

FÍSICA EXPERIMENTAL  
INTRODUCCIÓN A LOS CONCEPTOS Y  
MÉTODOS

Javier Miranda Martín del Campo

Instituto de Física

Universidad Nacional Autónoma de México

**CopIt-arXives**  
Publishing Open Access  
with an Open Mind  
2025

Este libro contiene material protegido por leyes de autor

Todos los derechos reservados © 2025

Publicado electrónicamente en México, por CopIt-arXives

Obra editada por Lourdes Verónica Mejía Ponce

Diseño de portada Gabriela Lili Morales Naranjo

*Física Experimental. Introducción a los conceptos y métodos*

[Autor] Javier Miranda Martín del Campo — México CDMX: CopIt-arXives, 2025

Incluye bibliografías e índice

ISBN: 978-1-938128-34-9 ebook

### **Derechos y permisos**

Todo el contenido de este libro es propiedad intelectual de sus autores quienes, sin embargo, otorgan permiso al lector para copiar, distribuir e imprimir sus textos libremente, siempre y cuando se cumpla con lo siguiente: (i) el material no debe ser modificado ni alterado, (ii) la fuente debe ser citada siempre y los derechos intelectuales deben ser atribuidos a sus respectivos autores, (iii) estrictamente prohibido su uso con fines comerciales.

El contenido y puntos de vista planteados en cada capítulo es responsabilidad exclusiva de los autores y no corresponden necesariamente a los de los editores o a los de ninguna institución, incluidas CopIt-arXives o la UNAM.

Producido con software libre incluyendo L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Indexado en Google Books.

Todas las figuras e imágenes fueron elaboradas por Javier Miranda Martín del Campo.

ISBN: 978-1-938128-34-9 ebook



Este libro ha pasado por revisión de pares

**CopIt-arXives**

Cd. de México - Cuernavaca - Madrid - Curitiba

Viçosa - Washington DC - Mallorca - London

Con el apoyo de la

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Instituto de Física

*A Estelita  
Porque siempre está conmigo*

*A Ángel Hiromi  
Porque siempre está haciendo su mejor esfuerzo en el trabajo*

*A la memoria de mi mamá Luz María y de mi papá Rafael  
Porque me enseñaron que siempre debemos ser honrados y trabajadores*

*A la Universidad Nacional Autónoma de México  
Porque da la oportunidad a tantos jóvenes para saber más y ser mejores*

*Un experimento es una pregunta que la ciencia le plantea a la naturaleza, y una medición es el registro de la respuesta de la naturaleza.*  
Max Planck.

*Frecuentemente digo que cuando puedes medir aquello de lo que estás hablando y expresarlo en números, sabes algo acerca de ello; pero cuando no puedes medirlo, cuando no lo puedes expresar en números, tu conocimiento es de una clase pobre e insatisfactoria.*  
William Thomson (Lord Kelvin).

*Escogí una carrera en física porque ahí la verdad no es tan fácilmente tergiversada.*  
Angela Merkel.

Tomado de Lifeder. (24 de septiembre de 2023). Frases sobre física de grandes científicos. Recuperado de: <https://www.lifeder.com/frases-fisica/>, consultado 16/8/2024; Mackay, A.L. (1991). A dictionary of scientific quotations. Institute of Physics Publishing, Bristol.

*BibTex* es marca registrada de BibTex.org.  
*Bing* es marca registrada de Microsoft Corporation.  
*Excel* es marca registrada de Microsoft Corporation.  
*Google Hojas de cálculo* es marca registrada de Google LLC.  
*Google Scholar* o *Google Académico* es marca registrada de Google LLC.  
*L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X* es marca registrada de The L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>XProject.  
*Mathematica* es marca registrada de Wolfram Research, Inc.  
*Matlab* es marca registrada de The MathWorks, Inc.  
*Mendeley* es marca registrada de Elsevier.  
*Origin* es marca registrada de OriginLab Corporation.  
*Python* es marca registrada de Python Software Foundation.  
*ResearchGate* es marca registrada de ResearchGate GmbH.  
*SPSS* es marca registrada de International Business Machines Corp.  
*Stata* es marca registrada de StataCorp LP.  
*Statistica* es marca registrada de StatSoft.  
*Tracker* es marca registrada de Physlets.Org.  
*Word* es marca registrada de Microsoft Corporation, EUA.

## ÍNDICE

<b>PREÁMBULO</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 1. LA EXPERIMENTACIÓN Y SU IMPORTANCIA EN LA CIENCIA</b>	<b>5</b>
<b>CAPÍTULO 2. MEDICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS</b>	<b>11</b>
2.1. Magnitudes y Mediciones . . . . .	12
2.2. Errores de medición . . . . .	15
<b>CAPÍTULO 3. UNIDADES Y EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES</b>	<b>22</b>
3.1. El Sistema Internacional de Unidades (SI) . . . . .	22
3.2. Reglas de uso y de estilo en el SI . . . . .	28
3.3. Otros sistemas de unidades . . . . .	33
<b>CAPÍTULO 4. FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA</b>	<b>36</b>
4.1. Histogramas y distribuciones . . . . .	36
4.2. Parámetros estadísticos básicos . . . . .	39
4.3. Distribuciones de probabilidad . . . . .	44
4.4. La distribución normal . . . . .	49
4.5. Otras distribuciones de probabilidad . . . . .	51
<b>CAPÍTULO 5. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPERIMENTAL</b>	<b>54</b>
5.1. El concepto de incertidumbre . . . . .	54
5.2. La evaluación de la incertidumbre . . . . .	56
5.3. Incertidumbre estándar combinada . . . . .	61
5.4. La incertidumbre expandida . . . . .	65
<b>CAPÍTULO 6. ESCRITURA DE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y GRAFICACIÓN</b>	<b>68</b>
6.1. Cifras significativas . . . . .	68

6.2. Escritura de la incertidumbre . . . . .	72
6.3. Graficación . . . . .	73
6.4. ¿Barras de error o barras de incertidumbre? . . . . .	79
<b>CAPÍTULO 7. AJUSTE DE RECTAS Y EVALUACIÓN DE RESULTADOS</b>	<b>81</b>
7.1. Métodos gráficos . . . . .	82
7.1.1. Relaciones lineales . . . . .	82
7.1.2. Cambios de variable . . . . .	85
7.2. Regresión lineal . . . . .	89
7.3. Pruebas de bondad de ajuste . . . . .	93
7.3.1. El coeficiente de correlación . . . . .	93
7.3.2. El parámetro $\chi^2$ (ji cuadrada) . . . . .	96
<b>CAPÍTULO 8. HABILIDADES EN EL LABORATORIO</b>	<b>100</b>
8.1. Definición del experimento por realizar . . . . .	100
8.2. El desarrollo experimental . . . . .	101
8.3. La bitácora de laboratorio . . . . .	105
8.4. Bitácoras en papel y electrónicas . . . . .	110
8.5. La publicación de los resultados . . . . .	112
<b>CAPÍTULO 9. TEMAS AVANZADOS DE ANÁLISIS DE DATOS</b>	<b>113</b>
9.1. Incertidumbre de magnitudes correlacionadas . . . . .	113
9.2. Regresión lineal ponderada con incertidumbre en una variable	115
9.3. Regresión lineal ponderada con incertidumbre en las dos va- riables . . . . .	118
9.4. Ajuste de polinomios con regresión lineal y regresión lineal múltiple . . . . .	119
9.5. Análisis de varianza (ANOVA) . . . . .	122
9.6. Valores atípicos en un experimento . . . . .	125
<b>CAPÍTULO 10. ANÁLISIS DIMENSIONAL</b>	<b>129</b>
<b>CAPÍTULO 11. EL INFORME DE LABORATORIO</b>	<b>135</b>
11.1. Información previa . . . . .	136
11.2. Redacción del informe . . . . .	137
11.3. Partes del informe . . . . .	140
11.3.1. Título . . . . .	141
11.3.2. Autores . . . . .	141
11.3.3. Resumen . . . . .	142
11.3.4. Introducción . . . . .	142

11.3.5. Desarrollo experimental . . . . .	143
11.3.6. Resultados . . . . .	144
11.3.7. Discusión . . . . .	145
11.3.8. Conclusiones . . . . .	146
11.3.9. Bibliografía . . . . .	147
11.3.10. Aspecto del informe . . . . .	148
<b>EJERCICIOS</b>	<b>150</b>
Capítulo 2 . . . . .	150
Capítulo 3 . . . . .	151
Capítulo 4 . . . . .	151
Capítulo 5 . . . . .	155
Capítulo 6 . . . . .	157
Capítulo 7 . . . . .	159
Capítulo 8 . . . . .	164
Capítulo 9 . . . . .	165
Capítulo 10 . . . . .	166
<b>APÉNDICE A. ALFABETO GRIEGO</b>	<b>169</b>
<b>APÉNDICE B. EXPRESIONES PARA PROPAGAR LA INCERTIDUMBRE DE OPERACIONES COMUNES</b>	<b>170</b>
B.1. Funciones de una variable . . . . .	170
B.2. Funciones de dos o más variables . . . . .	171
<b>APÉNDICE C. GRAFICACIÓN CON PROGRAMAS DE CÓMPUTO</b>	<b>173</b>
<b>APÉNDICE D. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA MÍNIMOS CUADRADOS</b>	<b>179</b>
<b>APÉNDICE E. USO DE EXCEL® PARA AJUSTE DE RECTAS CON MÍNIMOS CUADRADOS</b>	<b>181</b>
<b>APÉNDICE F. PROBABILIDADES DE COEFICIENTES DE CORRELACIÓN</b>	<b>183</b>
<b>APÉNDICE G. DISTRIBUCIÓN F</b>	<b>185</b>
<b>APÉNDICE H. EJEMPLO DE UN INFORME</b>	<b>191</b>
<b>APÉNDICE I. LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES</b>	<b>202</b>

ÍNDICE ANALÍTICO	204
REFERENCIAS	208



## PREÁMBULO

**E**L presente texto es resultado de cuatro décadas de labor docente a nivel de licenciatura y posgrado, desarrollada principalmente en los laboratorios de enseñanza de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

La idea original de redactar un libro que cubriera estos temas nació hace más de veinte años, en conjunto con mi finado compañero, estudiante y amigo, el Dr. Marcelo Francisco Lugo Licona. Colaboramos por cerca de 15 años en el Laboratorio de Física de la Facultad de Química. Lamentablemente, Marcelo y yo nunca pudimos iniciar este proyecto, por diversas razones. Fue en este sitio donde tuve la fortuna de formar parte de una comunidad de profesores y profesoras a la que me atrevo a llamar una verdadera Academia, por el profundo interés y dedicación que tenían ellos y ellas porque quienes estudiaban en esos laboratorios aprendieran los conceptos básicos de la Física Experimental. Fue para mí una experiencia muy enriquecedora, tanto profesional como personalmente. Es en particular estimulante dar a conocer estos temas a estudiantes que en sus profesiones no se dedicarán a la Física, puesto que sus carreras están más bien ligadas a la Química, ciencia que de cualquier manera debe utilizar los mismos conceptos y métodos para su propio trabajo experimental. De forma análoga, pude observar esto con mi breve participación en el único curso experimental que tenía la carrera de Ciencias de la Tierra en la Facultad de Ciencias y que lamentablemente desapareció en el nuevo plan de estudios, en otra dependencia.

Paralelamente, los laboratorios de la Facultad de Ciencias, en particular los de Mecánica, Fenómenos Colectivos (antes Calor, Ondas y Fluidos), Electromagnetismo y de Física Moderna, en los cuales me he desempeñado desde que inicié como profesor de asignatura, me han permitido aprender mucho acerca de los intereses y aptitudes de quienes estudian Física. Las personas que coordinan esos laboratorios realizan un gran esfuerzo para que estos sigan cumpliendo con la meta de iniciar en los aspectos básicos

de la Física Experimental a las personas inscritas en los cursos.

De la misma forma, pude observar que una gran cantidad de docentes, al igual que muchos investigadores, no se han actualizado en cuanto al vocabulario y los métodos ya aceptados dentro de la metrología y que deben utilizarse para todas las tareas en las que se hacen mediciones, desde hace al menos 30 años. Asimismo, a nivel internacional solo pude identificar un texto actualizado en estos temas, llegando a publicarse en la presente década libros con conceptos que actualmente ya no son apropiados.

Alrededor del año 2000 redacté un folleto, *Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales*, para que las personas inscritas en mis cursos pudieran usarlo como una orientación para la presentación de sus informes, con resultados muy positivos. Lo incluí en mi perfil de la plataforma *ResearchGate*®, donde, hasta la fecha, ha tenido más de 8 500 lecturas. Algunos otros profesores también lo han utilizado como apoyo.

Todo esto me ha motivado y recibí la oportunidad de dedicarme a escribir un texto que, espero, ayude a quienes imparten los cursos o que estudian en los laboratorios de enseñanza para que tengan la posibilidad de realizar un trabajo de buena calidad, con las limitaciones o ventajas propias de cada institución educativa. No es indispensable contar con la instrumentación más avanzada para hacer experimentos que permitan comprender los conceptos y aplicar los métodos de tratamiento de datos.

La obra consta de 11 capítulos y ocho apéndices, con una sección de ejercicios. He tratado de que las referencias cubran un amplio intervalo de tiempo, porque una gran parte del conocimiento en algunos temas se quedó “sepultada” en textos un tanto antiguos y ya no se imparte en los cursos.

En el capítulo 1 explico la importancia de la experimentación en la ciencia, no solo en la Física, para resaltar la necesidad de conocer los temas desarrollados más adelante. En el capítulo 2 me refiero a los conceptos básicos para realizar mediciones y presentar los resultados con la terminología adecuada. Presento una explicación del Sistema Internacional de Unidades en el capítulo 3, considerando que las cantidades y unidades básicas fueron redefinidas recientemente. Dentro del capítulo 4 muestro principios esenciales de Estadística, necesarios para los cursos de este nivel y que en algunos planes de estudio se eliminaron. En el capítulo 5 presento, también de forma somera, los métodos actualmente aceptados para la evaluación de la incertidumbre (incorrectamente confundido por muchos profesionales como “propagación de errores”). El capítulo 6 está enfocado en explicar cómo deben escribirse los resultados de las mediciones y cómo presentarlos gráficamente, cuando así sea requerido; la base principal de estos métodos

son las recomendaciones del documento oficial del Sistema Internacional. Dentro del capítulo 7 doy una introducción a los fundamentos para el ajuste de relaciones lineales, por medio de la regresión (coloquialmente mínimos cuadrados o cuadrados mínimos, para otros autores), así como algunas pruebas de la bondad de dichos ajustes. En el capítulo 8 incluí una serie de recomendaciones para llevar a efecto un buen trabajo en el laboratorio, haciendo énfasis en la escritura de la bitácora.

Describo sucintamente varios temas avanzados para el análisis de los datos experimentales en el capítulo 9, mientras que al capítulo 10 le di como tema central el Análisis Dimensional, una herramienta que frecuentemente no se describe con rigor en los cursos. Por último, en el capítulo 11 hago una serie de recomendaciones de cómo presentar por escrito los resultados de un experimento hecho en un laboratorio de enseñanza, con un ejemplo de informe en el Apéndice H. Hay una muy breve mención acerca del uso de la llamada *Inteligencia Artificial*, tema muy en boga actualmente, con la esperanza de que no llegue a aniquilar la inteligencia natural de quienes estudian alguna carrera científica. En los demás apéndices (desde A hasta G y el I) incluí diversas tablas útiles para el análisis de datos, así como demostraciones. Con el fin de que los lectores puedan adquirir algo de práctica en los temas del libro, también añadí una sección de ejercicios.

Antes de concluir, debo agradecer, en primer lugar, a todas las personas que han tomado mis cursos. Invariablemente me han instruido en algo, casi siempre de forma positiva, sobre todo cuando sabían algo que yo desconocía. También, a quienes originalmente fueron mis estudiantes y ahora son colegas, que también me respaldaron. En su momento, Óscar G. de Lucio, como mi ayudante en los años 1990. Más adelante, Juan Reyes Herrera. Y en años más recientes, Alfonso Enrique Hernández, Salvador Reynoso y Derian Serrano, con quienes sigo trabajando en investigación y temas de docencia. Además, el apoyo incondicional de Juan Carlos Pineda, técnico del Laboratorio de Aerosoles y gran amigo. En especial quiero resaltar la labor de Lourdes Verónica Mejía, quien me ayudó para dar al libro el formato en *L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X*, además de haber sido mi ayudante y estudiante distinguida. También, al grupo egresado del Laboratorio de Aerosoles del Instituto de Física: Valter Barrera, Alberto Espinosa, Raúl Quintana y Juan Antonio Mendoza. No paso por alto mis conversaciones con el Dr. Ernesto Belmont, colega del Instituto de Física, quien continuamente me hace comentarios y preguntas difíciles de responder en los temas de este libro, para que ambos mejoremos nuestros cursos. El apoyo del Dr. Octavio Miramontes Vidal fue fundamental para la publicación del libro; del Dr. Belmont, la Dra. Beatriz

Fuentes Madariaga (Facultad de Ciencias) y del Dr. Filiberto Rivera Torres (Facultad de Química), quienes revisaron el libro, con una enriquecedora retroalimentación; de la Unidad de Comunicación del Instituto de Física (Mtra. Fabiola Pérez Rubio y Mtra. Gabriela Morales Naranjo) por el diseño de la portada; del personal de la Biblioteca Juan de Oyarzábal del IFUNAM, por ayudarme a conseguir algunos libros útiles para este texto. Igualmente, a los coordinadores de los laboratorios de enseñanza de la Facultad de Ciencias y de la Facultad de Química. Por último, a mis amigos Físicos: Fernando, Rafael, Raúl y Ulises, con quienes sigo conversando (y discutiendo) a pesar de haber una distancia muy grande por la ubicación de nuestras respectivas instituciones.

Ciudad de México, Octubre de 2024.

## CAPÍTULO 1. LA EXPERIMENTACIÓN Y SU IMPORTANCIA EN LA CIENCIA

Definir la Física es una tarea muy compleja. De una manera general, podemos decir que es una disciplina que tiene como finalidad explicar ciertos aspectos fundamentales de la naturaleza. De acuerdo con Halliday et al. (1994), “su principal objetivo es encontrar el número limitado de leyes que gobiernan los fenómenos naturales y usarlos para desarrollar teorías con las cuales se puedan predecir experimentos futuros.” Según Lea y Burke (1999), la Física “cuando menos es tres cosas: un conjunto de ideas que describen al Universo en diversos niveles de detalle, un conjunto de métodos para usarlas y comprender al mundo que nos rodea, y un proceso dinámico y evolutivo para probar, ampliar y refinar ideas y métodos;” esto es, “un método que ha evolucionado para concebir al mundo natural en forma correcta.”

Dado que la Física es una ciencia que trata de explicar la naturaleza, es indispensable diseñar procedimientos con los cuales podamos hacerle preguntas, con cuya respuesta encontremos las citadas leyes o al menos modelos con los que se entienda un grupo de fenómenos, en cualquier disciplina científica. Es por ello que se creó el método científico, íntimamente ligado con la *experimentación*.

Una representación de la naturaleza que sea “confiable, coherente y no arbitraria,” lograda por la colectividad de los científicos a lo largo del tiempo, se alcanza mediante el *método científico* (Sierra Porta, 2011). Su aplicación requiere de varias etapas: el establecimiento del problema por estudiar, definiendo claramente el sistema o fenómeno que pretende examinarse y los factores o variables que pueden influir sobre él; la realización de observaciones (que pueden ser cualitativas o cuantitativas, es decir, a las que se asocia un número); la formulación de *hipótesis* (esto es, una posible explicación de aquello que se está observando); la ejecución de *experimentos*, con

los cuales será posible respaldar, modificar o desechar la hipótesis (Zumdahl y DeCoste,2012).

Los pasos pueden repetirse hasta obtener una hipótesis consistente con los resultados de los experimentos. Además, teniendo un grupo de hipótesis verificadas es posible construir un modelo o teoría, con los que se explica una parte de la naturaleza (Zumdahl y DeCoste,2012).

Los modelos, con el transcurso del tiempo, pueden mejorarse o hasta desecharse cuando se tengan nuevos experimentos que no concuerdan con ellos.

Cuando se realizan muchos experimentos para estudiar un fenómeno y se colecta una cierta cantidad de datos, es posible establecer relaciones entre las variables. A dichas relaciones se les conoce como *leyes*. También es posible estudiar con mayor profundidad dichas leyes y obtener relaciones con variables más “fundamentales.” Un caso es el de la Ley de Ohm, que se cumple para ciertos materiales, relacionando resistencia, intensidad de corriente y diferencia de potencial; pero a una escala microscópica puede hallarse también un equivalente con la resistividad, la densidad de corriente y el campo eléctrico (Halliday et al.,1994).

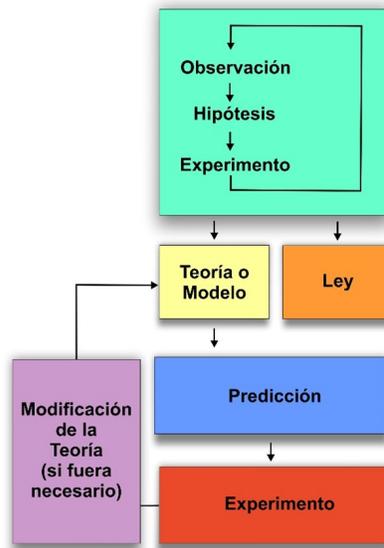


Figura 1: Etapas del método científico (adaptado de Zumdahl y DeCoste,2012).

Otros autores (Riveros y Rosas, 2006; Galindo Fentanes, 2013) han llegado a explicar que existen varios métodos científicos, aunque podrían considerarse solo variantes del explicado más arriba.

Se han escrito muchas definiciones para el término “experimentación.” Según Baird (1995), es el proceso integral de identificar una porción del mundo a nuestro alrededor, obtener información acerca de ella y la interpretación de dicha información. Según Cooke (1996), es un procedimiento en el cual se hacen observaciones para conseguir información, con la particularidad de que se pueden regular las condiciones (a través del manejo de variables que intervienen en el sistema o fenómeno estudiado). Por otro lado, Carpi y Egger (2008) afirman que “la experimentación... implica la manipulación de ciertos aspectos de un sistema real y la observación de los efectos de esta manipulación.”

El aspecto que estas definiciones tienen en común es que para experimentar es necesario identificar un sistema y las variables que pueden manejarse, conseguir información sobre otras variables influidas por la manipulación, e interpretar los resultados logrados.

Tal como lo explica Oda (1997), los trabajos de Galileo Galilei y de Francis Bacon en los siglos XVI y XVII sirvieron para sentar las bases del método científico por medio de la experimentación. No obstante, existe evidencia de que, desde el siglo X, Alhazen llevó a cabo experimentos para demostrar que la luz visible no la emite el ojo humano, sino que proviene de los objetos a nuestro alrededor (Carpi y Egger, 2008).

Contrariamente a una creencia encontrada con frecuencia entre quienes estudian una licenciatura en un área científica, la experimentación no existe para demostrar lo que la teoría predice. En la Física se pueden citar numerosos casos en los cuales hubo primero resultados experimentales que motivaron el avance de los modelos teóricos. La Física Cuántica y la Teoría de la Relatividad son ejemplos muy relevantes, pues a fines del siglo XIX se estudiaron fenómenos que eran inexplicables a la luz de los modelos con los cuales se contaba en esa época.

De hecho, el avance de la Física y, probablemente, de todas las disciplinas científicas en general, consiste en una interacción entre la teoría y la experimentación. Más aún, aunque un modelo teórico pueda considerarse “hermoso” por su innovación, consistencia y elegancia, si es incapaz de describir a la naturaleza, es prácticamente infructuoso. Mientras no haya resultados experimentales que lo respalden, su validez permanecerá cuestionable. Hay autores que han llegado a afirmar que el desarrollo de modelos que no pueden probarse con experimentos u observaciones no es propia-

mente “ciencia” (Merrin, 2017). Efectivamente, R.P. Feynman aseguró que “si no está de acuerdo con el experimento, está mal. Y esta simple aseveración es la clave de la ciencia. No hace ninguna diferencia cuán hermosa es tu suposición, no hace ninguna diferencia cuán inteligente eres, o quién hizo la suposición o cómo se llama; si no está de acuerdo con el experimento... está mal.” (Feynman, 1975, citado por Mininni, 2015).

Lo anterior también enfatiza la necesidad de que desaparezca la división artificial entre quienes hacen investigación en Física teórica y experimental. Si bien es indispensable que en este último grupo se conozcan los métodos utilizados para llevar al cabo experimentos de la manera más confiable posible, incluyendo su presentación y primera interpretación, en el primero también deben comprenderlos para poder descifrar los resultados que se alcanzaron con los experimentos. Así podrán determinar la compatibilidad de sus modelos con el fenómeno natural estudiado, pues además un resultado experimental ya publicado podría no ser correcto.

Por otro lado, es necesario distinguir entre las diversas formas de estudiar los fenómenos naturales, como son la experimentación y la observación. De acuerdo con lo que se dijo antes, en la primera se extraen los datos mediante el manejo de ciertas variables del sistema de interés, mientras que en la observación no es posible dicha manipulación. Esto no implica que la información conseguida con esta última no tenga validez científica.

Ejemplos de investigación científica mediante la observación se encuentran en la Física (como en la Astronomía y la Meteorología), en otras ciencias naturales (ciertas áreas de la Biología y la Medicina) y en las ciencias sociales y humanísticas (Psicología, Sociología y Pedagogía, entre muchas otras). Estas últimas hasta han sido clasificados como “cuasi-ciencia” por algunos autores (Cooke, 1996), a causa de lo limitados que pueden ser los resultados de los métodos de observación y a que no existen modelos teóricos asociados. La experimentación es incuestionablemente necesaria en ciencias como la Física, la Química, la Biología y, frecuentemente, la Medicina, en especial para los estudios clínicos y farmacéuticos (Zurita-Cruz, 2018). En muchas de estas disciplinas científicas no es posible desarrollar modelos teóricos que describan o predigan los resultados. Aunque no es estrictamente experimentación, un médico debe basar sus diagnósticos en más de una medición (por ejemplo, de la presión arterial), pues existe el riesgo de aplicar un tratamiento erróneo que ponga en riesgo la salud o hasta la vida del paciente. Riveros et al. (2009) describen varios ejemplos de la experimentación aplicada a distintas disciplinas científicas: Agronomía, ciencias ambientales, Fisiología y Física.

El uso de la experimentación es más complicado o imposible en otras ciencias, sobre todo aquellas relacionadas con aspectos sociales, aunque se han hecho estudios donde se moderan ciertas variables para conocer la respuesta de grupos humanos a dichos cambios, como en las ciencias de la Educación (Rich, 2011). De nueva cuenta, aquí no hay esquemas teóricos que pudieran explicar o predecir los resultados conseguidos.

Muy cercanas a la investigación científica se encuentran las ingenierías y el desarrollo de tecnología. Por ejemplo, una persona que se dedica a la ingeniería civil debe saber hacer experimentos con los materiales que utilizará en una obra, para determinar sus propiedades y evitar fallas que puedan incluso costar vidas o desastres. Igualmente, gracias a los avances tecnológicos, los experimentos en todas las áreas han ido mejorando con el tiempo. Independientemente de si los resultados usados para el estudio científico se obtienen mediante la experimentación o la observación, es necesario enfatizar que pueden estar sujetos a fallas o malas interpretaciones. Ya sea por funcionamiento incorrecto de los equipos o procedimientos equivocados, inexperiencia de quien hace los experimentos o aún por manipulación voluntaria, los datos no serán confiables. Siempre deberá tenerse esto en cuenta para la formulación y comprobación de las hipótesis.

El tercer factor citado antes (la alteración voluntaria de los resultados) está relacionada, sin duda, con aspectos éticos. Un científico está obligado a dar a conocer los resultados de sus experimentos tal como los obtuvo (desde luego, posterior a su análisis y tratamiento), de manera integral y (como se verá más adelante), con las posibles variaciones alrededor del resultado registrado (sus *incertidumbres*). Sería muy útil para el desarrollo científico si un investigador no solo publicara los resultados que “salieron bien,” sino también aquellos que no concuerdan con lo que se esperaba.

De igual manera, quien estudia en un laboratorio de enseñanza debe presentar en sus informes los resultados de sus experimentos, a pesar de que llegaran a ser diferentes de los valores “correctos” (que pudieran ser valores esperados, predichos por alguna teoría o aceptados por la comunidad científica). Asociado a esto, un profesor que basa la evaluación del trabajo de un estudiante en la cercanía de sus resultados experimentales con los valores “correctos” corre el riesgo de conducir a los alumnos a la manipulación indebida de sus datos. Sin duda, es mejor que el estudiante explique por qué su resultado se aleja del valor “correcto,” pues significa que comprendió bien el experimento que realizó.

Adicionalmente, los resultados que se obtienen de un experimento requieren de un análisis adecuado para poder interpretarlos de la mejor ma-

nera y así sostener o descartar las hipótesis. Por ello es fundamental enseñar a quienes estudian licenciaturas en áreas identificadas plenamente como científicas, los procedimientos que les permitan extraer correctamente la información de un experimento u observación. Es muy importante darles las herramientas necesarias para poder manejar sus datos, el uso de la nomenclatura relacionada con la *Metrología* (o ciencia de la medición), la disciplina dentro de un laboratorio (por ejemplo, el uso de una bitácora), la aplicación correcta de los sistemas de unidades de medición (conceptos por definir también más adelante), la Estadística, procedimientos para saber si el funcionamiento de un equipo es apropiado, la evaluación de las incertidumbres conforme a métodos actualizados, el tratamiento matemático de sus datos y, finalmente, su presentación. Este último aspecto no debe ser soslayado, puesto que al ponerse énfasis en la escritura de un informe de laboratorio escolar se estarán sentando las bases para la futura redacción de una tesis (cuando sea exigida), de informes técnicos o de artículos científicos, que son el método usual de comunicación de quienes se dedican a la investigación científica.

También se debe enseñar a las personas en los laboratorios universitarios a diseñar sus experimentos, cuando así se les pida en los cursos, puesto que muchos de estos ya tienen las “prácticas” establecidas. Esto incluye la identificación del sistema o fenómeno de estudio, las búsquedas bibliográficas, las variables que influyen en él, la selección adecuada de los equipos y procedimientos para la medición de las variables, así como el análisis que deban hacer a sus datos.

Por último, desde un punto de vista pedagógico, la experiencia ha demostrado que la experimentación en un laboratorio de Física a nivel introductorio permite a quienes estudian carreras de todas las áreas científicas, adquirir el conocimiento relacionado con la aplicación del método científico. La razón de esto es que es posible diseñar y llevar a efecto experimentos que no impliquen instrumentación muy compleja o costosa, con procesos que puedan explicarse de manera directa y cuyo análisis de resultados contenga todos los conceptos básicos para la aplicación del método experimental. Sería deseable que este conocimiento se extendiera también a campos no considerados como científicos. Una lectura muy recomendable es el libro escrito por Galindo Fentanes (2013), que contiene valiosas reflexiones y consejos para llevar a efecto el trabajo experimental por parte de estudiantes avanzados que iniciarán sus tesis de licenciatura, maestría o doctorado. Sigue un camino diferente al presente texto, que más bien se enfoca en aspectos cuantitativos para la experimentación.

## CAPÍTULO 2. MEDICIONES Y CONCEPTOS BÁSICOS

Como se explicó en el Capítulo 1, las ciencias, en general, y la Física, en particular, necesitan de la experimentación. Para esto es indispensable cuantificar (es decir, asociar un número) a aquello que se está observando, una vez que se le ha identificado como uno de los factores que son parte del sistema o fenómeno por estudiar.

En el pasado, esta exigencia había surgido ya en actividades tan antiguas como la agricultura o el comercio. El conocimiento de las estaciones a lo largo del año para poder sembrar y cultivar implicaba hacer observaciones meteorológicas y astronómicas; el intercambio justo de mercancías se basaba en determinaciones rudimentarias de la longitud, la masa o el volumen de los productos. Podían hacerse comparaciones con partes del cuerpo (pies, codos, cuartas, dedos) o con cierta cantidad de semillas o piedras.

Al crecer las poblaciones y las interacciones culturales, se volvió evidente que los métodos para cuantificar las longitudes, masas o tiempos, deberían ser consistentes entre las diferentes regiones geográficas. Esto dio origen a lo que hoy conocemos como los *sistemas de unidades*, cuyo desarrollo histórico merece un estudio aparte (MetAs, 2006; Rosas, 2019). Además, se hizo imprescindible el manejo de un lenguaje común entre todos aquellos que deben cuantificar las propiedades del sistema o fenómeno, tanto para la actividad científica, como para la medicina, la ingeniería y el comercio, entre otras.

Es por esto último que, en 1984, la Organización Internacional para la Normalización (ISO) publicó la primera edición del Vocabulario Internacional de Metrología, usualmente conocido como VIM (ISO, 1984). Esto fue en conjunto con otras organizaciones, como la Oficina Internacional de Pesas y Medidas (BIPM), la Organización Internacional de Metrología Legal (OIML) y la Comisión Electrotécnica Internacional (IEC). Posteriormente, se han publicado otras dos actualizaciones del VIM en 1993 y 2007 y una

versión con correcciones menores en 2008 (JCGM, 2012). Adicionalmente, en México se publicó la norma NMX-Z-055-IMNC-2009 (IMNC, 2009), que establece el vocabulario en el español de México.

Por tanto, en este capítulo se pretende mostrar una breve descripción de las definiciones más importantes para un curso introductorio de Física Experimental, incluyendo las relacionadas con el Sistema Internacional de Unidades.

## 2.1. MAGNITUDES Y MEDICIONES

En esta sección se explican los conceptos esenciales relacionados con el proceso de medición. Las definiciones (resaltadas o entrecomilladas) se extrajeron del VIM-2012 (JCGM, 2012) y de la NMX-Z-055-IMNC-2009 (IMNC, 2009), aunque debe tenerse en cuenta que pueden modificarse en caso de publicarse actualizaciones de este documento. Diversos autores han presentado sus propias definiciones de la acción de medir, o medición. Baird (1995) lo establece como “el proceso de cuantificar la experiencia del mundo exterior.” Oda (1997) escribe que “se le llama medir a una serie de actividades y procedimientos que se llevan a cabo con el objeto de cuantificar alguna propiedad física o de evaluar alguna variable de un fenómeno.” El aspecto común de estas definiciones es que se trata de “cuantificar,” es decir, dar un valor numérico a lo que se está observando. Dicho valor numérico proviene de la comparación con una propiedad física semejante a lo que queremos cuantificar y que pueda reproducirse en otros lugares y épocas. A la propiedad física que deseamos cuantificar le llamamos *magnitud*. El VIM la define así:

**Magnitud (mensurable):** propiedad de un fenómeno, cuerpo o sustancia donde la propiedad tiene una magnitud que puede expresarse como un número y una referencia

Podemos hablar de una magnitud de manera general (la masa) o de manera particular (la masa del electrón,  $e$ ). Se explicará más adelante qué significa el término “referencia.” Además, el *valor de una magnitud* es el “número y referencia que juntos expresan la expresión cuantitativa de una magnitud.” Una magnitud puede tener un *valor verdadero* (“consistente con la definición de la magnitud”) o un *valor convencional* (“atribuido por acuerdo a una magnitud con un propósito dado”).

Para efectuar la comparación, es necesario que se haga con otra magnitud de la misma *clase*, definida como “aspecto común a magnitudes comparables mutuamente.”

De esta forma, una medición se especifica así:

**Medición:** Proceso para obtener experimentalmente uno o más valores de una magnitud que se pueden atribuir razonablemente a dicha magnitud.

Este concepto se aplica no sólo a la comparación de magnitudes, sino al conteo de objetos, bacterias o personas, por ejemplo. En la norma mexicana NMX-Z-055-IMNC-2009 se utilizan indistintamente los términos *medida* y *medición* como sinónimos. En el presente texto utilizaremos únicamente el segundo, puesto que en otras áreas *medida* puede significar algo distinto, como en las ciencias sociales. También debe notarse que las magnitudes no deben ser solamente escalares, sino también vectores o tensores, cuyas componentes serían entonces magnitudes escalares.

Dado que puede haber muchas magnitudes que no sean de la misma clase, se usa un *sistema de magnitudes*, que es el “conjunto de magnitudes junto con un conjunto de ecuaciones no contradictorias que relacionan a dichas magnitudes.” Para construir uno de estos sistemas, hay que identificar las magnitudes que sean independientes unas de otras, a través de las *magnitudes básicas*:

**Magnitud básica:** Magnitud dentro de un subconjunto seleccionado por convención en un sistema de magnitudes dado, en el que una magnitud no puede expresarse en términos de las otras.

Es importante resaltar el hecho de que este subconjunto se elige por convención, actualmente por la comunidad científica, industrial y comercial, a través de organizaciones como el BIPM, el CGPM y la OIML, por lo cual ya se ha decidido cuáles son las magnitudes básicas:

**Sistema internacional de magnitudes:** Sistema de magnitudes basado en las siete magnitudes básicas: longitud, masa, tiempo, corriente eléctrica, temperatura termodinámica, magnitud de sustancia e intensidad luminosa.

Todas estas magnitudes, además, se pueden representar con símbolos matemáticos, los cuales aparecen en la Tabla 2.1. Con esto pueden aparecer

las *magnitudes derivadas*, que son “Magnitudes, en un sistema de magnitudes, definidas en términos de las magnitudes básicas.” Estas se relacionan con las básicas a través de la *dimensión*, que es la “expresión de la dependencia de una magnitud con las magnitudes básicas de un sistema de magnitudes como un producto de potencias de factores correspondientes a las magnitudes básicas, omitiendo cualquier factor numérico.” Un ejemplo, si la fuerza se denota con  $F$ , es  $\dim F = LMT^{-2}$ . En general, para una magnitud  $Q$  se puede escribir  $\dim Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta Q^\epsilon N^\zeta J^\eta$ , donde los exponentes pueden tomar cualquier valor positivo, negativo o cero. Cuando todos los exponentes son iguales a cero, se habla de una *magnitud adimensional*.

Tabla 2.1. Símbolos que representan las dimensiones de las magnitudes básicas

Magnitud	Símbolo
Longitud	L
Masa	M
Tiempo	T
Corriente eléctrica	I
Temperatura termodinámica	$\Theta$
Cantidad de materia	N
Intensidad luminosa	J

Existe también otro conjunto de magnitudes que se definen a partir de las básicas, conocidas como derivadas:

**Magnitud derivada:** Magnitud, en un sistema de magnitudes, definida en términos de las magnitudes básicas.

Se podrían mencionar muchas de estas magnitudes, como fuerza, potencia, presión, resistencia eléctrica, temperatura Celsius, flujo luminoso, etc.

Por otro lado, cuando se desea medir una magnitud, a esta se le denomina *mensurando* (“magnitud sujeta a medición”), el cual debe estar plenamente identificado. Durante los cursos de laboratorio es frecuente que quienes se inscriben en ellos, en sus exposiciones o en los informes escritos, usen expresiones como “vamos a medir la caja.” En este caso, cabría preguntarse: ¿se va a medir el volumen, la densidad o la masa de la caja? En esa expresión se está confundiendo el mensurando con el objeto o sistema sujeto a medición. Así pues, una correcta identificación del mensurando podría establecer “vamos a medir el volumen de la caja.” Una vez que se ha hecho la medición, se obtiene el *resultado de medición*, que es el “conjunto de valores de magnitudes atribuidos a un mensurando junto con cualquier otra información relevante disponible.”

