de medida de Legendre, ya que una cuarta parte de un hemisferio está representado por un triángulo que parte de un polo y cuya base es un cuarto del ecuador. Sabemos además que ese triángulo esférico tiene un ángulo recto en cada vértice y que por lo tanto la suma de los ángulos internos del triángulo esférico es tres rectos, lo cual permite definir el área de un triángulo como la suma de los ángulos internos de un triángulo esférico menos dos rectos, lo que en este caso nos deja con un área de un ángulo recto, lo que es coherente con el hecho de que toda la esfera se cubra con ocho de estos triángulos y por lo tanto toda ella sean ocho rectos. Entonces es claro que Legendre llega a resultados equivalentes a los de Descartes y que entonces estas propiedades que usa para la demostración de la característica de Euler, al no ser exclusivas de la esfera sino compartidas con los poliedros, en realidad no descansan directamente sobre la geometría esférica que construye sino sobre invariantes de la geometría sólida a la que pertenecen tanto los poliedros como la esfera (vista ésta como un objeto en el espacio y no sólo como la cáscara). Pues la geometría esférica de Legendre en realidad está descansando sobre la geometría sólida pues es la manera en que se le asigna al ángulo sólido una magnitud, su magnitud es precisamente el área que abarca en la esfera, análogamente a como se hace en el plano, pues la magnitud de la apertura de un ángulo en el plano se determina mediante el segmento de arco de círculo que subtiende.

Lo que debe subrayarse en ambos casos, tanto en el de Descartes como en el de Legendre, es que ambos descansan sus argumentos sobre la *geometría sólida* y que ambos hicieron del estudio de resultados cualitativos que empezaban a asomarse (relaciones entre el número de caras, ángulos sólidos, ángulos planos, aristas, vértices, etc.), el estudio de la geometría sólida. Así podemos asegurar que la geometría de la esfera descansa, en este caso, vista como un objeto tridimensional y no como cáscara, sobre la geometría sólida, que a su vez permite a Descartes llegar a resultados equivalentes y luego, directa o indirectamente, a la característica de Euler. Una vez desenmarañado el asunto de por qué la demostración de Legendre es ingeniosa pero a la vez parece tan distinta de lo que pretende demostrar pues en el fondo lo que está en juego soportando su demostración son invariantes de la geometría sólida se puede ver con mayor claridad que el argumento que permite la demostración de una relación cualitativa con magnitudes es el hecho de que la relación cualitativa es tan fuerte que aunque no depende de las magnitudes si tiene un grado de influencia sobre ellas de las que puede deducirse sin problema.

Capítulo 7

Propiedades intrínsecas del espacio

Cuando se estudiaban las propiedades de ciertos objetos matemáticos en el siglo IXX, curvas y superficies, se solía hacer desde un punto de vista *extrínseco*. Se estudiaba una superficie incrustada en un espacio euclidiano de 3 dimensiones. Usualmente objetos bidimensionales eran puestos en espacios tridimensionales como marco de estudio, de donde se derivaban propiedades del objeto dimensional a partir, y en dependencia, del marco de dimensión mayor.

Los trabajos de Riemann y Gauss introducen una innovación: el estudio de las propiedades intrínsecas de estos objetos, es decir, lo que se puede deducir de ellos sin hacer recurso a incrustarlos (verlos) inmersos en espacios de mayores dimensiones, sin referencia alguna al exterior de la superficie en estudio.

El punto de vista intrínsico resultó fundamental por varias razones, por ejemplo, físicas. Cuál sería el sentido en la relatividad general de Einstein ¿si el espacio-tiempo fuera definido en un espacio exterior (y de mayor dimensión) al nuestro? Paradójicamente, algunos modelos modernos hacen uso de no sólo una sino varias dimensiones exteriores para intentar explicar y unificar ciertos fenómenos físicos derivados de la mecánica cuántica.

Veinte siglos después de Euclides y su recurso de superposición, Kant escribe acerca de las propiedades del espacio:

> Porque mi mano derecha e izquierda no puedo embonarla, la región del espacio de una jamás será la región de la otra, son simétricas e idénticas una con otra".

En su *Disertación Inaugural* (1770) Kant identifica al menos cinco preguntas fundamentales acerca del espacio y del tiempo. Kant se interesaba por el concepto de espacio (y tiempo) y conocía el trabajo los debates entre las posiciones de Newton y Leibniz, con quién (este último) se identificara en su periodo precrítico. '?Es el espacio real? '?Es una substancia o una propiedad de la substancia? Kant concluye que el espacio y el tiempo son inaccesibles e inmutables, y por lo tanto difíciles de asociar con la substancia. La posición realista simplificada de Newton consistía en considerar tiempo y espacio como entidades mientras que, en pocas palabras, para Leibniz no eran mas que relaciones entre objetos y eventos, una posición más bien idealista y estructuralista. Finalmente Kant describe espacio (y tiempo) como elementos utilitarios en los que estructuramos nuestra experiencia, una intuición dependiente de las facultades humanas.

La discusión acerca de las propiedades del espacio en el siglo XVII era común a la filosofía y a las matemáticas. Pero en el espacio físico, al menos el nuestro, la velocidad de la luz resultaría comportarse de manera peculiar. Resulta que cuando dos objetos se mueven con respecto a un tercero, el movimiento entre cualesquiera par es relativo a los otros. Si dos de ellos, por ejemplo, se mueven a la misma velocidad y dirección, el uno aparecerá inmóvil al otro pero no al tercero. Por el tiempo de Kant, y sobre todo en el siglo XVIII el cálculo de la velocidad aproximada de la luz fue posible y en la teoría de Einstein jugaría un papel fundamental que conectaría tiempo y espacio en una peculiar e inesperada manera. De la teoría de la relatividad se deduce que la luz no se comporta como los demás objetos, la luz viaja a la misma velocidad independientemente del marco de referencia o de los objetos en movimiento. La luz, o mejor dicho la velocidad de la luz, es una propiedad fundamental de nuestro espacio (y tiempo). La relatividad general designaría la curvatura del espacio como una propiedad (o consecuencia) de la existencia de la materia que lo deforma. En el sentido matemático es Gauss quien identifica y se interesa por la diferencia entre propiedades matemáticas intrínsecas y extrínsecas del espacio.

Gauss se había interesado por la teoría de las paralelas y, desde 1816, estaba convencido de que el quinto postulado de Euclides era indemostrable a partir de los otros cuatro y de las definiciones y nociones comunes; y que, junto a la geometría euclidiana, era posible una geometría en la que existiesen varias paralelas a una recta pasando por un punto. Luego Lobachevsky desarrollaría formalmente dicha teoría y aunque Gauss nunca publicó nada al respecto, su nueva concepción del espacio apareció en su obra de geometría diferencial titulada "Disquisitiones generales circa superficies curvas" en 1827[33], en la que desarrolla la geometría de las superficies.

El trabajo de Gauss da origen a lo que conocemos hoy como geometría diferencial, se llama diferencial debido a que utiliza como herramienta fundamental al cálculo diferencial, de hecho la curvatura del espacio se describe mediante una ecuación (diferencial) y el resultado de ésta determina el tipo de geometría de la superficie, medido sobre la superficie (euclidiana, la hiperbólica o elíptica), en este sentido la geometría diferencial las contiene pero no es en sí misma una geometría sino una herramienta matemática que las caracteriza mediante propiedades generales de todo espacio, es decir, intrínsecas a él, el tipo de geometría o superficie por el valor de curvatura, así si la curvatura del espacio es negativa, positiva o nula, será una u otra de las geometrías mencionadas.

Un plano euclidiano se determina por cuatro ángulos rectos (es decir, una vuelta completa de 360 grados). En 3 dimensiones en el espacio euclidiano alrededor de un punto caben ocho ángulos rectos y en general en el espacio n-dimensional alrededor de un punto en ese espacio caben $2n$ *ángulos* rectos, así por ejemplo, en un espacio de una dimensión, alrededor de un punto hay dos ángulos rectos, lo cual es poco intuitivo pues pareciera sin sentido la idea de ángulo cuando todo lo posible es una sola recta, sin embargo debe recordarse la definición euclidiana (definición 10 del libro I de los Elementos de Euclides) de ángulo recto:

> "Cuando una recta levantada sobre otra recta forma ángulos adyacentes iguales entre sí, cada uno de los ángulos iguales es recto y la recta levantada se llama perpendicular a aquella sobre la que está."

Adyacente se refiere a uno junto al otro, o uno seguido del otro. Es claro que la idea de levantar una recta sobre otra en un espacio de dimensión uno donde lo único posible es una sola recta es un tanto extraña, pero posible por vacuidad, es decir, en ese caso la recta levantada es un punto que yace sobre la misma recta en donde efectivamente los ángulos adyacentes formados son iguales entre sí (puede pensarse, sin perder consistencia para nuestros fines, que ambos ángulos formados miden cero), por lo tanto, es posible la existencia de ángulos rectos en dimensión uno (de la misma forma en dimensión cero). Si hay quien se siente incómodo con este hecho (y con cierta razón pues es un uso degenerado de ángulo recto y de las definiciones euclidianas), puede pensar que la fórmula $2n$ para calcular ángulos rectos en espacios n-dimensionales vale sólo para espacios de dimensión $n \geq 2$. Ya que además, siendo rigurosos, el problema puede ser con la definición euclidiana de ángulo (definición 9, justo antes de la de ángulo recto, en el libro I de los Elementos de Euclides):

> "Un ángulo plano es la inclinación mutua de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta".

Por supuesto, el problema es que Euclides restringe su definición a la existencia de planos. Sin embargo, también es cierto que en la definición anterior Euclides sólo considera ángulos menores a dos rectos pues de otra forma su definición se hace ambigua en tanto que es imposible determinar a cuál ángulo se refiere, si al menor que forman las rectas que se encuentran, o al mayor que le da la vuelta por el otro lado. Así, de alguna forma una misma definición euclidiana se adapta e interpreta para los fines euclidianos sin que sea mayor problema (en todo caso es una discusión rigorista pero de forma y no de fondo, una discusión de fondo, por ejemplo, es preguntarse si es necesario el quinto postulado en la geometría euclidiana o no, interrogante que duró al menos 17 siglos después de Euclides, pero es de fondo no por que haya durado tanto tiempo sin resolverse del todo sino por que de ello depende precisamente la existencia y posibilidad de una geometria euclidiana). Por lo tanto, si la definición se adecua sin que afecte de forma alguna a la geometría en cuestión (la euclidiana) para que pueda ser aplicada en n dimensiones, nuestra definición de ángulo recto vale para los casos que exploramos, desde dimensión cero hasta n.

Sin embargo, lo importante es detectar cómo esta fórmula 2^n, para calcular el espacio en ángulos rectos alrededor de un punto cualquiera en un espacio cualquiera, depende de n, es decir, de la dimensión, y por lo tanto, no puede ser una propiedad intrínseca a cualquier espacio, es decir, que valga para cualquiera sin importar la dimensión (métrica) o curvatura, sino una propiedad heredada de la dimensión, es decir, del espacio en particular del que se trata. En este mismo ejemplo puede verse cómo esta misma propiedad si es independiente de la curvatura, ya que en toda geometría, el espacio alrededor de un punto cualquiera sigue siendo 2^n (aunque en principio esto no parece intuitivo pues pareciera que en la geometría esférica habría más espacio, pero no al menos en términos de ángulos rectos, ya que recordemos que, un ángulo recto es lo que parte el espacio en regiones del mismo "tamaño", según nuestra definición euclidiana) donde la curvatura no juega ningún papel en el cálculo del mismo.

De la misma forma, el hecho de que sólo puedan construirse cinco sólidos platónicos o poliedros regulares en el espacio tridimensional es una propiedad heredada de la dimensión y de la curvatura ya que no es una propiedad que compartan los demás espacios posibles (para cualquier dimensión o curvatura). Por ejemplo, la cantidad de "poliedros" regulares en un espacio de cero dimensión es de uno, el punto (el punto es un poliedro por que todos sus lados y ángulos son iguales entre sí), en una dimensión el número de poliedros es de sólo uno, pues la única figura posible en una dimensión es la recta, hay muchas rectas sin duda, pero todas ellas son un mismo "poliedro" excepto por la escala (longitud). De la misma forma, la cantidad de "poliedros" en dimensión dos, o mejor conocidos como polígonos, son una infinidad, pues a partir del triángulo, que tiene tres lados, pueden aumentarse indefinidamente la cantidad de lados, empezando por el cuadrado luego el pentágono, hexágono hasta el n-ágono donde n puede ser cualquier número natural mayor a tres (con dos rectas no se puede cerrar una figura en el espacio euclidiano de dimensión dos). En realidad la palabra poliedro en cero, una o 2 dimensiones parece no tener sentido pero piénsese que un poliedro en 2 dimensiones es un polígono y en una dimensión una recta y en cero un punto, a este último se le podría llamar puntógono, al anterior rectógono o unígono pues es único y los nombres son realmente irrelevantes pero graciosos.

Un “poliedro” regular o “polígono” regular en cualquier dimensión debe cumplir únicamente con el hecho de la regularidad, es decir, que las caras, los lados y los ángulos sean iguales, véase otra vez que hablar de caras en dimensión dos pareciera no tener sentido, sin embargo una cara en dimensión dos es una arista, en dimensión tres es una superficie plana (o pedazo de plano) pero, siguiendo el orden, en dimensión cuatro es un poliedro. Esto puede ser aún más confuso que elucidatorio pero creo que será entendido mejor cuando analicemos los politopos, pues efectivamente la palabra politopo se utiliza cuando se quiere hacer referencia a un poliedro n-dimensional, es decir, que puede pertenecer a cualquier dimensión, aunque generalmente este término se utiliza cuando se refiere a un espacio de más de 3 dimensiones, pero puede también ser utilizado sin problema para espacios en tres siendo entonces sinónimo de poliedro, o en dos siendo entonces sinónimo de polígono. Por supuesto es fácil imaginarse un polígono en el espacio tridimensional en el que vivimos, tampoco hay problema alguno con una recta o con un poliedro, pero sin duda es muy difícil y hasta imposible imaginarse uno de 4 dimensiones, aunque más adelante podremos ver que esto, aunque parece una misión imposible, puede entenderse, estudiarse e incluso imaginarse con algunas restricciones. Es evidente entonces que en un espacio de dimensión n pueden coexistir poliedros o politopos de n o menos dimensiones pero no de $n+1$ dimensiones.

La curvatura de una superficie, resulta ser una propiedad intrínseca del espacio porque no depende del sistema de coordenadas y puede inferirse estando sobre la superficie misma.

En palabras de Gauss (de la traducción inglesa):

> Por lo tanto, de la fórmula precedente se deduce por sí mismo el teorema egregio. Si una superficie curveada se desarrolla en cualquier otra, la medida de curvatura en cada punto permanece intacta.

El teorema *egregio* de Gauss (egregium en latín significa sorprendente o destacable) es un resultado fundamental que demuestra que por medio de la medida de los ángulos y distancias sobre la superficie, sin necesidad alguna a un sistema de coordenadas en un espacio de dimensión superior.

El teorema es *destacable* porque a pesar de que Gauss hace uso de una definición que requiere de un sistema de coordenadas que sumerge la superficie en el espacio (para calcular la normal), el resultado final no depende de la incrustación de la superficie en el espacio a pesar de las múltiples operaciones fuera de la superficie y sólo depende de la métrica de la superficie, que es intrínseca a la misma superficie.

Para entender por qué la curvatura total es una magnitud que puede obtenerse estando sobre la superficie, uno puede imaginar tender un hilo alrededor de un punto de referencia P sobre una superficie y trazar una circunferencia de radio r. Si la superficie es plana, la circunferencia será $C(r) = 2\pi r$, si no lo es, entonces como se ha descrito anteriormente, puede ser menor o mayor lo que determina la curvatura de la superficie alrededor del punto sin tenerse que salir de la superficie misma.

Para entender el concepto de punto de referencia, curvaturas principales y curvatura total (o curvatura de Gauss), uno puede trazar la normal (el vector unitario perpendicular fuera de la superficie) de una superficie por un punto P, por el que se hace pasar un plano (plano normal) que intersecta la superficie original en una curva a la que se le llama curvatura principal de la superficie en el punto de referencia P.

Planos normales distintos producen curvas distintas resultado de las intersecciones, k_1 y k_2 son la máxima y la mínima curvatura de todas las curvas posibles de los planos normales posibles. La definición de curvatura de una curva principal es el recíproco del radio de la circunferencia osculatriz (la circunferencia tangente que se aproxima mejor a la curva en el punto).

La curvatura principal es positiva si la curva se dobla en dirección de la normal sobre la superficie y negativo si no. Si se multiplica las dos curvaturas principales se obtiene la curvatura total de Gauss K. La definición de curvatura (total) de Gauss es por lo tanto: $K = k_1 \times k_2$.

El teorema *egregio* indica que en una superficie (que no supongan dilatación, contracción o cortadura), los productos de las curvaturas principales conservan la curvatura total. La curvatura total es constante y positiva para esferas, constante y negativa para hiperboloides (de una sola hoja) y constante y cero para planos y cilindros. La curvatura de Gauss determina si una superficie es, por ejemplo, localmente convexa (cuando es positiva) o como una silla de montar (cuando es negativa).

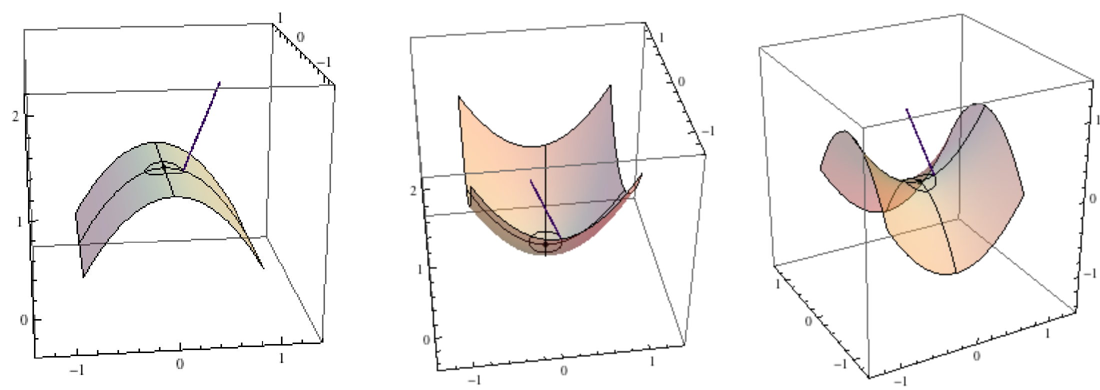


Figura 7.1: Tres figuras cada una con curvatura distinta: nula (izquierda), positiva (centro) y negativa (derecha).