Los resultados de la medición pueden ser *discretos* (es decir, sólo pueden tener ciertos valores definidos, sin valores intermedios, dentro del intervalo en que se midió, como el resultado de lanzar un dado o el número de habitantes en una localidad) o *continuos* (pueden tomar cualquier valor en dicho intervalo, como la diferencia de potencial que provee una fuente de poder variable). También debemos tomar en cuenta que hay situaciones en las cuales obtenemos un resultado de medición sin necesidad de hacerle nada más (por ejemplo, la estatura de una persona). Sin embargo, también puede ocurrir que sea necesario realizar alguna operación matemática con dicho resultado, o bien combinarlo con otros para obtener el resultado que nos interesa. A las primeras se les llama *mediciones directas* y a las segundas, *indirectas*.

## 2.2. ERRORES DE MEDICIÓN

Una vez que se ha llevado a cabo la medición y se obtuvo el resultado (de medición), cabe preguntarse: ¿qué tan bueno es dicho resultado? Para esto es imprescindible tener más información al respecto. Podría disponerse, por ejemplo, de valores verdaderos o convencionales de la magnitud que acabamos de medir, por lo que convendría compararlos. Esto puede hacerse a través del error de medición:

**Error (de medición):** Valor medido de una magnitud menos un valor de referencia de la magnitud.

Como hemos dicho, el valor de referencia puede ser el verdadero o el

convencional, aunque también puede obtenerse de modelos teóricos o mediciones hechas por otras personas. Es necesario decir que el valor verdadero de una magnitud es imposible de conocer, por lo que se recurre mejor a un valor convencional. A partir de la definición de error, podemos entonces pensar en, al menos, dos maneras de expresarlo: a través del *error absoluto* y el *relativo*. Si nuestro resultado de medición lo denotamos con  $x_0$  y el valor de referencia como  $x_{ref}$ , el error absoluto  $\varepsilon_A$  está definido por:

$$\varepsilon_A = x_0 - x_{ref} \quad (2.1)$$

Por otro lado, el error relativo  $\varepsilon_R$  será:

$$\varepsilon_R = \frac{x_0 - x_{ref}}{x_{ref}} \quad (2.2)$$

Debemos notar que el error puede ser positivo o negativo. Cuando es positivo, significa que nuestro resultado de medición es mayor que el valor de referencia, mientras que el error negativo implica que obtuvimos un valor menor que el de referencia. Además, el error relativo es más fácil de apreciar cuando usamos el *error porcentual*, que no es sino el relativo multiplicado por 100 y escrito como porcentaje. Aunque el tema de las unidades se explicará en el siguiente capítulo, notemos que el error relativo es adimensional (no tiene unidades), mientras que el error absoluto tiene las mismas unidades que el resultado de medición y el valor de referencia.

---

### Ejemplo 2.1

En un experimento de laboratorio de licenciatura para medir la aceleración de la gravedad en la Ciudad de México (latitud  $19^\circ 25' 42.5''$ , altitud 2 240 m), un equipo de estudiantes obtiene un valor de  $9.83 \text{ m/s}^2$ . De acuerdo con la OIML (1992), al aplicar la fórmula para determinar la aceleración de la gravedad en función de la latitud y la altitud del sitio, se calcula un valor de  $9.78 \text{ m/s}^2$ . Este se toma como valor de referencia. El error absoluto es  $\varepsilon_A = 9.83 \text{ m/s}^2 - 9.78 \text{ m/s}^2 = 0.05 \text{ m/s}^2$ , mientras que el error relativo es:

$$\varepsilon_R = \frac{9.83 \text{ m/s}^2 - 9.78 \text{ m/s}^2}{9.78 \text{ m/s}^2} = 0.0052. \text{ El error porcentual sería, entonces, } 0.52 \text{ \%}.$$

Nótese que los resultados aquí mostrados no incluyen la incertidumbre experimental, tema que se explicará más adelante.

---

Se debe recalcar que el valor de referencia no es necesariamente teórico, sino que puede provenir de otros experimentos, ya sea hechos por el mismo experimentador o extraídos de alguna publicación (tablas, libros, artículos). En reiteradas ocasiones quienes llevan los cursos de laboratorio hablan de los valores de referencia como “teóricos,” por lo que es necesario que identifiquen adecuadamente sus fuentes. En cuanto a los tipos de errores de medición, podemos hablar de los que aparecen cada vez que hacemos una medición con determinado instrumento y procedimiento, o aquellos que ocurren de una manera más bien azarosa. Se les llama *errores sistemáticos* y *aleatorios*, respectivamente, y se definen de esta manera:

**Error sistemático:** Componente del error de medición que permanece constante en mediciones repetidas o que varía de una manera predecible.

**Error aleatorio:** Componente del error de medición que varía de una manera impredecible en mediciones repetidas.

Los errores sistemáticos se originan frecuentemente en dificultades con la *calibración* de los instrumentos utilizados. Para calibrar un instrumento de medición es necesario compararlo con un patrón o con un instrumento similar que esté referido a patrones internacionales. Si el instrumento no está bien calibrado, el resultado de medición no coincidiría con el que da un instrumento que se compara con las referencias aceptadas internacionalmente. La figura 2.1 muestra un ejemplo de reglas que no ofrecen los mismos resultados al medir una longitud: la regla de madera (número 3) tiene un error de calibración, por lo cual los datos obtenidos con ella deberían ser corregidos.

Otra posible fuente de error sistemático durante un experimento es la selección de un proceso incorrecto para llevar a cabo las mediciones. Dichos errores podrían corregirse *a posteriori*, una vez que se ha identificado el problema con el procedimiento. No obstante, dado que no ocurren en todos los experimentos, podrían también considerarse como errores aleatorios. En cuanto a los errores aleatorios, las fuentes pueden ser muy variadas. Por ejemplo, las condiciones ambientales en las que se realiza la medición.

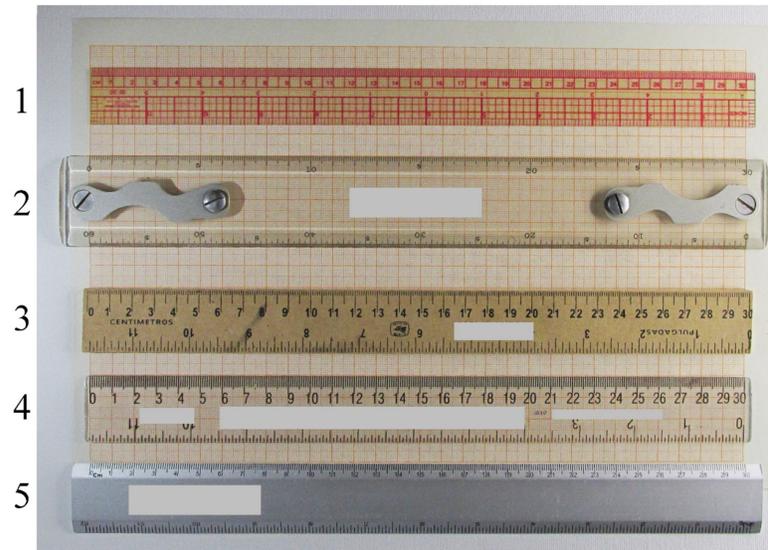


Figura 2.1: Mediciones de una longitud con reglas diferentes. Con la regla de madera (número 3) no se obtiene el mismo resultado que con las otras reglas, lo cual refleja un error sistemático de calibración.

Medir una longitud con una regla de aluminio probablemente no dará el mismo resultado en lo alto de una montaña que en una playa (por la dilatación lineal de la regla a diferentes temperaturas), o bien el peso de una persona no es igual en la Ciudad de México que en Cancún. Las personas que hacen los experimentos pueden influir para que ocurran errores aleatorios, pues hasta su estado de salud o su inexperiencia son factores que afectan al proceso de medición. Las distracciones durante la realización de los experimentos también dan lugar a errores aleatorios. Un error aleatorio frecuente, debido a la inexperiencia, es el *error de paralaje*. La Figura 3 ilustra este problema, donde quien hace el experimento no observa la escala del instrumento de medición desde un ángulo adecuado y obtiene un valor incorrecto. Este error también ocurre a menudo cuando se usan instrumentos con agujas para indicar el resultado de medición, como los multímetros analógicos. Muchos de estos aparatos, actualmente sustituidos en una gran proporción por instrumentos digitales, tienen un espejo en la carátula para alinear la aguja y su imagen en el espejo, lo cual evita el error de paralaje, como se aprecia en la Figura 4. Garduño (2006) también señala como error de paralaje el que ocurre al tomar una fotografía de un móvil (experimento

común en laboratorios de Mecánica Clásica), donde sólo con la imagen correspondiente a la dirección perpendicular a la cámara no surge este error.

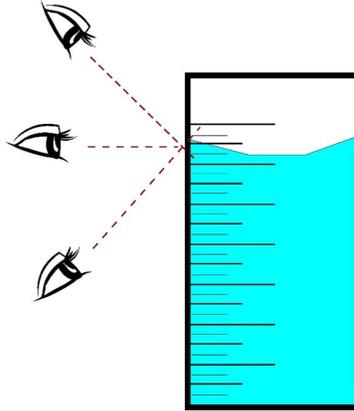


Figura 2.2: Error de paralaje cometido por observar la escala del instrumento desde ángulos inadecuados. Al observar desde arriba, se subestima el resultado, mientras que, al observar por abajo, se está sobreestimando. La manera correcta consiste en hacer la medición perpendicularmente a la escala.

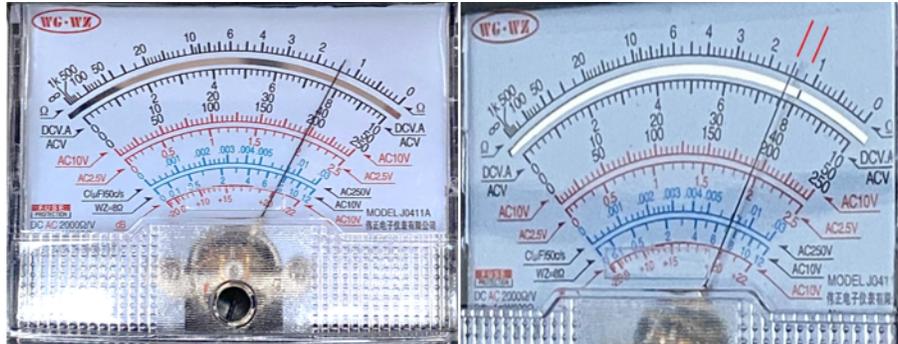


Figura 2.3: El error de paralaje durante una medición con un multímetro analógico se evita al alinear la aguja con su imagen en el espejo de la carátula (lado izquierdo), resultando en 7.8 V, mientras que hay un error de -0.2 V en la fotografía del lado derecho, debido a que no se alineó la aguja con su imagen en el espejo. Las líneas rojas señalan ambas posiciones.

Es posible identificar la aparición de errores aleatorios al repetir la medición bajo las mismas condiciones, pues la variable que está afectando al resultado de medición podría cambiar. Por otra parte, un error sistemático

podría detectarse al cambiar las condiciones del experimento, como si fuera otra persona quien lo haga, un instrumento de medición distinto, o un procedimiento diferente para hacer la medición. Es pertinente en este punto referirse al concepto de exactitud (*accuracy*, en inglés). El VIM (2012) la define como:

**Exactitud de medición:** Cercanía en el acuerdo entre el resultado del valor medido de una magnitud y el valor verdadero de un mensurando.

Tal como lo menciona el VIM (2012), la exactitud no es un concepto cuantitativo, es decir, no se le asocia un número. Solamente puede decirse que una medición es más exacta que otra si se aproxima más al valor verdadero del mensurando. Recordemos que dicho valor verdadero no puede conocerse con certeza, por lo que será necesario utilizar un valor convencionalmente verdadero o alguno de referencia. La exactitud, de acuerdo con su definición, está asociada con el error de medición. Dicho de otra manera, si el error de medición es pequeño, la medición puede considerarse como exacta. En muchas ocasiones es necesario realizar más de una medición de la misma magnitud. Por tanto, podemos cuestionarnos qué tan cercanos entre sí son los resultados que obtengamos. De aquí, que se defina el posible acuerdo entre todos los resultados de medición como:

**Precisión de medición:** Cercanía en el acuerdo entre indicaciones o valores medidos de una magnitud obtenidos por mediciones repetidas en el mismo objeto o similares, bajo las mismas condiciones.

Es decir, si los resultados de mediciones repetitivas se aproximan entre ellos, se dice que la medición es *precisa*. Por otro lado, las condiciones que se mencionan en esta definición son:

- Las mediciones sean realizadas por la misma persona.
- Se usen los mismos instrumentos de medición, en el mismo sitio y ambiente.
- El procedimiento para llevar a cabo las mediciones sea el mismo en todas ellas.
- El intervalo de tiempo para hacer las mediciones sea corto.

A estas condiciones se les conoce como de *repetibilidad*, la cual se define así:

**Repetibilidad (de resultados de mediciones):** Precisión de medición bajo un conjunto de condiciones de medición repetibles.

No obstante, si alguna de las condiciones no se cumple, hablamos entonces de *reproducibilidad*:

**Reproducibilidad:** Precisión de medición bajo un conjunto de condiciones de medición reproducibles.

Por ejemplo, cuando se hace una medición del mismo mensurando en otro laboratorio, se habla de reproducibilidad de la medición. Lo mismo debe decirse si el experimento se repite en el mismo laboratorio, pero después de cierto tiempo. Una práctica común en los experimentos realizados en laboratorios de enseñanza es que las mediciones las lleven a cabo diferentes integrantes del mismo equipo de trabajo, sobre todo cuando deben hacerse muchas veces sobre el mismo mensurando. Dado que no se cumplió la primera condición de repetibilidad, los resultados obtenidos por el equipo serán *reproducibles*.

Un punto fundamental es la distinción entre *exactitud* y *precisión* de un resultado de medición. Para la primera, se está relacionando dicho resultado con otro valor de referencia del mensurando, por lo cual está ligado con el error de medición; en la segunda, se toma en cuenta un intervalo alrededor de nuestro resultado de medición, el cual puede determinarse a través de parámetros estadísticos, como la desviación estándar, la varianza, u otros. De ninguna manera deben confundirse ambos conceptos.

También es oportuno destacar que algunos autores de textos para la enseñanza de métodos de análisis de datos para la Física experimental definen conceptos que no están reconocidos por el VIM (2012). Un ejemplo es el término *discrepancia*, definido por (Taylor, 2022) como la “diferencia entre dos valores medidos de la misma magnitud,” o Merrin (2017), como “qué tan apartados están los resultados de dos mediciones separadas de la misma cosa.” Si bien podría usarse coloquialmente, su empleo no se recomienda, puesto que no está aceptado oficialmente.

## CAPITULO 3. UNIDADES Y EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Ya dijimos que existe la necesidad de manejar un lenguaje común y formas de medir que sean comparables entre sí, para las diferentes regiones y culturas, debido a los intercambios comerciales, las prácticas agrícolas, la construcción de viviendas, los avances científicos y tecnológicos, entre muchas otras actividades humanas.

Por tanto, en 1875, 17 naciones crearon la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM), con sede en París. Sus actividades están reguladas por el Comité Internacional de Pesos y Medidas (CIPM), el cual, a su vez, depende de la Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM). Esta contaba en 2019 con 59 estados miembros y 42 estados asociados (OIPM, 2019). En la 11ª reunión general de la CGPM, en 1960, se acordó definir el Sistema Internacional de Unidades, tema central de este capítulo. Las definiciones relevantes se extrajeron del VIM-2008 (CGPM, 2008) y el documento oficial del SI (BIPM, 2019).

### 3.1. EL SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES (SI)

Como se apuntó previamente, es necesario incluir una referencia para expresar el valor de una magnitud. Normalmente, a esta referencia la conocemos como *unidad de medición*, o simplemente *unidad*:

**Unidad (de medición):** Magnitud escalar real, definida y adoptada por convención, con la que cualquier otra magnitud de la misma clase puede compararse, para expresar el cociente de las dos magnitudes como un número.

Las unidades se identifican por su nombre y se les asigna un símbolo,

por medio de acuerdos internacionales. Es de esperar, además, que a cada una de las magnitudes básicas se les asocie una unidad llamada también básica. De esta manera, al igual que existen las magnitudes básicas, se define un *sistema de unidades* como el “conjunto de unidades básicas y unidades derivadas, junto con sus múltiplos y submúltiplos, definidas de acuerdo con reglas dadas, para un sistema de magnitudes dado.”

Por convención internacional, se eligieron las siete magnitudes básicas de la Tabla 2.1, para lo cual también se acordó definir las unidades básicas dentro del Sistema Internacional de Unidades (o SI, por sus siglas en francés):

**Sistema Internacional de unidades:** Sistema de unidades, basado en el sistema internacional de magnitudes, sus nombres y símbolos, incluyendo una serie de prefijos y sus nombres, junto con reglas para su uso, adoptado por la Conferencia General de Pesos y Medidas (CGPM).

El SI es un sistema “consistente, para todos los aspectos de la vida, incluyendo comercio internacional, manufactura, seguridad, salud, protección del ambiente, y en la ciencia básica que respalda a todos ellos” (OIPM, 2019). Las siete unidades básicas han sufrido modificaciones en sus definiciones desde su aceptación, en el año 1960, por parte de la CGPM. El cambio más reciente ocurrió en 2018 (OIPM, 2019), basándose ahora en siete constantes físicas, de manera que ya no deba recurrirse a ciertos patrones, como originalmente se tenía (por ejemplo, el metro y el kilogramo), para poder reproducir las unidades básicas.

Las constantes físicas elegidas para fijar las unidades del SI son (OIPM, 2019):

- La frecuencia de la transición hiperfina del estado base no perturbado del átomo  $^{133}\text{Cs}$   $\Delta\nu_{\text{Cs}}$  es 9 192 631 770 Hz,
- La velocidad de la luz en el vacío  $c$  es 299 792 458 m/s,
- La constante de Planck  $h$  es  $6.626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$  J s,
- La carga elemental  $e$  es  $1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$  C,
- La constante de Boltzmann  $k$  es  $1.380\ 649 \times 10^{-23}$  J/K,
- La constante de Avogadro  $N_A$  es  $6.022\ 140\ 76 \times 10^{23}$  mol $^{-1}$ ,

- La eficacia luminosa de radiación monocromática con frecuencia  $540 \times 10^{12}$  Hz,  $K_{cd}$ , es 683 lm/W.

En estas constantes (de origen tanto fundamental como técnico), se emplean las unidades hertz, joule, coulomb, lumen, y watt, con símbolos Hz, J, C, lm, y W, respectivamente, que se relacionan con las unidades básicas segundo, metro, kilogramo, ampere, kelvin, mole y candela, cuyos símbolos son s, m, kg, A, K, mol y cd, respectivamente, según las definiciones  $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$ ,  $\text{J} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-2}$ ,  $\text{C} = \text{A s}$ ,  $\text{lm} = \text{cd m}^2 \text{m}^{-2} = \text{cd sr}$  y  $\text{W} = \text{kg m}^2 \text{s}^{-3}$  ([?]). Consecuentemente, las siete unidades básicas del SI se presentan en la Tabla 3.1.

Adicionalmente, se usan unidades que son productos de potencias de las unidades básicas, las cuales se conocen como unidades derivadas. Si el factor numérico de este producto es igual a 1, se dice que las unidades derivadas son coherentes. Algunas de ellas tienen nombres especiales, debido a que son muy utilizadas tanto en la ciencia como en la tecnología. La Tabla 3.2 presenta las 22 unidades derivadas con nombres y símbolos especiales, aprobadas dentro del SI.

Los nombres de las unidades aquí listadas corresponden a los que establece la Norma Oficial Mexicana NOM-008-SE-2001 *Sistema General de Unidades de Medida* (Modificación publicada en el Diario Oficial de la Federación del 29 de diciembre de 2023). En otros países de habla hispana, las normas oficiales pueden fijar otros nombres (por ejemplo, *amperio* en vez de *ampere*)), a pesar de que el SI pretende ser generalizado en todo el mundo.

Existen además combinaciones de las unidades básicas que dan pie a las unidades derivadas, asociadas a magnitudes también derivadas, que tienen diversas aplicaciones. La Tabla 3.3 presenta algunos ejemplos de este tipo de unidades derivadas.

Por otro lado, es muy común que los resultados de las mediciones sean muy grandes o muy pequeños en comparación con las definiciones de las unidades básicas (por ejemplo, una intensidad de corriente eléctrica que pueda ser del orden de milésimos de ampere). Con el fin de facilitar la escritura de estas magnitudes, se utilizan prefijos para los símbolos de las unidades. La tabla 3.4 muestra los prefijos utilizados en el SI para múltiplos y submúltiplos decimales de las unidades del SI (no se usan solamente con las básicas). Permiten la sustitución de valores numéricos muy grandes o muy pequeños. Un prefijo se agrega directamente al nombre de la unidad, y su símbolo se adjunta directamente al símbolo de una unidad. Por ejemplo, un kilómetro, cuyo símbolo es 1 km, es igual a mil metros, con símbolo  $1\,000 \text{ m}$  ó  $10^3 \text{ m}$ .

Tabla 3.1. Símbolos y definiciones de las unidades básicas del Sistema Internacional de Unidades (SI).

Nombre	Magnitud básica	Símbolo	Definición
<b>segundo</b>	Tiempo	s	Se define tomando la frecuencia de la transición hiperfina del estado base no perturbado del átomo Cs 133 $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ , para que sea 9 192 631 770 cuando se expresa en las unidades Hz, que son $\text{s}^{-1}$ .
<b>metro</b>	Longitud	m	Se define al tomar el valor fijo de la velocidad de la luz en el vacío $c$ como 299 792 458 cuando se expresa en las unidades $\text{m s}^{-1}$ , donde el segundo se define en términos de la frecuencia del cesio $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>kilogramo</b>	Masa	kg	Se define tomando el valor fijo de la constante de Planck $h$ como $6.626\,070\,15 \times 10^{-34}$ cuando se expresa en las unidades J s, que es igual a $\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}$ , donde el metro y el segundo se definen en términos de $c$ y $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>ampere</b>	Corriente eléctrica	A	Se define al tomar el valor fijo de la carga elemental $e$ como $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$ cuando se expresa en las unidades C, que son A s, en donde el segundo se define en términos de $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>kelvin</b>	Temperatura termodinámica	K	Se define al considerar el valor fijo de la constante de Boltzmann $k$ como $1.380\,649 \times 10^{-23}$ en las unidades $\text{J K}^{-1}$ , que es igual a $\text{kg m}^2 \text{s}^{-2} \text{K}^{-1}$ , donde el kilogramo, el metro y el segundo se definen en términos de $h$ , $c$ y $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .
<b>mole</b>	Cantidad de sustancia	mol	Un mol contiene exactamente $6.022\,140\,76 \times 10^{23}$ entidades elementales. Este número es el valor numérico fijo de la constante de Avogadro, que cuando se expresa en las unidades $\text{mol}^{-1}$ es el número de Avogadro.
<b>candela</b>	Intensidad luminosa	Cd	Se define al tomar el valor fijo de la eficacia luminosa de radiación monocromática con frecuencia $540 \times 10^{12}$ Hz, $K_{\text{cd}}$ , de 683 cuando se expresa en las unidades $\text{lm W}^{-1}$ , que es igual a $\text{cd sr W}^{-1}$ , o $\text{cd sr kg}^{-1} \text{m}^2 \text{s}^3$ , donde el kilogramo, el metro y el segundo se definen en términos de $h$ , $c$ y $\Delta\nu_{\text{Cs}}$ .

Tabla 3.2. Unidades derivadas del SI con nombres y símbolos especiales.

MAGNITUD DERIVADA	UNIDAD DERIVADA DEL SI			
	Nombre especial	Símbolo especial	Expresión en términos de otras unidades del SI	Expresión en términos de las unidades básicas del SI
Angulo plano	Radián	Rad		$m \cdot m^{-1} = 1$
Angulo sólido	Esterradián	Sr		$m^2 \cdot m^{-2} = 1$
Frecuencia	Hertz	Hz		$s^{-1}$
Fuerza	Newton	N		$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
Presión, tensión	Pascal	Pa	$N/m^2$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
Energía, trabajo, cantidad de calor	Joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
Potencia, flujo radiante	Watt	W	$J/s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
Carga eléctrica	Coulomb	C		$s \cdot A$
Potencial eléctrico, diferencia de potencial	Volt	V	$W/A$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
Capacitancia	Farad	F	$C/V$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
Resistencia eléctrica	Ohm	$\Omega$	$V/A$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Conductancia eléctrica	Siemens	S	$A/V$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
Flujo magnético	Weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Densidad de flujo magnético	Tesla	T	$Wb/m^2$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
Inductancia	Henry	H	$Wb/A$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
Temperatura Celsius	grado Celsius	$^{\circ}C$		$K - 273.15$
Flujo luminoso	Lumen	lm	$cd \cdot sr$	$cd \cdot sr$
Iluminancia	Lux	lx	$lm/m^2$	$m^{-2} \cdot cd \cdot sr$
Actividad de un radionúclido	Bécquerel	Bq	$s^{-1}$	
Dosis absorbida, kerma	Gray	Gy	$J/kg$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Equivalente de dosis	Sievert	Sv	$J/kg$	$m^2 \cdot s^{-2}$
Actividad catalítica	Katal	kat		$mol \cdot s^{-1}$

Tabla 3.3. Ejemplos de unidades derivadas expresadas en términos de las unidades básicas del SI.

MAGNITUD DERIVADA	UNIDAD DERIVADA DEL SI	
	Nombre	Símbolo
Área	Metro cuadrado	m <sup>2</sup>
Volumen	Metro cúbico	m <sup>3</sup>
Rapidez, velocidad	Metro sobre segundo	m/s
Aceleración	Metro sobre segundo al cuadrado	m/s <sup>2</sup>
Número de onda	Inverso de metro	1/m
Densidad de masa (densidad)	Kilogramo sobre metro cúbico	kg/m <sup>3</sup>
Volumen específico	Metro cúbico sobre kilogramo	m <sup>3</sup> /kg
Densidad de corriente	Ampere sobre metro cuadrado	A/m <sup>2</sup>
Intensidad de campo magnético	Ampere sobre metro	A/m
Concentración de cantidad de sustancia (concentración)	Mol sobre metro cúbico	mol/m <sup>3</sup>
Luminosidad	Candela sobre metro cuadrado	cd/m <sup>2</sup>

Al añadir los prefijos a las unidades del SI, se les llama múltiplos o sub-múltiplos de las unidades del SI a las unidades así formadas. También se ha aceptado dentro del SI un grupo de unidades que, estrictamente hablando, no pertenecen al Sistema Internacional, pero que se emplean mucho tanto en la ciencia, la tecnología, como la vida común. La Tabla 3.5 incluye a todas estas unidades, junto con su equivalencia con las unidades del SI.

Tabla 3.4. Prefijos del SI.

FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR	PREFIJO	SÍMBOLO
$10^{24}$	Yotta	Y	$10^{-24}$	yocto	y
$10^{21}$	Zetta	Z	$10^{-21}$	zepto	z
$10^{18}$	Exa	E	$10^{-18}$	atto	a
$10^{15}$	Peta	P	$10^{-15}$	femto	f
$10^{12}$	Tera	T	$10^{-12}$	pico	p
$10^9$	Giga	G	$10^{-9}$	nano	n
$10^6$	Mega	M	$10^{-6}$	micro	$\mu$
$10^3$	Kilo	k <sup>a</sup>	$10^{-3}$	mili	m
$10^2$	Hecto	H	$10^{-2}$	centi	c
$10^1$	Deca	Da	$10^{-1}$	deci	d

<sup>a</sup> Es importante recalcar que el prefijo de kilo es k minúscula, no mayúscula.

Por otra parte, en las tecnologías de la información se usan potencias de 2 para denotar las magnitudes, en vez de las potencias de 10 que se representan con los prefijos de la Tabla 3.4. La Tabla 3.6 muestra los prefijos de las unidades empleadas en este campo. Es importante notar la diferencia entre ambas alternativas, puesto que, por ejemplo, 1 kilobit sería 1 kb = 1000 b, mientras que 1 kibibit es 1 Kib = 1024 bits.

### Ejemplo 3.1

kilómetro (km), miliampere (mA), megaohm ( $m\Omega$ ), microsegundo ( $\mu s$ ).  
 $5.0 \text{ cm}^3 = 5.0 (\text{cm})^3 = 5.0 (10^{-2} \text{ m})^3 = 5.0 \times 10^{-6} \text{ m}^3$

## 3.2. REGLAS DE USO Y DE ESTILO EN EL SI

Con respecto al uso de las unidades del SI, sus nombres y sus símbolos, es oportuno enfatizar varios puntos:

- Dentro del SI no es aceptable utilizar combinaciones de los prefijos. De esta forma,  $4.7 \mu\mu\text{F}$  es incorrecto, debiéndose escribir  $4.7 \text{ pF}$ .

Tabla 3.5. Unidades ajenas al SI cuyo uso se acepta dentro del SI.

Magnitud	Nombre de la unidad	Símbolo de la unidad	Valor en unidades del SI
Tiempo	minuto	min	1 min = 60 s
	hora	h	1 h = 60 min = 3 600 s
	día	d	1 d = 24 h = 86 400 s
Longitud	unidad astronómica	au	1 au = 149 597 870 700 m
Angulo de fase o plano	grado	°	1° = ( $\pi/180$ ) rad
	minuto	'	1' = (1/60)° = ( $\pi/10\,800$ ) rad
	segundo	"	1" = (1/60)' = ( $\pi/648\,000$ ) rad
Área	Hectárea	ha	1 ha = 1 hm <sup>2</sup> = 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>
Volumen	Litro	L	1 L = 1 dm <sup>3</sup> = 10 <sup>3</sup> cm <sup>3</sup> = 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>
Masa	tonelada	t	1 t = 10 <sup>3</sup> kg
	dalton o masa atómica unificada	Da, u	1 Da = 1.660 539 040 × 10 <sup>-27</sup> kg
Energía	Electrónvolt	eV	1 eV = 1.602 176 634 × 10 <sup>-19</sup> J
Cantidades de razones logarítmicas	neper	Np	Se deben especificar la naturaleza de la magnitud por usar y cualquier valor de referencia.
	bel	B	
	decibel	dB	

- Al escribir el nombre de las unidades no se deben separar los prefijos de las unidades (es kilopascal y no kilo pascal, por ejemplo).
- El símbolo de litro se modificó desde 1979 a L (mayúscula) para evitar confusiones entre l (minúscula) y el número 1 (uno).
- El término “micra” (*micron*, en inglés) no es aceptable en sustitución de la expresión micrómetro ( $\mu\text{m}$ ).
- No se deben usar abreviaturas para representar las unidades. Es inaceptable el uso de las expresiones seg para segundos (s), gr para gramos (g), cc para centímetros cúbicos (cm<sup>3</sup>), kph para kilómetros sobre hora (km/h), por ejemplo.

Tabla 3.6. Prefijos usados en tecnologías de la información.

Nombre	Prefijo	Potencia de 2
Kibi	Ki	$2^{10}$
Mebi	Mi	$2^{20}$
Gibi	Gi	$2^{30}$
Tebi	Ti	$2^{40}$
Pebi	Pi	$2^{50}$
Exbi	Ei	$2^{60}$
Zebi	Zi	$2^{70}$
Yobi	Yi	$2^{80}$

- En Física Nuclear es frecuente que a la unidad fm (femtómetro) se le llame “fermi.” Esto no es aceptable dentro del SI, por lo que debe prescindirse de su uso.
- En México es aceptable de manera oficial el uso de coma o punto como signo decimal, a diferencia de otros países de habla hispana, en los que se debe usar la coma decimal. No obstante, en lo que se refiere a operaciones comerciales, es recomendable usar la coma decimal, también en México (ver, por ejemplo, envases de bebidas gaseosas o lácteos). Si la cantidad que se escribe está entre -1 y +1, el signo decimal debe estar precedido de un cero (0.005 m, por ejemplo).
- Desde el año 1948 (CIPM, 1948), se acordó sustituir el nombre de la unidad de temperatura “grado centígrado” por “grado Celsius” (Tabla 3.2). Por tanto, debe evitarse el uso de la expresión “grado centígrado,” pues es ya un anacronismo.
- El kelvin y el grado Celsius son idénticos para expresar intervalos de temperaturas.
- En los medios de comunicación ha proliferado el uso incorrecto de la unidad grados ( $^{\circ}$ ) para referirse a las temperaturas en los pronósticos del tiempo (meteorológico). Los grados ( $^{\circ}$ ) son unidades de ángulo (Tabla 2.6), por lo que deben utilizarse los grados Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) para expresar dichas temperaturas.

- En ciertas áreas de Física Atómica y Física Nuclear, se utiliza la unidad barn (b) para expresar secciones eficaces (probabilidades) de ocurrencia de ciertos procesos (ionizaciones, reacciones nucleares, dispersión, etc.). Se define como  $1 \text{ b} = 10^{-24} \text{ cm}^2 = 10^{-28} \text{ m}^2$ .
- Es muy común en todos los ámbitos confundir las unidades de medición con el mensurando. Así, no es raro escuchar “kilometraje recorrido por un automóvil”, en vez de “distancia recorrida por el automóvil,” el “gramaje de un ingrediente en un platillo” en lugar de “la masa de un ingrediente en un platillo,” “el voltaje en la línea eléctrica” en sustitución de “la tensión eléctrica en la línea,” o “el amperaje que pasa por un cable” en vez de “la intensidad de corriente que pasa por un cable.” Si bien son expresiones incorrectas muy habituales coloquialmente, es recomendable evitarlas, sobre todo en medios científicos y tecnológicos.

Además, el SI establece ciertas reglas de estilo para la presentación de las magnitudes y expresiones relacionadas. Entre ellas, se pueden citar las siguientes:

- Los símbolos de las unidades se escriben siempre con un tipo de letra normal, sin importar qué tipos de letra se usen alrededor de ellos (es decir, no se escriben en cursivas o negritas). En este sentido, cabe resaltar que ciertos programas para la edición de textos (uno en particular, muy popular entre la comunidad dedicada a la Física), automáticamente cambian los símbolos de las unidades a letra cursiva, lo que es, por tanto, una falla del programa.
- Los símbolos de las unidades se escriben con letra minúscula, a menos que se deriven de un nombre propio, en cuyo caso la primera letra será mayúscula.
- Los prefijos siempre van unidos al símbolo de la unidad; no deben dejarse espacios entre ellos.
- Los símbolos de las unidades son entidades matemáticas y no abreviaturas, por lo cual no se escriben con punto al final (debe escribirse cm, no cm.).
- La multiplicación entre símbolos se puede denotar con un espacio o con un punto (el símbolo  $\cdot$ ), mientras que la división se puede representar con líneas horizontales, diagonales (/) o con exponentes negativos.

- Los nombres de las unidades se escriben con minúsculas, a menos que estén al comienzo de un párrafo u oración.
- Los símbolos para las magnitudes se escriben normalmente con letra cursiva. Por ejemplo, para una velocidad se escribe  $v$  y para una aceleración,  $a$ . Existe una recomendación para los símbolos usados en Física en el llamado IUPAP SUNAMCO *Red Book Symbols, Units and Nomenclature in Physics* (IUPAP, 2010).
- Los símbolos de las unidades deben tratarse como entidades matemáticas, con los cuales pueden hacerse operaciones como la multiplicación y la división.
- En una magnitud, el valor numérico siempre precede al símbolo de la unidad y, al escribirlos, siempre deben quedar separados por un espacio. Las únicas excepciones son los símbolos de grados, minutos y segundos ( $^{\circ}$ ,  $'$ ,  $''$ ) que no son unidades del SI propiamente dichas. Conviene señalar que también para los grados Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) debe dejarse dicho espacio. Por ejemplo, debería escribirse “para el mediodía de hoy se espera una temperatura de 22  $^{\circ}\text{C}$ ”.
- Desde la Conferencia General de Pesas y Medidas de 1948 (CGPM, 1948) se recomienda separar los valores numéricos grandes en grupos de tres, para facilitar su lectura. Sin embargo, hay que tener en cuenta que es una recomendación, solamente.
- Al multiplicar y dividir símbolos de magnitudes físicas, se pueden usar los formatos  $ab$ ,  $axb$ ,  $a \cdot b$ ,  $\frac{a}{b}$ ,  $a/b$ ,  $ab^{-}$ , aunque al multiplicar números siempre se debe usar  $\times$  y si se multiplican magnitudes, se denota con el mismo  $\times$  o paréntesis; nunca con un punto. Igualmente, al dividir magnitudes con una diagonal ( $/$ ), lo mejor es usar paréntesis para evitar confusiones.
- Las magnitudes que se obtienen como cocientes de otras dos de la misma clase pueden llevar como unidades el cociente de las unidades de las magnitudes originales. Por ejemplo, una concentración en masa se expresa en  $\text{mg}/\text{kg}$ .
- El símbolo de porcentaje ( $\%$ ), que se acepta en el SI, debe ir separado del valor numérico por un espacio. Así, en el ejemplo 2.1, el error porcentual es 0.52  $\%$ . Además, no debe usarse el término “porciento” como símbolo de unidades.

- El término “ppm” puede usarse, al representar un valor relativo de  $10^{-6}$ , parte por millón o 1 parte en  $10^6$ . Los términos “ppb” (partes por billón) y “ppt” (partes por trillón) deben evitarse, porque dependen del idioma. Así, en el inglés de Estados Unidos, un billón es igual a  $10^9$  y un trillón es  $10^{12}$ , mientras que en español un billón es  $10^{12}$  y un trillón es  $10^{18}$ , al igual que en el inglés del Reino Unido.
- Dado que una magnitud se expresa siempre como el producto de un valor numérico y un símbolo de unidades, se recomienda fuertemente escribir con claridad qué valor numérico está relacionado con el símbolo de las unidades, para facilitar la comprensión del texto correspondiente. Además, para representar intervalos en los cuales pueden variar las magnitudes que se están midiendo, lo mejor es usar la preposición “a” para describir dichos intervalos; el guión (-) podría confundirse con un signo de resta, por lo que es preferible evitar su uso. La Tabla 3.7 muestra las formas correctas e incorrectas de escribir diversas expresiones.

Tabla 3.7 Formas correctas e incorrectas de escribir expresiones que incluyen varias magnitudes.

Forma correcta	Forma incorrecta
35 mm × 27 mm × 18 mm	35 × 27 × 18 mm <sup>3</sup>
1.5 MeV a 3.0 MeV (1.5 a 3.0) MeV	1.5 a 3.0 MeV 1.5 MeV - 3.0 MeV 1.5 - 3.0 MeV
(2, 4, 6, 8, 10, 12) A	2, 4, 6, 8, 10, 12 A
35.0 s ± 0.2 s (35.0 ± 0.2) s	35.0 ± 0.2 s 35.0 s ± 0.2
27 N - 8 N = 19 N (27 - 8) N = 19 N	27 - 8 N = 19 N

### 3.3. OTROS SISTEMAS DE UNIDADES

Además del Sistema Internacional de Unidades, a lo largo de la historia y en la actualidad han existido o persisten otros sistemas de unidades, cuyo

uso depende frecuentemente de la actividad o de razones económicas. Si bien sería deseable que hubiese una aplicación universal del SI, en algunos países o campos del conocimiento no ha sido posible concluir la transición hacia el SI. Por ejemplo, el sistema inglés sigue siendo utilizado en los Estados Unidos de América, debido a los altos costos que representaría este cambio, pues su empleo cotidiano por la población o en las áreas productivas es muy amplio. Lamentablemente, en países como México hay ahora una penetración comercial para el uso de unidades del sistema inglés (como en la venta de bebidas), lo que representa una regresión en el aspecto de la estandarización global y es contrario a las normas oficiales mexicanas.