La alusión a la *normal* en la definición original de Gauss requiere que la superficie se incruste en un espacio tridimensional ya que utiliza el concepto de un vector que no pertenece a la superficie misma y que se traza en el espacio para construir planos normales que intersecan la superficie en una infinidad de curvas.

Sin embargo, la curvatura de Gauss es una propiedad intrínseca ya que, por ejemplo, sobre la esfera no hay necesidad de hacer alusión al espacio o salirse de la superficie de la esfera para medir la suma de los ángulos interiores de un triángulo para determinar que suman más de 180 grados, lo que implica que la superficie tiene curvatura positiva. Sobre un cilindro, sin embargo, se obtendría una curvatura igual a cero debido a que la suma de los ángulos es 180 grados, indistinguible de un plano (*un cilindro desenrollado*). La diferencia entonces entre la superficie de un cilindro y un plano es extrínseca, ya que sobre ellos es imposible distinguir uno del otro.

La curvatura no es una medida invariante a la dimensión. En contraste con líneas (unidimensionales) curvas, que no tienen una curvatura intrínseca sino se les incrusta en otro espacio de mayor dimensión, las superficies tienen una curvatura intrínseca, independiente del espacio en el que se les ponga. Para entender la diferencia, sobre una línea unidimensional no hay forma de saber (y la pregunta no tiene sentido) su curvatura, ya que sobre ella parecerá la misma. La pregunta sólo tiene sentido si la curva está inmersa en el espacio tridimensional (o cualquier otro de mayor dimensión).

La definición de Gauss permite hacer una caracterización formal de estas superficies. Por ejemplo, debido a que una esfera de radio r tiene curvatura positiva y un plano tiene curvatura cero, se dice que estas superficies no son isométricas ni siquiera localmente, ya que todo intento por preservar distancias entre uno y otro será en vano. Por ejemplo, no hay forma de proyectar un plano en una esfera y preservar ángulos y distancias, ni viceversa, como lo sabemos sucede cuando se quieren representar los continentes de la Tierra sobre un plano en el que uno tiene que elegir entre preservar una u otra magnitud, pero no todas, y por lo tanto no hay proyección perfecta del mundo en el plano (que no tome una decisión *arbitraria*) que no distorsione las distancias entre puntos sobre la Tierra.

La fórmula de Gauss-Bonnet conecta la curvatura de la superficie con su topología, por medio de la característica de Euler. Si una superficie es deformada, el valor característico de la característica de Euler no cambia porque es un invariante topológico a pesar de que la curvatura cambie. El típico ejemplo es el de una esfera, con una abolladura hacia adentro o hacia afuera. No importa qué tan importante sea la abolladura, mientras no rompa la esfera el valor característico de la característica de Euler será el mismo (dos) y la integral de su curvatura total 4π, un nuevo invariante topológico que cambia sólo cuando el invariante de Euler lo hace y que permite, como el invariante (la característica) de Euler, identificar objetos topológicamente distintos (por ex. una esfera de una dona, ya que la primera requeriría de un agujero, mientras que la segunda requeriría taparle el agujero, para transformar una en la otra).

Para superficies en mayores dimensiones, las curvaturas principales pueden definirse de manera análoga trazando espacios normales que intersecan la hipersuperficie original, en una simple generalización de las superficies en 2 dimensiones.

Estos resultados constituyen y conducen a los fundamentos de lo que se conoce hoy como geometría diferencial[45, 43]

7.1. La continuidad del espacio

Ante nuestra percepción, a través de todos los sentidos, el mundo se nos presenta continuo. Sobre la pregunta mucho se ha escrito. Varios filósofos griegos, incluyendo Demócrito, imaginaron el universo como una multitud de partículas irreducibles, de donde viene el término átomo o indivisible. Aristóteles, sin embargo, negaba la existencia del vacío y por lo tanto de la idea de partículas discretas con regiones intermedias sin *substancia*. En su lugar, argumentaba que el universo estaba lleno y de manera continua, de cierta substancia. No son pocos los lugares en donde el tema emerge recurrentemente, entre los libros III y VII de sus *Physicae Auscultationes*.

En el libro VII Aristóteles confronta a Zenón en su intento, de este último, de probar la inexistencia del movimiento por medio de una paradoja. Zenón había argumentado que en un intervalo de cualquier tamaño, por el cual algo podía desplazarse, habían un número infinito de subdivisiones y por lo tanto no puede ser recorrido en tiempo finito. El argumento asume evidentemente que el segmento cualquiera es de hecho continuo, de otra forma no es infinitamente subdivisible. La primera respuesta que Aristóteles diera es una que no puede ser refutada, empata la premisa del argumento de Zenón, y resuelve el dilema, y ésta es que el tiempo es, de manera análoga, infinitamente divisible y que por lo tanto la infinitud del tiempo es suficiente para recorrer la infinitud de espacio. Luego Aristóteles acepta que aunque dicha respuesta resuelve el intento de Zenón no era suficiente para determinar su verdad. Ya que deja abierta la pregunta de si el tiempo (como el espacio), son infinitamente divisibles. Es donde Aristóteles introduce la idea de infinito *potencial* en oposición a infinito *de facto* y que el tiempo es sólo potencialmente infinitamente divisible, como lo es en cualquier cantidad continua. En su favor dice que de otra forma, si uno intenta dividir tiempo o espacio, tiene que empezar por un punto y luego recorrer varias direcciones (al menos dos), lo que sustituye el problema por otro, el de dos movimientos distintos en dos tiempos distintos. En el detalle de ambas respuestas es fácil perderse, y en conclusión la segunda no parece más poderosa que la primera, ya que tampoco parece responder lo que Aristóteles pretendía cuando reformuló su respuesta a Zenón.

Entre los conceptos que Aristóteles define en una aproximación de posiciones, están el de *estar en contacto o junto* o *en medio* opuesto a *estar aparte.* Así hace igualmente con el concepto de sucesión que define como X está en sucesión de Y si entre X y Y no hay nada de su mismo tipo y X viene seguido de Y. Entonces define el concepto de *estar conectado o contigüo* como X está conectado a Y si X está en sucesión a Y y X está en contacto con Y. Para finalmente definir el concepto de continuidad como X es continuo con Y si X es contigüo a Y y los límites en contacto son uno y están juntos.

En esta escuela, evidentemente el infinito es entendido como lo indefinidamente divisible, lo que entendemos hoy por el continuo (o *conjunto denso* más técnica y precisamente) y está íntimamente ligado con el fenómeno de movimiento en los términos de posiciones que Aristóteles privilegia.

Aristóteles termina preguntándose si el infinito (en cualquiera de sus formas) realmente existe, incluso independientemente de la existencia del continuo pues éste último prefiere definirlo como el proceso de un infinito potencial, un proceso de división sin límite. Esto probablemente le impide darse cuenta que lo que opone al infinito, por ejemplo, un intervalo finito continuo de hecho es infinito en el sentido de que es infinitamente divisible. Por otro lado, la definición de continuidad de Aristóteles termina siendo una definición de contigüidad con la noción *en medio* como base, que pone en cuestión en ocasiones la misma definición de divisibilidad ilimitada, como Francisco Suárez, veremos, pondrá a prueba. La paradoja de Zenón no habría hecho entonces sino abrir una discusión que hoy en día, y asumiendo que la paradoja está resuelta de un modo o de otro, sigue siendo una pregunta abierta aunque mucho hemos descubierto (o inventado) acerca de no sólo un infinito sino una infinidad de ellos.

El trabajo de Francisco Suárez[66] es una continuación de las discusiones del continuo de esta escuela griega de las que mucho se ha hablado y escrito. Suárez (1548-1617) está, sin embargo, inmerso en una época diferente. Suárez conoce el trabajo helenístico y su trabajo tiene un peso importante porque (según Baumann[9] en *Lehre von Raum, Zeit und Mathematik*, der neuern Philosophie, Berlin, 1868-9) su libro era frecuentemente utilizado como libro de texto en Alemania en el siglo XVIII. Se sabe que Leibniz fue influenciado por Suárez (Baumann) y es frecuentemente citado por Frege.

La discusión de tradición aristotélica hace una distinción pertinente entre lo que se considera el infinito de facto y el infinito potencial. La diferencia es fundamental. Cuando uno cuenta $1, 2, 3, 4, \ldots$ los tres puntos significa que la serie continúa *ad infinitum* sin que la serie completa sea dada. Se dice entonces que dicha descripción es una representación del infinito de facto de los números naturales pero la descripción misma es sólo una instancia potencial del infinito y no el infinito mismo.

Entre los argumentos clásicos exponiendo los problemas del continuo, están el de la superficie pintada de dos colores. ¿De qué color son los puntos en el borde entre uno y otro color? El argumento es que no pueden ser ambos, pero si son de un color ¿por qué serían de uno y no del otro?

Suárez[66] dedica la primera sección de su primer volumen Disputationes (1–67) a la exposición de conceptos matemáticos. La sección V de la *disputación* 40 es una discusión escolástica clásica en donde expone 10 argumentos con sus contra argumentos sobre el tema. Uno puede sentir la época en la que Suárez estaba inmerso ya que su línea de pensamiento contra argumentativa está en la misma línea de Saccheri.

Los diez argumentos de Suárez sobre el continuo:

1. No hay puntos “terminales” porque en cualquier forma que dos líneas se unan, se unen de manera continua sin nada “en medio” (es decir, el punto que suponía

las unía).