No obstante, es esencial tomar en cuenta qué sistema de unidades se está empleando y tratar de recurrir siempre al SI. Un ejemplo de esto es la catástrofe del *Mars Polar Lander* (MPL), en 1998. Este módulo espacial estaba programado para “aterrizar” cerca del polo sur de Marte; pero se perdió comunicación de forma definitiva con él el 3 de diciembre de ese año. Las investigaciones subsecuentes (Oberger, 1999) revelaron que, mientras las agencias gubernamentales de los EUA usaban el SI, una de las compañías subcontratadas para construir componentes del módulo empleó el sistema inglés, por lo que la información recibida por el módulo no fue congruente, llevando al fracaso de la misión. La Tabla 3.8 presenta algunos de estos sistemas de unidades, junto con sus características principales.

Tabla 3.8. Otros sistemas de unidades.

Nombre del sistema de unidades	Tipo de sistema	Unidades básicas	Características
Cgs	Físico	Centímetro, gramo, segundo	Establecido en 1881. Usado sobre todo en áreas científicas por facilidad de escritura de ecuaciones.
Técnico o terrestre	Técnico	Metro, kilogramo fuerza o kilopond (kp), segundo	Empleado en diversas áreas de ingeniería.
Inglés	Físico	Pie (ft), libra (lbf), segundo	Utilizado principalmente en los E.U.A.

En estos sistemas también existen unidades derivadas. De esta forma, en el cgs se usan la dina para la fuerza ( $1 \text{ dina} = 10^{-5} \text{ N}$ ) y el erg para energía ( $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$ ); en el sistema técnico la energía se mide en calorías (1

cal = 4.814 J); en el sistema inglés la longitud se puede medir en pulgadas, pies o yardas ( $1'' = 25.4 \text{ mm}$ ,  $1 \text{ ft} = 12''$ ,  $1 \text{ yd} = 3 \text{ ft} = 0.914 \text{ m}$ ), además de que las temperaturas se miden en grados Fahrenheit (un grado Fahrenheit equivale a  $5/9$  de un grado Celsius, aunque la ecuación para la conversión es  $t_{\circ C} = (t_{\circ F} - 32) \times 5/9$ ). Puesto que las temperaturas ambientales se miden también en grados Fahrenheit, sería muy importante que los medios de comunicación informaran en nuestro país correctamente las temperaturas en grados Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) y no en grados ( $^{\circ}$ ), para evitar confusiones.

Para realizar las conversiones de unidades de un sistema a otro, lo más recomendable es recurrir a sitios de internet o incluso aplicaciones para teléfono celular. El texto de Halliday et al. (1994) y sus ediciones siguientes, contienen un apéndice con tablas muy completas para estas conversiones.

## CAPITULO 4. FUNDAMENTOS DE ESTADÍSTICA

A menudo es necesario durante un experimento o en la observación de algún fenómeno, llevar a cabo un cierto número de mediciones del mismo mensurando, o de la misma magnitud física en muchos objetos o fenómenos considerados “iguales” o equivalentes. En una línea de producción de materiales eléctricos, por ejemplo, es necesario medir la resistencia eléctrica de los resistores que se están fabricando, con fines establecidos por los controles de calidad. Las normas actuales para las acreditaciones y certificaciones de laboratorios o industrias exigen la realización de numerosas mediciones en aquello que se está estudiando o manufacturando. Esto hace indispensable, entonces, el manejo de todos los resultados de medición recolectados, para poder clasificar el producto y venderlo, o para verificar la calidad de dichos resultados en un laboratorio, ya sea de investigación o comercial. La estadística es la herramienta ideal para el tratamiento de estos datos. En el presente capítulo, entonces, haremos una breve descripción de los fundamentos estadísticos necesarios para el tratamiento de los datos en un laboratorio de enseñanza, que podrán hacerse extensivos a otros ámbitos, como la investigación o el sector productivo.

### 4.1. HISTOGRAMAS Y DISTRIBUCIONES

Una vez que se realizó la medición de un mensurando en un cierto número de ocasiones, podemos pensar en una manera práctica de representar los resultados. Probablemente, la simple presentación de una tabla que contenga dichos resultados no sea lo suficientemente explícita para entender lo que obtuvimos. Por esta razón, un método gráfico podría ser de mayor ayuda para explicar los resultados del experimento.

El primer paso consiste en determinar la anchura del intervalo en el cual tenemos todos los resultados de medición (la diferencia del valor más grande y el más pequeño), dividirlo en un cierto número de intervalos y contar cuántos de nuestros datos caen dentro de cada uno de los intervalos. Posteriormente, se construye una gráfica (por ejemplo, de barras verticales), con los valores de los intervalos en el eje horizontal y el número de datos en cada intervalo en el eje vertical. A este tipo de gráfica se le conoce como *histograma* y permite identificar la manera en que se distribuyen los resultados de medición de un experimento; a los intervalos les llamamos *clase*. El ejemplo 4.1 presenta este procedimiento para un conjunto de datos obtenidos al medir la resistencia eléctrica de un grupo de resistores, con un multímetro digital.

#### Ejemplo 4.1

Medimos la resistencia de un conjunto de 100 resistores, con valor nominal de  $2\text{ k}\Omega$  y una “tolerancia” de  $5\%$ , empleando un multímetro digital, en la escala de  $2\,000\ \Omega$ . Los resultados se presentan en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1. Resistencias medidas en un conjunto de 100 resistores ( $\Omega$ )

1981	1977	1983	1982	1979
1981	1982	1978	1979	1981
1978	1985	1980	1982	1975
1982	1978	1978	1981	1981
1984	1980	1979	1984	1979
1977	1982	1985	1976	1981
1985	1982	1979	1981	1979
1983	1979	1982	1981	1989
1978	1984	1982	1985	1979
1984	1981	1978	1984	1988
1978	1983	1977	1982	1979
1980	1976	1987	1982	1979
1979	1980	1980	1980	1981
1980	1977	1979	1979	1983
1987	1982	1982	1976	1975
1978	1983	1983	1986	1982
1985	1978	1982	1980	1982
1978	1988	1980	1979	1984
1989	1984	1977	1977	1980
1976	1982	1977	1979	1983

Se observa que los resultados obtenidos varían entre  $1\,975\ \Omega$  y  $1\,988\ \Omega$ . Por tanto, escogemos ocho intervalos con una anchura de  $2\ \Omega$ . Al graficarlos, elaboramos el histograma de la Figura 4.1.

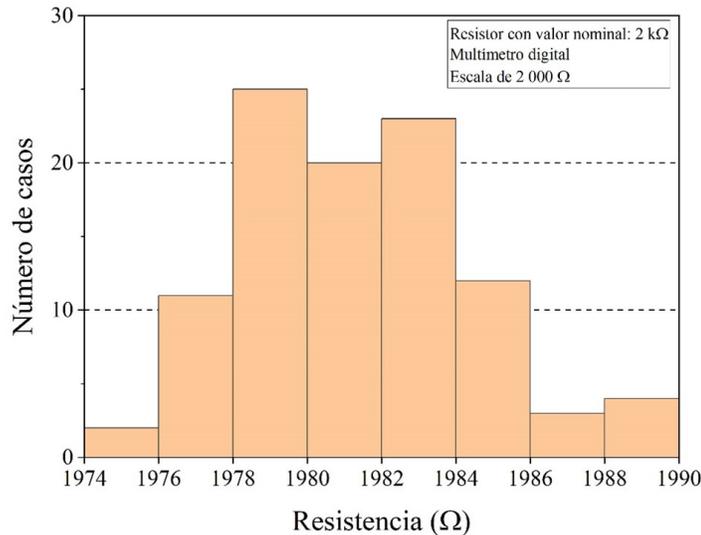


Figura 4.1: Histograma obtenido con las resistencias medidas.

Los histogramas se pueden construir con muchos de los programas de uso común para el análisis de datos. Entre ellos están Excel® y Google Hojas de Cálculo®, además de los programas de análisis estadístico o especializados en graficación, como SPSS®, Stata®, Statistica® u Origin®.

Al observar el histograma, a primera vista resalta la *distribución* de los resultados de medición. En el ejemplo 4.1, la mayor parte de los datos se agrupa alrededor del centro de la distribución, por lo que se dice que tienen una *tendencia central*. Además, es aproximadamente simétrica alrededor de la zona central.

Las distribuciones que obtengamos durante un experimento pueden ser muy variadas, dependiendo de las magnitudes físicas que estemos midiendo. La Figura 4.2. presenta unos cuantos ejemplos de distribuciones resultantes de diversos experimentos.

La Figura 4.2 nos indica que la forma de las distribuciones reales puede ser muy variada. En la gráfica 4.2a apreciamos que todos los resultados se repiten prácticamente las mismas ocasiones; a esta se le llama una distribución *uniforme*. En la Figura 4.2b se puede ver que la distribución de los

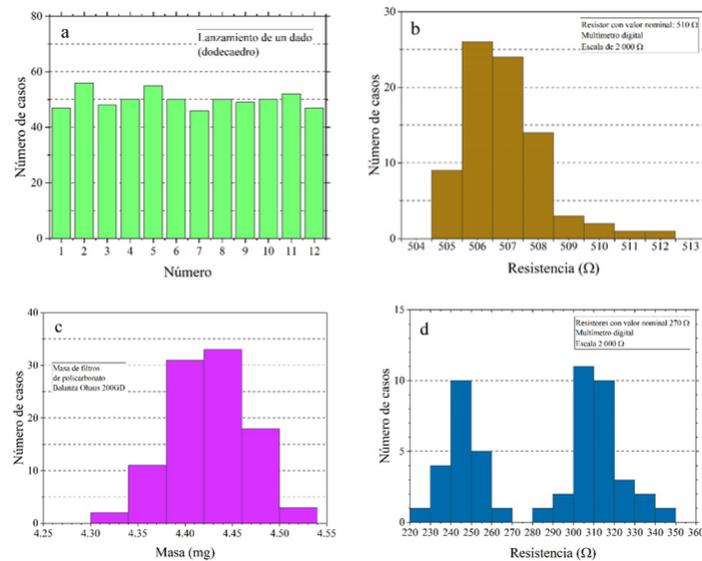


Figura 4.2. Ejemplos de distribuciones de resultados de medición. (a) Número de veces que se obtienen los números 1 a 12 al tirar 600 veces un dado dodecaédrico. (b) Resistencias eléctricas de un conjunto de 80 resistores cuyo valor dado por el fabricante es  $510 \Omega$  y una “tolerancia” de 5 %. (c) Masas de un conjunto de 98 filtros de policarbonato, con diámetro nominal de 47 mm. (d) Resistencias eléctricas de un conjunto de 51 resistores con valores proporcionados por el fabricante de  $270 \Omega$  y una “tolerancia” de 20 %.

resultados es *asimétrica*, mientras que en la 4.2c la distribución resultante es simétrica, es decir, los datos parecen repartirse de igual manera a ambos lados de la parte central. Así mismo, la distribución en la Figura 4.1 es bastante simétrica. La Figura 4.2d, por último, muestra una distribución en la que hay máximos en dos valores distintos. A este tipo de distribuciones se le conoce como *bimodales*, por una razón que veremos más adelante.

El aspecto de una distribución, además, puede ayudar mucho para obtener información acerca de la naturaleza del mensurando.

#### 4.2. PARÁMETROS ESTADÍSTICOS BÁSICOS

Después de hacer un conjunto de mediciones del mismo mensurando, siempre cabe hacerse las preguntas: ¿cuál es el valor más representativo de aquello que estamos midiendo? ¿Qué tan cerca están los resultados de

dicho valor representativo?

Para responder la primera pregunta hay varias alternativas. La más sencilla es en la que la distribución tiene un máximo de resultados. A este valor se le llama *moda*. También podemos pensar en que ordenamos todos los resultados de menor a mayor e indicamos el valor que divide en partes iguales a los resultados; dicho número se conoce como *mediana*. Finalmente, supongamos que en nuestro experimento hicimos  $N$  mediciones de un mensurando  $x$ . A cada uno de los resultados lo denotaremos como  $x_i$ , donde el subíndice  $i$  puede tomar los valores 1 hasta  $N$ . Entonces es posible demostrar que el valor más representativo (Mandel, 1964) se obtiene con la ecuación:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \dots + x_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (4.1)$$

en donde hemos usado el símbolo  $\sum$  para expresar la suma de todos los valores  $x_1$  hasta  $x_N$ . A  $\bar{x}$  se le conoce como la media o el promedio. Quienes llevan cursos en las escuelas están familiarizados con este concepto desde pequeños porque lo utilizan para calcular el promedio de sus calificaciones.

En una distribución simétrica, la moda, la mediana y la media prácticamente coinciden en un punto central. En cambio, cuando la distribución no es simétrica, estos tres parámetros no coinciden. Esto puede observarse en la Figura 4.3, que reproduce la distribución de la Figura 4.2b, mostrando la ubicación de los parámetros.

Adicionalmente, en la Figura 4.2d advertimos que la distribución tiene dos máximos, es decir, dos modas, por lo cual, como dijimos antes, se conoce como bimodal.

La siguiente pregunta que debemos responder es: ¿qué tanto se alejan nuestros resultados de medición del valor más representativo? En otras palabras, ¿cuán dispersos están los datos con respecto a la media?

Para esto se pueden calcular las desviaciones de cada uno de los datos  $x_i$  con respecto a la media  $\bar{x}$ ,  $(x_i - \bar{x})$ ; a esta diferencia se le conoce como *desviación, residual o residuo*. Estas diferencias darán valores positivos y negativos, de manera que, si las sumamos, obtendremos cero exactamente, por lo que esta suma no da mucha información. Sin embargo, si primero las diferencias se elevan al cuadrado y se suman, tendremos un valor positivo. Además, para evitar que el número de datos haga crecer indefinidamente esta suma, se puede dividir, como en el caso de la media, entre el número de observaciones.

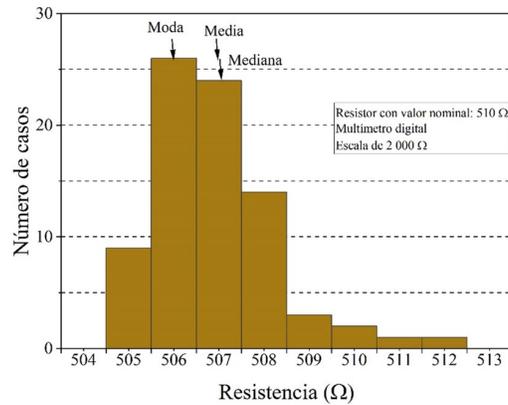


Figura 4.3. Distribución asimétrica que muestra la moda, la mediana y la media.

Determinamos, de esta forma, la varianza  $\sigma^2$  de la distribución:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N} \quad (4.2)$$

En esta ecuación, usamos la letra griega  $\sigma$  para denotar que se cuenta con un número de mediciones que suponemos abarca al total de objetos de los cuales se tiene el mensurando o un número prácticamente (conceptualmente) infinito de mediciones; a esto se le llama *población*. En una situación real, empero, el número de mediciones  $N$  es finito y generalmente se extraen del total de la población, es decir, es una *muestra*. El número de datos necesarios para que una muestra sea representativa varía mucho, dependiendo del tamaño de la población y del problema específico por estudiar; no existe una regla matemática para establecerlo (Mandel, 1964). Debe cumplirse una condición, sin embargo: la muestra extraída de la población debe ser *aleatoria*, esto es, que los elementos de la muestra se escogieron al azar de entre la población, para lo cual el experimentador debe evitar cualquier prejuicio para seleccionar los datos, lo cual produciría un *sesgo* en el estudio (Mandel, 1964; Kreyszig, 1994).

Como lo prueban muchos autores (por ejemplo, Mandel, 1964; Kirkup y Frenkel, 2006), cuando se calcula la suma de los residuales, solo se necesita conocer  $N - 1$  datos para evaluarla, es decir, el  $N$ -ésimo residual no contiene más información ya existente en las  $N - 1$  desviaciones. Por tanto, en un

caso verdadero, es posible calcular la varianza teniendo en el denominador a  $N - 1$  en lugar de  $N$ . Al valor de  $N - 1$  se le llama el número de grados de libertad usados para estimar la varianza, que ahora es:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1} \quad (4.3)$$

Debemos notar que ahora la letra griega  $\sigma$  cambió a la latina  $s$  para resaltar que se trata de un conjunto finito de resultados de medición que, como ya dijimos, es una muestra. Al mismo tiempo, tenemos que advertir que esta magnitud tiene como unidades el cuadrado de las unidades del mensurando (por ejemplo, si se mide una longitud en m, las unidades de la varianza son  $m^2$ ). Para tener un número que nos indique la dispersión en las mismas unidades que el mensurando, se puede calcular la raíz cuadrada de la varianza, cantidad que conocemos como *desviación estándar* o *desviación típica*:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (4.4)$$

Podemos identificar directamente a la desviación estándar con la anchura de la distribución de nuestros resultados de medición, puesto que indica qué tan dispersos están los datos con respecto al valor más representativo (la media), en las mismas unidades. La desviación estándar, por otro lado, depende del tipo de distribución que tengan los valores del mensurando.

## Ejemplo 4.2

Para los datos del ejemplo 4.1, podemos evaluar los parámetros estadísticos básicos:

Tabla 4.2. Parámetros estadísticos básicos para los datos del ejemplo 4.1.

Parámetro	Valor
Número de observaciones, $N$	100
Media, $\bar{x}$	1 981 $\Omega$
Mediana	1 981 $\Omega$
Moda	1 982 $\Omega$
Varianza, $s^2$	9.6 $\Omega^2$
Desviación estándar, $s$	3.1 $\Omega$

Es indispensable notar que, aunque en el histograma de la Figura 4.1 la clase con un valor más alto es (1 978  $\Omega$ , 1 980 $\Omega$ ], el valor más frecuente es 1 982  $\Omega$ , por lo que la moda es igual a este último valor. Los programas de análisis de datos ya citados (Excel®, Google® Hojas de cálculo) incluyen las funciones para calcular todos estos parámetros para un conjunto de datos.

## Ejemplo 4.3

Funciones de los programas Excel y Google Hojas de cálculo para determinar los parámetros estadísticos básicos (suponiendo que los datos están en una columna A1:A100).

Tabla 4.3. Funciones para evaluar los parámetros estadísticos de una muestra en programas de cálculo.

Parámetro	Excel®	Google® Hojas de cálculo
Media	=PROMEDIO(A1:A100)	=PROMEDIOA(A1:A100)
Mediana	=MEDIANA(A1:A100)	=MEDIANA(A1:A100)
Moda	=MODA(A1:A100)	=MODA(A1:A100)
Varianza	=VAR.S(A1:A100)	=VARA(A1:A100)
Desviación estándar	=DESVEST.M(A1:A100)	=DESVESTA(A1:A100)

Otro parámetro, del cual veremos su importancia más adelante, es la *desviación estándar de la media*, denotada por  $\bar{s}$ . Para entender su significado (Taylor, 2022), imaginemos un experimento en el cual medimos  $N$  veces una magnitud  $x$ , obteniendo los resultados  $x_1, \dots, x_N$ , que obedecen a una cierta distribución, con una media  $\bar{x}$  y una desviación estándar  $s$ . Supongamos que se repite el experimento  $N$  veces, en cada una de las cuales tendremos una media y una desviación estándar. Todas estas medias tienen también una distribución estadística, con una media y una desviación estándar. Se puede demostrar formalmente (Taylor, 2022) que la desviación estándar de esta nueva distribución es:

$$\bar{s} = \frac{s}{\sqrt{N}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)}} \quad (4.5)$$

Este parámetro, como ya dijimos, se conoce como la desviación estándar de la media y representa de una manera más realista la dispersión de los resultados de medición que la desviación estándar. Hay que notar que esta cantidad disminuye al aumentar el número de mediciones, aunque no de una manera muy rápida, pues si, por ejemplo, se desea reducir la desviación estándar de la media en un factor de 10, hay que realizar 100 mediciones. Como puede inferirse, calcular con Excel® o Google® Hojas de cálculo es muy simple, con las funciones de la Tabla 4.3.

#### 4.3. DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Sorprendentemente, ninguno de los textos habituales (antiguos y recientes) relacionados con el análisis de datos experimentales contiene la definición de probabilidad, aunque explican muchos aspectos relacionados con ella. Hoel (1971) define *probabilidad* como “una idealización de la proporción de veces que un cierto resultado ocurrirá en intentos repetidos de un experimento.” En un modelo matemático en que se desea conocer la probabilidad de ocurrencia de un evento  $A$  (denotada por  $P\{A\}$ ), esta es igual a la fracción de veces que el evento  $A$  ocurrirá en un cierto número de repeticiones del experimento.

En un experimento donde se realizan las mediciones un cierto número de ocasiones, como ya dijimos, es de esperar que no siempre haya los mismos resultados. Consideremos inicialmente un caso sencillo, en donde lanzamos dos dados y sumamos sus resultados, que pueden variar entre 2

y 12. La Figura 4.4 muestra la situación de un experimento real, en que se lanzaron los dados 550 veces. La distribución es simétrica (con tendencia central).

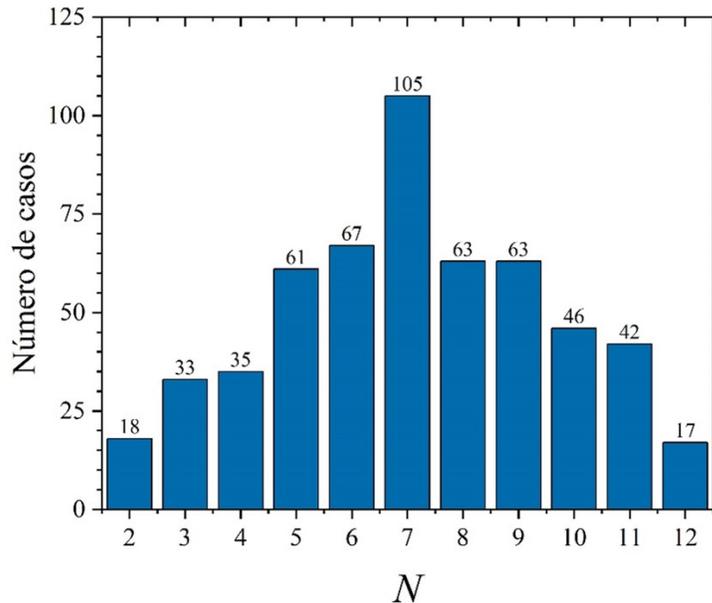


Figura 4.4. Resultados de un experimento en el que se tiraron dos dados iguales 550 veces. La etiqueta sobre cada columna indica el número de veces que se obtuvo la suma  $N$ .

La experiencia nos recuerda que, ciertamente, el 7 es el que aparece en un mayor número de combinaciones de los dados ( $1 + 6, 2 + 5, 3 + 4, 4 + 3, 5 + 2, 6 + 1$ ), de un total de 36 posibles. La fracción de veces que esperamos la aparición del 7 es, entonces,  $6/36$ . Siguiendo esta idea, para que aparezcan el 6 o el 8, hay una fracción de ocasiones  $5/36$  en cada una, cuatro combinaciones para 5 y 9 dan una fracción de  $4/36$ , y así sucesivamente. Decimos, entonces, que hay una *probabilidad* de  $6/36$  para que ocurra el 7, de  $5/36$  para el 6 o el 8, de  $4/36$  para 5 y 9, etc. Si se usa el símbolo  $p_i$  para la probabilidad de que ocurra el evento  $i$ , en este experimento,  $P\{x = x_i\} = p_i$ , las probabilidades de ocurrencia para cada valor se muestran en la Tabla 4.4.

En la Figura 4.5 se grafica la fracción de veces que aparece cada número con respecto al total de tiros de los dos dados (550). Además, se compara con las fracciones que predice el modelo anterior. Estas fracciones se asocian con la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los números, es decir, la

Tabla 4.4. Probabilidad de ocurrencia de un resultado al tirar dos dados.

$x_i$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

gráfica representa una *distribución de probabilidad*, que debe distinguirse del histograma. En este, se grafica el número de datos dentro de cada clase, mientras que en el primero se están representando las probabilidades de ocurrencia. En este experimento, la variable es discreta (solo puede tomar los valores del primer renglón en la Tabla 4.4), y es *aleatoria*, concepto definido como “una función que adquiere valores reales determinados en un espacio de la muestra” (Hoel, 1971).

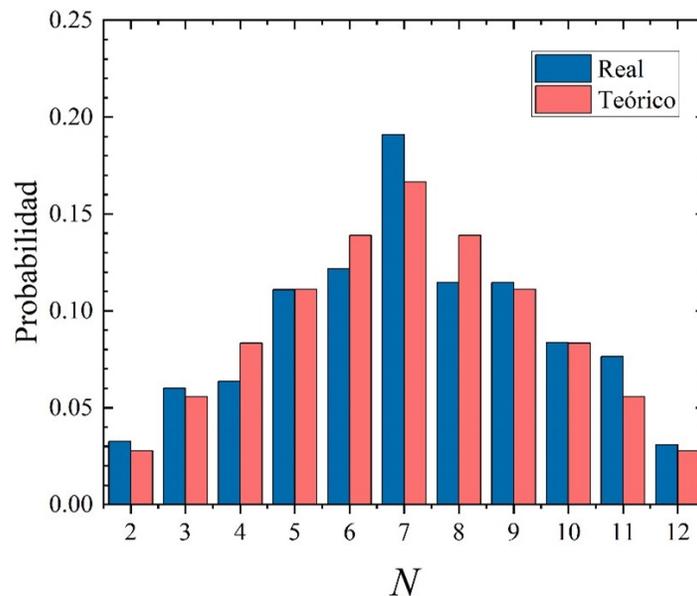


Figura 4.5. Probabilidad de obtener un número  $N$  al tirar dos dados, en un experimento real, junto con la predicción teórica.

Las probabilidades siempre son positivas y menores o iguales que 1; la probabilidad de todos los eventos es igual a 1 y la probabilidad de que ocurran eventos independientes es igual a la suma de los eventos individuales. En ocasiones, a estos se les llaman los *axiomas de la probabilidad* (Hoel, 1971).

Si se aumentara el número de dados, crecería la cantidad de combinaciones posibles, hasta que la variable pudiera considerarse como continua.

O bien, puede pensarse que se ha hecho el experimento midiendo una variable continua. Al hacer esta transición, en vez de la probabilidad para un valor discreto, hablaremos de una *densidad de probabilidad*, que tiene asociada una *función de densidad de probabilidad*  $f(X)$  de la variable  $X$ . Entonces, en un intervalo comprendido entre  $x$  y  $x + \delta x$ , la probabilidad de ocurrencia del fenómeno (o de que una magnitud adquiriera un valor entre estos límites), es igual a  $f(x)\delta x$ .

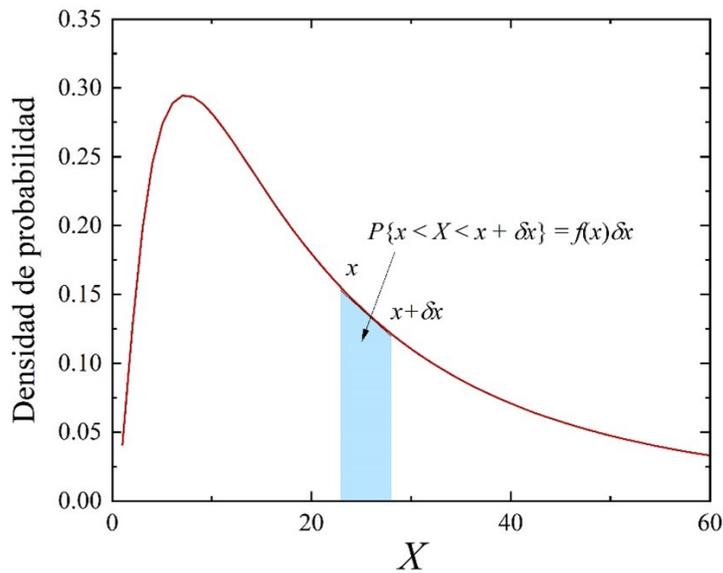


Figura 4.6. Distribución de probabilidad de una variable continua.

Si, por otro lado, en el experimento de los dados nos preguntáramos cuál es la probabilidad de que no obtengamos un número mayor que  $x_i$ , tendríamos que sumar las probabilidades de que sí resulte un valor menor o igual que  $x_i$ , es decir,  $P\{x \leq x_i\} = p_1 + p_2 + \dots + p_i$ . Con esto se puede construir una distribución acumulativa. Para el ejemplo que nos concierne, la Figura 4.7 muestra dicha distribución.

Si la variable es continua, la suma se sustituye por una integral, de forma que se tiene la ecuación:

$$P\{X \leq x\} = F(X) = \int_m^x f(X) dX, \quad (4.6)$$

ecuación en la que  $m$  es el valor mínimo que puede adquirir la variable  $X$ . Debe notarse que tanto en el caso de la distribución acumulativa de la variable discreta como en el de la continua, el máximo valor que puede tener la probabilidad es 1.

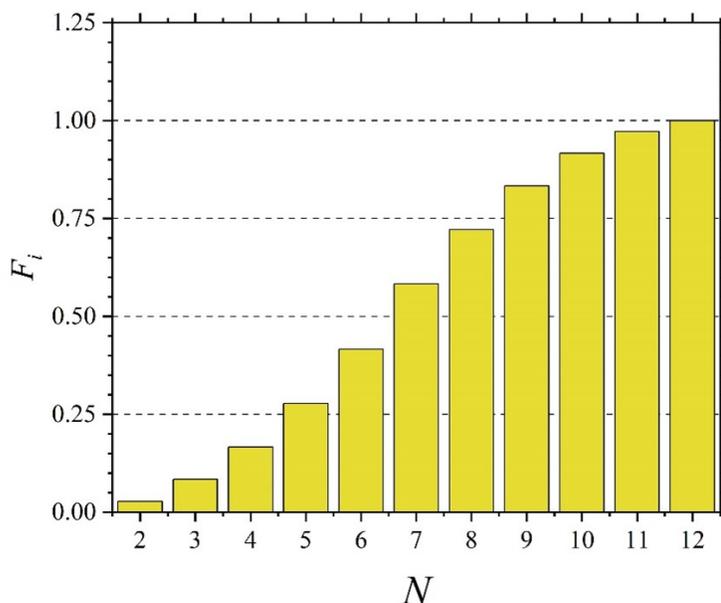


Figura 4.7. Distribución acumulativa de probabilidad de una variable discreta.

Cuando se conoce la función de distribución para una variable continua, es posible determinar los parámetros estadísticos básicos, como la media  $\mu$  y la varianza  $\sigma^2$ , a través de las ecuaciones:

$$\mu = \mu_1 = \int_a^b x f(x) dx \quad (4.7)$$

$$\sigma = \mu_2 = \int_a^b x^2 f(x) dx \quad (4.8)$$

en las que  $a$  y  $b$  son los valores mínimo y máximo, respectivamente, entre los que varía  $x$ .

Pueden ser valores tanto finitos como  $-\infty$  para el mínimo o  $\infty$  para el máximo. Estos dos parámetros son casos particulares de un concepto más general, conocido como los *momentos de una distribución*:

$$\mu_k = \int_a^b x^k f(x) dx \quad (4.9)$$

Aquí,  $\mu_k$  es el  $k$ -ésimo momento; la media y la varianza son el primero y segundo momentos de la distribución, respectivamente.

#### 4.4. LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

Sin duda, la función de distribución de probabilidad más conocida es la *normal*, de *Gauss* o *gaussiana* (Berendsen, 2011). La describe la expresión:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (4.10)$$

Desde luego,  $\mu$  y  $\sigma$  son la media y la desviación estándar, respectivamente. La variable  $x$  puede adquirir valores entre  $-\infty$  e  $\infty$ . Además, el factor que multiplica a la exponencial es tal que la integral de esta función entre estos límites es igual a 1 (se dice que está normalizada a 1). La figura 4.8 presenta una distribución normal, donde además se incluyen la ubicación de la media y el intervalo entre  $\mu - \sigma$  y  $\mu + \sigma$ . El área de este último equivale a 68 % del total y cuando se considera  $\mu \pm 2\sigma$ , esta fracción es el 95 %.

La forma de la distribución normal es la comúnmente denominada “campana.” Obviamente, mientras más pequeña es la desviación estándar, la distribución se vuelve más estrecha. Esto queda ilustrado en la Figura 4.9, donde aparecen tres funciones de distribución gaussianas con distintos valores de  $\sigma$ . La altura de cada curva es diferente, porque todas ellas están normalizadas para que el área total sea igual a 1.

La distribución normal es muy importante en la experimentación, puesto que muchos de los resultados de medición repetidos para un mensurando siguen un comportamiento que se puede describir con ella. Utilizando los mismos datos experimentales de la Figura 4.2c, se puede hacer un ajuste de la distribución normal, a partir del cálculo de la media y la desviación estándar experimental.

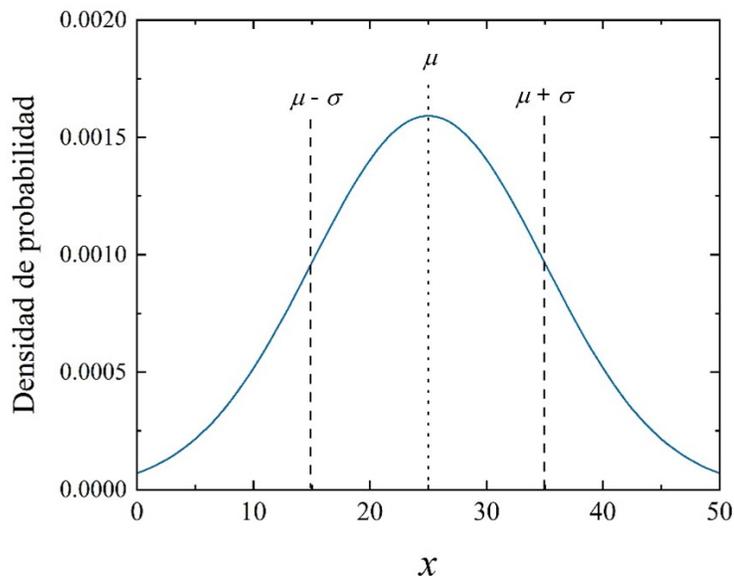


Figura 4.8. Gráfica de la función de distribución de probabilidad de Gauss, con una media  $\mu = 25$  y una desviación estándar  $\sigma = 10$ . El área total de la curva está normalizada para que sea igual a 1.

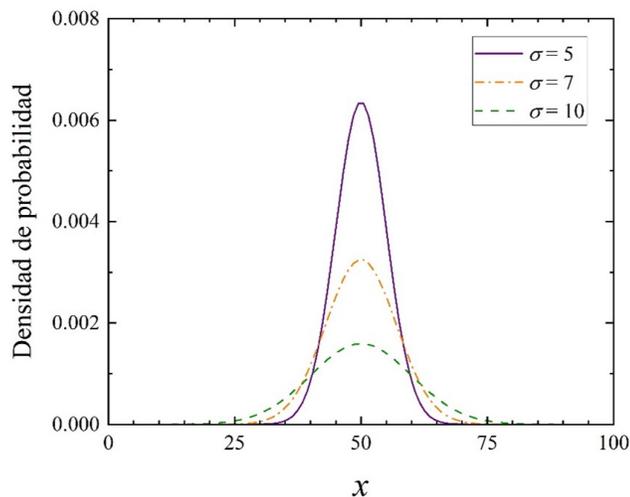


Figura 4.9. Gráficas de tres funciones de distribución gaussianas, con la misma media  $\mu = 50$  y diferentes valores para desviación estándar. El área total de cada curva está normalizada para que sea igual a 1.

Esto puede apreciarse en la Figura 4.10, donde la altura de la función de distribución se adecuó para que coincida con el máximo de la distribución experimental.

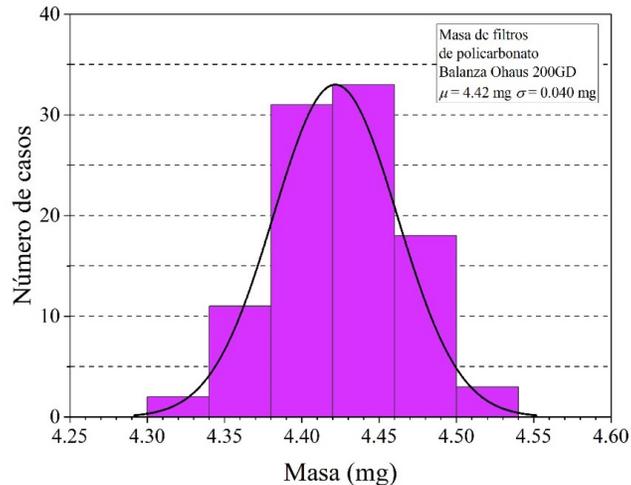


Figura 4.10. Distribución normal ajustada a un conjunto de resultados al medir las masas de 100 filtros de policarbonato.

#### 4.5. OTRAS DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

Es imprescindible darse cuenta que no todos los conjuntos de resultados de medición están descritos por la distribución normal. Los ejemplos de la Figura 4.2 son evidencia de que existen otras distribuciones descritas por distintas funciones matemáticas. El texto de Berendsen (2011) contiene una descripción bastante amplia de funciones de distribución de probabilidades, con aplicaciones principalmente en la Física.

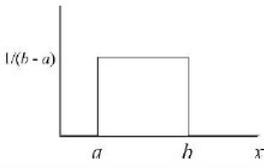
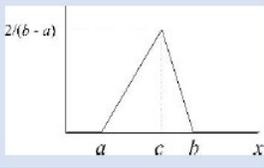
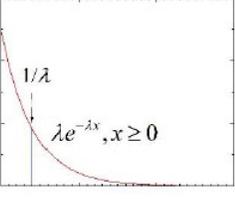
Se pueden mencionar como ejemplos las siguientes funciones de distribución de probabilidad; desde luego, existen muchos más:

- Binomial, que se aplica a una situación en la que se pueden tener solo dos valores en la variable o bien para calcular la probabilidad de obtener un número al tirar dos dados.
- Poisson, que aparece cuando se hacen conteos, por ejemplo, de bacterias en un cultivo o el número de fotones en un intervalo de tiempo para una fuente radiactiva; la variable es discreta.

- Uniforme, donde la variable está limitada entre dos valores y la probabilidad de ocurrencia es la misma para cualquier valor.
- Triangular, usada cuando se tienen muy pocos datos en un experimento.
- Exponencial, observada en muchos fenómenos naturales, como el número de núcleos de un isótopo radiactivo en un intervalo de tiempo, o la efectividad de un fármaco ingerido por un paciente.

La Tabla 4.5 muestra varios ejemplos, con un diagrama o la expresión que describe a la función de distribución de probabilidad, así como algunos parámetros estadísticos básicos.

Tabla 4.5. Características de algunas funciones de distribución de probabilidad.

Distribución	Diagrama o función	Media	Desviación estándar
Poisson	$f(k) = \frac{\mu^k e^{-\mu}}{k!}$	$\mu$	$\sqrt{\mu}$
Uniforme		$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}}$
Triangular		$\frac{a+b+c}{3}$	$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc}{18}}$
Exponencial		$\frac{1}{\lambda}$	-

Por último, es conveniente mencionar que los programas Excel® y Google® Hojas de cálculo contienen las fórmulas para calcular las funciones de distribución de probabilidad más comunes, como la normal o la binomial. En cuanto a otro tipo de herramientas muy utilizadas en la Física, el texto de Merrin (2017) incluye programas para evaluar las funciones por medio de Matlab®, así como el de Berendsen (2011) utiliza Python®.

## CAPITULO 5. EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE EXPERIMENTAL

### 5.1. EL CONCEPTO DE INCERTIDUMBRE

Ya hemos mencionado que, al hacer numerosas mediciones de alguna magnitud física, lo más probable es que no obtengamos el mismo resultado en todas ellas. Entonces, recurrimos a los métodos estadísticos para identificar el valor más representativo (la media del conjunto de mediciones), así como algún parámetro que describa la dispersión de los resultados de medición (la desviación estándar o la desviación estándar de la media). Sin embargo, en ocasiones no es necesario o posible llevar a cabo más de una medición. Además, al repetir las mediciones con un cierto instrumento, las mismas características de este no permiten tener una seguridad completa del resultado que obtenemos. Un ejemplo típico de esta situación es el medir una longitud con una regla, digamos, de 30 cm, las cuales normalmente tienen graduaciones de 1 mm. Es común que se refiera a estas marcas como “la mínima división de escala.” Pero al determinar el resultado queda siempre una pequeña duda del valor, que pudiera estar entre dicha marca (o *indicación*, que es el “valor proporcionado por un instrumento o sistema de medición”) observada y las que están justo por debajo o por arriba de ella. El término oficial, en vez de “mínima división de escala,” es la *resolución del dispositivo visualizador*.

**Resolución de un dispositivo visualizador:** mínima diferencia entre indicaciones visualizadas que puede percibirse significativamente.

En el caso de la regla, su resolución <sup>1</sup> sería igual a 1 mm. Esta duda en

---

<sup>1</sup>De acuerdo con el VIM-2008, la resolución propiamente dicha se refiere al cambio más pequeño en una magnitud que produce un cambio perceptible en la indicación correspon-

el resultado originada por el instrumento de medición también ocurre cada vez que se repiten las mediciones. Como la menciona el documento “*Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement*,” (JCGM, 2008), mejor conocido como la GUM-2008, al dar a conocer el resultado de la medición de esa magnitud, es obligatorio proporcionar algún número que sea representativo de la calidad del resultado, de forma tal que podamos tener una idea clara de su confiabilidad. Al carecer de ello, no es posible establecer comparaciones entre los resultados, ya sea entre ellos mismos, o con valores de referencia. Esto nos lleva al concepto de *incertidumbre*:

**Incertidumbre de medición:** parámetro no-negativo que caracteriza la dispersión de los valores de una magnitud, atribuidos a un mensurando, basado en la información usada.

Es decir, la incertidumbre nos indica un intervalo dentro del cual muy probablemente se encuentra nuestro resultado de medición. El origen de la incertidumbre puede provenir de las variaciones en los resultados al repetir la medición en múltiples ocasiones, de las correcciones que se hagan por posibles efectos sistemáticos, por las características de los instrumentos de medición, o de otras magnitudes que se utilicen desde fuentes externas para calcular el resultado final de una medición indirecta. Desafortunadamente, la consideración de este parámetro ha sido ignorada por una gran parte de la comunidad científica. Un número enorme de artículos científicos contiene resultados experimentales en los cuales no se hace siquiera mención a las incertidumbres. Por tanto, es necesario concientizar a quienes estudien carreras científicas para que conozcan los métodos de evaluación de la incertidumbre experimental, para que la incluyan en sus resultados siempre que realicen experimentos o que extraigan resultados de otros trabajos para valorar sus modelos teóricos. Por otro lado, un hecho igualmente grave es la confusión existente entre los términos “error” e “incertidumbre.” Como se puede ver de las definiciones de cada uno (capítulo 2 y este capítulo), son conceptos distintos. El error está relacionado con un valor de referencia y hasta puede ser negativo; la incertidumbre nos indica un intervalo alrededor del resultado de medición. En el pasado, efectivamente, se consideraba que eran sinónimos; el VIM y la GUM se publicaron originalmente en 1994 y ahí se estableció claramente la diferencia entre error e incertidumbre. Co-

---

diente. Para ser prácticos, no obstante, en este texto nos referimos como resolución a la del dispositivo visualizador.

mo se explica en la GUM-2008, se ha hecho una transición de la evaluación de la incertidumbre desde un *punto de vista del error* hacia un *punto de vista de la incertidumbre*. El objetivo de la medición en el primero es el de obtener un resultado lo más cercano posible al valor real o al de referencia. Entonces, de una manera burda, se menciona a la incertidumbre como el valor absoluto del error (Riveros y Rosas, 2006). En el segundo, en cambio, no se trata de obtener resultados de medición lo más cercanos posible a los valores de referencia, sino que se establece que la información extraída de las mediciones solo permite asignar un intervalo dentro del cual hay valores razonables del mensurando, suponiendo que no se han cometido fallas durante el experimento. La confusión, lamentablemente, ha persistido hasta el día hoy, pues aún textos recientes (Garduño, 2006; Riveros y Rosas, 2006; Riveros et al., 2009; Berendsen, 2011; Sierra Porta, 2011; Merrin, 2017; Taylor, 2022) siguen refiriéndose al “análisis de errores” y la “propagación de errores,” cuando en realidad se están refiriendo al “análisis de incertidumbres” y “propagación de incertidumbres.” Como veremos más adelante, esta interpretación incorrecta se ha arrastrado hacia los programas de graficación de datos experimentales, en donde, en vez de contar con “barras de incertidumbre” se incluyen las “barras de error,” expresión que no tiene sentido. Por el contrario, el texto publicado por Kirkup y Frenkel (2006) está totalmente apegado a las convenciones internacionales modernas.

## 5.2. LA EVALUACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE

Conforme a lo explicado en la GUM-2008, es indispensable que haya un método accesible y aceptado globalmente, que conduzca a una evaluación y expresión adecuada de la incertidumbre. De la misma manera en que se estableció y difundió el uso del SI, es conveniente instaurar un procedimiento “universal” que sirva para evaluar y expresar la incertidumbre en las mediciones, en las áreas de la ciencia, la ingeniería, el comercio, la tecnología y los reglamentos en general. Un método ideal para evaluar las incertidumbres debe contar con las siguientes características:

- universal: debe poderse aplicar a todo tipo de mediciones y de datos empleados en las mediciones;
- consistente internamente: se debe poder derivar directamente de las componentes que tienen aportaciones en ella, además de ser independiente de la manera en que se agrupan dichas componentes;

- transferible: cuando se evalúe la incertidumbre para un cierto resultado, debe ser posible utilizarla directamente en la evaluación de la incertidumbre de otra medición, en la cual se está utilizando el primer resultado.

Por otro lado, en los ámbitos comerciales e industriales se necesita presentar intervalos de confianza para determinadas magnitudes mensurables en los productos involucrados. El procedimiento de evaluación de la incertidumbre, entonces, debe incluir la posibilidad de calcular los intervalos de confianza.

Para evaluar la incertidumbre debemos tener en cuenta si el experimento incluye muchas mediciones del mismo mensurando. En este caso, una aproximación inicial para estimar la incertidumbre es la desviación estándar de los resultados de medición. De esta manera se tiene la *incertidumbre estándar*, que es “la incertidumbre del resultado de una medición expresado como una desviación estándar.” Se expresa como  $u(x)$ , por el término en inglés *uncertainty*.

De una manera general, se definen dos tipos de evaluación de la incertidumbre:

- La **evaluación tipo A** es el método de evaluación de la incertidumbre por medio del análisis estadístico de una serie de observaciones.
- La **evaluación tipo B** es el método de evaluación de la incertidumbre por medios distintos al análisis estadístico de una serie de observaciones.

Evidentemente, para la evaluación tipo A se requiere un conjunto de repeticiones de la medición deseada, mientras que el segundo puede incluir otras contribuciones, que explicaremos más adelante; las condiciones de repetibilidad se definieron en el capítulo 2. Típicamente, la incertidumbre tipo A  $u_A(x)$  se asocia con la desviación estándar de la media del conjunto de  $N$  resultados de medición. Es decir, a partir de la ecuación (4.5):

$$u_A(x) = \bar{s} = \frac{s}{\sqrt{N}} \quad (5.1)$$

---

### Ejemplo 5.1

A partir de los datos presentados en el ejemplo 4.1, encontramos que la media es  $1\,981\ \Omega$  y la desviación estándar es  $3.1\ \Omega$ . Puesto que el número de datos es  $N = 100$ , la incertidumbre tipo A es

$$u_A(x) = \frac{3.1\ \Omega}{\sqrt{100}} = 0.31\ \Omega$$

Para ser congruentes con la resolución del instrumento, la incertidumbre tipo A puede escribirse como  $u_A(x) = 0.3\ \Omega$ .

---

En lo que se refiere a la evaluación tipo B, la incertidumbre estándar  $u(x_i)$  se estima por medio de un juicio científico basado en toda la información accesible acerca de la variabilidad de nuestro mensurando  $x$ . Dicha información puede englobar:

- resultados de mediciones anteriores, aunque se hayan obtenido en el mismo laboratorio;
- experiencia o conocimiento general acerca del comportamiento y propiedades de instrumentos de medición, patrones de calibración o materiales de referencia;
- especificaciones proporcionadas por el fabricante de los instrumentos o materiales;
- datos suministrados en calibraciones u otros certificados;
- incertidumbres estipuladas en datos de referencia extraídos de manuales.

Por conveniencia, cuando la incertidumbre se obtiene con estos métodos, se le conoce como la incertidumbre estándar tipo B y podemos denotarla como  $u_B(x)$ . El empleo adecuado de la incertidumbre tipo B se fundamenta principalmente en la experiencia y el conocimiento general, y es tan confiable como la incertidumbre tipo A. Hay diversas maneras en que se indica la incertidumbre tipo B cuando el dato se extrae de tablas, manuales o especificaciones del fabricante. Por ejemplo, se puede decir que la incertidumbre mostrada es un múltiplo de la desviación estándar. En este caso,

la incertidumbre estándar es la desviación estándar dividida entre el multiplicador. Una forma alternativa de especificar la incertidumbre es mostrar un intervalo con un nivel de confianza de 90 %, 95 % o 99 %. Cuando no es explícito, se presume que se usó una distribución normal para determinar la incertidumbre, y se puede recobrar la incertidumbre estándar con el cociente del valor dado entre el factor correspondiente de la distribución normal. Dichos factores son 1.64, 1.96 y 2.58, respectivamente, para los niveles de confianza mencionados anteriormente. Si en el experimento hubiese otras distribuciones de probabilidad, estos factores serán distintos. Cuando se utiliza un resultado obtenido previamente en un experimento del mismo laboratorio que incluye una incertidumbre tipo A, esta se convierte en incertidumbre tipo B para los fines de evaluación de la incertidumbre final. Si solo fue posible realizar una medición, la mejor manera de asignar la incertidumbre será a través de las especificaciones que entregue el fabricante del instrumento de medición y es, por tanto, tipo B.

### Ejemplo 5.2

La figura 5.1a presenta la medición de una longitud por medio de una regla con resolución de 1 mm. Algunos autores aseguran que la incertidumbre asociada a este tipo de mediciones es en todos los casos igual “a la mitad de la mínima división de escala,” debido a que sólo existe una duda en la indicación más alta de la regla. No obstante, debe apreciarse que la misma falta de certeza existe en el extremo inicial de la regla. Por tanto, es más recomendable asignar como incertidumbre un valor mayor que la mitad de la resolución; por facilidad, puede usarse la resolución como la incertidumbre tipo B en este tipo de instrumentos de medición.

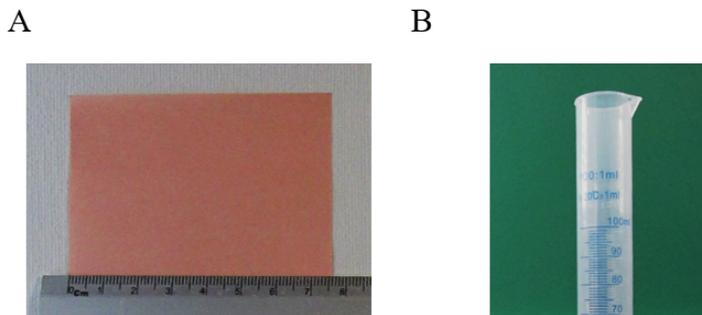


Figura 5.1. Ejemplos de instrumentos para mediciones directas, en los cuales se usa la resolución como incertidumbre tipo B. (A) Regla con resolución de 1 mm; (B) probeta con resolución de 1 mL.

Por otro lado, la Figura 5.1b muestra una probeta (instrumento utilizado para medir volúmenes de líquidos), en la cual el fabricante especifica que la incertidumbre es igual a la resolución (1 mL), a una temperatura de 20 °C. La experiencia de quien hace el experimento, a pesar de los ejemplos aquí mostrados, debe ser un factor determinante en la asignación de esta incertidumbre de medición. Al asignar la incertidumbre cuando se usan instrumentos no digitales, debemos ser muy cuidadosos, porque no necesariamente dicha incertidumbre es la “mitad de la resolución.” Un caso importante es el de un calibrador tipo vernier, puesto que se deben tomar en cuenta muchas variables que influyen en la incertidumbre. (González Muñoz, 2001) demuestra que la incertidumbre tipo B que se tiene en un calibrador tipo vernier de acero inoxidable, con una resolución de 0.05 mm (ampliamente utilizados en laboratorios de enseñanza), es igual a  $18 \mu\text{m}$ .

### Ejemplo 5.3

Los instrumentos de medición digitales generalmente contribuyen con incertidumbres tipo B que se calculan por medio de ecuaciones especificadas por los fabricantes en los manuales de operación. Por ejemplo, un multímetro digital marca *Börk*®, modelo MP-6012, presenta diferentes expresiones para las incertidumbres cuando se miden diferencias de potencial, intensidades de corriente o resistencias. Se muestran ejemplos en la Tabla 5.1, en la que *rdg* representa la indicación observada al hacer la medición y *D* es la resolución.

Magnitud	Intervalo en el multímetro	Resolución ( <i>D</i> )	Ecuación
Diferencia de potencial (CD)	20 V	10 mV	$1.0 \% \text{rdg} + 2D$
Intensidad de corriente	20 mA	10 $\mu\text{A}$	$1.5 \% \text{rdg} + 2D$
Resistencia	2 000 $\Omega$	1 $\Omega$	$1.2 \% \text{rdg} + 2D$

Por ejemplo, para el primer dato de la tabla 4.1, 1 981  $\Omega$ , la incertidumbre tipo B es  $u_B(R_1) = (1.2 \% ) \times (1\ 981 \Omega) + 2 \times (1 \Omega) = 26 \Omega$ . Nótese que esta incertidumbre es mucho mayor que la incertidumbre tipo A encontrada en el Ejemplo 5.1. Es útil señalar que, de manera incorrecta, los manuales de estos equipos especifican la incertidumbre tipo B como “exactitud” (*accuracy*, en inglés), término que, como ya vimos, no corresponde a la incertidumbre.

Adicionalmente, como describe la GUM-2008 (JCGM, 2008), la resolución de un instrumento digital también es una fuente de incertidumbre, aunque todos los resultados de medición fueran idénticos, ya que existe un intervalo de señales de entrada hacia el instrumento que registran la misma lectura. Si la anchura del intervalo se denota con  $\delta x$ , las señales de entrada que dan una indicación  $X$  están en el intervalo  $X - \delta x/2$  y  $X + \delta x/2$ , con una distribución rectangular de anchura  $\delta x$  y varianza  $u^2 = (\delta x)^2/12$ . Por tanto, la incertidumbre asociada con la repetibilidad será  $u(x) = 0.29\delta x$ . En el caso de los multímetros digitales,  $\delta x = D$ .

---

### 5.3. INCERTIDUMBRE ESTÁNDAR COMBINADA

Para poder unificar las incertidumbres tipo A y tipo B en una sola, se tiene la siguiente definición:

**Incetidumbre estándar combinada:** la incertidumbre estándar del resultado de una medición cuando el resultado se obtiene de los valores de otras cantidades, y es igual a la raíz cuadrada positiva de una suma de términos, los cuales son las varianzas o covarianzas de estas otras cantidades ponderadas de acuerdo a cómo el resultado de la medición varía con cambios en estas cantidades.

Esta incertidumbre se denota como  $u_c(x)$ , en donde la variable  $x$  es nuestro mensurando. El origen de esta definición se puede derivar cuando consideramos que, de manera general, en nuestras mediciones tenemos varios mensurandos que debemos “combinar” para determinar el mensurando final. Puede incluir incertidumbres obtenidas a partir de las evaluaciones tipo A y B. Cada uno de esos mensurandos debe tener una incertidumbre estándar.

Cuando hacemos una medición directa (esto es, solo se cuenta con una variable), la incertidumbre estándar combinada se obtiene a partir de la ecuación:

$$u_c = \sqrt{(u_A(x))^2 + (u_B(x))^2} \quad (5.2)$$

Ahora bien, si realizamos mediciones indirectas, primero podemos suponer que nuestro mensurando  $z$  es una función de otros dos mensurandos  $x, y$ :

$$z = f(x, y) \quad (5.3)$$

Si consideramos que las variables  $x, y$  pudieran tener pequeñas desviaciones  $\delta x$  y  $\delta y$  (podemos pensar que las incertidumbres son esas pequeñas desviaciones), la desviación  $\delta z$  es entonces

$$\delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y \quad (5.4)$$

Esta desviación puede usarse para encontrar, a su vez, una desviación estándar de los  $N$  valores de  $z$ ; equivale a la diferencia entre una media y el valor medido. Así pues, la desviación estándar de los valores de  $z$  resulta ser

$$s_z = \sqrt{\frac{\sum (\delta z)^2}{N}} \quad (5.5)$$

Por lo cual

$$\begin{aligned} s_z^2 &= \frac{1}{N} \sum \left( \frac{\partial z}{\partial x} \delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \delta y \right)^2 \\ &= \frac{1}{N} \sum \left( \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 (\delta x)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 (\delta y)^2 + 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \delta x \delta y \right) \\ &= \left( \frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \frac{1}{N} \sum (\delta x)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \frac{1}{N} \sum (\delta y)^2 + \frac{2}{N} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \sum \delta x \delta y \end{aligned}$$

y tomando en cuenta que

$$\frac{1}{N} \sum (\delta x)^2 = s_x^2$$

$$\frac{1}{N} \sum (\delta y)^2 = s_y^2$$

$$\sum (\delta x \delta y) \approx 0$$

resulta, por último, que:

$$s_z = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 s_x^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 s_y^2} \quad (5.6)$$

Es decir, las desviaciones estándar se propagan cuadráticamente. Cuando son más de dos variables, simplemente se extiende la suma dentro de la raíz cuadrada. Además, esta expresión es válida solo si las variables  $x$ ,  $y$  son independientes entre sí. De manera semejante se puede extender la ecuación 5.5 a la desviación estándar de la media. Con base en esto, la incertidumbre estándar combinada de un mensurando  $y$  que se determina a partir de  $k$  mensurandos  $x_i$  medidos de manera independiente (independientes), se calcula a partir de la *ley de propagación de la incertidumbre*:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) \quad (5.7)$$

En esta ecuación,  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Cada una de las  $u(x_i)$  puede ser una incertidumbre estándar evaluada según el procedimiento tipo A o el tipo B. Esta ecuación tiene sentido si pensamos que las incertidumbres se asocian con desviaciones estándar de la media y usamos la ecuación 5.5. A las derivadas parciales de la ecuación 5.6 se les llama *coeficientes de sensibilidad*  $y$ , a veces, se estiman experimentalmente cuando no se pueden relacionar con una función derivable. En el Apéndice B se presentan las expresiones para algunos casos comunes de funciones de dos o más variables para propagar las incertidumbres (suma, resta, multiplicación, división).

---

#### Ejemplo 5.4

La ecuación 5.6 se reduce a un solo término cuando  $y$  se obtiene a partir de un único mensurando. Por ejemplo, si  $y = x^3$ , tendremos:

$$u_{(y)} = \frac{dy}{dx} u_x = \frac{d(x^3)}{dx} u_x = 3x^2 u(x) \quad (5.8)$$


---

#### Ejemplo 5.5

En un experimento para medir la aceleración de la gravedad  $g$  utilizando un péndulo simple de longitud  $L$ , el periodo de oscilación  $T$  está dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (5.9)$$

de donde

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \quad (5.10)$$

Si  $L$  y  $T$  se determinan con incertidumbres  $u(L)$  y  $u(T)$ , respectivamente, la incertidumbre  $u(g)$  se encuentra aplicando la ecuación 5.6:

$$\begin{aligned} u(g) &= \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 u^2(L) + \left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 u^2(T)} \\ &= \sqrt{\left(4\pi^2 \frac{1}{T^2}\right)^2 u^2(L) + \left(4\pi^2(-2)\frac{L}{T^3}\right)^2 u^2(T)} \\ &= 4\pi^2 \sqrt{\frac{u^2(L)}{T^4} + \frac{2L^2 u^2(T)}{T^6}} = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \sqrt{\left(\frac{u^2(L)}{L^2} + \frac{2u^2(T^2)}{T^2}\right)} \end{aligned}$$

### Ejemplo 5.6

En las mediciones de las masas de los filtros de policarbonato representados en la Figura 4.10, el fabricante de la electrobalanza especifica que la incertidumbre del instrumento en la medición de la masa es de 0.01 mg (incertidumbre tipo B,  $u_B(m)$ ). Puesto que se trata de una muestra de 100 filtros y la desviación estándar mostrada en esa figura ( $s = 0.040$  mg), se tiene que la incertidumbre tipo A es  $u_A(m) = 0.004$  mg. Para obtener la incertidumbre estándar combinada de la masa promedio de los filtros ( $\bar{m} = 4.42$  mg), debe escribirse:

$$u_c(m) = \sqrt{u_A^2(m) + u_B^2(m)} = \sqrt{(0.004 \text{ mg})^2 + (0.01 \text{ mg})^2} = 0.011 \text{ mg}$$

De manera similar a cómo se definen los errores relativo y porcentual de un mensurando  $x$ , conviene introducir las incertidumbres relativa  $u_{c,R}(x)$  y porcentual  $u_{c,P}(x)$ :

$$u_{c,R}(x) = \frac{u_c(x)}{x}$$

$$u_{c,P}(x) = 100u_{c,R}(x) = 100 \frac{u_c(x)}{x}$$

#### Ejemplo 5.7

Con los resultados del Ejemplo 5.6, se encuentra que

$$u_{c,R}(m) = (0.011 \text{ mg}) / (4.42 \text{ mg}) = 0.0025 \text{ y}$$

$$u_{c,P}(m) = 100 \times (0.011 \text{ mg}) / (4.42 \text{ mg}) = 0.25 \text{ \%}.$$

#### 5.4. LA INCERTIDUMBRE EXPANDIDA

A menudo es indispensable proporcionar una incertidumbre que indique un intervalo alrededor del resultado de la medición, digamos  $Y$ , dentro del cual debe quedar incluida “una fracción grande de la distribución de valores que pueden adjudicarse razonablemente al mensurando” (BIPM, 2008). A dicho número se le conoce como *incertidumbre expandida*, que usualmente se representa con  $U$ . Esta se calcula multiplicando la incertidumbre combinada  $u_c(y)$  por un factor numérico llamado *de cobertura*,  $k$ :

$$U = k u_c(y) \quad (5.11)$$

Podemos entonces expresar convenientemente nuestro resultado de medición como  $Y = y \pm U$  en lo que se interpreta como un valor  $y$  atribuible al mensurando  $Y$ , comprendido en el intervalo  $y - U$  a  $y + U$ .

Se puede entender a  $U$  como un intervalo alrededor del resultado de la medición que cubre una fracción grande  $p$  de la función de distribución

de probabilidad, caracterizada por el valor más representativo y su incertidumbre estándar combinada. Aquí,  $p$  es la cobertura de probabilidad o nivel de confianza del intervalo. Siempre que podamos hacerlo, debemos especificar el nivel de confianza. Es necesario notar que al multiplicar la incertidumbre estándar combinada  $u_c(y)$  por una constante no vamos a tener más información, sino que la tendremos de una forma distinta. Por otro lado, el nivel de confianza  $p$  es incierto.

Para escoger el factor de cobertura  $k$  hay que tomar en cuenta el nivel de confianza propuesto, resultando en valores que normalmente están entre 2 y 3. La experiencia de quien realiza las mediciones es el principio fundamental para determinar qué valor que debe atribuirse a  $k$ . No obstante, si las distribuciones de probabilidad tanto de  $y$  como de  $u_c(y)$  son aproximadamente normales, con un número significativo de grados de libertad de  $u_c(y)$ , para un nivel de confianza de 95 % se selecciona para  $k$  el valor de 2, mientras que  $k = 3$  da origen a un intervalo con un nivel de confianza de 99 %.

En una situación en la cual estamos comparando dos resultados de medición, que deben incluir sus incertidumbres, en realidad no podemos afirmar que sean iguales como si fueran dos números. Más bien, es necesario comparar los intervalos de incertidumbre de ambos mensurandos; si se superponen, podremos decir que no estamos seguros de que sean diferentes, como en el caso en que no se superponen dichos intervalos, en el que sí diremos que son diferentes.

También podemos señalar que los intervalos de incertidumbre no son siempre simétricos. Existen experimentos en los cuales se obtiene una incertidumbre “hacia arriba” mayor que “hacia abajo” del resultado de medición, o viceversa. Desde luego, estas son situaciones particulares y deben tratarse según el problema que se esté estudiando.

De nuevo, hay que enfatizar que los términos error e incertidumbre no deben confundirse. Si bien las incertidumbres del tipo A tienen su origen en “pequeños errores” en los resultados de medición (es decir, diferencias con respecto al valor más representativo), las del tipo B no siempre tienen su origen en variaciones de esta naturaleza. Revisando la explicación de Kirkup y Frenkel (2006), los dos tipos de incertidumbre (A y B) no se asocian directamente con los errores aleatorio y sistemático, sino que se refieren a la forma de evaluar las incertidumbres experimentales.

Como hemos visto, evaluar la incertidumbre puede ser uno de los pasos más laboriosos durante la experimentación, sobre todo en mediciones en las que deben seguirse muchas etapas hasta llegar al resultado. Una muestra

es el análisis con cromatografía, donde hay que hacer muchos tratamientos a la muestra, lo que introduce numerosas fuentes de incertidumbre tipo B. A menudo, los autores prefieren omitir las incertidumbres resultantes y, si acaso, presentar algunas desviaciones estándar.

Para finalizar este capítulo, hay que subrayar que la incertidumbre experimental debe tomarse en cuenta en todas las actividades humanas en las que se realicen mediciones, no sólo en las que se refieren a la investigación científica. Los resultados de los análisis clínicos deberían incluir las incertidumbres, para ayudar al médico a decidir si un paciente debe recibir un tratamiento específico o no; los trabajos de Pérez-Castorena y Guevara Hernández (2002), Pérez Urquiza et al (2009), Zumbado Rivera y Leiva Quesada (2021) y Fuentes Arderiu (2002) muestran excelentes ejemplos de cómo evaluar la incertidumbre en análisis clínicos. Fernández-Pareja (2008) presenta un caso del cálculo de incertidumbres aplicado a la arquitectura. Podríamos citar muchos otros trabajos en diversas disciplinas en los que se resalta la importancia de incluir las incertidumbres experimentales para fortalecer la validez de los resultados de medición.

## CAPITULO 6. ESCRITURA DE RESULTADOS EXPERIMENTALES Y GRAFICACIÓN

Una vez que llevamos a cabo un experimento, será necesario dar a conocer sus resultados, ya sea que lo hicimos con finalidades de investigación, de enseñanza o para un desarrollo tecnológico, por mencionar solo unas cuantas. Para poder presentarlos, es conveniente que sigamos algunas “reglas” que faciliten su comprensión a los lectores y estén de acuerdo con las normas relativas a lo que estamos midiendo, al tiempo que sean “estéticamente atractivos.” Los resultados que queremos dar a conocer podrían tener diversas formas para su presentación. Podría requerirse escribir solo un resultado de medición, varios de ellos, mostrar una tabla o bien una gráfica que describa la relación entre dos o más variables. En este capítulo se encontrarán sugerencias para algunas de estas situaciones.

### 6.1. CIFRAS SIGNIFICATIVAS

Al realizar un experimento, dependiendo del instrumento de medición que utilicemos, es posible que obtengamos el resultado con un cierto número de cifras, ya sea con instrumentos analógicos o bien digitales, los cuales además podrían ofrecer indicaciones con más cifras para la misma magnitud, dependiendo de la calidad del aparato o de la escala utilizada. Más aún, es frecuente la necesidad de realizar operaciones con los resultados obtenidos. Las cifras que podemos extraer directamente del instrumento de medición o que resultaron de dichas operaciones y que tengan alguna información útil se conocen como *significativas* (Gutiérrez Aranzeta, 1998; Figueroa Montaña et al., 2014). Quien realice el experimento debe tener la seguridad de que dichas cifras tienen significado.

El estado actual de la tecnología de cómputo y aún de las calculadoras de bolsillo, permiten hacer cálculos que dan resultados con un gran nú-

mero de cifras decimales. No obstante, debe considerarse que, usualmente, los instrumentos de medición casi nunca ofrecen indicaciones con la misma resolución que dan una calculadora o una computadora. Por tanto, es imperativo revisar las cifras conseguidas con el instrumento de cálculo para hacerlas congruentes con las indicaciones del experimento. Esta situación se ve todavía más restringida por la existencia de la incertidumbre.

En resumen, no todas las cifras obtenidas en cálculos que involucran resultados de mediciones tienen sentido, es decir, son significativas. Es conveniente, por ello, seguir estas indicaciones para la presentación de los resultados:

- a. El número de cifras significativas no debe confundirse con el número de cifras decimales.
- b. Todos los dígitos diferentes de cero son significativos.
- c. Todos los ceros que se encuentran entre dígitos distintos de cero son significativos.
- d. Los ceros que aparecen a la izquierda del resultado no son significativos.
- e. Para un número mayor que 1, los ceros que están a la derecha del punto decimal son significativos.
- f. Los ceros a la derecha sin que haya un punto decimal pueden o no ser significativos, por lo que se requiere mayor información para explicarlo, como sería la incertidumbre.
- g. En un número menor que 1, los ceros que están a la derecha o entre dos cifras distintas de cero son significativos.
- h. La última cifra significativa de un resultado escrito debe ser congruente con la incertidumbre (es decir, debe estar en la misma posición decimal).
- i. La incertidumbre debe escribirse cuando mucho con dos cifras significativas.
- j. Sólo en situaciones específicas es conveniente escribir la incertidumbre con más de dos cifras significativas.
- k. Al hacer cambios de unidades, debe respetarse el número de cifras significativas.

## Ejemplo 6.1

Estos son ejemplos de resultados en los que se muestra cuál es el número de cifras significativas.

Tabla 6.1. Ejemplos para explicar el número de cifras significativas.

Número	Cantidad de cifras significativas	Reglas aplicadas
198	Tres	b
5.985	Cuatro	b
70 208	Cinco	c
0029	Dos	d
72.00	Cuatro	e
5 300	Dos, tres o cuatro (dependiendo de la incertidumbre)	f
0.0403	Tres	d, g
865 (25) <sup>a</sup>	Tres	h, i
4 900 (10)	Tres	f, h, i
4 900 (100)	Dos	f, h, i
583 m = 58 300 cm	Tres	k

<sup>a</sup> El número entre paréntesis representa la incertidumbre.

Para poder escribir los resultados de medición con el número correcto de cifras significativas también debemos *redondear* las cifras, de acuerdo con la siguiente guía:

- Cuando el dígito que sigue a la última cifra significativa a considerar es menor que cinco, se suprime todo lo demás que esté a la derecha.
- Si lo que está a la derecha de la última cifra significativa es mayor que cinco, dicha cifra significativa se aumenta en una unidad.
- En el caso de que la cifra siguiente a la que debe redondearse es cinco, la cifra significativa sube una unidad cuando es impar o se deja igual si es par, eliminando el cinco.

---

**Ejemplo 6.2**

En la Tabla 6.2 hay varios ejemplos de números redondeados al número de cifras significativas especificado.

Tabla 6.2. Ejemplos de números sujetos a redondeo.

Número	Cifras significativas	Número redondeado
12.438	Tres	12.4
63 168	Tres	63 200
4.2998	Cuatro	4.300
753.49	Tres	753
129.5	Tres	130
41.35	Tres	41.4
41.25	Tres	41.2

---

Cuando realizamos operaciones con los resultados de medición, también necesitamos escribir el resultado final con el número de cifras significativas apropiado. Una regla útil es que dicho resultado debe tener el mismo número de cifras decimales que aquel que tiene el menor número entre las utilizadas para realizar las operaciones. Es decir, si hacemos, por ejemplo, una multiplicación de tres resultados en los que tienen una, dos y tres cifras decimales, respectivamente, el producto final debe escribirse con una cifra decimal. Si los datos a los que vamos a aplicar la operación matemática no tienen cifras decimales, será necesario escribir el resultado final con el número de cifras significativas más bajo de entre todos los utilizados.

---

**Ejemplo 6.3**

Suma de tres resultados de medición:

35.27

9.276

+0.7

---

45.246

El número de cifras decimales más pequeño es uno, por lo que debemos escribir el resultado como 45.2.

Multiplicación de dos resultados de medición:

$$325 \times 41 = 13325 \quad (6.1)$$

debe escribirse como 13 000 porque el número de cifras significativas más bajo es dos.

---

**6.2. ESCRITURA DE LA INCERTIDUMBRE**

Para presentar por escrito los resultados de medición, incluyendo la incertidumbre, es recomendable seguir alguno de los siguientes formatos, sugeridos por la GUM-2008 y fijados en la norma mexicana NMX-CH-140-IMNC-2002. En este ejemplo, la cantidad medida es una masa  $m$ , patrón, nominalmente de 200 mg.

1.  $m = 201.25$  mg con (una incertidumbre estándar combinada)  $u_c = 0.11$  mg.
2.  $m = 201.25$  (11) mg, donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada)  $u_c$  referido a los correspondientes últimos dígitos del resultado dado.
3.  $m = 201.25$  (0.11) mg, donde el número entre paréntesis es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada)  $u_c$  expresado en las unidades del resultado dado.
4.  $m = (201.25 \pm 0.11)$  mg donde el número que sigue al símbolo  $\pm$  es el valor numérico de (la incertidumbre estándar combinada)  $u_c$  y no un intervalo de confianza.

En todos los casos, la expresión entre paréntesis en el texto puede omitirse.

Tiene que enfatizarse que la forma 4 debe evitarse en medida de lo posible, ya que se corre el riesgo de confundir la incertidumbre estándar combinada con un nivel de confianza  $y$ , a su vez, con una incertidumbre expandida. En otras palabras, el símbolo  $\pm$  ya no indica, en general, la incertidumbre estándar combinada, que es la que estamos obligados a utilizar en los resultados de medición, a menos que se especifique el procedimiento para tener una incertidumbre expandida.

### 6.3. GRAFICACIÓN

Una de las formas más prácticas, y a veces necesaria, de presentar los resultados de un experimento es a través de una gráfica. Como lo explica claramente Gutiérrez Aranzeta (2008), con las gráficas podemos distinguir el comportamiento de las variables que estamos estudiando en el experimento y cómo se relacionan; la comparación entre los resultados experimentales y las predicciones teóricas es rápida, haciendo posible también obtener información por medio de la interpolación o la extrapolación. Las gráficas requieren que se hayan medido al menos dos magnitudes, una de las cuales va a depender de la otra (u otras). En esta sección presentaremos algunas indicaciones para que la gráfica construida a partir de los datos experimentales sea de la calidad que requiere un buen informe del experimento (ya sea escolar, de investigación o técnico). Para construir una gráfica, primero debemos identificar cuál es la variable independiente y cuál es la dependiente. Usualmente, la independiente es la que podemos cambiar a voluntad para efectuar las mediciones, si bien podría haber un modelo teórico que puede explicarse mejor si esta última se considera como dependiente, sobre todo si el procedimiento experimental es más sencillo de esta manera. Así mismo, debemos decidir si es más conveniente dibujar la gráfica en papel o por medio de un programa de cómputo especializado. En el primer caso, también pueden seguirse ciertas recomendaciones para que la gráfica cumpla con nuestras necesidades (Gutiérrez Aranzeta, 2008):

- La variable independiente se grafica en el eje de las abscisas (eje  $x$ ).
- Las escalas se determinan de forma tal que todos los puntos queden contenidos en el área disponible para la gráfica.
- Dentro de lo posible, el comportamiento general de los puntos debe

alinearse a una recta con una pendiente de  $45^\circ$  (aunque la relación funcional entre las variables no sea una recta).

- Las escalas de las dos variables deben ser de un manejo sencillo y directo.
- De ser factible, la resolución del papel donde se hace la gráfica puede corresponder a la incertidumbre de los datos.
- Es preferible dejar un espacio entre los ejes y los límites del papel de graficación; en ocasiones esto no es posible.
- Las escalas no deben ser demasiado grandes o pequeñas.
- Es indispensable escribir siempre el nombre de la variable en cada eje, así como sus unidades.
- No es forzoso que los ejes comiencen en cero; a veces es mejor iniciar en un valor que permita una mejor descripción del comportamiento de los datos.
- A menos que cumpla con un propósito específico (como “servir como guía al ojo”), los puntos experimentales no deben unirse con segmentos de recta.
- Si los datos experimentales están en grupos muy separados porque sus valores son pequeños y grandes, puede “partirse” el eje y presentar ambos grupos en la misma gráfica.

La Figura 6.1 presenta una gráfica en papel milimétrico (o milimetrado, en otros países fuera de México) con los datos obtenidos en un experimento basado en la Ley de Ohm  $V = RI$ . Aquí, la variable dependiente es la intensidad de corriente  $I$  (medida en mA con un multímetro analógico), que pasa por una resistencia  $R$  y la variable dependiente es la diferencia de potencial  $V$  (medida con un multímetro digital) que se aplica a dicha resistencia. En esta primera etapa del proceso de graficación solo aparecen los puntos experimentales.

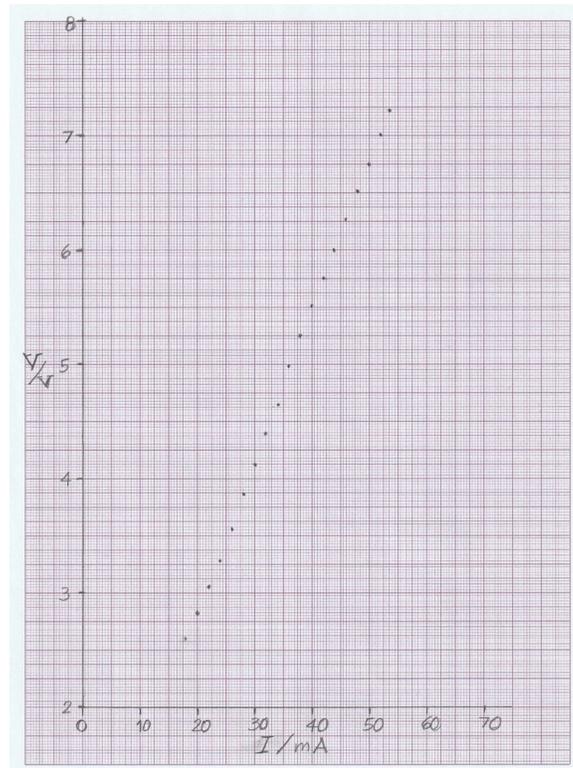


Figura 6.1. Gráfica con los resultados de un experimento basado en la ley de Ohm ( $V = RI$ ), donde  $I$  es la intensidad de corriente que pasa por una resistencia  $R$ , al aplicarse una diferencia de potencial  $V$ .

Como se mencionó más arriba, las divisiones de la escala deben ser de un manejo y visualización sencillos y cómodos. La Figura 6.2 contiene un ejemplo de una gráfica con escalas tanto mal construidas como bien estructuradas. La diferencia salta a la vista.