2. No hay razón para suponer dichos puntos, pues si qué efecto tiene si se le son removidos? Un indivisible añadido no hace la línea más larga y consecuentemente no la hace más corta si se le remueve.

3. No hay "puntos continuos"porque no hay puntos terminales, y un punto continuo no es sino uno que simplemente termina las dos partes de una línea que divide.

4. Si un punto continuo es necesario para unir las partes ¿por qué las partes no pueden ser unidas directamente? Si una tercera cosa es necesaria para unirlas, por qué no una cuarta y así ad infinitum?

5. Suponer la existencia de puntos indivisibles en el continuo, implica la existencia del infinito de facto.

6. Dios podría remover todos los puntos de una línea. Lo que implica dos posibilidades: que quedaría algo continuo dividido en cada parte, o que habría una multitud de puntos por todas partes. (F. Suárez era un jesuita, pero eso no impide que incluso este punto tenga un interés analítico válido.)

7. En un cilindro de longitud finita podría haber una línea de longitud infinita. Una espiral cuya primer vuelta llegue a la mitad (1/2) del cilindro, la segunda 1/4, la tercera a 1/8 y así sucesivamente.

8. No hay contexto físico en el que un punto pueda ser dado.

9. Un punto no puede conectar las partes de una línea, ya que o toca las partes en alguna cosa indivisible, caso en el que entonces toda la línea consiste en puntos; o toca alguna cosa divisible, que es imposible, ya que un indivisible no puede tocar un indivisible.

10. De acuerdo a Aristóteles, una superficie está solamente potencialmente dentro de un cuerpo, y no realmente en la superficie.

Algunos de los puntos de Suárez no están lejos del propio análisis de Aristóteles sobre el mismo tema, como Suárez menciona. El punto siete de Suárez de hecho es una versión de la paradoja de la tortuga y Aquiles. El punto ocho llama mi atención ya que rompe hasta cierto punto con la tradición escolástica y expone el problema en un contexto físico, en el que en su opinión, no hay puntos. Como ahora reconocemos más fácilmente, y como Benoit Mandelbrot solía decirlo, en el mundo real no existen líneas ni puntos; las costas no son líneas, las nubes no son círculos y los truenos no son líneas rectas, cuando desarrollaba su teoría de fractales que se ajustan mejor al tipo de irregularidad aleatoria de los cuerpos y fenómenos físicos. Pero recordemos que hasta Kepler se creía, por ejemplo, que los (errantes) planetas giraban en órbitas perfectamente circulares (visión también aristotétlica y luego sostenida por Ptolomeo y su modelo) ya que ningún otro objeto era digno de la creación divina. La misma motivación divina que llevo al mismo Kepler considerar que entre las órbitas de los planetas podía colocar los sólidos platónicos para explicar las distancias entre ellos.

Lo interesante en Suárez es que refuta estos diez puntos, no sin antes reconocer ciertas dificultades.

Primero argumenta a favor del concepto de "indivisibilia". Entre estos argumentos se encuentra:

- un objeto esférico perfecto debe tocar una superficie perfectamente plana en un solo punto. Si tocara una parte más extendida entonces la esfera tendría una pequeña parte plana o la superficie tendría partes que son equidistantes al centro de la esfera, lo que contradice la definición de esfera o plano.

- De manera similar, un cilindro perfecto sobre una superficie plana debe tocar la superficie en una línea.

Otros argumentos de Suárez, basados en fenómenos físicos como la propagación de la luz o la superficie del fuego, que parecen sugerir un tipo de continuidad dependiente del continuo potencial que excluye su división pero no su existencia.

En sus argumentos contra sus primeros diez argumentos, cuando considera extraño poder trazar el primer y último punto de una línea pero no el segundo o el penúltimo, Suárez llega a la conclusión de que el continuo es esencialmente distinto a una multitud de puntos discretos puestos uno tras otro. Un señalamiento sorprendente a la distancia sabiendo que no es sino hasta Cantor que se considera (y formaliza) que existen un número diferente (e infinito) de infinitos, y que efectivamente, incluso un número infinito de puntos unos tras otros son insuficientes para construir un continuo.

De hecho Suárez proporciona algunas referencias históricas sobre la discusión histórica del continuo que no son comúnmente referenciadas en textos modernos y que por lo tanto ofrecen un rico acervo de investigación.

Más recientemente, Gregory Chaitin, uno de los fundadores de la teoría algorítmica de la información cuestionó la existencia de los números reales[17]. Chaitin se pregunta qué sentido tiene el concepto de continuidad si para que éste exista se requieren de los números reales.

Un principio pitagórico indicaba que todo número es un cociente de enteros, y que de esta forma cualesquiera dos magnitudes debían ser conmensurables. El principio pitagórico no fructificó ante el problema de medir la diagonal de un cuadrado (la hipotenusa de un triángulo rectángulo), pues no es conmensurable en el sentido de que su cálculo no converge a una cantidad sino continúa indefinidamente proporcionando cifras decimales.

Basado en su número Ω y el argumento combinatorio de Cantor (conocido como diagonalización), Chaitin expone que la mayor parte de los números reales no pueden calcularse (obtener las cifras decimales) ni son descriptibles en el sentido de que no pueden asignárseles un nombre debido a su gran cantidad, no sólo figuradamente, simplemente no hay conjunto de palabras suficiente para nombrar cada uno de ellos. En la historia de las matemáticas, muchos números han sido nombrados, ejemplos son el número π que indica el cociente del radio y la longitud de una circunferencia, también está e y algunos otros. Otros más, como el número Ω de Chaitin son “tramposamente” nombrados, ya que no hay manera de proporcionar sus cifras (a veces sólo unas cuantas) pero Ω ni siquiera es un número, es un conjunto de números cuyas cifras dependen de una máquina. Efectivamente, Ω se define como la probabilidad de que una máquina muy simple pero poderosa (denominada máquina de Turing por su inventor) se detenga para cierta entrada (o programa). Alan Turing demuestra que es imposible saber si una máquina de Turing se detendrá o no, y basado en la tesis de Church, que indica que no hay mejor o más poderosa máquina, no hay forma de conocer qué máquinas de una lista (enumeración) se detendrán. Las cifras del número de Chaitin, por lo tanto, (que por ser una probabilidad sólo sabemos que es un número real entre 0 y 1) no pueden conocerse. Ahora bien, si uno quiere nombrar a todos los números reales, aunque sea con un nombre arbitrario, digamos que se toma arbitrariamente uno para comenzar, y se le nombra con la letra a, luego se le asigna b al número 1 y c a cualquier otro, etc. entre cada intervalo hay un número infinito de números reales. En los números reales no hay segundo número (ni en un fragmento) de un intervalo de números reales. De hecho, sólo en el fragmento (0,1) hay tantos números reales que ni siquiera todas las palabras finitas posibles alcanzan para cubrir un sólo intervalo de longitud 1 (que por Cantor sabemos además son tan numerosos como cualquier otro intervalo, incluso un intervalo infinito de números reales, es decir, todos). Esto obliga a Chaitin a creer que los números reales (en el que una gran parte de las matemáticas está fundada) son una útil ilusión solamente.

Es difícil concebir un espacio habitable otro que continuo, pero ello no quiere decir que el nuestro no lo pueda ser. Pero si no lo es, fenómenos como el movimiento son sólo aparentes, instantes seguidos de otros, como en una película que nuestra mente reconstruye y hace parecer de otro modo.

En física sin embargo, no es poco común considerar fenómenos que intuitivamente parecen continuos y que de cierta forma no lo son. En relación con los argumentos de Suárez fundados en las propiedades de la luz, hoy sabemos gracias a Planck y Einstein que la luz se comporta como un flujo de partículas discretas (llamados cuántos primero, actualmente conocidos como fotones), y no fue de otra forma que Planck pudo resolver el fenómeno relacionado con la intensidad de la luz que cuerpos a diferentes temperaturas emiten. Si bien es cierto que hay una dualidad extendida a través de conceptos físicos fundamentales, también es cierto que no son pocos las teorías y modelos físicos que sugieren que nuestro espacio bien podría construirse de partículas que no necesariamente forman un continuo, ni que lo sugieren con evidencia. Algunos físicos han considerado modelos totalmente discretos (por ex. Fredkin, Wolfram).

Paradójicamente, Aristóteles podría haber estado más cerca del concepto de topología que del de continuidad, uno sin embargo está íntimamente con el otro, y aunque sería extremadamente osado decir que Aristóteles podría haber tenido o generado ciertos conceptos topológicos con la noción de topología en mente, hay quienes han estudiado las relaciones de los argumentos de continuidad de Aristóteles y conceptos modernos de topología. El concepto de continuidad en topología es fundamental en varios sentidos, por un lado el concepto de homomorfismo se basa en la idea de transformaciones continuas, es decir, precisamente aquellas que no *rompen* o *pegan* (hacerle o quitarle un agujero) un objeto. Cuando esto sucede, que se puede *deformar* un objeto en otro sin romperlo, bajo esta transformación continua como la hemos descrito, se define una clase topológica y se consideran los elementos de la clase de un mismo tipo (o topológicamente equivalentes). Por el otro lado están el concepto de conjunto abierto y de conjunto compacto, que no tendrían sentido al no poderse diferenciar de los conjuntos que no son abiertos (cerrados) y que no son compactos y con los que paradójicamente se definen. La definición de estos conjuntos que se sirven del infinito no es un accidente, son definiciones negativas en el sentido de que definen un objeto describiendo propiedades contrarias de otro, así un conjunto abierto es uno que no es cerrado, pero uno es diferente del otro solamente si se supone el continuo. Es por ello que la topología requiere de $\mathbb{R}^n$, un espacio continuo de dimensión n.