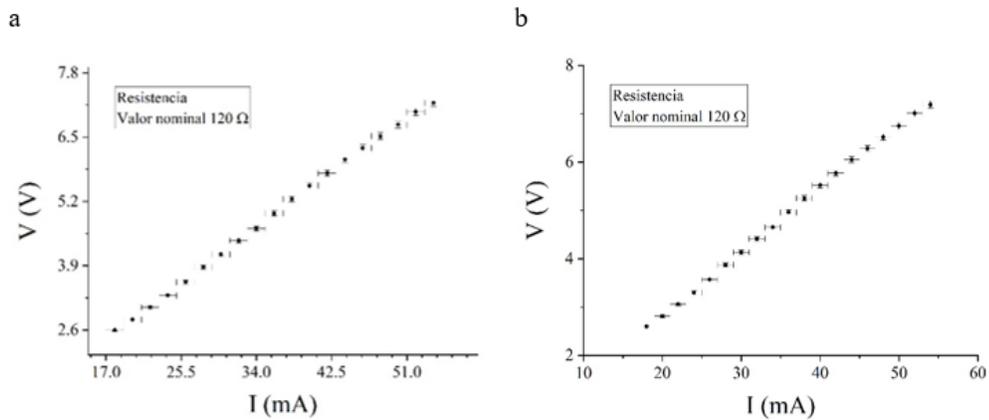


Figura 6.2. Ejemplos de gráficas dibujadas con los ejes (a) de manera incorrecta, por la dificultad de manejo y (b) correctos, en los que se observan intervalos simples y fáciles de manejar.

El siguiente paso es añadir las incertidumbres a los puntos. Como ya hemos explicado, la incertidumbre es un intervalo alrededor del valor más probable de nuestra medición. Así pues, para graficar la incertidumbre de un punto experimental con coordenadas  $(x_i, y_i)$  y que tiene incertidumbres  $u(x_i)$  y  $u(y_i)$ , en la gráfica podemos trazar segmentos de recta horizontales que van desde  $x_i - u(x_i)$  hasta  $x_i + u(x_i)$ , y segmentos verticales desde  $y_i - u(y_i)$  hasta  $y_i + u(y_i)$ . Es decir, la gráfica ya no será de un conjunto de puntos, sino de cruces formadas por segmentos de longitudes  $2u(x_i)$  y  $2u(y_i)$ . Esto se ilustra en la Figura 6.2.

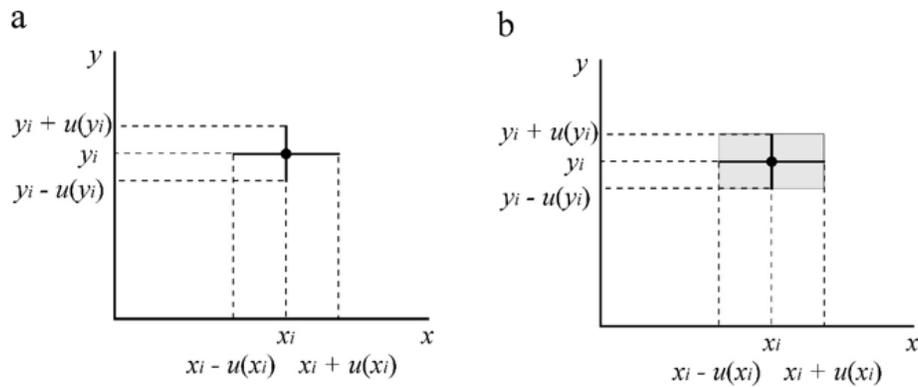


Figura 6.3. Representación gráfica de un punto experimental junto con la incertidumbre. (a) Punto con los segmentos correspondientes a los intervalos con las incertidumbres en  $x$  e  $y$ . (b) Las incertidumbres definen un rectángulo (área sombreada) alrededor del resultado de medición.

En la Figura 6.3a podemos ver cómo construir el punto experimental con sus incertidumbres, definiendo una cruz centrada en el resultado de medición. Estrictamente hablando, las incertidumbres establecen un área rectangular, centrada en el resultado de medición, dentro de la cual dicho resultado se encuentra con mayor probabilidad, tal como se advierte en la Figura 6.3b. Lo normal será dibujar el punto como una cruz, para facilitar la interpretación. Al incluir las incertidumbres en la gráfica de la Figura 6.1, tenemos como resultante la gráfica de la Figura 6.4. En este experimento en particular, las incertidumbres son tipo B, puesto que son las originadas por cada uno de los instrumentos de medición. En general, puede tratarse de incertidumbres estándar combinadas. Si las dos incertidumbres son muy pequeñas, es probable que sólo pueda apreciarse el punto. En caso de que una de las dos sea pequeña y la otra no, en vez de la cruz sólo se dibuja el segmento que concierne a la incertidumbre grande. En estas circunstancias, es indispensable mencionar en el texto del informe o el pie de figura que la incertidumbre es del tamaño del punto o más pequeña.

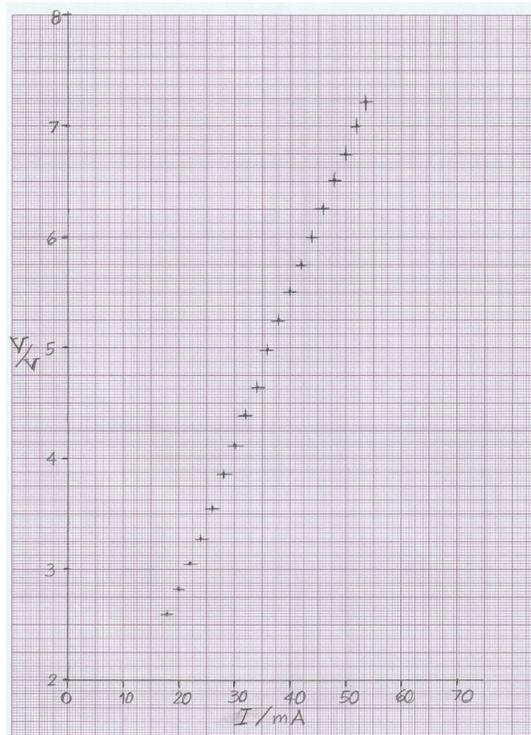


Figura 6.4. Gráfica con los mismos datos experimentales de la Figura 6.1, ahora incluyendo las incertidumbres experimentales.

Por otra parte, la Figura 6.5 contiene un ejemplo de gráficas dibujadas con un programa de cómputo (Excel®). La primera en 6.5a, es incorrecta porque se unieron los puntos con segmentos de recta, mientras que la 6.5b presenta la forma más adecuada de dibujar la gráfica. En esta aparecen también las incertidumbres experimentales y una curva ajustada (capítulo 7), junto con su ecuación.

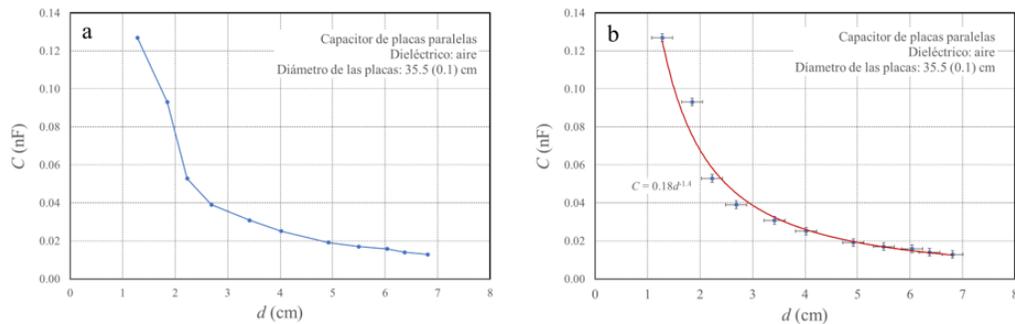


Figura 6.5. Ejemplos de gráficas para la capacitancia de un condensador de placas paralelas como función de su distancia de separación. (a) Forma incorrecta, por unir los puntos con segmentos de recta y no incluir las incertidumbres. (b) Forma correcta, en la que los puntos incluyen las incertidumbres, no se unen con segmentos de recta y se incluye una curva ajustada.

#### 6.4. ¿BARRAS DE ERROR O BARRAS DE INCERTIDUMBRE?

Como hemos mencionado en reiteradas ocasiones, las definiciones de error e incertidumbre son distintas. De hecho, la GUM-2008, en su página 5, establece que: “en esta guía se tiene mucho cuidado de distinguir entre los términos “error” e “incertidumbre.” No son sinónimos, sino que representan conceptos completamente diferentes; no deberían confundirse entre sí ni usarse de forma equivocada.” Por ello, referirse a las barras de incertidumbre como “barras de error” es, intrínsecamente, una expresión equivocada. Al hablar de un error estamos pensando en un “valor verdadero (real)” o “convencionalmente verdadero.” Al hacer inicialmente una medición, por ejemplo, de una longitud o una diferencia de potencial, tendríamos que conocer *a priori* cuál es el valor verdadero de nuestro mensurando si vamos a presentar gráficamente una “barra de error.” Si pretendemos hacer una serie de mediciones, como las que se muestran en la Figura 6.1, deberíamos conocer todos los valores verdaderos, tanto de la intensidad de corriente como de la diferencia de potencial, datos que no podemos conocer nunca. Es decir, no se cuenta con el “error” para cada una de nuestras mediciones y por tanto no podremos graficar “barras de error.”

Si, por el contrario, nos referimos a las incertidumbres extraídas de los manuales o por la experiencia al usar los instrumentos digital y analógico en las mediciones directas que se hicieron para construir la gráfica en las

Figuras 6.1 y 6.2, obtendremos de manera correcta las “barras de incertidumbre,” que en este caso son tipo B. En otros experimentos pueden ser incertidumbres estándar combinadas.

El ejemplo 6.4 ilustra el problema de tratar de utilizar este concepto equivocado durante un experimento.

---

#### Ejemplo 6.4

En el experimento de las Figuras 6.1 y 6.2 se hizo una medición de la diferencia de potencial  $V$  como función de la intensidad de corriente  $I$ , en una resistencia  $R$  cuyo valor nominal es de  $120\ (6)\ \Omega$ . Las incertidumbres correctas en  $V$  se calcularon a partir del manual del multímetro y en  $I$ , basándose en la experiencia del experimentador, se asignó un valor fijo de  $1\ \text{mA}$ , a partir de la resolución del instrumento. Ahora surge la pregunta: ¿si deseamos calcular el tamaño de las “barras de error” cuáles son los valores verdaderos (o al menos, de referencia), de  $I$  y de  $V$ ? Por supuesto, los desconocemos; pero supongamos que cada medición de la variable independiente  $I$  se puede tomar como un valor convencionalmente verdadero (suposición que no está justificada), al igual que el valor nominal de  $R$ . Entonces, usando la ley de Ohm  $V = RI$ , podríamos obtener un “valor verdadero” para  $V$  y de esta forma calcular un error en cada medición para construir sus “barras de error.” Este procedimiento a todas luces es incorrecto porque, además, no sabemos a ciencia cierta si los valores de  $I$  tienen algún error sistemático (por ejemplo, por la calibración del multímetro).

Para advertir lo impropio del término, usemos como ejemplo un dato en particular de este experimento; para una intensidad de corriente  $24\ (1)\ \text{mA}$ , la diferencia de potencial medida es  $3.30\ (0.04)\ V$ . Siguiendo el razonamiento inadecuado de las “barras de error,” con el valor de la resistencia ya mencionado se predice que la diferencia de potencial (“verdadera”) sería  $2.88\ V$ , por lo que nuestra medición tendría un error de  $0.42\ V$ , de donde tomaríamos esta cantidad para construir una “barra de error.” Como podemos notar, no hay ninguna relación con la incertidumbre tipo B asignada a  $V$ . Peor aún, no tenemos un valor verdadero para  $I$ , por lo cual es imposible determinar un error y, mucho menos, una “barra de error.”

---

En resumen, es necesario que, en congruencia con la nomenclatura aceptada internacionalmente, desterremos expresiones como “propagación de errores” y “barras de error,” por más que sigan permeando tanto el trabajo científico y tecnológico como los programas de cómputo especializados.

## CAPITULO 7. AJUSTE DE RECTAS Y EVALUACIÓN DE RESULTADOS

Al hacer un experimento, como ya hemos dicho, podemos tener muchas motivaciones y los objetivos ser de una gran diversidad. Por ejemplo, tal vez deseamos probar la validez de un modelo teórico o bien publicar resultados para que alguien más desarrolle un modelo apropiado. Los propósitos podrían ser, en contraste, puramente analíticos, en los que requerimos la calibración de nuestros instrumentos, o el de ofrecer información en otras áreas en las que es imposible tener un modelo teórico (como podrían ser las ciencias sociales) y sólo se pueden describir tendencias.

En todos estos casos debemos tener procedimientos que nos permitan extraer mayor información a partir de los resultados de medición.

La evaluación más simple es, como ya explicamos anteriormente, la comparación con valores de referencia, verdaderos (que en la realidad nunca podemos conocer) o, más bien, con los convencionalmente verdaderos. Esto nos permite determinar el error de nuestro resultado de medición. También se puede extender a la identificación de la función de distribución de probabilidad que engloba a nuestros resultados, para así también evaluar la incertidumbre experimental, ya sea estándar combinada o expandida. La consideración de los intervalos de incertidumbre fortalece la comparación entre dos o más resultados.

Otra situación se da cuando hacemos mediciones de más de una variable, entre las que podría haber una que depende de otra (u otras), por lo que es necesario tener métodos con los que podamos especificar matemáticamente dicha dependencia. Estos procedimientos dependerán de cómo estamos manejando nuestros datos. Si se hace de manera manual, en que graficamos los resultados en papel, como lo describimos en el capítulo 6, debemos recurrir a un método también gráfico para obtener la expresión matemática que mejor describa la dependencia. Por otro lado, cuando se tiene acceso a otras herramientas, como los programas de cómputo actua-

les, será más fácil (y confiable) usar un procedimiento también matemático con el cual conoceremos la conexión entre nuestras variables. En ambos casos podremos contrastar con modelos teóricos, construir relaciones para calibración o estudiar tendencias, según nuestras necesidades. Actualmente se ha dado preferencia a los métodos numéricos, si bien es conveniente conocer, al menos someramente, la manera en que se aplican los métodos gráficos.

## 7.1. MÉTODOS GRÁFICOS

La mejor y más detallada explicación de cómo se aplican los métodos gráficos para analizar la relación entre dos variables aparece en el texto de Oda (1997), por lo que aquí solo presentaremos una descripción breve de los procedimientos. El texto de Gutiérrez Aranzeta (2008) también contiene sugerencias muy útiles.

### 7.1.1. Relaciones lineales

Las relaciones funcionales entre dos (o más variables) más simples son las lineales. Para caracterizar una recta se requieren solo dos parámetros, por lo que no es muy elevado el número de datos experimentales que necesitamos para describir su comportamiento con la recta. De hecho, existen otras funciones que pueden reducirse a una recta para facilitar el análisis de los datos, como veremos más adelante. Para iniciar, recurriremos a los resultados mostrados en las Figuras 6.1 y 6.2. El experimento, como ya dijimos, se refiere a la Ley de Ohm, relacionando intensidad de corriente y diferencia de potencial en un resistor. Esta ley se expresa como:

$$V = RI \quad (7.1)$$

Desde el punto de vista analítico, es un caso particular de una recta:

$$y = mx + b \quad (7.2)$$

en donde  $m$  es la pendiente y  $b$  es la ordenada al origen. Podemos ver que el valor de la resistencia en la ecuación (7.1) se asocia con la pendiente de la recta. Esto quiere decir que si ajustamos una recta a los puntos experimentales de la Figura 6.2 y calculamos la pendiente, tendremos el valor de la resistencia.

En la Figura 7.1, por tanto, observamos la gráfica en la cual se ajustó una recta utilizando una regla; el “mejor ajuste” depende del criterio del

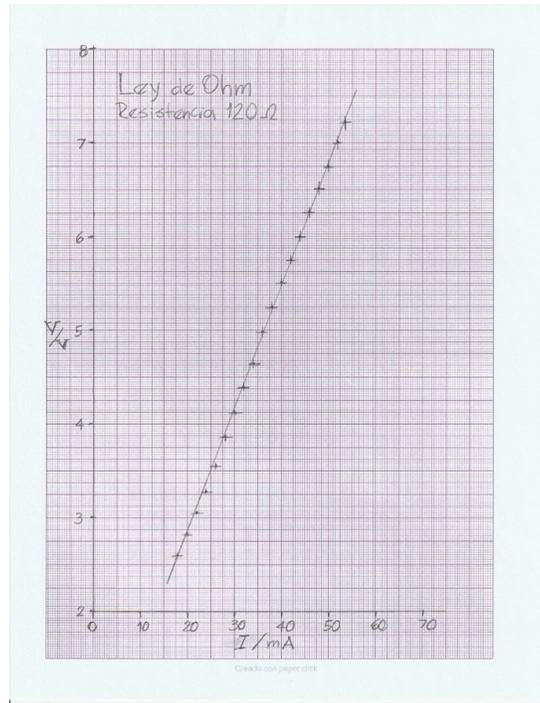


Figura 7.1. Gráfica con los datos de las Figuras 6.1 y 6.2, de un experimento basado en la ley de Ohm ( $V = RI$ ), donde se ajustó “a ojo” una recta.

experimentador con este método. Sin embargo, debemos tener en cuenta que la recta debe cruzar por la mayoría de los intervalos de incertidumbre y, posiblemente, que quede un igual número de datos a ambos lados de la recta.

Para estimar los valores de pendiente y ordenada al origen, se escogen dos puntos de la recta (preferiblemente alejados), como muestra la Figura 7.2, resultando en coordenadas  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y se utilizan las ecuaciones

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (7.3)$$

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 \quad (7.4)$$

En la ecuación (7.4) también podría usarse el punto  $(x_2, y_2)$ . Si en nuestra gráfica aparece el valor  $x = 0$ , igualmente es posible extender la recta hasta que cruce el eje  $y$  para encontrar el valor de  $b$ . Podemos advertir que la pendiente tendrá las unidades de  $y/x$  y la ordenada al origen las de  $y$ .

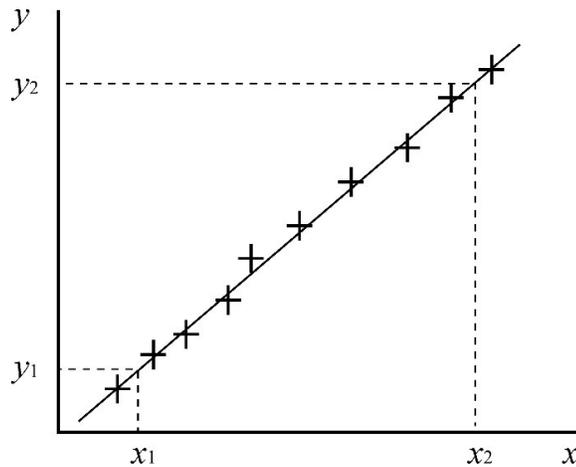


Figura 7.2. Selección de dos puntos sobre una recta para calcular pendiente y ordenada al origen.

---

### Ejemplo 7.1

De la gráfica en la Figura 7.1, se seleccionan los puntos sobre la recta con las coordenadas (18.5 mA, 2.67 V), (52.5 mA, 7.12 V). Usando las ecuaciones 7.3 y 7.4, encontramos que  $m = 131 \text{ V/A} = 131 \Omega$  y  $b = 0.25 \text{ V}$ . En esta gráfica no es posible ver el punto donde la recta cruza el eje  $y$ , porque la escala vertical inicia en 2.

Puesto que el valor nominal de  $R$  es  $120 \Omega$  (con tolerancia de 5 %) y también se midió la resistencia con un multímetro, resultando  $120 (6) \Omega$ , encontramos que el error en este caso es  $\epsilon = 131 \Omega - 120 \Omega = 11 \Omega$ . El error porcentual es 9 %, indicando que posiblemente hay un error sistemático en alguno de los instrumentos.

---

Una desventaja del método gráfico es que no es sencillo asignar incertidumbres a los parámetros de la recta. Una posibilidad es tratar de ajustar, también "a ojo," otras dos rectas que crucen a la primera, con diferentes pendientes y ordenadas al origen, pero que también cubran aproximadamente a todos los puntos experimentales. Se calcularían los parámetros de estas rectas y las incertidumbres pueden tomarse como las diferencias con la pendiente y ordenada al origen de la recta original. Cuando se espera que la recta pase por el origen, las rectas con diferentes pendientes pueden

trazarse para cubrir al máximo los intervalos de incertidumbre. Si en el experimento lo más probable es que  $b \neq 0$ , se trazan las rectas de manera que crucen por el centroide, es decir, el punto medio del intervalo de los datos experimentales tanto en  $x$  como en  $y$ . La Figura 7.3 ilustra burdamente ambas situaciones.

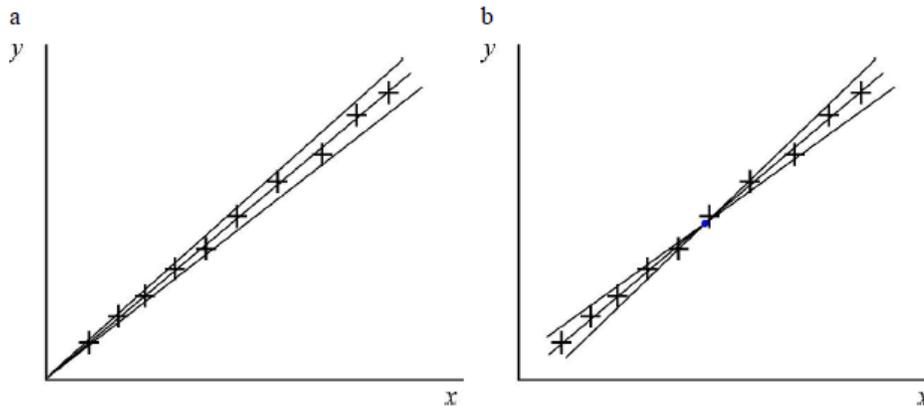


Figura 7.3. Rectas dibujadas para estimar la incertidumbre de sus parámetros (a) cuando las rectas deben pasar por el origen; (b) cuando las rectas pasan por el centroide de los datos, en un caso más general

### 7.1.2. Cambios de variable

Más arriba dijimos que en algunos casos es posible convertir algunas funciones que relacionan a dos variables en una recta. Normalmente se hace cuando se espera que haya un cierto comportamiento de la variable dependiente, ya sea por un modelo teórico existente o por experiencia de quien realiza las mediciones. Podemos lograr esto a través de cambios de variable, es decir, definiendo nuevas variables que dependen directamente de las originales. El primer caso sería cuando el modelo predice un comportamiento del tipo  $y = Ax^n$ , donde se conoce  $n$ . Si definimos una nueva variable  $X = x^n$ , la nueva ecuación es  $y = AX$ . Esto es, si graficamos  $y$  como función de  $X$ , tendremos una recta con pendiente  $A$ .

Cuando no se conoce  $n$ , podemos hacer un cambio de variables logarítmicas, de forma que  $X = \log x$  y  $Y = \log y$ . En este caso, la función logarítmica puede tener cualquier base ( $e$  o  $10$ , por ejemplo). Entonces:

$$\begin{aligned}y &= An^x \\ \log y &= \log(Ax^n) = \log A + \log x^n = \log A + n \log x \\ Y &= \log A + nX\end{aligned}\tag{7.5}$$

y, al graficar  $Y$  como función de  $X$ , nos resulta una recta con pendiente igual a  $n$  y ordenada al origen  $\log A$ . Por último, si la dependencia esperada es exponencial,  $y = Ae^{Bx}$ , definimos una nueva variable  $Y = \log y$ . El resultado es ahora:

$$\begin{aligned}y &= Ae^{Bx} \\ \ln y &= \ln(Ae^{Bx}) = \ln A + \ln(e^{Bx}) = \ln A + Bx \\ Y &= \ln A + Bx\end{aligned}\tag{7.6}$$

Esto es,  $Y$  es una función lineal de  $x$ , con pendiente  $B$  y ordenada al origen  $\ln A$ . Una manera práctica de graficar en papel datos experimentales en donde se esperan las dependencias del tipo de las ecuaciones (7.5) o (7.6) es a través de las hojas especiales log-log y semi-log. En las primeras, tanto las escalas  $x$  como  $y$  se han convertido a logaritmos base 10, mientras que en la segunda únicamente  $y$  se convierte a logaritmo base 10. La Figura 7.4 presenta ejemplos de papeles log-log y semi-log. En la Figura 7.4a, en el papel log-log se aprecian ciclos en  $x$  e  $y$ , que corresponden a potencias de 10, mientras que en 7.4b el papel semi-log solo muestra los ciclos en la escala vertical. Las potencias de 10 pueden ser tanto negativas como positivas.

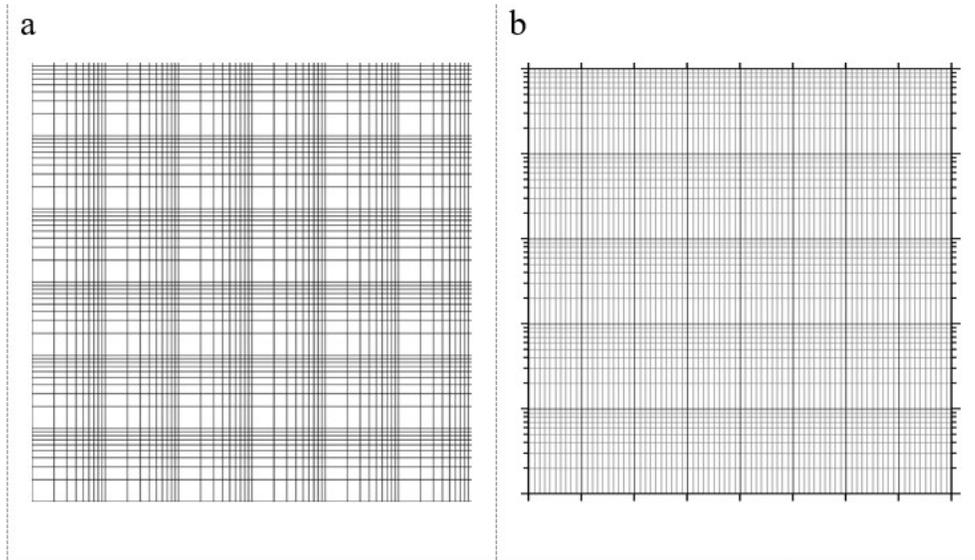


Figura 7.4. Ejemplos de hojas de papel (a) log-log de seis ciclos por seis ciclos; (b) semi-log de cinco ciclos en la escala vertical.

En estos papeles, una vez que se asignaron las escalas, los datos se grafican directamente, sin necesidad de hacer cálculo alguno. Además, de la misma forma que ajustamos una recta a los puntos en una escala lineal, podemos dibujar rectas que se aproximen lo mejor posible a los puntos en los papeles log-log y semi-log, para hallar los parámetros de la recta. No debemos pasar por alto que, al hacer un cambio de variable, también debemos propagar la incertidumbre hacia la nueva variable.

### Ejemplo 7.2

En un experimento para estudiar el movimiento uniformemente acelerado, medimos la posición de un balón de acero que se desplaza sobre un riel de aluminio como función del tiempo, mediante un video que después se analiza con el programa *Tracker*® (Physlets, 2024). En la Figura 7.5a observamos una gráfica de la posición como función del tiempo. Dado que es un movimiento uniformemente acelerado, se espera que los puntos sigan un comportamiento parabólico. Como la posición inicial se considera el origen y el móvil parte del reposo, la relación teórica es  $s = at^2/2$ , donde  $s$  es la posición,  $a$  la aceleración y  $t$  el tiempo. Notamos que esta ecuación se presta a hacer un cambio de variable a  $t^2$ . El resultado lo tenemos en la Fi-

gura 7.5b, donde ahora los puntos se aproximan a una recta. Por otro lado, también podemos dibujar una gráfica log-log, en la que ahora la pendiente debe aproximarse a 2, por el comportamiento cuadrático del movimiento. Esto aparece en la Figura 7.5c.

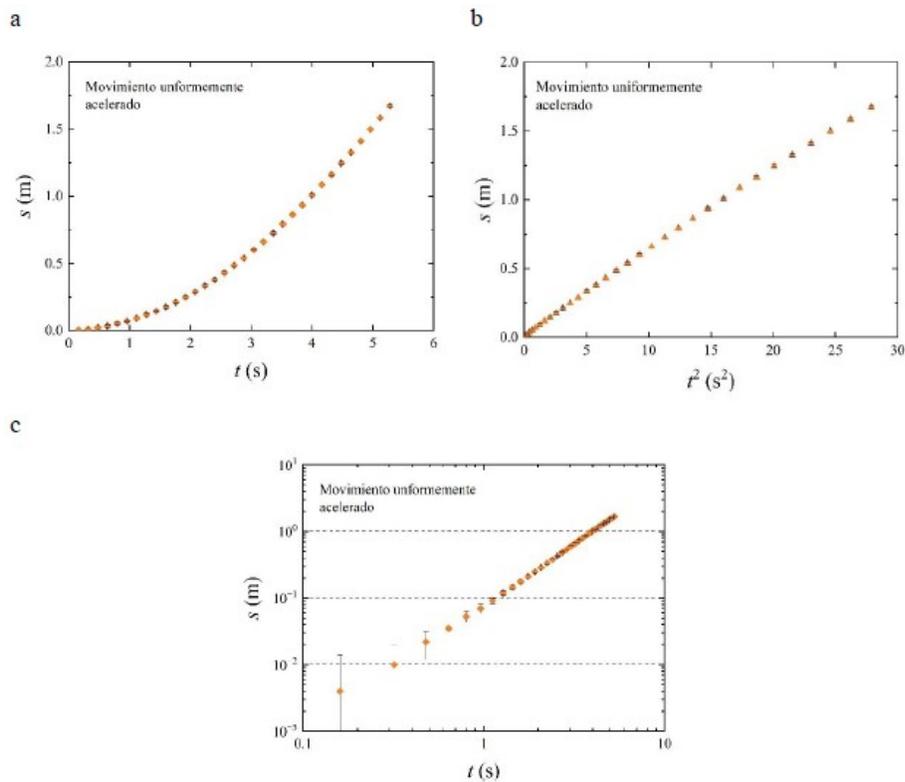


Figura 7.5. Gráficas para un movimiento uniformemente acelerado. (a) Las dos coordenadas en la escala lineal. (b) Con un cambio de variable a  $t^2$  en las abscisas. (c) Las dos variables en escalas logarítmicas.

Cuando no conocemos la forma en que depende una variable de la otra (esto es, diferente a una recta), el problema es más complicado. Si bien podríamos intentar ajustar una curva a los puntos experimentales trazándola con un curvígrafo, esto solo será útil para hacer algunas interpolaciones. Además, debemos tener el cuidado de no tratar de ajustar una recta cuando en la gráfica se note que los datos tienen un comportamiento distinto. Los

cambios de variables pueden ser bastante más complicados. En los ejercicios aparece un caso de este tipo.

## 7.2. REGRESIÓN LINEAL

Hemos visto cómo extraer la información de una recta utilizando métodos gráficos. Sin embargo, existen procedimientos matemáticos que utilizan directamente los resultados de medición para determinar la relación entre las variables. La situación más simple es una relación lineal, en la que deben determinarse como parámetros la pendiente y la ordenada al origen de una recta. La ventaja es que, además, los métodos pueden extenderse a casos en los cuales dichas relaciones no son de este tipo. La técnica más ampliamente difundida para ajustar una recta a un conjunto de parejas de datos experimentales es la *regresión lineal* (Baird, 1996; Sierra Porta, 2011; Merrin, 2017). Este método tradicionalmente se conoce como el de *mínimos cuadrados lineales* o *cuadrados mínimos lineales*, según otros autores, si bien, como veremos, un nombre más adecuado sería *suma mínima de cuadrados*. En este, se hace una minimización de la suma cuadrática de las distancias verticales o residuos,  $\Delta y_i$ , entre los datos experimentales y la recta por ajustar, considerando como variables a la pendiente  $m$  y la ordenada al origen  $b$  (Figura 7.6). Esto da como resultado un sistema de ecuaciones para dichas variables, a partir del cual se obtiene la solución:

$$m = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (7.7)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (7.8)$$

En estas ecuaciones,  $N$  es el número de parejas de resultados experimentales, mientras que  $(x_i, y_i)$  son las coordenadas del punto  $i$ . La forma de encontrar estas ecuaciones aparece en el Apéndice D. La dimensión de  $m$  es igual a la de  $y/x$  y la de  $b$  es la misma que  $y$ .

Los parámetros de la recta, puesto que se derivan de resultados experimentales, necesariamente tienen una incertidumbre asociada. Esta se puede determinar a partir de las desviaciones verticales entre los puntos experimentales y los valores que predice la recta obtenida con las ecuaciones (7.7) y (7.8). Partimos de un equivalente de la desviación estándar,  $S_y$ :

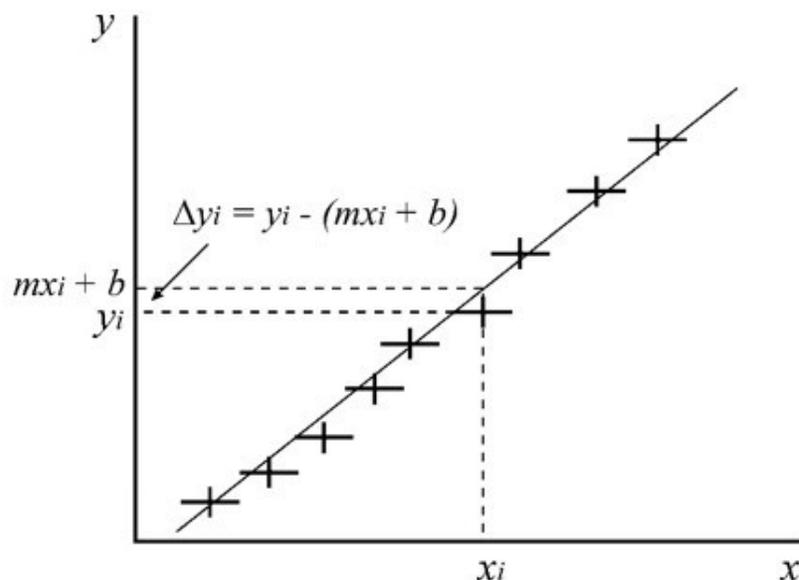


Figura 7.6. Distancia vertical (residuo) entre el punto experimental y la ordenada predicha por la recta que se va a ajustar.

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - mx_i - b)^2}{N - 2}} \quad (7.9)$$

Aquí hay que observar que el número de grados de libertad ya disminuyó en dos, porque usamos a  $m$  y a  $b$  como datos para calcular  $S_y$ . Una vez que hallamos esta desviación estándar, la usamos para determinar las incertidumbres en la pendiente,  $S_m$ , y en la ordenada al origen,  $S_b$ , con las expresiones:

$$S_m = S_y \sqrt{\frac{N}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}} \quad (7.10)$$

$$S_b = S_y \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N x_i^2}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i\right)^2}} \quad (7.11)$$

Las ecuaciones (7.7) a (7.11) son válidas únicamente si las incertidumbres de cada uno de los puntos experimentales son iguales. La consideración de las incertidumbres distintas tanto en  $x$  como en  $y$  se explica en el Capítulo 11.

### Ejemplo 7.3

Se lleva al cabo un experimento para conocer la dependencia de la densidad del agua como función de su temperatura. Se utiliza un densímetro para agua con resolución de 0.001 g/mL y un termómetro de alcohol con resolución de 1 °C. Los datos obtenidos se observan en la Tabla 7.1.

Tabla 7.1. Resultados obtenidos en el experimento para medir la densidad del agua como función de su temperatura.

Temperatura (°C)	Densidad (g mL <sup>-1</sup> )
10 (1)	1.080 (0.001)
20 (1)	1.075 (0.001)
30 (1)	1.070 (0.001)
40 (1)	1.065 (0.001)
50 (1)	1.057 (0.001)
60 (1)	1.055 (0.001)
70 (1)	1.050 (0.001)
80 (1)	1.047 (0.001)

Aplicando las ecuaciones (7.7) a (7.11), tenemos los cálculos presentados en la Tabla 7.2 para encontrar los parámetros que caracterizan a la recta que mejor se ajusta a los datos mediante la regresión lineal. La Figura 7.7 contiene una gráfica de los resultados experimentales con la recta obtenida. Ahí podemos apreciar que incluimos la ecuación de la recta, junto con las incertidumbres en los parámetros; dependiendo del espacio disponible en la gráfica misma, podemos escribir las unidades o bien explicarlo en el pie de figura correspondiente.

Tabla 7.2. Cálculos para aplicar el método de regresión lineal.

Cantidad	Resultado
$\sum x_i$	360 °C
$\sum x_i^2$	20 400 °C <sup>2</sup>
$\sum x_i y_i$	380.41 °C g mL <sup>-1</sup>
$\sum y_i$	8.499 g mL <sup>-1</sup>
$m$	-0.00049 g mL <sup>-1</sup> /°C
$b$	1.084 g mL <sup>-1</sup>
$\sum (y_i - mx_i - b)^2$	0.0000122 g <sup>2</sup> mL <sup>-2</sup>
$s_y$	0.00142 g mL <sup>-1</sup>
$s_m$	$2.20 \times 10^{-5}$ g mL <sup>-1</sup> /°C
$s_b$	0.0011 g mL <sup>-1</sup>

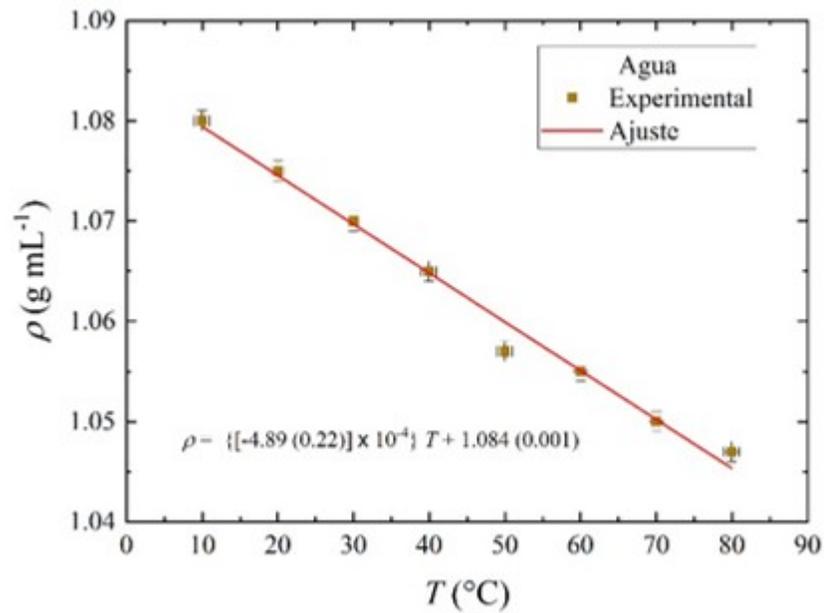


Figura 7.7. Densidad del agua como función de la temperatura.

Podemos también señalar que, si la incertidumbre  $S_b$  es mayor que  $b$ , significa que hay una gran probabilidad de que la recta pase por el origen, porque este queda dentro del intervalo.