De hecho es la topología la que actualmente provee de las mejores herramientas para describir el continuo a través de los conceptos que define y estudia.

En ese sentido las nociones primeras de Aristóteles (y las de Suárez) pueden considerarse *prototopológicas* en el sentido de que capturan ciertos aspectos fundamentales que se utilizaron o remergieron posteriormente para dar origen a la topología moderna.

7.2. Poliedros sin magnitud

Con excepción de un capítulo que introduce el concepto de grupos de simetría y por lo tanto de la noción que da origen a la teoría de grupos, hasta ahora casi cada capítulo y sección de este libro nos han llevado a nociones primordiales que parece dar origen a algún concepto fundamental de, por un lado al cálculo integral o diferencial, que en la primera parte del texto empezando con Euclides, luego Eudoxo, Newton, Leibniz, Cauchy y Hilbert, convergen en el desarrollo de la noción de medida y al proceso de asignar una número ("longitud", "área" o "volumen") a un objeto matemático. Por el otro lado, casi cada una de las secciones de la segunda parte de este texto ha finalizado con alguna noción fundadora de la teoría de gráficas y de la topología en general, con Legendre, Gauss, Cauchy, Descartes y Euler que nos han llevado hacia los orígenes de ésta teoría moderna.

La topología es una "geometría cualitativa", en la que se deja a un lado las nociones cuantitativas (longitud, ángulo, área, volumen, etc.), en las que en la primera parte del libro estábamos inmersos (propias de la geometría clásica). A la topología le interesa, por ejemplo, si un objeto tiene agujeros o no y cuántos, si tiene bordes bien definidos, si se puede partir en partes conectadas o si se puede transformar en otro deformándolo poco a poco.

Se considera a Euler el pionero de la topología al encontrar la relación que guardan las aristas, caras y vértices de cualquier poliedro (sin agujeros) y al resolver el famoso problema de los puentes de Königsberg y quien se refirió a éste como un problema de *geometriam situs* o geometría de posición, nombre por demás interesante ya que se estaba ya refiriendo a una característica que determina a lo que llamamos hoy topología, es decir, al hecho de que ya no se trata de una geometría de magnitudes, de hecho el término geometría proviene de las raíces "geo" y "metría" que significan Tierra y medir, es decir, la medición de la Tierra, esto parece obvio en tanto el surgimiento de esta área de conocimiento parece provenir de la necesidad de medir los terrenos de los agricultores de las primeras civilizaciones sedentarias humanas. Sin embargo, en el término usado por Euler geometriam situs o geometría de posición

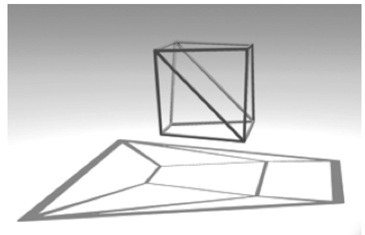


Figura 7.2: Proyectando un poliedro en el plano para generar una gráfica. Las sombras de las aristas del poliedro forman una gráfica plana de tal forma que son segmentos de línea recta en la proyección. Las caras del poliedro corresponden a polígonos convexos que son caras de la proyección. La cara más cercana a la fuente de luz como punto de proyección corresponde a la cara externa de la proyección, que es también convexa. De manera conversa, toda gráfica plana con ciertas propiedades conectivas proviene, de esta forma, de un poliedro.

se hace evidente el hecho de que ya no se trata de la medición de magnitudes sino de posiciones y relaciones, ya no importa el tamaño a diferencia de toda la geometría hasta antes de ese momento (basta percatarse que el objetivo de los Elementos de Euclides es sin duda el tema de la magnitud, el cálculo de áreas, volúmenes, etc.). Ya a mediados el siglo XIX, siguieron otros problemas como el de colorear un mapa con sólo cuatro colores, planteado por Francis Guthrie, o el estudio de superficies por Georg. F. B. Riemann y Camille Jordan. Johan B. Listing fue quien acuñó el termino topología en su artículo "Vorstudien zur Topologie" en 1847. En el siglo XX se ha utilizado también el nombre análisis situs o análisis de posición para referirse a la geometría de las superficies. Muchos destacan el artículo de Henri Poincaré "análisis Situs" de 1895, como el primer estudio sistemático de la topología, y donde se empieza a tratar con rigor conceptos topológicos.

Félix Klein definió la topología como una versión moderna de la geometría. Según él, se pueden clasificar los distintos tipos de geometrías de acuerdo al tipo de transformaciones que se permiten realizar (geometría euclidiana por los movimientos euclidianos, la geometría proyectiva por proyectividades, la geometría diferencial por difeomorfismos, etc.). Así por ejemplo, desde el punto de vista topológico, una esfera, un cubo o la superficie de una naranja representan el mismo objeto geométrico, no importa el que tenga picos o esté arrugado (como en geometría diferencial). Es decir, podemos pasar de uno a otro y viceversa de forma continua, a través de lo que se llama un homeomorfismo. Se dice entonces que son espacios homeomorfos. Es popular el dicho de que un topólogo no distingue entre una dona y una taza de café. Como si de objetos de goma elástica se tratase, podemos doblarlos, estirarlos o encogerlos para pasar de uno a otro. No se permiten transformaciones que puedan provocar una discontinuidad como por ejemplo cortar, pinchar o pegar puntos separados. En fin, la topología, en su intento de clasificar los objetos geométricos salvo homeomorfismo, proporciona herramientas o invariantes que permiten distinguir entre espacios no homeomorfos, y estudia aquellas propiedades que se conservan a través de homeomorfismos.

La fórmula descubierta por Euler que relaciona el número de vértices, aristas y caras de un poliedro convexo tiene una variante para poliedros no convexos: $v-a+c = 2-2g$, donde g denota el número de agujeros del poliedro.

Capítulo 8

Por qué 3 dimensiones

En matemáticas, la dimensión de un espacio o un objeto se define como el mínimo número de coordenadas necesarias para especificar de manera única un punto en él. Una superficie como un plano, o una esfera (sin su interior), tiene dimensión dos porque se necesitan dos coordenadas para especificar un punto en ella. Por ejemplo, en el plano basta con proporcionar un vector con dos entradas (x, y), la coordenada cartesiana, para determinar un punto. De igual forma, en una esfera, dos magnitudes, la latitud y longitud o coordenada polar, para determinar cualquier punto sobre ella.

Para determinar un punto en el interior de una esfera o de un cubo, sin embargo, se requieren de tres coordenadas y por lo tanto su dimensión es 3. La dimensión de un espacio (o de un objeto) es una propiedad intrínseca del espacio (o de un objeto), ya que se puede inferir de sus grados de libertad. En un punto por ejemplo, no hay ningún grado de libertad ya que se está inmóvil sobre una misma coordenada, un punto. En una línea, sin embargo, hay dos direcciones por las que se puede recorrer una línea, y en tres tres, etc.

El número de dimensiones en el que vivimos, el espacio que percibimos, tiene el justo tamaño necesario para el tipo de partículas que constituyen los objetos en nuestra realidad. Se trata efectivamente del aparente mínimo posible. Vivimos, aparentemente, en el espacio dimensionalmente más simple posible. No podría haber tenido 2 dimensiones ya que en 2 dimensiones no hay objeto físico que sostenga existencia, ya cualquiera éste sea, requiere de un espesor. Todo objeto, al menos en nuestro universo, se compone de al menos una partícula que ocupa un espacio, un espacio en 3 dimensiones, con largo, ancho y espesor. ¿Por qué no cuatro? Como veremos más adelante, tal como vimos anteriormente con el plano y el espacio, aumentar dimensiones no es una generalización trivial del espacio en 3 dimensiones. Cada vez que se aumenta una dimensión resultados inesperados suceden.

Más allá de la discusión física en donde, por ejemplo, la teoría de cuerdas predice (requiere) de una decena de dimensiones adicionales para poderse sostener como posible explicación del universo, el espacio que percibimos tiene el mínimo posible. De alguna forma el universo o nuestra percepción nos han proveído con cierta simpleza. En 3 dimensiones el número de simetrías es rico pero limitado. Como la teoría algorítmica de la información a través de su interpretación geométrica (Jack Lutz y Elvira Mayordomo) describe, en un mayor número de dimensiones se puede empaquetar más información. Piénsese en un archivero con cajones, cuando uno lo abre tiene ancho largo y fondo para organizar documentos. Una dimensión (espacial) más ofrecería mayor espacio para organizar la misma información en el mismo "espacio". Evidentemente hablar del mismo espacio es un abuso del lenguaje, ya que un espacio con una dimensión adicional no es el mismo espacio, pero el fondo es que las dimensiones del nuevo archivero con una dimensión adicional, sin cambiar las medidas de las otras tres, permitirían organizar y almacenar más información. La relación entre la información que se puede almacenar aumentando dimensiones no es lineal, en otras palabras, para almacenar lo que un archivero de 4 dimensiones contiene en uno de 3 dimensiones requiere más espacio que un aumento lineal en el largo, ancho y fondo del archivero tridimensional. Un espacio tal sería una ventaja en ese sentido, pero mientras no haya restricciones de espacio en ninguna de las 3 dimensiones siempre es posible "empaquetar" la información de cualquier espacio de otras dimensiones sin perder información, aunque esto requiera de espacios exponencialmente más grandes. En ese sentido no es, entonces, una restricción fundamental. Como veremos más adelante, sin embargo, si hay situaciones en las que añadir dimensiones produce un espacio que no es una generalización de nuestro espacio de 3 dimensiones, ni puede hacerse una conversión como la que mencionamos para empacar información en un espacio u otro.