Una herramienta simple para hacer los ajustes con mínimos cuadrados es Excel®. En el Apéndice D describimos qué fórmulas aplicar para llevar a cabo el ajuste del Ejemplo 7.3. El ajuste por regresión lineal no está limitado a rectas, aunque se hayan obtenido mediante un cambio de variable que linealiza los resultados de medición. También se puede extender a polinomios con una sola variable independiente (Sierra Porta, 2011), o bien a situaciones en que hay dos o más variables independientes, en cuyo caso hablamos de la regresión lineal múltiple. En esta última situación, debido a la complejidad de las ecuaciones para cada parámetro, es mejor recurrir a programas especializados, como *Origin*®, *Statistica*® o *Stata*®, entre otros, o bien escribir programas en plataformas del tipo de *Mathematica*® y *Mathlab*®.

### 7.3. PRUEBAS DE BONDAD DE AJUSTE

Una vez que ajustamos la recta y encontramos la ecuación, es posible que nos preguntemos qué tan bien “predice” nuestra recta (o cualquier curva que hayamos ajustado) a los datos experimentales. Para esto, existen diversas pruebas, que describiremos a continuación.

#### 7.3.1. El coeficiente de correlación

En muchas situaciones de las actividades científicas es necesario estudiar la relación existente entre dos o más variables. En particular, es de interés saber si al modificar una de las variables de una manera regulada puede observarse un cambio correspondiente en la variable dependiente. Si bien en ciencias como la Física o la Química puede resultar un tanto directo discernir si dicha relación existe o no, en otros campos científicos, como la Biología, las Ciencias Ambientales o Ciencias Sociales, la relación puede ser más confusa. En la sección anterior vimos una situación en la que la relación es bastante clara: si la temperatura del agua aumenta, su densidad se reduce. Por lo contrario, en la Figura 7.8 hay una gráfica de las concentraciones de azufre como función de las concentraciones de masa de partículas atmosféricas respirables ( $PM_{10}$ ) en un sitio de la Ciudad de México. En este caso, es muy difícil establecer una relación entre ambas variables, es decir,

no en todos los puntos ocurre que, al aumentar la concentración de masa, crece la concentración de azufre.

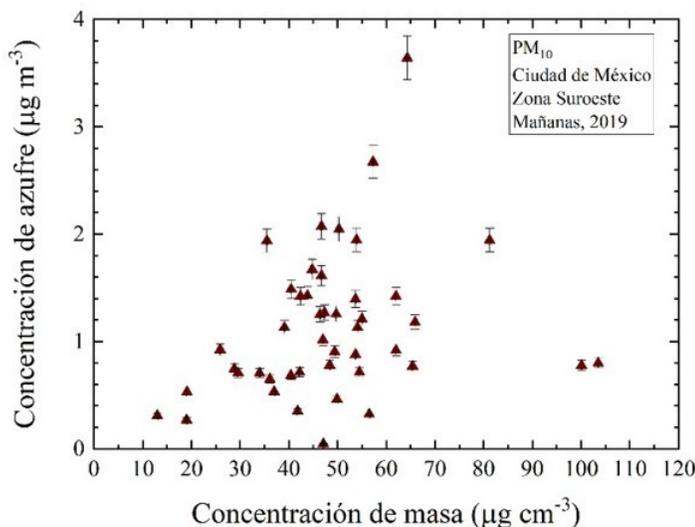


Figura 7.8. Concentración de azufre como función de concentración de masa de partículas PM<sub>10</sub> en el aire de un sitio de la Ciudad de México, durante el primer semestre de 2019 (Mejía-Ponce et al., 2022).

Un parámetro estadístico que nos da información cuantitativa para decidir si existe una conexión entre las dos variables es el *coeficiente de correlación lineal de Pearson* (Taylor, 2022). Para dos variables  $x$ ,  $y$  cuyas medias son  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ , respectivamente, se define como:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (7.12)$$

Este coeficiente puede adquirir valores entre -1 y 1. Cuando  $r$  es negativo, la dependencia es decreciente, esto es, al aumentar la variable independiente, la dependiente disminuye; si es positivo, al crecer la primera, se eleva el valor de la segunda. No obstante, si es cercana a cero, se dice que las variables se correlacionan poco o no se correlacionan. Cuando el coeficiente de correlación tiene un valor absoluto cercano a la unidad, obviamente, las variables se correlacionan bien.

En la ecuación 7.12, en el denominador observamos las varianzas de ambas variables, mientras que en el numerador aparece el parámetro conocido

como *covarianza*. También es frecuente el uso del *coeficiente de determinación*  $R^2$ , que no es sino  $R^2 = r^2$ .

#### Ejemplo 7.4

Para los datos del ejemplo 7.3 y las concentraciones de la Figura 7.8, tenemos los cálculos de la Tabla 7.3.

Tabla 7.3. Coeficientes de correlación de Pearson para datos de Ejemplos 7.3 y Figura 7.8.

Cantidad	Densidad/Temperatura	Concentraciones
$\bar{x}$	45 °C	48.5 $\mu\text{g m}^{-3}$
$\bar{y}$	1.062 $\text{g mL}^{-1}$	1.12 $\mu\text{g m}^{-3}$
$\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	-2.045 °C $\text{g mL}^{-1}$	139 $\mu\text{g}^2 \text{m}^{-6}$
$\sum(x_i - \bar{x})^2$	4200 °C <sup>2</sup>	13 610 $\mu\text{g}^2 \text{m}^{-6}$
$\sum(y_i - \bar{y})^2$	0.001008 $\text{g}^2 \text{mL}^{-2}$	20.4 $\mu\text{g}^2 \text{m}^{-6}$
$r$	- 0.994	0.268
$R^2$	0.988	0.072

Observamos que en la primera columna el coeficiente de correlación es cercano a -1 y en la segunda es más bien cercano a cero, esto es, aquí las variables no se correlacionan bien. En cuanto a la forma de presentar el coeficiente de correlación, la GUM-2008 recomienda que se escriba con tres cifras decimales.

Por otro lado, es conveniente mencionar que en el Apéndice F se incluye una tabla, adaptada del texto de Taylor (2022), para demostrar si la correlación calculada es significativa o no, dependiendo del número de datos experimentales usados para el ajuste. Un punto que debemos enfatizar es que la correlación entre dos variables no implica necesariamente *causalidad*, es decir, que el cambio en la variable independiente produce la variación en la otra. Hay situaciones en que las variables se correlacionan sin que en la realidad tengan que ver una con otra. Estas correlaciones “absurdas” (fortuitas) pueden observarse, por ejemplo, en la dependencia del número de accidentes fatales en las carreteras de los E.U.A. y las exportaciones de limón de México hacia los E.U.A. (Johnson, 2008). Otros casos se pueden

encontrar en StackExchange (2020).

El coeficiente de correlación es fundamental, como veremos más adelante, cuando debemos determinar la incertidumbre experimental de magnitudes derivadas de funciones de variables que están correlacionadas entre sí, mediante una generalización de la ecuación 5.6.

### 7.3.2. El parámetro $\chi^2$ (ji cuadrada)

En la sección 7.2 vimos que el principio de regresión lineal para ajustar la recta se basa en la minimización de la suma del cuadrado de los residuos. Es factible extenderse a casos más generales, en los que podamos considerar también las incertidumbres de los datos experimentales, sobre todo cuando estas no son iguales. Para empezar, pensemos que, en un conjunto de mediciones de la misma magnitud debemos calcular la media para encontrar la mejor estimación. No obstante, si no todas las mediciones tienen incertidumbres iguales, las que tienen mayor incertidumbre deberían influir menos en nuestra mejor estimación. Para esto, asigna un peso distinto a cada uno de los datos de acuerdo con su incertidumbre, de manera que la nueva estimación se obtiene con la ecuación (Bevington y Robinson, 2003; Merrin, 2017):

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad (7.13)$$

Donde  $w_i$  es el peso que se le da al dato  $x_i$ . El peso se determina a partir de la incertidumbre  $u(x_i)$  con la expresión

$$w_i = \frac{1}{u^2(x_i)} \quad (7.14)$$

A la estimación de  $x$  definida con la ecuación (7.13) se le llama la *media pesada o ponderada*.

Ejemplo 7.5

Se mide una resistencia y se obtienen los resultados presentados en la Tabla 7.4.

Tabla 7.4. Resistencia medida a un resistor con valor nominal de 330 Ω.

297 (3.8) Ω	320 (5.8) Ω	292 (3.7) Ω	295 (3.7) Ω
290 (3.7) Ω	320 (5.8) Ω	320 (5.8) Ω	320 (5.8) Ω
291 (3.7) Ω	330 (6.0) Ω	295 (3.7) Ω	330 (6.0) Ω
320 (5.8) Ω	293 (3.7) Ω	330 (6.0) Ω	296 (3.8) Ω
320 (5.8) Ω	294 (3.7) Ω	293 (3.7) Ω	320 (5.8) Ω

La media calculada con la ecuación 4.1 es 308 Ω, mientras que si se asignan los pesos de la ecuación 7.14, con base en las incertidumbres, la media ponderada es 302 Ω.

Como dijimos anteriormente, la mejor estimación de una magnitud es la media de los resultados de medición; esto también puede extenderse al cálculo de una probabilidad con la función de distribución de los resultados. Partiendo, además, del concepto de la desviación estándar de la media, podemos considerar el cociente (Taylor, 2022):

$$\frac{O_i - E_i}{\sqrt{E_i}} \quad (7.15)$$

en donde  $O_i$  corresponde a una observación o al número de resultados dentro de un intervalo de la función de distribución, mientras que  $E_i$  es el valor esperado. El denominador  $E_i^{1/2}$  corresponde a la desviación estándar estimada. Si las observaciones son adecuadas, la diferencia en el numerador debe ser pequeña. Por tanto, para evaluar el conjunto de nuestros resultados de medición definimos un nuevo parámetro, conocido como la  $\chi^2$  (*ji cuadrada*, en español), para  $N$  observaciones (Taylor, 2022):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \quad (7.16)$$

Es importante notar que en la ecuación 7.16 las cantidades son adimensionales, refiriéndose más bien a las probabilidades en la distribución de

nuestros resultados. Mediante la  $\chi^2$  podemos decidir si nuestros resultados de medición son adecuados con respecto a las estimaciones. Por supuesto, si  $\chi^2 = 0$ , los resultados son “perfectos,” es decir, para todos los casos  $O_i = E_i$ .

En un caso realista, si  $\chi^2 \leq N$ , podemos afirmar que el acuerdo es bueno; de lo contrario, el experimento no ha dado buenos resultados. En el caso de un experimento en el cual medimos dos variables con coordenadas  $(x, y)$ , cuya función esperada es  $y = f(x)$ , en el que, además, podemos pasar por alto las incertidumbres de  $x$ , la  $\chi^2$  se obtiene con la expresión:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \frac{y_i - f(x_i)}{u(y_i)} \right]^2 \quad (7.17)$$

Adicionalmente, podemos tomar en cuenta los pesos de las observaciones para evaluar la  $\chi^2$ . Por ejemplo, la media ponderada de la ecuación (7.13) se obtuvo al minimizar la suma pesada de los cuadrados de los residuos (Bevington y Robinson, 2003) dividida entre la varianza (incertidumbre) de los datos,  $\sigma^2$ . Esto es

$$\chi^2 = \frac{\sum w_i (x_i - \bar{x})^2}{\sigma^2} \quad (7.17)$$

La aplicación de la  $\chi^2$  se puede extender a otro gran número de situaciones. Por ejemplo, para hallar los parámetros de una recta ajustada o la bondad del ajuste de un conjunto de datos a, por ejemplo, una distribución gaussiana. El cálculo, entonces, será mejor cuando tengamos una  $\chi^2$  lo más pequeña posible, cumpliendo con la condición  $\chi^2 \leq N$ . Debemos decir, además, que la  $\chi^2$  obedece también a una función de distribución de probabilidad, aunque este tema va más allá de los objetivos de este libro. Se recomienda consultar los textos de Gupta (2012) y Taylor (2022) para profundizar en la explicación de esta y otras distribuciones útiles, como la función *t de Student*.

---

Ejemplo 7.6 Los datos experimentales para la gráfica de la Figura 6.1 se muestran en la Tabla 7.5. De aquí se encuentra, mediante el método de mínimos cuadrados, que los parámetros de la recta son  $m = 132 (0.98)\Omega$  y  $b = 0.19 (0.037) V$ . Por tanto, aplicando la ecuación 7.17 con  $f(x) = mx + b$ , encontramos que  $\chi^2 = 14$ . Dado que  $N = 19$ , se cumple que  $\chi^2 \leq N$ , por lo que el ajuste es aceptable. Adicionalmente, el coeficiente de determinación es  $R^2 = 0.999$ , es decir, los puntos se adaptan correctamente a la recta.

Tabla 7.5. Intensidad de corriente y diferencia de potencial medidos en un circuito diseñado para estudiar la Ley de Ohm.

I (A)	V (V)	I (A)	V (V)
0.018 (0.001)	2.60 (0.03)	0.038 (0.001)	5.25 (0.05)
0.020 (0.001)	2.81 (0.03)	0.040 (0.001)	5.52 (0.06)
0.022 (0.001)	3.06 (0.03)	0.042 (0.001)	5.77 (0.06)
0.024 (0.001)	3.30 (0.04)	0.044 (0.001)	6.05 (0.06)
0.026 (0.001)	3.57 (0.04)	0.046 (0.001)	6.28 (0.06)
0.028 (0.001)	3.87 (0.04)	0.048 (0.001)	6.52 (0.07)
0.030 (0.001)	4.13 (0.04)	0.050 (0.001)	6.75 (0.07)
0.032 (0.001)	4.41 (0.05)	0.052 (0.001)	7.01 (0.07)
0.034 (0.001)	4.65 (0.05)	0.054 (0.001)	7.19 (0.07)
0.036 (0.001)	4.96 (0.05)		

Puesto que todas las incertidumbres en  $x$  son iguales, fue posible utilizar la ecuación 7.17.

---

## CAPITULO 8. HABILIDADES EN EL LABORATORIO

Hasta aquí, hemos resaltado la importancia de la experimentación en la actividad científica, presentado conceptos básicos para la recolección de datos y su análisis, así como mostrando algunas herramientas para probar su validez. No obstante, todo este proceso debe estar fundamentado en un trabajo cuidadoso del experimentador dentro del laboratorio. En este capítulo describiremos brevemente algunos puntos que debe considerar quien lleve a cabo el trabajo experimental.

### 8.1. DEFINICIÓN DEL EXPERIMENTO POR REALIZAR

El primer aspecto es el planteamiento de varias preguntas: ¿cuál es el fenómeno que deseamos estudiar o la magnitud que queremos medir? ¿Existe un modelo teórico que lo describa? ¿Alguien más ha hecho experimentos previos para conocer el fenómeno o magnitud? La respuesta inicial debe ir respaldada por búsquedas bibliográficas. Actualmente existen muchas herramientas que permiten llevarlas a cabo, como *Google Scholar*®, la cual, sin embargo, no garantiza el acceso a los documentos encontrados, puesto que muchos de ellos solo pueden obtenerse mediante suscripciones o la compra de libros. Otras plataformas, como *ResearchGate*®, ofrecen la posibilidad de contactar a los autores para que compartan las publicaciones limitadas por las suscripciones. En todo momento deben respetarse los derechos de propiedad intelectual.

En un laboratorio de enseñanza existen varias alternativas para la identificación del problema. Usualmente, quien imparte el curso propone el experimento por realizar, con base en los programas de dicho curso y manuales ya escritos. En un principio, este método tiene la ventaja de que se puede instruir a quienes están inscritos para que conozcan los equipos con los cuales deban efectuar las mediciones, su uso adecuado, así como enten-

der la manera de extraer la información. Adicionalmente, se proporciona la bibliografía necesaria a quien va a hacer el experimento. Otra opción surge del *Aprendizaje Basado en Problemas*, o *ABP* (Sola Ayape, 2005), en el cual la persona instructora plantea de manera abierta el tema del experimento, para que quienes llevan el curso hagan una investigación del problema, desde la búsqueda bibliográfica hasta el desarrollo del experimento propiamente dicho. En un curso regular, probablemente los mejores resultados se obtienen combinando ambas actividades, puesto que con la primera se les da a las personas las herramientas para aplicar la segunda opción.

## 8.2. EL DESARROLLO EXPERIMENTAL

Una vez que tenemos información suficiente que responda a las cuestiones iniciales, debemos proceder al planteamiento del experimento propiamente dicho. Primero necesitamos identificar las variables que intervienen en ellos, es decir, los mensurandos. Esto lleva a decidir qué instrumentos de medición se deben utilizar. Esto es fundamental, puesto que el acceso a los equipos puede estar limitado en muchos de los laboratorios de enseñanza. En ocasiones el experimento no se puede completar porque no se cuenta con alguno de los instrumentos necesarios. Otras veces, el mismo grupo de trabajo diseña y construye sus instrumentos de medición; esto también está sujeto a limitaciones en el acceso a las componentes, si bien es uno de los mayores logros desde el punto de vista didáctico.

Al identificar los mensurandos, las personas experimentadoras deben distinguir si pueden regularlos a voluntad o solamente pueden hacer las mediciones sobre ellos (por ejemplo, un experimento acerca de radiación solar). Esto va aunado a definir el tiempo y las instalaciones disponibles para concluir el experimento.

Cuando sea posible, es muy recomendable leer los manuales de los equipos elegidos, puesto que contienen medidas de seguridad tanto para el usuario como para el instrumento. Además, se incluyen las instrucciones para montaje, operación y conexiones; tal vez también se encuentre la información para determinar las incertidumbres experimentales (que serían tipo B). Elegir la resolución y sensibilidad de los instrumentos de medición es esencial, pues podría ser que con alguno en particular no se observen cambios en alguna de las variables. En esta etapa debe verificarse el funcionamiento correcto de los instrumentos con mediciones preliminares, puesto que pueden surgir errores sistemáticos (como los de calibración) o estar sujetos a errores aleatorios (influencia del ambiente, por ejemplo). Se puede

decidir si fuera necesario cambiar alguno de los instrumentos, ya sea simplemente para usar uno calibrado correctamente, tener una mejor sensibilidad o bien que produzca una menor incertidumbre experimental.

Por otra parte, a veces será necesario *ajustar* un instrumento de medición (no confundir con *calibrar*, lo cual implica la comparación con otros instrumentos de referencia). Un ejemplo de este procedimiento es la verificación de que la aguja en un multímetro analógico esté alineada con el 0 de la escala cuando no se hace ninguna medición; el ajuste se hace con un tornillo ubicado en la parte inferior de la carátula del instrumento (véase la Figura 2.3). Así mismo, se puede ajustar la ganancia de un amplificador para que cubra todo el intervalo útil del instrumento que recolecta los datos.

### Ejemplo 8.1

Durante un experimento tenemos la necesidad de medir diferencias de potencial, que varían entre 3 V y 15 V. La resolución debe ser al menos del orden de 0.1 V y las incertidumbres asociadas a cada medición no habrán de sobrepasar el 2 %. Contamos con los cinco multímetros que se muestran en la Figura 8.1.



Figura 8.1. Multímetros disponibles para medir diferencias de potencial durante un experimento.

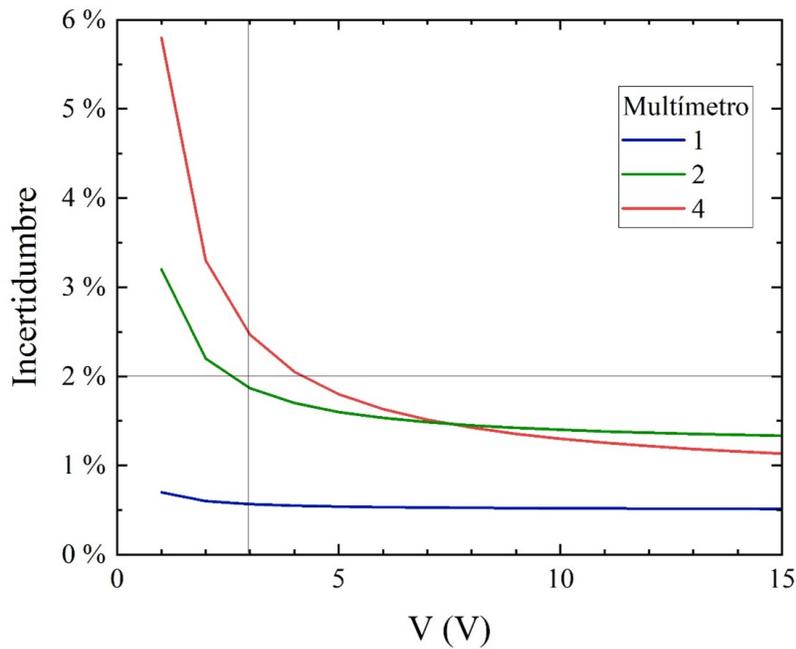


Figura 8.2. Incertidumbre porcentual en la medición de diferencias de potencial con tres multímetros diferentes, en sus escalas de 20 V.

Todos los multímetros cuentan con escalas que permiten medir 15 V como máximo; los números 1, 2 y 4 tienen la escala de 20 V. El multímetro 3 tiene una escala de 15 V y el 5 una de 50 V. Es decir, todos cumplen con el primer requisito.

La resolución ( $d$ ) del multímetro 1 en la escala de 20 V es de 0.001 V, la del 2 y el 4 es de 0.01 V en la escala de 20 V, la del multímetro 3 es de 0.5 V en la escala de 15 V y el 5 tiene una resolución de 1 V en la escala útil, que es de 50 V. Por tanto, se descartan los multímetros 3 y 5. Finalmente, la incertidumbre que produce el multímetro 1 es  $(0.5 \% r + 2d)$ , donde  $r$  es la lectura en la pantalla, para el multímetro 4 es  $(0.8 \% r + 5d)$  y en el 2 es  $(1.2 \% r + 2d)$ . Dado que este aspecto es más difícil de evaluar, en la Figura 8.2 aparece una gráfica de las incertidumbres porcentuales al medir la diferencia de potencial, marcando los límites de 3 V y 2 % para la incertidumbre porcentual. Podemos notar que los multímetros 1 y 2 son adecuados para hacer estas mediciones en el intervalo requerido. Cabe resaltar que no siempre es necesario hacer un análisis tan riguroso para seleccionar el equipo.

La manera de extraer la información de los instrumentos ha avanzado notablemente en los años recientes. Si bien todavía en los laboratorios de enseñanza se recurre en gran proporción a equipos donde quien realiza las mediciones hace la lectura y la anotación del resultado en papel o una computadora, ya hay muchos aparatos que obtienen los resultados de manera electrónica y pueden almacenar los datos, transmitirlos a una computadora o enviarlos a “la nube” de información digital. Esta debe ser una de las principales consideraciones en la elección del equipo de medición.

El siguiente paso consiste en detallar el procedimiento específico para hacer las mediciones: cuántas veces debe (o puede) hacerse cada una, el orden en que se llevarán al cabo, los intervalos en los que se manejarán las variables independientes. Si se trata de un equipo de trabajo, decidir cuál integrante operará los instrumentos, quién hará las lecturas y quién registrará los datos cuando sea pertinente. Esto último también es relevante para considerar la repetibilidad o reproducibilidad de los resultados de medición. Como en el caso de los equipos de medición, efectuar mediciones preliminares puede ayudar a identificar algún problema y a redefinir el procedimiento si es oportuno. Por último, es necesario dejar en claro cuál será el análisis de los resultados de medición que se va a aplicar. En las secciones anteriores presentamos algunas de las numerosas alternativas que existen, las cuales dependen del área de conocimiento que se esté trabajando. Uno de los aspectos prioritarios en cualquier experimento es la estricta observancia de las medidas de seguridad establecidas, ya sea por el laboratorio donde se hacen los experimentos, el tipo de mediciones (químicas, de radiaciones, eléctricas, magnéticas, acústicas, ópticas, etc.), los instrumentos, las personas u otros factores. Dentro de un curso, debe ser la persona que lo imparte quien indique al grupo cuáles son dichas medidas, para evitar cualquier eventualidad. En algunos casos, como son las mediciones en Física de radiaciones, inclusive existen regulaciones nacionales que deben obedecerse. La misma vestimenta debe revisarse, pues no han de utilizarse zapatos abiertos, no traer el cabello suelto o usar prendas como corbatas o mascaradas que pudieran atorarse en algún equipo y provocar un accidente.

### 8.3. LA BITÁCORA DE LABORATORIO

La realización de un experimento merece ser registrada de alguna manera, por diversas razones. La preservación de estos resultados es una parte esencial del trabajo científico, no importa si es de investigación, técnico o de enseñanza. El lenguaje utilizado debe ser claro, completo y conciso, de manera que otra persona pueda leer esta información, entenderla y, si fuera necesario, repetir el experimento. El texto de Kanare (1985), si bien es antiguo, explica con claridad la gran relevancia de contar con registros escritos de la actividad experimental.

Este es, justamente, el objetivo de llevar una bitácora de laboratorio. Esta será la base del análisis de los resultados de medición por parte del experimentador. En el caso de estudiantes, se darán cuenta que escribir una buena bitácora es una habilidad que van desarrollando a lo largo de sus estudios. Las bitácoras pueden actualmente escribirse tanto en papel (una libreta de buena calidad, dedicada exclusivamente a ese propósito, y no en hojas sueltas o de carpeta que puedan perderse después), o en medios electrónicos. Sin embargo, para laboratorios de enseñanza, lo más recomendable es hacerla en una libreta; las evaluaciones de las bitácoras son más sencillas en estos formatos. El contenido de la bitácora puede ser diverso, dependiendo del tipo de experimento que se haga. En ciertas escuelas se establece (de manera obligatoria) que es prácticamente un informe preliminar del experimento, en el que se incluyen una presentación del mismo, introducción, objetivo, procedimientos, tablas de resultados y hasta conclusiones del experimento. En una bitácora a nivel universitario, sin embargo, debería existir cierta libertad por parte de quien la escribe, aunque hay componentes que son imprescindibles y que listamos a continuación.

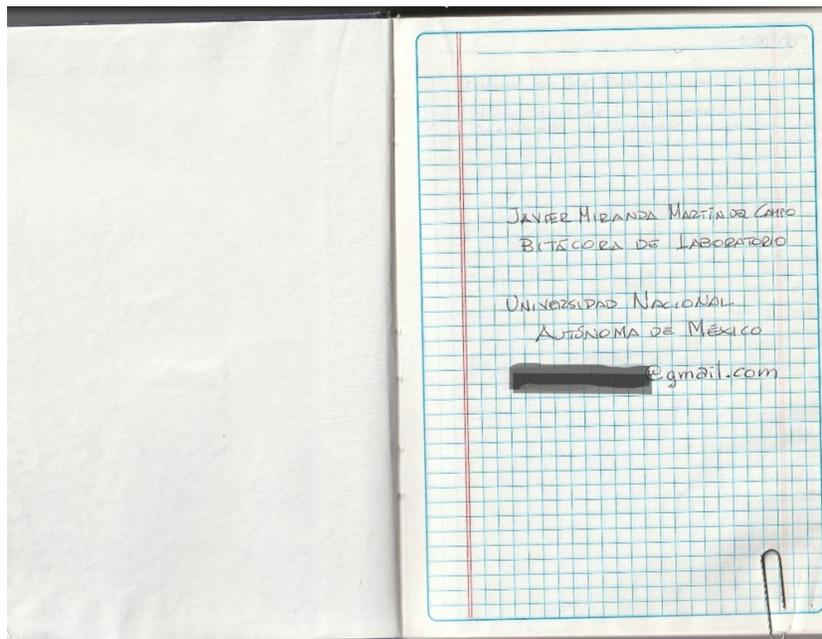
- Nombre del autor y laboratorio donde se usa la bitácora.
- Páginas numeradas.
- Lugar y fecha de realización del (los) experimento(s) o sesiones de laboratorio, de preferencia en cada página.
- Título del experimento.
- Nombre de los participantes y qué actividad efectuaron.
- Fundamentación teórica, explicada por docentes o incluida por estudiantes cuando se trate de proyectos propuestos, en la que se explique el objetivo del experimento. Añadir referencias cuando sea pertinente.

- Descripción del procedimiento experimental, igualmente expuesta por docentes o resultado de la propuesta de estudiantes. Aquí se deben incluir los detalles de cómo se instala el dispositivo experimental, la identificación de los mensurandos, cómo y cuántas veces se hacen las mediciones, qué instrumentos se están utilizando (marca, modelo, resolución, sensibilidad, alcance, forma de asignar incertidumbres, detección de errores sistemáticos, etc.), así como cualquier indicación acerca de medidas de seguridad exigidas. Es muy importante incluir diagramas de los dispositivos experimentales. Esto ayuda mucho si el experimento debe ejecutarse en varias sesiones.
- Anotación de cualquier evento que pudiera afectar las mediciones, como son los ambientales, fallas en el instrumental o la aparición de posibles distractores.
- Resultados de las mediciones, en cualquier formato requerido, ya sean tablas, gráficas o diagramas. Cuando se hayan recolectado los datos de manera electrónica, escribir el nombre de los archivos y el sitio en los cuales se almacenaron, para una posible búsqueda posterior.
- Descripción del análisis que se hará a los resultados y, a menos que los análisis se hagan por medio de programas de cómputo, incluir los resultados de dichos análisis. Si se hicieron con medios electrónicos, escribir el nombre de los programas y de los archivos resultantes. Anotar las referencias si se usan datos externos de otras fuentes, como tablas, libros, artículos, etc.
- Presentación de las ecuaciones utilizadas para la evaluación de las incertidumbres, o las referencias si se obtuvieron de otras fuentes. De ser posible, también escribir en la bitácora las incertidumbres de los datos.
- Conclusiones preliminares, puesto que las definitivas deben presentarse en el informe del experimento.
- Observaciones del experimentador por cualquier evento ocurrido durante todo el proceso, así como sugerencias para mejorar el experimento, en caso de ser necesarias.

Debemos enfatizar que las bitácoras han de almacenarse en lugares seguros, con fácil acceso por parte de quienes tengan que consultarla, cuando

se hacen en libretas. De manera semejante, los formatos electrónicos deberán quedar en medios accesibles; pero con seguridad informática. Conservar las bitácoras de laboratorio es obligatorio. El escándalo de la alteración de datos experimentales de J. H. Schön a principios de los años 2000, quien inventó y alteró los resultados de sus experimentos (Reich, 2010), demuestra esta necesidad.

La Figura 8.3 presenta un ejemplo de experimento (relacionado con la ley de Ohm), cuyo procedimiento se anotó en una bitácora.



66

$L_2-N_6$	$L_{V_1}$	524	514
$L_1-N_2$	$L_{V_2}$	39	39
$L_1-N_3$	$L_{V_3}$	49	49
$L_1-O_2$	$L_{V_4}$	16	16
$L_2-N_1$	$L_{V_5}$	18	18
$L_2-O_1$	$L_{V_6}$	55	54
$L_3-N_4$	$L_{V_7}$	4	3
<del><math>L_3-N_5</math></del>	<del><math>L_{V_8}</math></del>		

$V = RI$

Donde  $V$  es la diferencia de potencial,  $I$  es la intensidad de corriente y  $R$  es la resistencia (Resnick et al., 1994).

Esta relación se cumple sólo para cierto tipo de materiales que, por razones obvias, se llaman óhmicos.

Para estudiar experimentalmente esta relación podemos construir un circuito eléctrico, como muestra la figura 1.

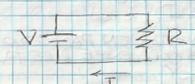


Fig. 1. Circuito para Ley de Ohm

67

14 Oct 21

EXPERIMENTO LEY DE OHM

LA LEY DE OHM ES UNA RELACION ENTRE LA DIFERENCIA DE POTENCIAL (VOLTAGE) Y LA INTENSIDAD DE CORRIENTE QUE ATRAVIESA UN RESISTOR CUANDO SE LE APLICA DICHA DIFERENCIA DE POTENCIAL.

LA ECUACION QUE RELACIONA ESTAS VARIABLES ES

$V = RI$

Donde  $V$  es la diferencia de potencial,  $I$  es la intensidad de corriente y  $R$  es la resistencia (Resnick et al., 1994).

Esta relación se cumple sólo para cierto tipo de materiales que, por razones obvias, se llaman óhmicos.

Para estudiar experimentalmente esta relación podemos construir un circuito eléctrico, como muestra la figura 1.

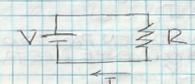


Fig. 1. Circuito para Ley de Ohm

14/X/21 LEY DE OHM

EL OBJETIVO DEL EXPERIMENTO ES ENTONCES, CORROBORAR LA RELACION DE PROPORCIONALIDAD ENTRE LA DIFERENCIA DE POTENCIAL Y LA INTENSIDAD DE CORRIENTE, SE VA A VERIFICAR TAMBIEN, QUE LA CONSTANTE DE PROPORCIONALIDAD ES LA RESISTENCIA.

PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

SE DEBE ARMAR UN CIRCUITO DE LA FORMA QUE MUESTRA LA FIG. 2

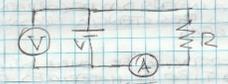


Fig. 2 Circuito para medir  $V$  e  $I$  en la Ley de Ohm.

EN EL CIRCUITO SE CONECTARON

- 1 - AMPERIMETRO EN SERIE PARA MEDIR  $I$
- 2 - VOLTIMETRO EN PARALELO CON LA FUENTE CORRIENTE DIRECTA PARA MEDIR  $V$

SE DEBE UTILIZAR UN MULTIMETRO ANALOGICO PARA USAR COMO AMPERIMETRO

LEY DE OHM 14/X/21 69

AUNQUE DEPENDE DE LA DISPONIBILIDAD DEL EQUIPO SE PUEDE USAR UN MULTIMETRO DIGITAL COMO VOLTIMETRO.

SE HAN MEDICIONES PARA TRES RESISTENCIAS:  $10 \Omega$ ,  $100 \Omega$  y  $1000 \Omega$ , TODAS PARA OPERAR UNA POTENCIA MÁXIMA DE  $5 \text{ W}$ . LA PRECISIÓN ES  $5 \%$ .

VAMOS A VARIAR LA DIFERENCIA DE POTENCIAL ENTRE  $3 \text{ V}$  Y UN VALOR QUE DEPENDE DE LA POTENCIA MÁXIMA QUE TOLERAN LOS RESISTORES.

LA POTENCIA ESTÁ DADA POR LA ECUACION

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \Rightarrow P_{\text{max}} = \frac{V_{\text{max}}^2}{R}$$

$$\Rightarrow V_{\text{max}} = \sqrt{P_{\text{max}} R}$$

Así

$10 \Omega$      $V_{\text{max}} = \sqrt{5 \text{ W} \cdot 10 \Omega} = 7 \text{ V}$

$100 \Omega$      $V_{\text{max}} = \sqrt{5 \text{ W} \cdot 100 \Omega} = 22 \text{ V}$

$1000 \Omega$      $V_{\text{max}} = \sqrt{5 \text{ W} \cdot 1000 \Omega} = 70 \text{ V}$

DESDE QUE  $V_{\text{max}}$  ES MUY ALTA PARA LOS RESISTORES DE  $100 \Omega$  y  $1000 \Omega$ , SE APLICARÁN  $V$  HASTA  $10 \text{ V}$ .

LEY DE OHM 14/X/21

EN EL EXPERIMENTO SE VARIA  $V$  Y PERO POR CONDICIONES PRÁCTICAS PARA EL ANÁLISIS DE DATOS SE VA A USAR  $I$  COMO VARIABLE INDEPENDIENTE.

SE MEDIRÁN AL MENOS DIEZ PAREJAS DE DATOS ( $I, V$ ), PARA CONSTRUIR UNA GRÁFICA DEL TIPO DE FIGURA 3.

SE VA A AJUSTAR UNA RECTA A LOS PUNTOS EXPERIMENTALES CONSIDERANDO LA LEY DE OHM LA PENDIENTE DE LA RECTA DEBE SER IGUAL A  $R$ .

ADemás, SE MEDIRÁ EL VALOR DE  $R$  INDEPENDIENTEMENTE CON UN MULTÍMETRO ESTE RESULTADO SE CONSIDERARÁ COMO EL VALOR VERDADERO DE  $R$  PARA ASÍ TAMBIÉN CALCULAR EL ERROR QUE RESULTARÁ CON LA PENDIENTE DE LA RECTA AJUSTADA CON MÍNIMOS CUADRADOS).

$$E_r = R_{verd} - R_{mult.}$$

$R_{verd}$  → RESISTENTE DE LA RECTA.  
 $R_{mult}$  → RESISTENCIA CON MULTÍMETRO.

LEY DE OHM 14/X/21 71

PRECAUCIONES

- 1- NO EXCEDER LA DIFERENCIA DE POTENCIAL MÁXIMA CALCULADA, PORQUE SE QUEMARÍA EL RESISTOR.
- 2- EL RESISTOR PUEDE CALENTARSE MUCHO ASÍ QUE DEBE EVITARSE EL TOCADO DURANTE EL EXPERIMENTO.
- 3- POR NINGÚN MOTIVO DEBE CONECTAR EL AMPERÍMETRO EN PARALELO, PORQUE EQUIVALE A UNA RESISTENCIA IGUAL A CERO, ES DECIR, SE PONE EN CORTO CIRCUITO. NO ES EXAGERADO DECIR QUE EL AMPERÍMETRO SE QUEMA EN UN CASO ASÍ.
- 4- NO EXCEDER LA FUENTE DE PODER HASTA QUE EL PROFESOR/AUXILIAR PERMANECE EN EL EQUIPO DISPONIBLE.

FUENTE DE PODER CD, 3V A 12V, MÁX 5A  
 MODELO FLY-1205000, SIN MARCA.

MULTÍMETROS DIGITALES  
 STEREN, MODELO UT55  
 BORK, MODELO MP-6012

MULTÍMETROS ANALÓGICOS  
 MICRONTA, MODELO 22-212  
 W&W, MODELO J0411

14/X/21 LEY DE OHM

SE USARÁ UNA TABLITA PARA AJUSTAR CIRCUITOS, POR SEGURIDAD.

EL VALOR MÁXIMO DE  $I$  PARA EL MULTÍMETRO MICRONTA ES 150 mA, POR LO CUAL NO CONVIENE USARLO.

SE REALIZARÁN LAS CONEXIONES DE LOS VALORES MEDIDOS CON LOS MULTÍMETROS W&W Y BORK.

RESISTENCIA 1000 $\Omega$ BORK	
$I$ (mA)	$V$ (V) ← STEREN 20V
3.01	3.00
3.25	3.24
3.50	3.48
4.53	4.51
5.06	5.04
5.51	5.49
6.02	6.99
6.54	6.31
7.02	7.48
8.05	8.01
8.53	8.49
9.00	8.45
9.52	9.47
10.02	9.97

LEY DE OHM 14/X/21 73

RESISTENCIA	100 $\Omega$	BORK
ESCALA	$I$ (mA)	$V$ (V) ← STEREN 20V
22.6	22.6	
25.6	25.5	
30.3	30.3	
35.6	35.5	
40.8	40.8	
46.0	45.9	
51.4	51.4	
55.2	55.1	
60.7	60.0	
70.3	70.1	
65.2	64.9	
75.0	74.6	
80.8	80.0	
85.2	84.6	
90.5	84.9	

RESISTENCIA	10 $\Omega$	BORK
ESCALA	$I$ (mA)	$V$ (V) ← STEREN 20V
0.16	1.52	
0.28	2.74	
0.35	3.11	
0.38	3.42	
0.38	3.73	
0.42	4.13	
0.46	4.47	
0.44	4.88	
0.52	5.12	
0.55	5.36	
0.60	5.89	
0.65	6.33	

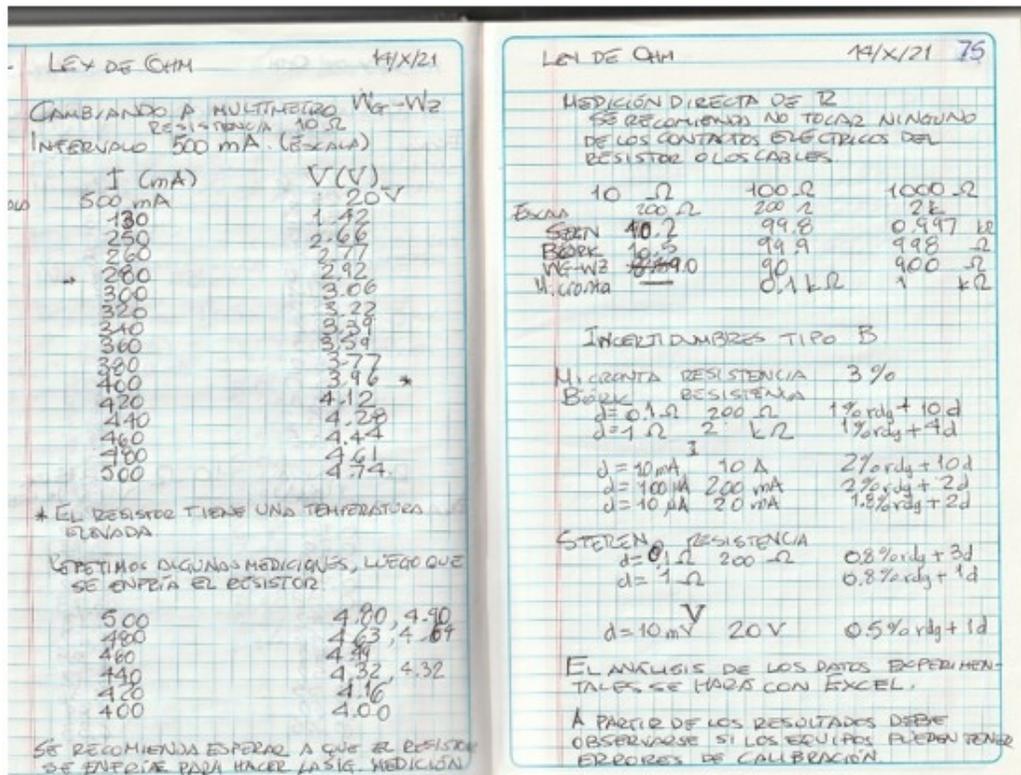


Figura 8.3. Ejemplo de un experimento anotado en una bitácora.

## 8.4. BITÁCORAS EN PAPEL Y ELECTRÓNICAS

Ya señalamos más arriba que las bitácoras pueden escribirse, actualmente, tanto en papel (libretas) como en medios electrónicos. Ambos formatos tienen ventajas y desventajas. No obstante, también debemos destacar que un vicio desarrollado por quienes cursan laboratorios de enseñanza es el abuso que hacen del teléfono móvil o de tabletas electrónicas. Muy a menudo, en vez de hacer anotaciones en la bitácora, toman fotografías de lo expuesto por docentes en el pizarrón. Esto, sin duda, limita la asimilación del conocimiento que trata de transmitir quien propone el experimento. Recordemos que “quien escribe, lee dos veces.”

En la Tabla 8.1 presentamos algunas ventajas y desventajas de ambos formatos.

Tabla 8.1. Ventajas y desventajas de las bitácoras en papel y electrónicas.

Formato	Ventajas	Desventajas
Papel	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La libreta y el lápiz (o bolígrafo) siempre están disponibles.</li> <li>• Se pueden hacer bosquejos de dispositivos experimentales con facilidad.</li> <li>• Escribir ecuaciones y fórmulas es simple.</li> <li>• Es fácil hacer comparaciones entre páginas.</li> <li>• La evaluación es sencilla en un curso de laboratorio.</li> <li>• La alteración de datos es detectable.</li> <li>• Se puede asegurar hasta en una caja fuerte.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• La letra manuscrita a veces es difícil de leer.</li> <li>• Es posible extraviar la libreta.</li> <li>• Puede ser complicado hacer correcciones.</li> <li>• El papel es propenso a dañarse con alguna sustancia o roturas.</li> <li>• El número de resultados de medición por escribir puede ser muy limitado.</li> <li>• La transferencia de los datos a los programas de análisis y graficación es lenta y sujeta a equivocaciones.</li> </ul>
Electrónico	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Los textos son legibles.</li> <li>• El equipo de medición se puede conectar para recolectar los datos.</li> <li>• Es posible almacenar y transferir gran cantidad de datos experimentales.</li> <li>• Los datos se pueden transferir a los programas para análisis y graficación.</li> <li>• Las bitácoras en línea permiten tener más de una persona con acceso simultáneo al experimento.</li> <li>• Es factible contar con herramientas para compartir la información con personas que tengan capacidades diferentes.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Es necesario el acceso al dispositivo (computadora, tableta, teléfono móvil) con conexión a la red.</li> <li>• La creación de figuras y ecuaciones es compleja y lenta.</li> <li>• La anotación de los datos puede estar sujeta a errores difíciles de detectar.</li> <li>• Es complicado detectar la alteración de datos.</li> <li>• Se requiere seguridad informática para proteger los datos.</li> <li>• Estudiantes pueden intentar suplir la bitácora con fotografías de teléfono móvil.</li> </ul>

Si bien en un curso de laboratorio puede ser recomendable (obligatorio en algunos lugares) utilizar las bitácoras en papel, para laboratorios tecnológicos o de investigación podría ser más conveniente utilizar el formato electrónico, tanto por la cantidad de resultados experimentales, como por difícil acceso al equipo. En ocasiones es mejor contar con las dos versiones, para cotejarlas y detectar fallas. Un ejemplo de bitácora electrónica muy avanzada se puede conocer mediante el trabajo de Robb et al. (2015), para un laboratorio de enseñanza de ciencias biológicas en el que se colecta gran cantidad de datos. Dado que se hizo con *software* libre, podría adaptarse a algún otro curso.

## 8.5. LA PUBLICACIÓN DE LOS RESULTADOS

Efectuar un experimento no tendría ningún sentido si no tenemos la intención de dar a conocer los resultados. Podemos lograr esto por medio de la redacción de un informe, artículo o hasta libro. La manera de escribirlo depende por completo del tipo de trabajo y de lectores que tendrá el producto. La estructura, el estilo y aún el idioma están definidos por estas necesidades. Obviamente, no será igual un informe de laboratorio universitario o una tesis, que uno para la certificación de un laboratorio o un artículo de investigación científica. En especial para los dos últimos casos, la experiencia será la que lleve a mejorar la forma en que se presenta el fruto del trabajo experimental. Algunas sugerencias para la presentación de los diversos tipos de informes se pueden encontrar en los textos de Cooke (1996) y de Sierra Porta (2011). Para la presentación de los resultados es muy probable que contemos ya con un modelo (teórico o empírico) para comparar con nuestro experimento o bien contrastemos con otros resultados experimentales o valores verdaderos. De esta forma, debemos ya tener totalmente evaluadas las incertidumbres experimentales, tanto de los resultados de medición directos como de todos los demás derivados de su análisis. Así mismo, será posible que, cuando sea aplicable, conozcamos el error de nuestros resultados, si hay valores de referencia con los cuales se pueda cotejar. En el capítulo 11 damos indicaciones para escribir el informe de laboratorio, con un enfoque de enseñanza. Por supuesto, quien imparte el curso tiene la libertad de plantear sus propios formatos, si bien el dar una estructura semejante a un artículo científico permite a quien lo redacte, a nivel introductorio, adquirir la habilidad de hacer escritos de este tipo. Es decir, aquí no existen normas obligatorias, sino sólo recomendaciones.

## CAPITULO 9. TEMAS AVANZADOS DE ANÁLISIS DE DATOS

A pesar de que los capítulos anteriores han ofrecido un conjunto de herramientas básicas para el análisis de los resultados de medición y así cumplir con los objetivos planteados al diseñar el experimento, habrá situaciones en las que probablemente los procedimientos no sean aplicables o necesiten algún refinamiento. En este capítulo describiremos algunos otros métodos que pudieran ser necesarios para evaluar correctamente los resultados experimentales.

### 9.1. INCERTIDUMBRE DE MAGNITUDES CORRELACIONADAS

En el capítulo 5 explicamos las definiciones básicas involucradas con la evaluación de la incertidumbre experimental. En particular, la ecuación 5.6 expresa la ley de propagación de la incertidumbre para magnitudes no correlacionadas. Sin embargo, cuando tratamos de calcular una nueva magnitud a partir de mensurandos que presentan alguna correlación significativa, será necesario modificar la ecuación 5.6 para tomar en cuenta dicha correlación. Así, una ley de propagación de la incertidumbre más general está dada por (GUM, 2008):

$$U_c^2(y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j), \quad (9.1)$$

en donde  $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$  es la covarianza entre los mensurandos  $x_i$  y  $x_j$ . En la ecuación (7.12) vimos que la covarianza se asocia con el coeficiente de correlación por medio de

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)}. \quad (9.2)$$

Si las variables no están correlacionadas, la ecuación 9.1 coincide con la 5.6.

### Ejemplo 9.1

En un experimento en el cual se midieron las concentraciones elementales (masa de un elemento por cada metro cúbico de aire), en partículas suspendidas en la atmósfera con diámetros aerodinámicos menores que  $2.5 \mu\text{m}$  (conocidas como  $\text{PM}_{2.5}$ ), es de interés conocer las contribuciones del elemento potasio ( $K$ ) que no provienen del polvo originado en el suelo. Se empleó la técnica Fluorescencia de Rayos X y el sitio de muestreo estaba localizado en el suroeste de la Ciudad de México, durante el primer semestre de 2019, con muestreos de 6 h durante la mañana. La variable se denomina “potasio no de suelo” y se denota por  $NSK$ . Normalmente se le asocia a la presencia de humo por la quema de biomasa (Hernández López et al., 2021). Se puede determinar a partir de la ecuación

$$NSK = K - 0.52Fe \quad (9.3)$$

en la que  $K$  es la concentración de potasio y  $Fe$  es la concentración de hierro. Ahora bien,  $K$  y  $Fe$  están correlacionadas entre sí con un coeficiente  $r = 0.411$ .

Aplicando la ecuación 9.1 a la 9.3, para determinar la incertidumbre de  $NSK$ ,  $u_c(NSK)$  encontramos que

$$u_c^2(NSK) = u^2(K) + (0.52)^2 u^2(Fe) + 2(0.52)u(K)u(Fe)r(K, Fe). \quad (9.4)$$

En la Figura 9.1 se muestra una serie de tiempo de la concentración de  $NSK$  en el periodo de muestreo. Puede observarse que las incertidumbres son mayores cuando, de manera correcta, se toma en cuenta la correlación entre  $K$  y  $Fe$  que cuando no se considera. En promedio, las incertidumbres son un 10 % más grandes. Se puede encontrar una discusión más amplia al respecto en el trabajo de Espinosa et al. (2010).

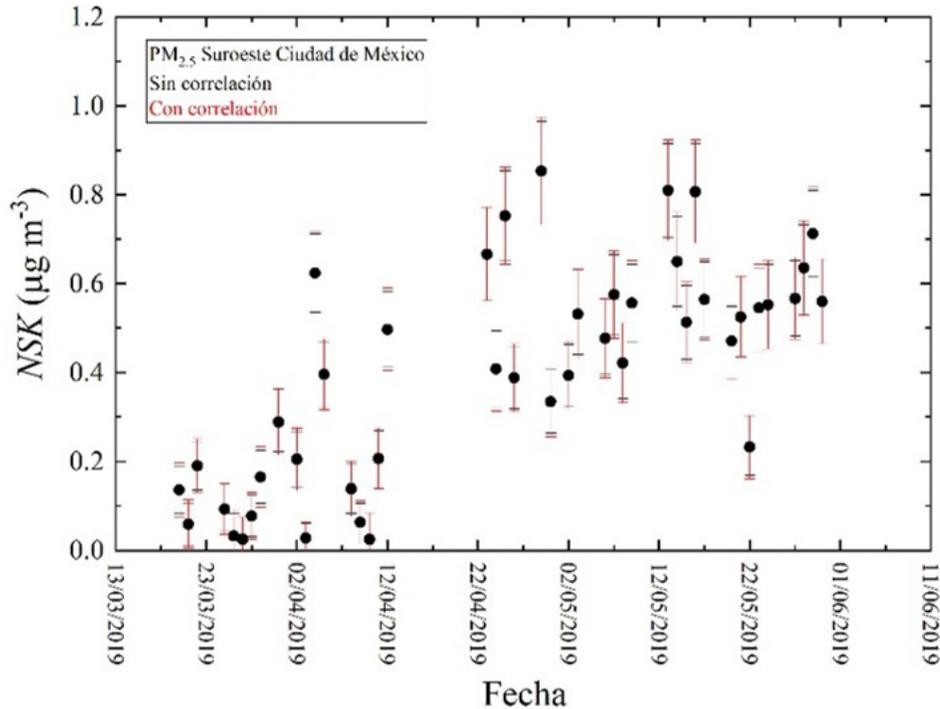


Figura 9.1. Serie de tiempo de las concentraciones de NSK en PM<sub>2.5</sub> durante el primer semestre de 2019. Las incertidumbres sin correlación se marcan con negro y con correlación están en rojo (Hernández López et al., 2021)

## 9.2. REGRESIÓN LINEAL PONDERADA CON INCERTIDUMBRE EN UNA VARIABLE

En la sección 7.2 explicamos la manera en que puede ajustarse una recta a un conjunto de datos experimentales con el método de regresión lineal o mínimos cuadrados. No obstante, debemos recordar que no tomamos en cuenta las incertidumbres experimentales. De manera similar a como calculamos la media ponderada usando dichas incertidumbres, es posible encontrar un procedimiento para calcular los parámetros de la recta en el cual se han incluido las incertidumbres. A este se le llama *mínimos regresión lineal ponderada o pesada*.. El primer caso ocurre cuando solo tomamos en cuen-

ta la incertidumbre  $u(y)$  de la variable dependiente,  $y$ . Como antes, el peso asignado será

$$w_i = \frac{1}{u^2(y_i)} \quad (9.5)$$

Se puede demostrar, mediante la minimización de la  $\chi^2$  (Bevington y Robinson, 2003; Taylor, 2022), que los parámetros  $m$  y  $b$  de la recta son:

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N w_i \sum_{i=1}^N w_i x_i y_i - \sum_{i=1}^N w_i x_i \sum_{i=1}^N w_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i \sum_{i=1}^N w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N w_i x_i\right)^2} \quad (9.6)$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N w_i y_i \sum_{i=1}^N w_i x_i^2 - \sum_{i=1}^N w_i x_i \sum_{i=1}^N w_i x_i y_i}{\sum_{i=1}^N w_i \sum_{i=1}^N w_i x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N w_i x_i\right)^2} \quad (9.7)$$

Además, para evaluar las incertidumbres de  $m$  y  $b$ , comenzamos con la “desviación estándar” que adjunta los pesos:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N w_i (y_i - m x_i - b)^2}{N - 2}} \quad (9.8)$$

Con la que podemos obtener

$$S_m^2 = \frac{S_y^2}{W}, \quad (9.9)$$

$$S_b^2 = S_y^2 \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} + \frac{\bar{x}}{W} \right), \quad (9.10)$$

$$W = \sum_{i=1}^N w_i (x_i - \bar{x})^2, \quad (9.11)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N w_i x_i}{\sum_{i=1}^N w_i}, \quad (9.12)$$

Podemos notar que la ecuación 9.12 es la misma que la 7.13, para el promedio pesado.

## Ejemplo 9.2

Con el fin de hacer la calibración de un sistema de detección en un espectrómetro de Fluorescencia de Rayos X, para la cuantificación de la concentración de Eu en una mezcla de los compuestos RbI y  $\text{EuF}_3$ , se mide el número de fotones de una línea de rayos X del Eu por unidad de tiempo (tasa de conteo,  $R$ ), como función de la masa de Eu ( $M_{\text{Eu}}$ ) presente en la mezcla. Los resultados se muestran en la Tabla 9.1.

Tabla 9.1. Masa de Eu en la mezcla de RbI +  $\text{EuF}_3$  y tasa de conteo de la línea de rayos X de Eu.

$M_{\text{Eu}}$ (mg)	$R$ (foton es/s)
0.010 (0.001)	198 (14)
0.023 (0.001)	439 (21)
0.083 (0.004)	1 190 (34)
0.094 (0.005)	1 660 (41)
0.151 (0.008)	2 990 (55)
0.23 (0.01)	4 960 (70)
0.26 (0.01)	6 170 (79)

Las incertidumbres relativas en la masa son iguales a 5 % en todos los casos, mientras que en  $R$  tenemos  $u(R) = R^{1/2}$ , es decir, la incertidumbre relativa cambia para cada punto. Entonces, es procedente intentar ajustar la recta con regresión lineal ponderada.

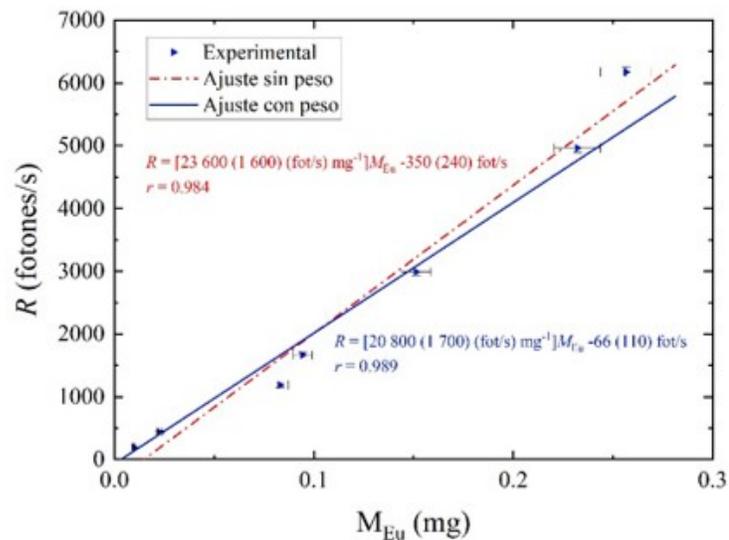


Figura 9.2. Tasa de conteo  $R$  de línea de rayos X de Eu como función de la masa de Eu presente en la mezcla RbI + EuF<sub>3</sub>.

La Figura 9.2 demuestra la diferencia de aplicar la regresión lineal ponderada a este conjunto de datos. Podemos notar el cambio en la pendiente y que  $b$ , tal como se espera, tiene un intervalo de incertidumbre que cubre al origen. Programas como *Origin*® permiten hacer los ajustes con pesos y sin ellos, de acuerdo con las necesidades de quien hace el experimento.

### 9.3. REGRESIÓN LINEAL PONDERADA CON INCERTIDUMBRE EN LAS DOS VARIABLES

El siguiente paso para aplicar el método de regresión lineal es la inclusión de las incertidumbres en ambas variables. Para esto debemos recordar cuál es el  $\chi^2$  para una recta con parámetros  $m$  y  $b$  cuando solo consideramos la incertidumbre en  $y$ :

$$\chi^2(m, b) = \sum_{i=1}^N \left( \frac{y_i - mx_i - b}{u_i(y_i)} \right)^2, \quad (9.13)$$

Si ahora tomamos en cuenta también la incertidumbre en  $x$ :

$$\chi^2(m, b) = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - mx_i - b)^2}{u^2(y_i) + m^2 u^2(x_i)}, \quad (9.14)$$

función que debe minimizarse, para lo cual deben calcularse las derivadas parciales con respecto a  $m$  y a  $b$ . El peso asignado ahora a cada dato experimental es:

$$\frac{1}{w_i} = u^2(y_i) + m^2 u^2(x_i). \quad (9.15)$$

Este resultado proviene de considerar a la expresión del lado derecho de la ecuación 9.15 como una *varianza efectiva*  $\sigma_{ef}$  (Barker y Diana, 1974):

$$\sigma_{ef} = u^2(y_i) + [f'(x)]^2 u^2(x_i). \quad (9.16)$$

donde  $f(x)$  es, como antes, la función que relaciona a  $y$  con  $x$ . El caso de una recta fue estudiado desde hace mucho tiempo (York, 1966). La dificultad de considerar las incertidumbres en ambas variables es que ahora, al derivar la  $\chi^2$  con respecto a  $m$  e igualar a cero para hallar el mínimo, encontramos que las ecuaciones se vuelven no lineales. Por tanto, es necesario hallar los parámetros con métodos numéricos. Si la función originalmente no es lineal, el problema sería más complicado; pero los mismos métodos numéricos pueden ayudar a encontrar la solución.

Barker y Diana (1974) explican y comparan varios métodos para encontrar los parámetros de una recta. Igualmente, Merrin (2017) incluye este caso y, además, agrega un programa de *Mathlab*® para determinar los parámetros. Programas de graficación como *Origin*® incluyen la opción de ajustar curvas con mínimos cuadrados ponderados, dando los pesos a los datos según las incertidumbres en ambas variables.

#### 9.4. AJUSTE DE POLINOMIOS CON REGRESIÓN LINEAL Y REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE

El ajuste de una función polinomial de grado  $n$ , si bien es conceptualmente directo a partir de los conceptos que hemos explicado más arriba, se complica por el número de variables que debemos manejar (Sierra Porta, 2011). La función que debemos ajustar es ahora, sin tomar en cuenta las incertidumbres:

$$f(x_i) = a_0 + a_1x_i + a_2x_i^2 + \dots + a_nx_i^n \quad (9.17)$$

y debemos minimizar la  $\chi^2$ :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N [y_i - (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n)]^2. \quad (9.18)$$

De aquí obtendremos un sistema de  $n$  ecuaciones de con  $n$  variables por calcular. Las expresiones completas de estas ecuaciones se pueden encontrar en el trabajo de Sierra Porta (2011). Sin embargo, pensando en un polinomio de segundo grado, tenemos para los tres parámetros:

$$\begin{aligned} a_0N + a_1 \sum x + a_2 \sum x^2 &= \sum y \\ a_0 \sum x + a_1 \sum x^2 + a_2 \sum x^3 &= \sum xy \\ a_0 \sum x^2 + a_1 \sum x^3 + a_2 \sum x^4 &= \sum x^2y \end{aligned} \quad (9.19)$$

de donde

$$a_0 = \frac{\sum y(\sum x^2 \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^3) - \sum x(\sum xy \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^2y) + \sum x^2(\sum xy \sum x^3 - \sum x^3 \sum x^2y)}{N(\sum x^2 \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^3) - \sum x(\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3) + \sum x^2(\sum x \sum x^3 - \sum x^2 \sum x^2)} \quad (9.20)$$

$$a_1 = \frac{N(\sum xy \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^2y) - \sum y(\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3) + \sum x^2(\sum x \sum x^2y - \sum xy \sum x^2)}{N(\sum x^2 \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^3) - \sum x(\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3) + \sum x^2(\sum x \sum x^3 - \sum x^2 \sum x^2)} \quad (9.21)$$

$$a_2 = \frac{N(\sum x^2 \sum x^2y - \sum x^3 \sum xy) - \sum x(\sum x \sum x^2y - \sum xy \sum x^2) + \sum y(\sum x \sum x^3 - \sum x^2 \sum x^2)}{N(\sum x^2 \sum x^4 - \sum x^3 \sum x^3) - \sum x(\sum x \sum x^4 - \sum x^2 \sum x^3) + \sum x^2(\sum x \sum x^3 - \sum x^2 \sum x^2)} \quad (9.22)$$

También podemos notar que este método es aplicable cuando nuestra variable dependiente  $y$  es una función lineal  $f$ , por ejemplo, de dos variables,  $x_A$  y  $x_B$ :

$$y = f(x_A, x_B) = a_0 + a_Ax_A + a_Bx_B. \quad (9.23)$$

Es evidente que podemos asociar estas variables con las potencias de  $x$  de un polinomio. Desde luego, podemos extender esto a un mayor número de variables. Este procedimiento se conoce como *regresión lineal múltiple* y el ajuste de un polinomio es un caso particular. Notemos que en un polinomio de segundo grado  $x_A = x$  y  $x_B = x^2$ .

Como es de esperar, los programas conocidos como *Excel*® y *Origin*® ya incluyen la posibilidad de hacer ajustes polinomiales. En el caso de *Excel*® es sencillo, pues en la gráfica de los puntos experimentales se oprime el botón derecho del ratón y en la ventana emergente aparece la opción “Agregar línea de tendencia,” que incluye los ajustes polinomiales. Se puede calcular también el coeficiente de correlación con esta opción, si bien no determina las incertidumbres de los parámetros experimentales. Al igual que otros programas de graficación, *Origin*®, también permite ponderar los datos experimentales con base en sus incertidumbres.

---

### Ejemplo 9.3

Utilizando los datos del Ejemplo 7.2 para un movimiento uniformemente acelerado, podemos construir la gráfica de la Figura 9.3, con *Excel*®. Aplicando la función “Agregar línea de tendencia” y seleccionando la opción “Polinómica” de grado 2, además de “Presentar ecuación el gráfico” y “Presentar el valor de R cuadrado en el gráfico,” obtenemos el ajuste mostrado en dicha figura. Como podemos notar, el ajuste es muy bueno, por el valor de  $R^2$  cercano a la unidad.

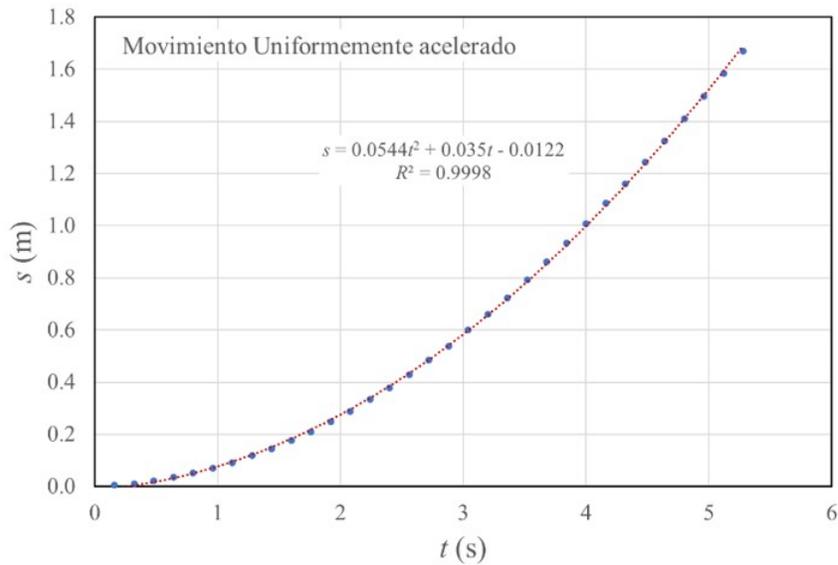


Figura 9.3. Gráfica para un movimiento uniformemente acelerado, mostrando el ajuste de un polinomio de segundo grado.

## 9.5. ANÁLISIS DE VARIANZA (ANOVA)

En muchas ocasiones nos encontramos con la necesidad de comparar dos o más resultados de medición del mismo mensurando, ya sea hechos por diferentes personas o con distintos instrumentos. Para establecer la validez de esas comparaciones se han desarrollado diversos métodos estadísticos (Kreyszig, 1994). Uno de ellos es el *Análisis de Varianza* (o ANOVA, por su nombre en inglés *Analysis of Variance*). Existen variantes del método, siendo la más simple el de *una vía* (*one way*). En este caso, partimos del hecho de que tenemos dos o más conjuntos de mediciones de la misma variable y queremos comparar sus promedios. La hipótesis inicial es que las medias son iguales, a lo que se le llama la *hipótesis nula*. El libro de Kreyszig (1994), además de explicar el aspecto matemático del procedimiento, indica cómo hacer paso a paso el ANOVA. Suponemos que hay  $r$  conjuntos de mediciones:

$$\begin{aligned} x_{11} &= x_{12} = \cdots = x_{1n} \\ x_{21} &= x_{22} = \cdots = x_{2n_2} \\ &\vdots \\ x_{r1} &= x_{r2} = \cdots = x_{rn_r} \end{aligned}$$

de forma tal que hay  $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$  mediciones totales. La suma del cuadrado de los residuos

$$q = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x})^2 \quad (9.24)$$

se descompone en dos partes, por lo que  $q = q_1 + q_2$ . . Aquí,  $q_1$  es la variación entre los grupos, mientras que  $q_2$  es la variación dentro de los grupos. La idea es, entonces, compararlas entre sí.

El primer paso consiste en determinar las medias de cada uno de los  $r$  grupos

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_i} (x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in_i}) \quad (9.25)$$

y la *gran media*, es decir, la de todos los datos disponibles:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^r n_i \bar{x}_i \quad (9.26)$$

A continuación, calculamos la suma de cuadrados para la media de cada uno de los grupos

$$q_1 = \sum_{i=1}^r n_i (\bar{x}_i - \bar{x})^2 \quad (9.27)$$

la suma de los residuos al cuadrado dentro de los grupos

$$q_2 = \sum_{i=1}^r \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2 \quad (9.28)$$

y el cociente

$$\nu_0 = \left( \frac{q_1}{r-1} \right) / \left( \frac{q_2}{n-r} \right) \quad (9.29)$$

Se escoge un nivel de significancia  $\alpha$  (que puede ser 5 % o 1 %) y encontramos el valor de  $c$  que cumple con la ecuación

$$P(V \leq c) = 1 - \alpha \quad (9.30)$$

En el apéndice G se hallan la definición y la solución para la función de distribución  $F$  con  $(r-1, n-r)$  grados de libertad.

Si  $\nu_0 \leq c$ , entonces la hipótesis nula no se rechaza, es decir, las medias se pueden considerar iguales dentro del valor de significancia escogido. Si esto no se cumple, la hipótesis nula se rechaza, o sea que las medias no son iguales.

#### Ejemplo 9.4

Se hace una serie de mediciones independientes de dos lotes de 50 resistores con valor nominal  $2\,000\ \Omega$ , producidos por el mismo fabricante, y deseamos comparar las dos medias, con un valor de significancia  $\alpha = 0.05$ . Esto indica que  $r = 2$  y  $n = 50$ . Aplicando las ecuaciones 9.25 y 9.26 encontramos que  $\bar{x}_1 = 1976\ \Omega$ ,  $\bar{x}_2 = 1981\ \Omega$  y  $\bar{x} = 1979\ \Omega$ . Más aún, con las ecuaciones 9.27 y 9.28 resulta  $q_1 = 615.04\ \Omega^2$  y  $q_2 = 3.44\ \Omega^2$ . El cociente  $\nu_0$  es

$$\nu_0 = \frac{\frac{615.04\Omega^2}{(2-1)}}{\frac{3.44\Omega^2}{(50-2)}} = 178.58$$

De la Tabla G.1 se busca el valor de  $x$  para el cual la función  $F = 0.95$  (esto es, con  $\alpha = 0.05$ ), para los grados de libertad  $m = 2 - 1 = 1$  y  $n = 100 - 2 = 98$ . Dado que en la tabla no aparece el valor  $n = 98$ , solo es necesario verificar que para  $n = 90$ ,  $x = 3.95$  y para  $n = 100$ ,  $x = 3.94$ . Con esto, podemos ver que  $\nu_0 = 178.58 > 3.95$ , por lo que concluimos que la hipótesis nula no se cumple y las medias no son iguales. Suponiendo que tenemos los datos en las columnas A y B (renglones 1 a 50), con la hoja de cálculo *Excel*® podemos hacer todas estas operaciones usando las funciones =PROMEDIO(A1:A50), =PROMEDIO(B1:B50) y =PROMEDIO(A1:B50) para las ecuaciones 9.25 y 9.26. Con respecto a las sumas de residuos al cuadrado, para  $q_2$  usamos =DESVIA2(A1:A50) + DESVIA2(B1:B50) y para  $q_1$  =DESVIA2(A1:B50). Aunque en este caso sólo había dos grupos por comparar, para calcular  $r$  se puede usar la función =CONTAR(A1:B1) y para  $n$  =CONTAR(A1:B50). El resto de los cálculos implica el uso de operaciones aritméticas sencillas. Los nombres de estas funciones en *Google*® Hojas de cálculo son idénticos que en *Excel*®.

## 9.6. VALORES ATÍPICOS EN UN EXPERIMENTO

Ocasionalmente, al hacer un experimento nos encontramos con un dato (o unos cuantos) que parece no seguir la misma tendencia que el resto de los resultados de medición. A este tipo de resultados se le conoce como *valores atípicos* (o *outliers*, en inglés). Tenemos que preguntarnos en estos casos qué hacer con dichos valores. Existe la probabilidad de que, en efecto, haya ocurrido una falla durante el proceso de medición (del equipo, una distracción al hacer la lectura o registrarla en la bitácora); entonces, la decisión debería ser eliminar este dato. Sin embargo, también existe la posibilidad de que esté señalando algo real, no previsto por el modelo o lo que esperábamos durante el experimento. No es obvio, por tanto, que podamos desechar (o rechazar) el dato sin mayores argumentos. Taylor (2022) y Deming (1964) presentan discusiones acerca de criterios para rechazar valores atípicos, aunque siempre recalcan que puede estarse pasando por alto algún fenómeno importante. El criterio principal se basa en considerar que, si el resultado queda fuera de dos desviaciones estándar de la distribución de resultados, podría rechazarse. Más aún, Taylor (2022) explica otro procedimiento, conocido como el criterio de *Chauvenet*. Este determina que, si el número de mediciones que se desvían del valor esperado al menos tanto como el valor “sospechoso” es menos de la mitad del total, entonces dicho valor se puede rechazar. Para esto se supone que los datos obedecen a una distribución normal y se establece una banda de probabilidades que “razonablemente” contiene a todos los datos “válidos.” Si el dato queda fuera de esta banda, se le considera un valor atípico. Para que todas las observaciones ( $n$ ) en una muestra se puedan tomar en cuenta, la banda de probabilidad (centrada en la media) debe contener solo  $n - \frac{1}{2}$  muestras. Dicho de otra manera, estamos buscando una probabilidad  $P$  que sea igual a  $n - \frac{1}{2}$  de un total de  $n$  muestras, es decir:

$$P = \frac{n - \frac{1}{2}}{n} = 1 - \frac{1}{2n} \quad (9.31)$$

Se usa la siguiente ecuación para definir el ancho de la banda:

$$\Delta x_{mx} = \frac{|x_s - \bar{x}|}{s_x}, \quad (9.32)$$

en la que  $\Delta x_{mx}$  es el ancho de la banda fuera de la cual se consideran los valores atípicos,  $x_s$  es el valor “bajo sospecha” de quedar fuera,  $\bar{x}$  es la media de todos los resultados y  $s_x$  es su desviación estándar. Podemos decir que  $\Delta x_{mx}$  es el número de desviaciones estándar permisibles para no

desechar los datos. De manera práctica, pueden calcularse todos los valores obtenidos en el experimento y comparar con los de la Tabla 9.2, que se obtienen con el criterio de Chauvenet.

Tabla 9.2. Tabla de valores para la aplicación del criterio de Chauvenet (adaptado de Glen, 2024).

$n$	$\Delta x_{m\acute{a}x}$	$n$	$\Delta x_{m\acute{a}x}$
3	1.383	24	2.311
4	1.534	25	2.326
5	1.645	26	2.341
6	1.732	27	2.355
7	1.803	28	2.369
8	1.863	29	2.382
9	1.915	30	2.394
10	1.96	31	2.406
11	2.000	32	2.418
12	2.037	33	2.429
13	2.070	34	2.440
14	2.100	35	2.450
15	2.128	36	2.460
16	2.154	37	2.470
17	2.178	38	2.479
18	2.200	39	2.489
19	2.222	40	2.498
20	2.241	50	2.576
21	2.260	100	2.807

## Ejemplo 9.5

Hacemos un conjunto de 20 mediciones del valor  $R$  de una resistencia eléctrica, con los resultados mostrados en la Tabla 9.3 (primera y tercera columnas). La media es  $1\,981\ \Omega$ , con una desviación estándar de  $2.4\ \Omega$ . Aplicando la ecuación 9.32 a cada uno de los datos, encontramos los valores de las columnas 2 y 4 de la Tabla. Puesto que tenemos 20 mediciones, en la Tabla 9.2 observamos que  $\Delta x_{mx} = 2.241$ , valor excedido únicamente por el primer resultado experimental de la tabla. Por tanto, usando el criterio de Chauvenet ese dato es atípico y puede descartarse. Es necesario recalcular la media y la desviación estándar, resultando ahora  $1\,981\ \Omega$  y  $1.7\ \Omega$ , respectivamente. Notamos que la media es prácticamente la misma, aunque la desviación estándar se redujo sustancialmente.

Tabla 9.3. Resistencias medidas en un lote de 20 resistores.

$R\ (\Omega)$	$\Delta x_{máx}$	$R\ (\Omega)$	$\Delta x_{máx}$
1973	3.167	1981	0.102
1979	0.715	1981	0.102
1979	0.715	1981	0.102
1979	0.715	1981	0.102
1980	0.307	1982	0.511
1980	0.307	1982	0.511
1980	0.307	1983	0.920
1980	0.307	1983	0.920
1981	0.102	1984	1.328
1981	0.102	1985	1.737

También se pueden desarrollar criterios para el rechazo de valores atípicos cuando se hacen mediciones con dos o más variables, es decir, a partir de ajustes de curvas. Usualmente se consideran bandas alrededor de la curva ajustada que cubran un área del tamaño de dos desviaciones estándar (suponiendo distribuciones normales de los datos), para tener probabilidades del orden de 95 % de que los resultados válidos estén contenidos en

esta región. Debemos tener siempre en mente que no podemos descartar automáticamente un valor que evidentemente no se apega a la tendencia del resto. La Figura 9.4 expone un ejemplo, adaptado del trabajo de Espinosa et al. (2010). En la gráfica se observa el comportamiento de la variable  $NSK$  definida en la ecuación 9.3 del Ejemplo 9.1, para un periodo de muestreo durante la primavera y el verano de 2005, en un sitio ubicado justo en el centro de la Ciudad de México. Claramente hay un valor atípico para el 16 de septiembre, el cual no puede rechazarse, porque, siendo  $NSK$  un trazador del humo en la atmósfera, demuestra la influencia de la quema de fuegos artificiales durante los festejos de la Independencia de México en la fecha señalada. Reiteramos que la aparición de un valor atípico puede reflejar la ocurrencia de un fenómeno no considerado previamente y, por tanto, dicho resultado tiene una gran relevancia durante el experimento.

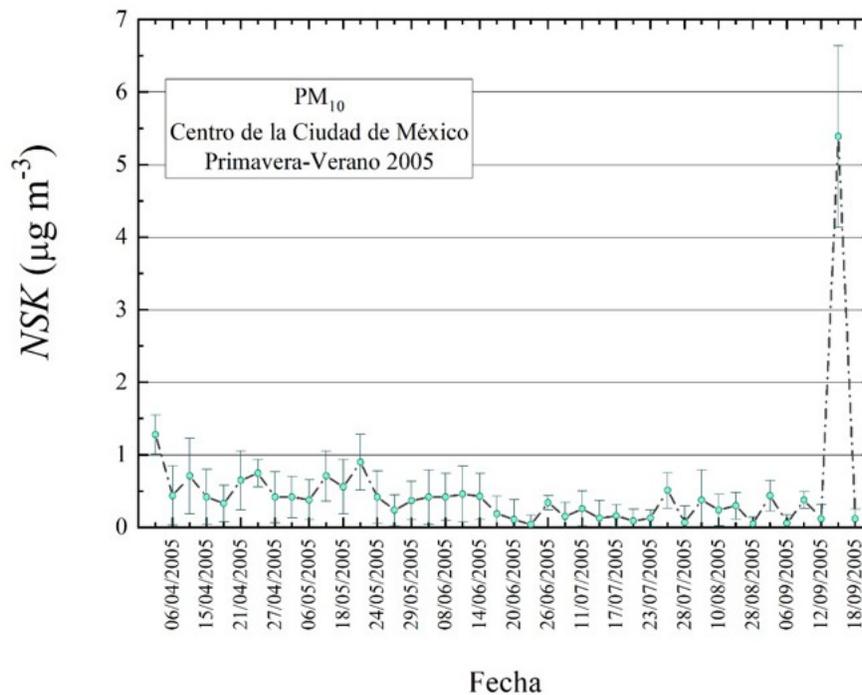


Figura 9.4. Concentraciones de potasio no debido al suelo ( $NSK$ ), en un sitio de muestreo de aerosol atmosférico en el centro de la Ciudad de México. Adaptado de Espinosa et al., (2010).