Uno se puede dar el lujo de añadir una dimensión a un objeto o incluso visualizarlo tal cual sin añadírsela, tal como pretendemos hacer cuando vemos una hoja de papel en nuestro espacio tridimensional (aunque la hoja de papel no es un objeto bidimensional, tiene espesor también). Pero tan rápido como uno le quita una dimensión a un objeto en nuestro espacio (incluso a la hoja de papel) el objeto en cuestión deja de existir. Es difícil pensar en una realidad en una dimensión de menos de tres. Un espacio uni o bidimensional sería distinto al nuestro en cada aspecto, incluyendo el más fundamental, el físico ya que las partículas de las que están hechas todas y cada una de las cosas contenidas en nuestro espacio no parecen poder existir sin una de las dimensiones espaciales. Sin que ello signifique que, espacios unidimensionales o bidimensionales reales (y con vida en ellos, a lo mejor) puedan existir, tan distintos y ajenos como nos parezcan, sólo significa que su física y seguramente sus propiedades matemáticas son radicalmente distintas.

8.1. Poliedros en otras dimensiones

Aunque la noción de más dimensiones se puede remontar a Descartes que aumentando una coordenada a su sistema para determinar la posición de un punto en el plano o en el espacio, podía determinar puntos en espacios de más dimensiones simplemente generalizando su método, la geometría de dimensiones mayores a tres no se desarrolló sino hasta el principio del siglo IXX con los trabajos algebraicos de Cayley, Hamilton con su invención de los cuaterniones, Schläfli[63] y Riemann[59].

De forma análoga a los poliedros regulares o sólidos platónicos en el espacio de 3 dimensiones, puede pensarse en dimensiones sucesivamente mayores para obtener objetos con propiedades simétricas similares. A estos objetos en dimensiones mayores a tres se les conoce como *politopos*. Término utilizado para nombrar estructuras, equivalentes a los poliedros, pero construidos con *celdas*, una generalización del concepto de *caras*. Entre los más simples por su número de dimensiones se encuentran los polígonos y poliedros descritos que han sido utilizados y estudiados desde la antigüedad.

En el siglo XIX Cayley y Schläfli habían desarrollado una teoría de politopos regulares en cuatro y más dimensiones, todos ellos preservando simetrías tal como lo hacen los poliedros regulares en nuestro espacio tridimensional.

Schläfli muestra que en 4 dimensiones (espaciales) hay sólo seis politopos regulares (convexos, como los sólidos platónicos), cinco corresponden a los sólidos platónicos y uno más tiene 24 *caras* (caras en cursiva porque en 4 dimensiones las caras de los politopos son, de hecho, poliedros de 3 dimensiones). A partir de 5 dimensiones hay solamente tres politopos regulares sin importar cuántas más dimensiones se agreguen. Estos son el tetraedro, el cubo y el octaedro. De interés son también los politopos no convexos, descubiertos en 4 dimensiones en gran parte por también por Schläfli.

Schläfli provee una notación útil para describir unívocamente cada politopo con un símbolo. Un polígono regular de n lados se denota como {n}. Por ejemplo, el pentágono es representado por {5}. El símbolo de Schläfli para un poliedro regular es {p,q} si sus caras están formadas por polígonos de p lados y cada vértice está rodeado de q caras. Por ejemplo, el cubo se denota por {4,3}. Y si un politopo tiene por símbolo {p,q,r}, la caras de los polígonos en 2 dimensiones que forman cada celda de 3 dimensiones tienen p lados y se denotan por {p}, y cada celda es un poliedro denotado por {p,q}, las figuras de los vértices son poliedros regulares ({q,r}), y las figuras en cada eje son r-gonos regulares ({r}). En más dimensiones el símbolo de Schläfli se define recursivamente como una lista $\{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. Con esta notación el politopo dual de cualquier politopo está representado por el símbolo de Schläfli en orden invertido, y si además éstos son iguales entonces el politopo tiene como dual a sí mismo, lo que hace de la notación un recurso útil.

Sorpresivamente, añadir dimensiones no *abre* el espacio para aumentar el número de politopos regulares posibles, por el contrario, primero aumenta con la adición de uno sólo posible y luego se estabiliza permanentemente en tres sin importar el número de dimensiones superiores. Esto sugiere que el parámetro que define el número de politopos regulares de hecho no es la dimensión sino la curvatura del espacio.

No. de dimensiones n	Politopos convexos	Politopos no convexos	Teselados euclidianos convexas
1	1 segmento de línea	0	0
2	∞ polígonos	∞ polígonos estrella	1
3	5 sólidos platónicos	4 sólidos Kepler–Poinsot	3
4	6 politopos (polícoros)	10 Schläfli–Hess politopos	1 (panal)
5	3 5-politopos	0 5-politopos	3 teselados
6+	3	0	1

Cuadro 8.1: Número de poliedros convexos y no convexos y teselados que caben en el espacio de n dimensiones.

8.2. Politopos de un solo corte

La descomposición en triángulos está relacionada con una pregunta interesante cuando se ve un espacio dentro de otro y está relacionada con la manera en que un espacio puede *doblarse* dentro de otro.

Una hoja de papel, por ejemplo, como representación de un espacio de 2 dimensiones (pues en realidad una hoja de papel es un objeto de 3 dimensiones, ya que también tiene espesor y no hay forma de que objeto alguno no lo tenga) puede doblarse en 3 dimensiones de tal forma que una región del plano toque otra. El hecho de que tenga espesor es el motivo por el cual es imposible en la práctica doblar una hoja indefinidamente. Típicamente, las hojas de papel pueden doblarse a lo más una docena de veces, dependiendo del tamaño y del mismo grosor (el papel llamado de china, por ejemplo, puede doblarse más que una hoja blanca de papel para fotocopiadora). En la teoría, sin embargo, se ha demostrado matemáticamente que cualquier polígono en el plano puede obtenerse de un número finito de dobleces y un solo corte recto. La formulación matemática se le debe a Martin Gardner[32] quién en su columna de *Scientific American* formula la pregunta como un problema abierto (sin solución conocida) si lo que había visto anteriormente, trucos de un solo corte para realizar figuras complejas, era posible en el sentido más general, es decir, para cualquier figura. Evidentemente la pregunta y respuesta están muy relacionadas con la práctica del origami y por lo tanto comenzó como un pasatiempo con instancias antiguas que se remontan a un libro de Kan Chu Sen en Japón del año 1721.

De hecho el resultado (y teorema matemático) aseguran que no sólo cualquier polígono convexo, pero también no convexo e incluso cualesquiera dos figuras desconectadas (mientras sus lados sean rectos, de otra forma el corte único tendría que ser curvo, y éste es posiblemente un problema distinto y no necesariamente con respuesta simple derivada del corte recto).

Erik D. Demaine[24] es uno de entre algunos de los investigadores que han publicado resultados del problema propuesto y formulado originalmente por Martin Gardner.

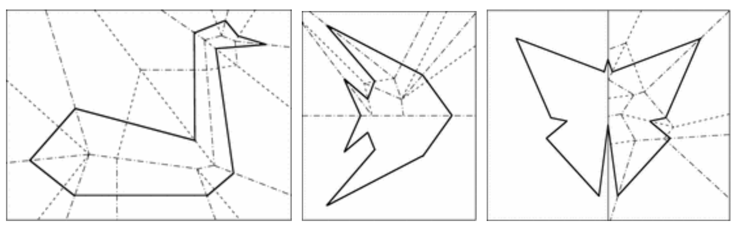


Figura 8.1: Tres ejemplos de Erik Demaine de figuras obtenidas de un número finito de dobleces y un sólo corte recto. Demaine prueba que cualquier figura con lados rectos puede obtenerse del mismo modo, dobleces y un sólo corte recto.

Curiosamente, el problema resulta de gran utilidad en geometría computacional, ya que las computadoras (u ordenadores) despliegan solamente objetos poligonales (los monitores se componen de pixeles, que no son mas que unidades de luz, puntos de luz que contiguos forman líneas). Cuando una computadora despliega algo que parece curvo, una textura, una sombra por ejemplo, el generador de imágenes reproduce el número de polígonos necesarios para darles forma y existencia en nuestra mente. El hecho de que cualquier polígono pueda obtenerse de una combinación de transformaciones simétricas y un solo *corte* provee de nuevos algoritmos de geometría computacional. El resultado no son sólo aplicaciones novedosas, sino otras preguntas teóricas relacionadas con el tiempo (por ejemplo, número de dobleces) necesarios para en un solo corte generar una figura.

El problema parece gritar que se reformule para cualquier espacio, es decir, si en 4 dimensiones un espacio de tres puede doblarse para que de un sólo corte se obtenga cualquier objeto tridimensional. Un arquitecto en 4 dimensiones podría construir, por ejemplo, una casa (de 3 dimensiones) haciendo un solo corte recto. Otros problemas relacionados con características y algoritmos de poliedros que se desdoblan sin encimar ninguna de sus partes constituyen un conjunto de preguntas abiertas. Se sabe por ejemplo, que si se crea un poliedro con características al azar (y por lo tanto no necesariamente convexo), al desdoblarse en 2 dimensiones alguna de sus partes se encima con toda certeza. También se sabe que no todos se enciman, como sabemos es el caso de los sólidos platónicos dado que son convexos y que están por lo tanto limitados a cinco.

La generalización de resultados de dobleces y cortes en espacios de más dimensiones es, sin embargo, no trivial. Tres tipos de objetos son comúnmente estudiados en espacios de mayores dimensiones. Éstos objetos se caracterizan por la estructura de sus gráficas asociadas a las que se les puede aplicar cualquier transformación que no rompa las uniones. Se trata de arcos poligonales o cadenas poligonales (simplemente líneas rectas conectadas entre si pero con extremos, es decir, no encierran ningún espacio); ciclos poligonales, cadenas poligonales cerradas (o polígonos) y árboles poligonales.

De hecho estos problemas son sumamente interesantes porque relacionan objetos de dimensión igual y menor a nuestro espacio físico con los espacios de n dimensiones y lo que podemos o no hacer en unos y otros.

La pregunta asociada al arco poligonal es si cualquiera puede reconfigurarse en línea recta, es decir, con todos sus ángulos entre los vértices sumando 180 grados. La pregunta asociada con un ciclo (un polígono) es si puede reconfigurarse para quedar convexo, plano y con todos los ángulos de sus vértices interiores menores o iguales a 180 grados (una pregunta que se haría tempranamente Erdös[30]). Es relativamente fácil demostrar que un polígono puede transformarse en convexo si uno no convexo puede ser *doblado* en cualquier otro. Y por último, la pregunta de si un árbol puede reconfigurarse en un plano, es decir, con todos los vértices sobre el mismo plano. Las respuestas resultan no ser invariantes a la dimensión del espacio[25].

En 2 dimensiones, por ejemplo, todo arco puede ponerse en línea recta, todo ciclo (que es una línea simplemente) puede (trivialmente) configurarse para quedar convexo (de hecho ya lo era) pero no todos los árboles pueden desdoblarse en 2 dimensiones para quedar planos. En 3 dimensiones la respuesta es negativa para los tres tipos de objetos, hay configuraciones de arcos en 3 dimensiones que no pueden desdoblarse para quedar en línea recta (por ex. un nudo de arcos de longitud mayor a la longitud del nudo por el que los arcos más grandes no pueden sacarse), hay poliedros que al desdoblarse no quedan convexos y árboles que no quedan planos. De cierto modo, nuestro espacio es muy restrictivo (lo que permite que haya juegos para los que ciertas configuraciones el objeto queda trabado). En 4 dimensiones y más, por el contrario, la respuesta a cada una de las preguntas es positiva, de cierta forma siempre hay espacio necesario para manipular los objetos que incluso ocupando todas las dimensiones posibles del espacio que contiene se pueden *desdoblar*.

Esto puede sugerir que el espacio de 3 dimensiones tiene características especiales, más allá de la más obvia que podrá ser la que he mencionado con anterioridad y que consiste en que el nuestro es el espacio con el mínimo posible de dimensiones para que objetos físicos, constituidos por las partículas que conocemos, puedan existir. Los resultados también pueden sugerir que las tres preguntas de reconfiguraciones formuladas no son del todo independientes a nuestra noción de espacio (y por lo tanto a preguntas que nos parecen interesantes). Las configuraciones finales que involucran aplanar o desdoblar parecen estar ligadas a preguntas fundadas en nociones que dependen del tipo de movimientos que hacemos en el espacio en el que vivimos.

8.3. Politopos en otras curvaturas

En el plano euclidiano la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180 grados; en el plano hiperbólico suman menos de 180 grados; y en el plano elíptico más de 180. Al descomponer un polígono de n lados en triángulos se puede determinar que la suma de los ángulos interiores del polígono es $(n-2)180$ grados en el plano euclidiano, más en el hiperbólico y menos en el elíptico. Por lo tanto, si $n \times 360$ $grados/k = (n-2)180$ grados, entonces el polígono es euclidiano; si es menos hiperbólico y si más elíptico. De la misma fórmula se obtiene que al dividir por $n \times 360$ grados y sumar $1/n$, el discriminante se convierte en: si $1/n + 1/k = 1/2$, entonces euclidiano; si menos, hiperbólico y si más en el elíptico.

El ángulo de defecto de Descartes es otro discriminante, si éste es positivo entonces permite que en cada vértice el poliedro se doble en una dimensión adicional y se junte consigo mismo para formar un politopo. Un ángulo de defecto cero tesela el espacio con dimensión igual al de las caras del politopo mientras que un ángulo de defecto negativo no puede existir en el espacio ordinario pero puede en uno hiperbólico.

Si nos interesan el número de poliedros en otras curvaturas (es decir, poliedros con mismo número de caras, vértices y aristas), entonces en el espacio hiperbólico, esférico y elíptico, el número de poliedros (y de politopos en más dimensiones) es el mismo[35], ya que todos estos espacios son localmente euclidianos. En otras palabras, en estos espacios hay una región suficientemente pequeña que parece euclidiano.

Por lo tanto, dado un politopo hiperbólico, esférico o elíptico, uno puede reducir el tamaño del politopo hasta que se vea como euclidiano y quepa en el espacio euclidiano. De manera inversa, un politopo euclidiano puede incrustarse siempre en una región suficientemente pequeña de otra curvatura. De hecho hay transformaciones matemáticas para llevar un politopo de una curvatura a otra sin mayor problema, bastan algunas intersecciones o proyecciones para llegar de uno a otro.

Es más interesante preguntarse por politopos que “llenan” un espacio no euclidiano. Esto es equivalente a preguntarse por teselados. Las propiedades métricas como ángulos y distancias en espacios de curvatura negativa o positiva (o mixta, es decir, de curvatura no constante) no parecen, sin embargo, teselados tradicionales (una repetición de objetos exactamente iguales). Los teselados en estos espacios parecen teselados cuya escala y ángulos entre aristas (y por lo tanto caras) no es constante, se “deforman” para adaptarse al espacio.

Sobre la esfera, los poliedros regulares y semiregulares pueden considerarse proyecciones que forman teselados sobre la superficie. Cualquier politopo regular de dimensión n puede verse como una proyección que forma un teselado en la *superficie* de dimensión $n-1$ de una hiperesfera. Por ejemplo, los sólidos platónicos, objetos tridimensionales, *teselan* la superficie de una esfera de dimensión dos.

Por otro lado, los poliedros esféricos que resultan de la proyección de un poliedro en general sobre su superficie y los teselados posibles sobre la esfera son objetos matemáticos del mismo tipo. Teselados sobre la superficie de una esfera (hiper) esfera pueden considerarse politopos regulares.

En 1970, Andreev[3] clasifica todos los poliedros hiperbólicos en 3 dimensiones y prueba un teorema que indica que los ángulos diedros son descritos por cinco clases de ecuaciones lineales. Hay cuatro teselados hiperbólicos regulares incluyendo el panal de peque nos dodecaedros hiperbólicos denotado por $\{5,3,4\}$, que llena el espacio hiperbólico con celdas dodecahédricas.

Un politopo en el hiperespacio básicamente se dobla en sí mismo para cerrarse y encerrar un volumen finito (lo que preserva la idea de un objeto, el de un politopo), por la misma razón teselados y politopos en este espacio son de cierta forma objetos del mismo tipo, ya que los teselados que se estudian son los que acaban cerrándose en sí mismos. Politopos que no se cierran en el espacio hiperbólico son llamados apeiroedros o apeirotopos.

Bibliografía

[1] P.S. Aleksandrov, P.S. Urysohn. *Mémoire sur les espaces compacts,* Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 5 (1)(35), 196–202, 1950.

[2] E. M. Andreev. "On convex polyhedra in Lobacevskii spaces." *Mat. Sb.* 81(123):445–478, 1970.

[3] E. M. Andreev. *On convex polyhedra in Lobacevskii spaces,* (English Translation). Math. USSR Sbornik, 10:413–440, 1970.

[4] L.C. Arboleda. *Les débuts de l'école topologique soviétique: notes sur les lettres de P.S. Alexandroff et Paul S Urysohn Maurice Fréchet*, Arch. Hist. Exact Sci. 20 (1), 73–89, 1979.

[5] L.K. Arboleda. *Origins of the Soviet school of topology: Remarks about the letters of P.S. Aleksandrov y P.S. Uryson a Maurice Fréchet* (Russian), Istor.-Mat. Issled. No. 25, 281–302; 380, 1980.

[6] A.V. Arkhangel'skii y V.M. Tikhomirov, P.S. Uryson. *Math. Surveys.* 53 (5), 875–892, 1998.

[7] A.V. Arkhangel'skii y V.M. Tikhomirov, P.S. Uryson, *Uspekhi Mat.* Nauk 53, no. 5(323), 5–26, 1998.

[8] K.B. Athreya, J.M. Hitchcock, J.H. Lutz, E. Mayordomo. *Effective Strong Dimension, Algorithmic Information, and Computational Complexity.* CoRR cs.CC/0211025. 2002.

[9] J. Baumann. *Lehre von Raum, Zeit und Mathematik.* der neuern Philosophie, Berlin, 1868-9.

[10] M. Berger y P. Damphousse. *Convexité dans le plan, dans l'espace et au delà: De la puissance et de la complexité d'une notion simple, Tome 2,* Ellipses Marketing, 2006.

[11] S.A. Bogatyi, Yu.M. Smirnov y V.V. Fedorchuk, P.S. Uryson. *Vestnik Moskov.* Univ. Ser. I Mat. Mekh. (3), 3–4, 1999.

[12] J. Bracho. *En qué espacio vivimos,* Fondo de Cultura Económica, 1989.

[13] A. R. Butz. *Space filling curves and mathematical programming.* Information and Control, 12:314–330, 1968.

[14] M.P. Carmo, (do). *Differential Geometry,* Open Court Publishers 1967.

[15] A.L. Cauchy. *Recherche sur les polyèdres–premier mémoire*, Journal de l'Ecole Polytechnique 9, 66–86, 1813.

[16] G. Chaitin. *How real are real numbers?*, Int J Bifurcat Chaos Appl Sci Eng, 2007.

[17] G. Chaitin. *How real are real numbers?.* `http://www.cs.auckland.ac.nz/~chaitin/olympia.pdf`

[18] H.S.M. Coxeter. *Non Euclidian Geometry,* 1998.

[19] H.S.M. Coxeter. *Regular Polytopes,* Dover Publications, 1973.

[20] T. Crilly y D. Johnson. "The emergence of topological dimension theory", en I.M. James (ed), *History of topology,* 1–24, 1999.

[21] P.R. Cromwell. *Polyhedra,* Cambridge University Press, 1964.

[22] D. van Dalen y L.E.J. Brouwer, en I. M. James (ed.), *History of topology,* 947–964, 1999.

[23] M., Dehn. *Über die Starreit konvexer Polyeder*, Math. Ann. 77, 466–473, 1916.

[24] E.K. Demaine, M. L. Demaine y A. Lubiw. *Folding and Straight Cut Suffice,* In Proc. 10th. Annual ACM-SIAM Symposium Disc. Alg. Baltimore, MD: ACM Press, pp. 891–892, 1999.

[25] E.D. Demaine. *Folding and Unfolding Linkages, Paper, and Polyhedra,*Proceedings of JCDCG '00 Revised Papers from the Japanese Conference on Discrete and Computational Geometry, 2001.

[26] R. Descartes. *Progymnasmata de solidorum elementis,* en Oeuvres de Descartes, vol. X, pp. 265–276

[27] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Tarquato y P.M. Chikin, *Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids,* Science, 303, 990–993, 2004.

[28] M. Edmonds. "Their Use is Wholly Unknown," *Vessels for the ancestors, Essays on the Neolithic of Britain and Ireland in honour of Audrey Henshall* editado por Niall Sharples y Alison Sheridan, Edinburgh University Press, 1992.

[29] L. Euler. *Recherches sur les Polyèdres,* Premier Memoire, Journal de Ecole Polytechnique XVI Cahier, Tome IX, p. 68, 1813.

[30] P. Erdös. *Problem 3763.* Amer. Math. Monthly, 42:627, 1935.

[31] P.J. Federico. *Descartes on Polyhedra: A Study of the "De solidorum elementis"*, Springer 1997.

[32] M. Gardner. "Paper cutting", capítulo 5 de *New Mathematical Diversions* (Revised Edition), Mathematical Association of America, 1995.

[33] C.F. Gauss. *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827.

[34] J.J. Gray. *János Bolyai, Non-Euclidean Geometry, and the Nature of Space*, MIT Press, 2004.

[35] B. Grünbaum. *Convex Polytopes*, Graduate Texts in Mathematics, Springer, 2003.

[36] T.L. Hales, *Cannonballs and honeycombs*, Notices of the American Mathematical Society, 47, 440–449, 2000.

[37] T.L. Heath. *A History of Greek Mathematics,* Vol. 1 y Vol. 2, Dover Publications, 1981.

[38] T.L. Heath, *The thirteen books of the Elements,* Dover Publications, 1956.

[39] D. Hilbert. *The Foundations of Geometry,* The Open Court Publishing Company, 1950, (1902 First Edition).

[40] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination,* AMS Bookstore, 1999.

[41] H. Hinton. *Speculations on the Fourth Dimension: Selected Writings of Charles Hinton,* Dover, 1980.

[42] C. Jordan. *The collected works of Camille Jordan* 4 volúmenes, 19611964.

[43] S. Kobayashi y K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry,* Vol. 1. Wiley-Interscience, 1996.

[44] R.G. Bartle. *The elements of Integration and Lebesgue Measure,* Wiley Classics Library, John Wiley and Sons, 1966.

[45] J.M. Lee. *Riemannian Manifolds, An Introduction to Curvature,* Springer and Verlag, 1997

[46] A.M. Legendre. *Éléments de Géométrie*, 1794.

[47] N. Lobachevsky y G.B. Halsted. *Geometrical Researches on the Theory of Parallels,* 2007.

[48] E. Mach. *Space and Geometry*, Open Court Classics, 1906.

[49] L.A. Mazel. On reminiscences about PS Uryson", *Voprosy Istor. Estestvoznan. i Tekhn.* (4), 69–75, 1998.

[50] E. Pap (ed). *Handbook of Measure Theory,* North Holland, 2002.

[51] I. Newton. *The Principia: Mathematical Principles of Natural Philosophy*, `www.snowballpublishing.com`, 2010.

[52] M. Pasch. *Vorlesungen ´uber nuere Geometrie*, 1882.

[53] G. Peano. *I principii di geometria, logicamente esposti*, 1889.

[54] F. Pfender y G.M. Ziegler, *Kissing Numbers, Sphere Packings, and Some Unexpected Proofs*, Notices of the AMS, 2004.

[55] M. Pieri. *Della geometria elementare come sistema ipotetico deduttivo*, 1899.

[56] Pokroky, M. Katetov, P.S. Uryson and the beginnings of general topology, *Mat. Fyz. Astronom.* 19, 251–261, 1974.

[57] Platón. *Diálogos. Obra completa.* Volumen VI: Filebo. Timeo. Critias. Traducción, introducción y notas por de M. Ángeles Durán (Filebo) y Francisco Lisi (Timeo) y (Critias). Traducción revisada por Mercedes López Salvá (Filebo) y (Timeo) y Carlos García Gual (Critias). Biblioteca Clásica Gredos 160. 1a. edición, 2a. reimpresión, Editorial Gredos, 2002.

[58] D.S. Richeson. *Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology*, Princeton University Press, 2008.

[59] B. Riemann. *Habilitationsschrift,* 1854.

[60] D. Ross. *Physica.* (Oxford Classical Texts Series) (Greek Edition), Aristóteles (autor), 1951.

[61] C. Rousseau. *Kepler's conjecture on the packing of spheres,* Université de Montréal `http://wikis.zum.de/dmuw/images/4/40/Kepler.pdf`

[62] G. Saccheri. *Euclides Vindicatus.* (1667), reprinted by Kessinger Publishing, 2007.

[63] L. Schläfli. *Theorie der vielfachen Kontinuität,* 1852.

[64] D.M.Y. Sommerville. *An introduction of the geometry of* n *dimensions,* New York E.P. Dutton and Company, Inc. Publishers, 1929.

[65] C. Song, P. Wang y H.A. Maske, *A phase diagram for jammed matter*, Nature, 453, 629–632, 2008.

[66] F. Suárez. Sección V de *Metaphysical Disputation* 40 (en latín), 1597.

[67] G.C. Szpiro, *Kepler's conjecture*, John Wiley & Sons, Inc., 2003.

[68] V.M. Tikhomirov. "On the centenary of the birth of P S Uryson", *Voprosy Istor. Estestvoznan. i Tekhn.* (4), 62–65; 125, 1998.

[69] V.M. Tikhomirov. "Two letters to P S Uryson", *Voprosy Istor. Estestvoznan. i Tekhn.* (4), 66–69, 1998.

[70] S. Wolfram. *A New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002.

[71] H. Wussing. *Lecciones de historia de la matemática*, Siglo XXI, 1998.

[72] A.P. Yushkevich. cartas de L E J Brouwer a J Hadamard (sobre las biografías de P S Aleksandrov y P S Uryson, *Istor.-Mat. Issled.* No. 32–33, 522–525, 1990.

[73] G.M. Ziegler. *Lectures on Polytopes,* Springer, 1994.

Índice alfabético

Breve biografía del autor

Héctor Zenil es investigador de tiempo completo de la universidad de Sheffield, Inglaterra. Es doctor en ciencias por la Universidad de Lille 1, y candidato a doctor en filosofía por el Institut d'Histoire et de Philosophie des Sciences et des Techniques de la universidad de Paris 1. Realizó una maestría en lógica en la Sorbona y la licenciatura en matemáticas en la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM). La base de este libro es un texto escrito por el autor durante su servicio social en la Dirección General de la Divulgación de la Ciencia de la UNAM en el año 2004, con reflexiones y adiciones posteriores.

Héctor Zenil ha sido investigador invitado del Massachusetts Institute of Technology (MIT) y la universidad de Carnegie Mellon. Desde el año 2006 trabaja para Wolfram Research (los creadores de *Mathematica*) como investigador *senior* adscrito a la oficina de Boston. Entre otras obras editadas por H. Zenil, vale la pena mencionar *Randomness Through Computation* y *A Computable Universe*, ambos publicados por World Scientific e Imperial College Press.

UNAM Copit ArXives
ISBN: 978-0-9831172-0-9