## CAPITULO 10. ANÁLISIS DIMENSIONAL

El *análisis dimensional* es una técnica que permite identificar la dependencia de una magnitud física con respecto a otras magnitudes cuyas relaciones con las magnitudes básicas (longitud, tiempo, masa, temperatura, intensidad de corriente, cantidad de materia e intensidad luminosa), es decir, sus dimensiones, ya se conocen. En principio, también conocemos la dimensión de la magnitud de interés. Estrictamente hablando, el análisis dimensional no es uno de los elementos esenciales para el desarrollo de un experimento. No obstante, puede ser muy útil para establecer un modelo que describa los resultados de dicho experimento, aunque no exista una teoría completa relacionada con el fenómeno que estamos estudiando. Por tanto, es conveniente presentar algunos conceptos básicos del análisis dimensional. Explicaciones más profundas y numerosos ejemplos se encuentran en los textos de Sierra Porta (2011) y Sotolongo Costa (2020).

En el Capítulo 2 presentamos la definición de la dimensión de una magnitud, como “la expresión de la dependencia de una magnitud con las magnitudes básicas de un sistema de magnitudes como un producto de potencias de factores correspondientes a las magnitudes básicas, omitiendo cualquier factor numérico.”

En el caso más general, para una magnitud  $Q$  se puede escribir  $\dim Q = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\epsilon N^\zeta J^\eta$ , donde los exponentes pueden adquirir cualquier valor positivo, negativo o cero. Si todos los exponentes son iguales a cero, tenemos una magnitud adimensional.

---

### Ejemplo 10.1

Las dimensiones de algunas magnitudes físicas comunes se muestran en la Tabla 10.1.

Tabla 10.1. Dimensiones de algunas magnitudes físicas de uso frecuente.

Magnitud	Símbolo	Dimensión
Fuerza	$F$	$\dim F = \text{LMT}^{-2}$
Trabajo	$W$	$\dim W = \text{L}^2\text{MT}^{-2}$
Presión	$P$	$\dim P = (\text{LMT}^{-2}) \cdot (\text{L}^{-2}) = \text{L}^{-1}\text{MT}^{-2}$
Densidad de corriente	$j$	$\dim j = \text{L}^{-2}\text{I}$
Constante universal de los gases	$R$	$\dim R = \text{L}^2\text{MT}^{-2}\Theta^{-1}\text{N}^{-1}$

Tenemos que enfatizar que estas expresiones aparecen en términos de sus *dimensiones*, no de sus *unidades*; no deben confundirse ambos conceptos. El análisis dimensional se refiere precisamente a las primeras; de aquí su nombre. La idea central en el análisis dimensional es que las dimensiones en ambos lados de una ecuación sean idénticas. De esta forma, por ejemplo, si necesitamos expresar la fuerza gravitacional  $F_G$  en términos de las masas de los cuerpos ( $m_1$  y  $m_2$ ) y su separación  $r$ , para saber qué dimensiones tiene la constante de gravitación universal  $G$  podemos notar que:

$$F_G = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad (10.1)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \dim F_G &= \dim G \dim \frac{m_1 m_2}{r^2} \\ \text{LTM}^{-2} &= \dim G \text{M}^2 \text{L}^{-2} \end{aligned} \quad (10.2)$$

y entonces, al despejar  $\dim G$ :

$$\dim G = \text{LTM}^{-2} \text{M}^{-2} \text{L}^2 = \text{L}^3 \text{M}^{-1} \text{T}^{-2} \quad (10.3)$$

En el SI, entonces, las unidades de  $G$  son  $\text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ .

En un primer caso, cuando tenemos una función  $z$  que es producto de dos variables  $(x, y)$ , tal que  $z \propto x^\alpha y^\beta$ , que además sólo dependen de las

magnitudes básicas de longitud, masa y tiempo, podemos escribir, considerando que  $K$  es la constante de proporcionalidad, cuyas dimensiones desconocemos:

$$L^{c_1} M^{c_2} T^{c_3} = \dim K (L^{a_1} M^{a_2} T^{a_3})^\alpha \left( L^{b_1} M^{b_2} T^{b_3} \right)^\beta \quad (10.4)$$

$$L^{c_1} M^{c_2} T^{c_3} = L^{k_1} M^{k_2} T^{k_3} (L^{a_1} M^{a_2} T^{a_3})^\alpha \left( L^{b_1} M^{b_2} T^{b_3} \right)^\beta,$$

lo cual implica que:

$$\begin{aligned} k_1 &= c_1 - \alpha a_1 - \beta b_1 \\ k_2 &= c_2 - \alpha a_2 - \beta b_2. \\ k_3 &= c_3 - \alpha a_3 - \beta b_3 \end{aligned} \quad (10.5)$$

Estas expresiones nos dan directamente las dimensiones de la constante  $K$ . El procedimiento es valioso, puesto que, aunque no contemos con un modelo teórico que describe el fenómeno, sí tendremos una predicción (limitada) del proceso bajo estudio. Los exponentes  $\alpha$  y  $\beta$  no necesariamente son números enteros ni positivos.

### Ejemplo 10.2

Un resorte de constante de elasticidad  $k$  tiene sujeta una masa  $m$  se halla en una orientación horizontal, sobre una mesa con una fuerza de fricción que podemos ignorar. Al estirarlo (o comprimirlo) una cierta longitud  $x$  y dejarlo libre, comenzará a oscilar con una frecuencia  $\nu$ , que depende tanto de  $k$  como de  $m$ . Puesto que sabemos que la fuerza  $F$  necesaria para estirar el resorte la distancia  $x$  es  $F = -kx$ , deducimos que  $\dim k = L^0 M T^{-2}$  (por la información de la Tabla 10.1). Así, escribimos para la frecuencia, con la constante de proporcionalidad  $P$ , cuyas unidades desconocemos:

$$\nu = P k^\alpha m^\beta. \quad (10.6)$$

De aquí que:

$$\dim \nu = \dim P \dim k^\alpha \dim m^\beta = \dim P (L^{a_1} M^{a_2} T^{a_3})^\alpha \left( L^{b_1} M^{b_2} T^{b_3} \right)^\beta. \quad (10.7)$$

Puesto que  $\dim \nu = T^{-1}$ ,  $\dim m = M$ , obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones, a partir de las expresiones (10.5):

$$\begin{aligned}p_1 &= 0 - \alpha(0) - \beta(0) \\p_2 &= 0 - \alpha(1) - \beta(1) \\p_3 &= -1 - \alpha(-2) - \beta(0)\end{aligned}\tag{10.8}$$

Con esto, si proponemos que  $p_1 = p_2 = p_3 = 0$  (lo que significa que  $P$  sea adimensional), hallamos que  $\beta = -\alpha$  y  $\alpha = 1/2$ , o sea que  $\beta = -1/2$ . En efecto, sabemos de los cursos elementales de mecánica clásica que

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}\tag{10.9}$$

---

A pesar de la utilidad de este método, cuando hacemos el análisis dimensional para una magnitud que depende de más de tres variables (cuando trabajamos con longitud, masa y tiempo, por ejemplo), o cuando el problema se extiende a las otras magnitudes básicas, como temperatura e intensidad de corriente eléctrica, la respuesta puede ser ambigua.

En la primera situación podemos tener un sistema de cuatro ecuaciones con solo tres variables, lo que implica que no haya una solución única, aunque sí podríamos alcanzar una solución parcial. Una manera alternativa de plantear el análisis dimensional consiste en usar una *matriz dimensional* (Sotolongo Costa, 2020). Esta tendría una estructura como muestra la Tabla 10.2, para una magnitud  $y$  que se expresa como el producto de potencias de las variables independientes  $x_1, x_2, \dots, x_N$ :

$$y = K x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N}\tag{10.10}$$

En principio, conocemos las dimensiones de todas las variables y  $K$  es una constante adimensional.

Los términos  $A_i, B_i, C_i$ , etc., son los exponentes a los cuales se debe elevar cada magnitud básica en las  $x_1, x_2, \dots, x_N$  para obtener sus dimensiones, mientras que  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  y  $\epsilon$  son los exponentes a los que se eleva cada magnitud básica en la magnitud física que nos interesa. Por supuesto, la matriz puede ampliarse con la cantidad de materia y la intensidad luminosa; esto dependerá del problema que se esté estudiando. El problema, entonces, se enfoca en resolver el correspondiente sistema de ecuaciones para encontrar los valores de  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ . Si se divide el lado derecho de

Tabla 10.2. Esquema general de la matriz dimensional.

Magnitud básica	$y$	$x_1$	$x_2$	...	$x_N$
L	$\alpha$	$A_1\alpha_1$	$A_2\alpha_2$	...	$A_N\alpha_N$
M	$\beta$	$B_1\alpha_1$	$B_2\alpha_2$	...	$B_N\alpha_N$
T	$\gamma$	$C_1\alpha_1$	$C_2\alpha_2$	...	$C_N\alpha_N$
I	$\delta$	$D_1\alpha_1$	$D_2\alpha_2$	...	$D_N\alpha_N$
$\Theta$	$\varepsilon$	$E_1\alpha_1$	$E_2\alpha_2$	...	$E_N\alpha_N$

la ecuación (10.10) entre la magnitud de interés,  $y$ , se establece que la suma de cada renglón de esta matriz será igual a cero, tomando en cuenta que  $K$  es adimensional:

$$K^{-1} \equiv C = y^{-1}x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2} \dots x_N^{\alpha_N} \quad (10.11)$$

### Ejemplo 10.3

Un ejemplo que se emplea frecuentemente para explicar el uso de la matriz dimensional es el de la fuerza de Stokes (Sierra Porta, 2011;Sotolongo Costa, 2020), que se refiere a aquella a la que está sometida una esfera de radio  $r$ , que se mueve a una velocidad  $\nu$  en un fluido con un coeficiente de viscosidad  $\eta$ . En este caso:

$$F = f(r, \nu, \eta) \quad (10.12)$$

por lo que la matriz dimensional será la de la Tabla 10.3.

Tabla 10.3. Matriz dimensional para la fuerza de Stokes.

Dimensión	$F$	$r$	$\nu$	$\eta$
L	1	1	1	-1
M	1	0	0	1
T	-2	0	-1	-1

Esto nos lleva al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} -\alpha + \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha + \alpha_4 &= 0 \\ 2\alpha - \alpha_3 - \alpha_4 &= 0 \end{aligned} \tag{10.13}$$

En este sistema de ecuaciones, hemos dividido el lado derecho entre  $F$ , para que el lado izquierdo sea adimensional y así todas las expresiones son iguales a cero. Puesto que tenemos cuatro incógnitas y tres ecuaciones, podemos hacer que  $\alpha_3 = 1$ . Resolviendo el sistema de ecuaciones (10.13), mediante el despeje cada variable, hallamos que  $\alpha = 1$ ,  $\alpha_2 = 1$  y  $\alpha_4 = 1$ . La expresión final para la fuerza es, entonces:

$$F = Kr\nu\eta \tag{10.14}$$

En efecto, un modelo teórico indica que  $K = 1/6\pi$ .

---

Debemos resaltar que cuando se incluyen otras magnitudes básicas, como la temperatura y la intensidad de corriente, pueden aparecer diversas ambigüedades, por lo que cada caso debe resolverse con especial cuidado.

## CAPITULO 11. EL INFORME DE LABORATORIO

El informe de laboratorio es la parte final del trabajo experimental. De nada sirve la realización de un experimento de calidad si los resultados no se dan a conocer de una manera adecuada. Desafortunadamente, no ha sido raro observar trabajos en los cuales los datos son de importancia en algún área, pero cuya presentación es tan pobre que oscurece la comprensión de lo que el autor quiso decir, o bien no ha sido capaz de transmitir a los lectores la trascendencia de sus resultados. Por otra parte, con frecuencia se omiten detalles tanto del experimento como del tratamiento e interpretación de los datos, impidiendo a algún otro científico la reproducción del experimento. La habilidad para escribir un informe de laboratorio de alta calidad sólo se adquiere con la práctica y un fuerte sentido autocrítico.

La publicación de informes no está limitada al ámbito científico, a través de artículos en revistas. En casi cualquier organización existe la necesidad de dar a conocer los resultados de las labores realizadas en un cierto período, por ejemplo, o con relación a un proceso. Más aún, la nueva tendencia hacia el desarrollo de sistemas de calidad (siguiendo las normas ISO 9000 e ISO 17000), exige la presentación de informes, tanto de la organización interesada como del organismo evaluador. El trámite de patentes debe estar fundamentado en un informe sumamente detallado sobre las características y el desempeño del objeto o método. No es de extrañar, pues, que la estructura de cada tipo de informe sea distinta, dependiendo del objetivo al cual está enfocado.

Cuando va a escribirse un documento de este tipo es indispensable tener en cuenta la clase de lectores que tendrá acceso a él. No puede utilizarse el mismo lenguaje en un artículo de divulgación que en uno de una revista científica especializada, y lo mismo puede decirse de un informe para un sistema de calidad, de un laboratorio acreditado o la obtención de una patente. Posiblemente, la redacción de un informe como un artículo científico

es una de las maneras más didácticas para alcanzar una disciplina en este aspecto. La experiencia ha probado, por otro lado, que cuando los estudiantes prestan la debida atención a la escritura de sus informes en laboratorios de enseñanza, encuentran sencilla la presentación de informes dentro de su práctica profesional o en la redacción de sus tesis. Por tanto, en este capítulo nos abocaremos a la descripción de un informe de laboratorio en esta forma, considerando que los experimentos y resultados conseguidos en un laboratorio de enseñanza rara vez son originales.

### 11.1. INFORMACIÓN PREVIA

Para comenzar a escribir el informe es necesario contar con cierta información obtenida anteriormente. En general, se compone de los siguientes elementos:

- a. Referencias bibliográficas en las cuales se fundamenta el trabajo. Mientras que en un artículo de investigación no debieran repetirse los resultados obtenidos por otros investigadores, en el informe de un laboratorio de enseñanza es más práctico contar con libros o artículos donde se describan los principios teóricos y los dispositivos utilizados. Si es necesario, han de tenerse tablas o libros donde se dan los valores convencionalmente verdaderos de la(s) magnitud(es) medida(s) en el experimento. Es posible, además, recurrir a otros medios, como la Internet, por medio de buscadores tipo *Google® Académico*, *ResearchGate®* o *Bing®*, o nuevas herramientas de inteligencia artificial, siempre y cuando sean capaces de dar crédito a las fuentes que utilice.
- b. La bitácora de laboratorio, de la cual ya hablamos ampliamente en el Capítulo 8.

Actualmente, valerse de herramientas de inteligencia artificial (IA) para conseguir la información básica por parte de quienes llevan cursos universitarios se ha vuelto una práctica muy difundida. Aquí se debe ser muy riguroso en el aspecto de la ética profesional y el respeto a la propiedad intelectual, puesto que estos medios frecuentemente obtienen información de fuentes que no necesariamente son de acceso libre. Por otro lado, no hay una garantía total de que los documentos redactados por estas herramientas contengan datos confiables. Amaro et al. (2022) demostraron que, si bien

algunos resultados ofrecidos por uno de estos instrumentos son muy positivos, en otros casos inventaba referencias y resolvía problemas lógicos o aritméticos de manera incorrecta. En este sentido, el documento redactado por el personal de la Biblioteca Conjunta de Ciencias de la Tierra, de la Universidad Nacional Autónoma de México (BCCT, 2023), proporciona una guía muy valiosa para el empleo de la IA en la docencia. Dicho documento incluye temas como las aplicaciones de buenas prácticas, los derechos de uso de la información y los riesgos que conlleva su empleo tanto para quienes toman los cursos como para las personas que los imparten. Una vez que se tiene toda la información básica, es posible proceder a la escritura misma del informe.

## 11.2. REDACCIÓN DEL INFORME

Los informes deberán estar escritos en un lenguaje sencillo y directo, utilizando frases cortas, pues esto facilita su comprensión. Es recomendable utilizar el modo impersonal ("se midió el tiempo que tarda un móvil en recorrer cierta distancia"), en vez de la primera persona. Esto, no obstante, no es preciso tomarlo como una regla rígida, pues en ocasiones un lenguaje más familiar es conveniente. Ha de cuidarse, además, de no mezclar los tiempos en las conjugaciones verbales (presente con pretérito, por citar un caso). La utilización adecuada del castellano o español es un punto que no puede soslayarse. El desarrollo de la tecnología, en general por culturas cuyo idioma no es el castellano, ha influido enormemente a la lengua. Si bien es cierto que los idiomas sufren transformaciones continuamente, también lo es que no pueden alterarse hasta el grado de decir o escribir expresiones sin sentido por ignorar el significado de los vocablos tanto en castellano como en inglés. Así pues, no es extraño en la actualidad oír hablar en el área de computación acerca de "librerías" de programas, intentando traducir del inglés *libraries*. Esta palabra en realidad significa "bibliotecas". Otras "traducciones" llegan a ser grotescas, como podemos apreciar en la Tabla 11.1. En esta Tabla, las definiciones se tomaron del Diccionario de la Real Academia Española (RAE, 2023).

La Norma Oficial Mexicana NOM Z-13, del año 1977 (SCFI, 1977), que lamentablemente ya no es vigente, señalaba algunos términos técnicos mal empleados y establecía la forma correcta de escribirlos. La Tabla 11.2 presenta los más importantes.

Tabla 11.1. Vocablos mal utilizados en español por su similitud con vocablos en inglés.

<b>Término</b>	<b>Confundido con:</b>	<b>Definición</b>	<b>Término correcto</b>
<b>Asumir</b>	<i>Assume</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Atraer a sí, tomar para sí.</li> <li>2. Hacerse cargo, responsabilizarse de algo, aceptarlo.</li> <li>3. Adquirir, tomar una forma mayor.</li> </ol>	Suponer
<b>Deposición</b>	<i>Deposition</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Exposición o declaración que se hace de algo.</li> <li>2. Privación o degradación de empleo o dignidad.</li> <li>3. Declaración hecha verbalmente ante un juez o tribunal.</li> <li>4. Acción y efecto de deponer.</li> <li>5. Evacuación de vientre.</li> </ol>	Depósito
<b>Químico</b>	<i>Chemical</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Perteneciente o relativo a la química.</li> <li>2. Por contraposición a físico, concierne a la composición de los cuerpos.</li> <li>3. Especialista en química.</li> </ol>	Sustancia química
<b>Plausible</b>	<i>Plausible</i>	<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Digno o merecedor de aplauso.</li> <li>2. Atendible, admisible, recomendable.</li> </ol>	Posible, factible

Tabla 11.2. Barbarismos y términos correctos establecidos por la norma NOM Z-13 (no vigente).

<i>Barbarismo</i>	<i>Término correcto</i>	<i>Barbarismo</i>	<i>Término correcto</i>
Switch	Interruptor	Wattaje	Potencia, consumo, disipación
Baipaseado	Puenteado	Amperaje	Corriente
Reporte	Informe	Voltaje	Tensión, diferencia de potencial
Flamdeo	Pandeo	Ciclaje	Frecuencia
Flange	Brida	Cubicaje	Volumen
Checar	Verificar, inspeccionar	Kilometraje	Distancia en km
Dial	Cuadrante, escala	Clutch	Embrague
Foco	Lámpara	Claxon	Bocina
Llanta	Neumático	Bulbo	Válvula electrónica
Cran	Manivela	Pija	Tornillo autorroscante

Muchos de los términos de la Tabla 11.2 son de uso común en México; pero la posibilidad de que lectores de otros países tengan acceso a nuestros documentos es una buena razón para utilizar las expresiones sugeridas.

Por otro lado, en la Tabla 11.2 también notamos que se ha hecho común confundir las unidades con la magnitud física (wattaje, amperaje, kilometraje). En otros ámbitos no científicos (gastronomía y servicios, por ejemplo), mucha gente acostumbra decir “gramaje” en vez de “masa en gramos,” “litraje” en lugar de “volumen de gas,” “metraje” y no “longitud,” entre distintas expresiones.

El manejo adecuado del vocabulario metrológico es fundamental. No es conveniente, como se explicó en capítulos anteriores, confundir términos como “exactitud”, y “precisión”, “error” e “incertidumbre”, “dimensión” con “unidades,” etc. Además, debe tenerse cuidado al usar términos que coloquialmente tienen un significado, mientras que en la metrología tienen otro o no existen.

En la práctica docente hemos identificado diversos problemas en quienes cursan los laboratorios básicos con relación a la gramática española. Por ejemplo, les cuesta trabajo reconocer si un sustantivo debe llevar un verbo conjugado en singular o plural. Así, encontramos oraciones del tipo “se ha medido las frecuencias de oscilación...,” siendo la forma correcta “se han medido las frecuencias de oscilación...” Igualmente, por lo general desconocen el uso de los signos de puntuación. Se ha difundido un vicio con el uso de la coma, porque normalmente la escriben en cualquier situación

donde se hace una pausa en la lectura o a veces “inventan” pausas donde no las hay. Un caso frecuente es introducir un coma justo después del sujeto en la oración, como en “el multímetro, tiene una escala de 20 V. . .” La coma está de más. O bien, desconocer las contracciones “al” y “del” al escribir o decir “a el” y “de el.” El segundo caso solo debe escribirse cuando “El” es parte de un nombre propio, como “extraído de El Nacional (diario).” Además, hay expresiones de uso muy extendido, que son incorrectas. Así, de forma acertada debe escribirse “con base en,” “con relación a” o “en relación con,” y “mayor que,” y no “en base a,” “en relación a” o “mayor a,” respectivamente.

Debe hacerse una revisión de la ortografía. Es imperdonable que quien estudia en una universidad (y no se diga de profesionales en un área técnica o científica) no sea capaz de conocer las reglas ortográficas básicas del idioma en que normalmente se expresa. El consabido pretexto “es que nunca aprendí cómo escribir los acentos” es inaceptable en alguien que estudia Física, Química o Biología, pues, en principio, sí fue capaz de aprender a sumar, restar, multiplicar y dividir, y terminar un bachillerato. Dado que el presente no es un texto para enseñanza de la gramática, es sumamente recomendable leer obras como “Gramática básica de la lengua española” (RAE, 2011) o “Gramática y Ortografía básicas de la lengua española” (RAE, 2019), para quienes se saben con deficiencias en su conocimiento de la gramática. Existen muchos otros libros en este tema, accesibles en cuanto a costo o disponibilidad en la red. Adicionalmente, pueden consultarse otras obras para los ámbitos locales, como el “Diccionario breve de mexicanismos” (Gómez de Silva, 2001) en el caso de México.

### 11.3. PARTES DEL INFORME

El informe, para presentar una secuencia lógica, debe conservar una estructura que lleve al lector paso a paso, con la finalidad de conocer la naturaleza del trabajo y la calidad de los resultados alcanzados. Para ello, es recomendable incluir en el informe las siguientes partes:

- Título
- Autor(es)
- Resumen
- Introducción

- Desarrollo experimental
- Resultados
- Discusión
- Conclusiones
- Bibliografía

En las subsecciones siguientes describiremos las características que cada una de estas componentes debe tener.

#### 11.3.1. Título

El título del informe debe concordar con el tema del experimento ejecutado, y ser lo suficientemente descriptivo como para que el lector pueda comprender cuál es dicho tema. Un título apropiado atraerá la atención de los lectores hacia el experimento. En lo referente a su longitud, es posible que contenga tantas palabras como sea indispensable para describir el tema, si bien existen publicaciones científicas que fijan un límite al número de caracteres en el título. Para los informes que presentan quienes estudian en el laboratorio, no obstante, es mejor restringirlo a un máximo de diez palabras. Actualmente, en las herramientas de búsqueda de publicaciones científicas lo más simple es introducir las palabras clave que puedan estar contenidas en el título.

#### 11.3.2. Autores

Como parte del reconocimiento al trabajo realizado por ellas, es fundamental incluir el nombre de las personas que participaron en la elaboración del experimento o que contribuyeron al análisis e interpretación de los resultados. Asimismo, se debe incluir la adscripción de los autores (la institución donde trabajan y su domicilio).

En lo que se refiere a los autores, debe considerarse que sólo han de incluirse como coautores, sin omitir uno solo, a quienes colaboraron realmente. Por desgracia, no es extraño hallar en las listas de autores de una publicación científica personas que, tan solo porque ostentan un cargo o administran un laboratorio, piensan que merecen una coautoría. Estas actitudes deben estar regidas por la ética profesional, que cada vez se exige más en los cursos de las ciencias experimentales.

No solo esto, en las revistas científicas actuales es preciso mencionar cuál fue la participación de cada uno de los coautores.

### 11.3.3. Resumen

Esta sección es imprescindible. El resumen consiste en un párrafo de cerca de diez renglones, donde se menciona cuál es el objetivo del trabajo, qué método experimental se usó y si los resultados alcanzados fueron buenos o no, sin necesidad de presentar tablas o gráficas. En muy raras ocasiones, en el resumen se escriben ecuaciones o citas a las referencias.

La redacción adecuada del resumen es fundamental, porque gracias a él un lector tendrá información suficiente para decidir si la lectura del resto del informe le servirá o no. En la actualidad, después de buscar publicaciones científicas por medio de las palabras clave del título, correspondientes a cierto intervalo de años, la persona interesada revisa el resumen para tomar dicha decisión. Un resumen mal elaborado puede tener como consecuencia que el artículo nunca sea consultado.

### 11.3.4. Introducción

En esta sección se incluirá de manera explícita y concisa el objetivo que se pretende alcanzar cuando se efectúa el trabajo. Usualmente se presenta una justificación del experimento o investigación, haciendo referencia a trabajos concluidos previamente, tanto por el mismo autor como por otros. En el trabajo de investigación este punto es crucial, porque aquí se asienta la originalidad de los resultados. A pesar de esto, en laboratorios de enseñanza, dicha originalidad no es indispensable, aunque es conveniente mostrar alguna recapitulación histórica acerca del problema central del informe.

En la introducción también debe incluirse la teoría necesaria para explicar los resultados o hacer predicciones. La extensión de estas explicaciones teóricas contenidas en esta sección debe ser la suficiente para que el lector entienda el resto del informe; pero no ha de abarcar información que no tendrá utilidad más adelante, dentro del informe.

No es recomendable escribir las ecuaciones dentro de los párrafos, porque las hace confusas, sino en renglones separados, aunque en ciertos casos se puede hacer en beneficio de la claridad de lo que se está explicando. Para cada ecuación es necesario presentar el significado de cada uno de los símbolos que aparecen por primera vez en el informe. Se requiere añadir a las figuras un "pie," que las describa clara y sucintamente. Las figuras deben estar en las proximidades del párrafo en el que se hace referencia a ellas

por primera ocasión. Una costumbre útil (y obligatoria en muchas publicaciones científicas) para la presentación de los modelos teóricos usados es la numeración de las ecuaciones y las figuras, ya que esto facilita la referencia a ellas que más adelante se haga en el mismo informe.

No está de más recordar que en esta sección se deben citar todas las fuentes de información utilizadas para su redacción. Por otra parte, aunque pueda requerirse que la extensión de esta sección sea grande, no exceda de un par de cuartillas.

#### 11.3.5. Desarrollo experimental

El desarrollo experimental debe necesariamente incluir tres partes: la descripción del dispositivo experimental, la explicación clara y detallada del método que se siguió para efectuar las mediciones, y las ecuaciones relacionadas con el tratamiento de los datos experimentales.

En la descripción del dispositivo deben mencionarse los instrumentos usados y lo mejor es presentar un diagrama, a partir del cual se base la explicación de su funcionamiento. Aunque parezca trillado, hay mucho de cierto en aquello de que “una imagen dice más que mil palabras.” Al revisar el diagrama, es más sencillo tanto para la persona que escribe el informe como para quienes lo lean, asimilar el funcionamiento del dispositivo. En la descripción es imprescindible decir cuáles son las características de los instrumentos de medición utilizados (por ejemplo, “una balanza granataria marca Acme con una resolución de 0.1 g”), mencionando claramente cuál es la incertidumbre con la que contribuye cada aparato. Los diversos materiales y sustancias químicas empleados en el experimento también habrán de citarse aquí, dentro del texto. Es relevante igualmente resaltar que por ningún motivo se han de incluir en esta sección “listas de material,” ya que corresponden a formatos no aptos para un artículo científico o informe técnico.

La descripción del dispositivo de ninguna manera explica la forma en que se hicieron las mediciones. Por tanto, es conveniente describir con detalle este procedimiento. Aquí debe decirse cuáles son los mensurandos en el experimento, señalando explícitamente las variables independientes y las dependientes. Ha de mencionarse cómo se cambiaron dichas variables independientes y por qué se hizo así, sin olvidar mencionar cuántas veces se midió cada uno de los mensurandos. Es necesario considerar si hubo más de una persona haciendo las mediciones, para definir si en los resultados se hablará de repetibilidad o reproducibilidad. En esta parte, además, es im-

prescindible enumerar claramente cuáles son las precauciones y medidas de seguridad que debieron tomarse durante la realización del experimento. Si algún lector está interesado en repetirlo, indudablemente tendrá que seguir dichas precauciones también.

Enseguida se tiene que explicar el tratamiento que se va a dar a los datos experimentales obtenidos. Si, por ejemplo, tienen que calcularse medias (con sus respectivas desviaciones estándar), o quizás haya que hacer el ajuste de una curva a los datos. Siempre deberán de escribirse las ecuaciones que representen los modelos de interés y conecten sus parámetros con las variables presentadas en la introducción. Un ejemplo muy usual es el experimento para estudiar la Ley de Ohm. Aquí se llevan a cabo mediciones de la diferencia de potencial ( $V$ ) y de la intensidad de corriente ( $I$ ) que pasa por una resistencia con valor  $R$ . Al dibujar una gráfica de  $V$  en función de  $I$ , la pendiente  $m$  de la recta obtenida a través de un ajuste con mínimos cuadrados (la ecuación sería  $V = mI + b$ ) se asocia con el valor de la resistencia. En la introducción ya se debiera haber explicado que la ley de Ohm se describe con la ecuación  $V = RI$ . La relación entre las dos secciones del informe debe escribirse de manera explícita. El sentido del experimento se vuelve confuso cuando no se escribe así.

Frecuentemente, también conviene en esta sección describir cómo se evaluarán las incertidumbres experimentales de los resultados de medición finales, si bien es aceptable mostrarlo en un apéndice al final del informe, porque así se conserva la secuencia lógica para la lectura del informe.

#### 11.3.6. Resultados

Debe reflexionarse cuidadosamente cuál es la mejor forma de presentar los resultados del experimento. En esta sección será posible incluir tablas, gráficas, o únicamente un resultado numérico. Dentro de una publicación científica no se debe dar la información por duplicado (por ejemplo, una tabla con los datos que posteriormente aparecen en una gráfica, a menos que en esta se estén comparando con algún modelo, ya sea teórico o empírico), aunque generalmente en los laboratorios de enseñanza es muy conveniente, porque quien imparte el curso puede advertir si la persona que redactó el informe cometió alguna equivocación al desplegar sus datos en la gráfica.

Si los resultados del experimento requieren su presentación en tablas, cuando son largas, lo mejor es escribirlas en un apéndice al final del informe, con el fin de no distraer la atención del lector. Adicionalmente, es imperativo incluir la incertidumbre experimental para cada uno de los da-

tos, porque debe tenerse en mente que una medición sin su incertidumbre no tiene sentido alguno. Se debe tener el mismo cuidado con las unidades de cada dato recabado y presentado, que deben igualmente ser las correctas y congruentes entre ellas. Las tablas, de manera similar que las ecuaciones y las figuras, deben llevar una numeración y un título. Es necesario que el título se escriba en la parte superior de la tabla y no en la parte inferior, como en el caso de los pies de figura.

Cuando se tengan gráficas, es indispensable incluir la incertidumbre, tal como explicamos en el Capítulo 6. Si es muy pequeña como para apreciarla en la figura, se requiere decirlo explícitamente en el texto o el pie de la figura. Además, hay que verificar la apariencia de las escalas, el título de los ejes y las unidades. Si se hacen ajustes de rectas o curvas de otro tipo, se debe incluir en el texto la ecuación calculada, sin olvidar la incertidumbre en los parámetros evaluados (como la pendiente y la ordenada al origen si es una recta). Las gráficas deben tener una numeración secuencial, con su respectivo título, lo suficientemente descriptivo. No es recomendable situar las gráficas hasta el final del informe de laboratorio de enseñanza, sino lo más cercanas posible al texto que las menciona.

Por último, cuando se trata de un solo resultado (por ejemplo, la aceleración de la gravedad), lo mejor es escribirlo en un renglón aparte, exponiendo la incertidumbre y las unidades. En todos estos contextos hay que enfatizar que los resultados deben escribirse con el número correcto de cifras significativas.

La sección de resultados del informe no debe rellenarse con todos los cálculos aritméticos necesarios para llegar hasta el resultado final. La bitácora es el lugar adecuado para ello, porque al lector, normalmente, no tendrá interés en todos estos números. Al incluirlos, solo se estarán enmascarando las magnitudes principales del experimento y el informe; a menos que sea excepcionalmente necesario, se pueden escribir en un apéndice.

### 11.3.7. Discusión

Ya que se mostraron los resultados, se debe continuar con la sección de discusión. En ella, se deben comparar dichos resultados con los valores esperados teóricamente, con datos de valores aceptados (convencionalmente verdaderos) extraídos de tablas u otros textos, o bien de otros procedimientos dentro del mismo experimento. Esta componente del informe es una de las más relevantes, porque aquí es donde se muestra la interpretación de los resultados del experimento. El cálculo de los errores porcentuales es

una muy buena guía para dar una idea más clara de la calidad del experimento, cuando hay valores verdaderos con los que se puedan comparar. Otros métodos, como cálculo de coeficientes de correlación o ANOVA pueden ayudar en experimentos donde sean aplicables.

En esta etapa adquiere gran importancia la incertidumbre experimental. La comparación de un cálculo teórico o valor convencionalmente verdadero es más explícita cuando se considera el intervalo dentro del cual puede estar el resultado de la medición. Igualmente, se debe indicar si las mediciones fueron realmente precisas, esto es, si la incertidumbre relativa es pequeña o tan grande que cualquier conclusión queda oscurecida por este hecho.

Además, si los resultados no coinciden con los esperados, explicar por qué no existe esta congruencia demuestra que quien escribió el informe posee una comprensión adecuada de lo que hizo experimentalmente, o bien que identificó fallas durante el tratamiento de los datos. Es oportuno hablar de nuevo acerca de la ética de quien llevó a cabo el experimento. En el caso de que los resultados no sean buenos, persiste sin duda la "tentación" de alterarlos para que correspondan a las predicciones teóricas o los valores convencionalmente verdaderos. Esta situación es real tanto para los investigadores (puesto que deben realizar un trabajo que se publique en una revista científica con arbitraje, o de lo contrario no se harán acreedores a estímulos económicos o académicos), como para quien estudie en los cursos de laboratorio (porque así no alcanzan la calificación que sería deseable o no dejan a quien imparte el curso con un trabajo satisfactorio). El experimentador, por razones de ética, tiene que presentar los resultados tal como los obtuvo. No se puede pensar en una justificación a una actitud opuesta.

#### 11.3.8. Conclusiones

Por último, en las conclusiones se debe aseverar si el experimento fue bueno o no, en otras palabras, si los objetivos que se plantearon al inicio se cumplieron. Es posible decir si el procedimiento experimental es adecuado para cumplir con dichos objetivos, o si se pueden dar sugerencias para mejorarlo. La sección de conclusiones no es un "buzón de quejas," en el que se diga "el experimento no me salió bien porque el equipo está muy dañado" o frases semejantes. En especial, en el nivel de quienes estudian en una universidad, es factible, si no forzoso, decir enunciados más elaborados que "la práctica fue muy bonita y aprendí mucho." No existen reglas en cuanto a la extensión de las conclusiones en un informe científico. Una sola frase podría ser suficiente, o bien todo un conjunto de oraciones, de acuerdo con

el tipo de experimento. No obstante, quien escribe el informe debe percatarse de que no es conveniente redactar páginas y páginas para que el lector se convenza de la validez de su trabajo. Por otra parte, no deben agregarse conclusiones acerca de algo que no se efectuó durante el experimento. Lamentablemente, no es inusual leer como conclusión frases semejantes a “la resistencia se vio sujeta a un aumento en su temperatura”, cuando el objetivo era comprobar u observar la relación lineal entre diferencia de potencial e intensidad de corriente en dicha resistencia.

### 11.3.9. Bibliografía

Dada la tendencia actual de otorgar créditos a quien haya hecho trabajos previos en los temas de los experimentos y que se usaron para los informes respectivos, no debe pasarse por alto la presentación de la bibliografía (generalmente libros, en este nivel) o referencias. En las instituciones de alto nivel se reconoce como plagio el no indicar todas las referencias consultadas. Además, muchos de los desarrollos matemáticos que se explicaron en la Introducción, al igual que el funcionamiento de los instrumentos de medición, pueden comprenderse con mayores detalles en alguna de las referencias, lo que resalta la utilidad de la bibliografía.

Existen muchísimos formatos para las referencias; casi cualquier revista tiene el suyo, que es obligatorio para los autores. No obstante, varios formatos se han vuelto muy populares, aunque a menudo no corresponden al área científica del experimento. Así, la *American Psychological Association* (APA) ha difundido ampliamente el “formato APA,” que puede consultarse en el manual de estilo correspondiente (APA, 2021). Los buscadores de información (como Google® Académico) permiten extraer la cita en este formato. Hay otras herramientas, como *BibTeX*®, con la cual se pueden manejar las referencias para su uso (incluyendo la asignación de formatos específicos) en procesadores de texto *LaTeX*®; se recomienda visitar el sitio especial [www.bibtex.org](http://www.bibtex.org) para conocer todos los detalles. De igual manera, otro manejador de referencias es *Mendelev*®, que puede obtenerse en el sitio [www.mendelev.com](http://www.mendelev.com). Además, el mismo procesador *Word*® tiene las funciones necesarias para crear “bibliotecas” de referencia que puedan incorporarse en el texto con el formato requerido para la publicación.

A pesar de esto, para la presentación de informes de laboratorios de enseñanza, es factible utilizar formatos simplificados, que contengan los detalles suficientes para la localización del trabajo citado. La Tabla 11.3 contiene ejemplos de cómo escribir las referencias de manera práctica para este tipo

de informes. Por supuesto, quienes imparten los cursos tienen la posibilidad de elegir el que más convenga para los fines de su clase.

Tabla 11.3. Formato sugerido para referencias en un informe de laboratorio de enseñanza.

Documento	Ejemplo
Artículo	J. Miranda, O.G. de Lucio, M.F. Lugo-Licona, Rev. Mex. Fis. S53 (2007) 29-32.
Libro	D. Belkic, Quantum Theory of High-Energy Ion-Atom Collisions, CRC Press, Boca Raton, FL USA (2008).
Trabajo <i>in extenso</i> en memorias de congreso	A.E. Hernández-López, J. Miranda, J.C. Pineda, S. Reynoso-Cruces. Analysis with X-ray Fluorescence of atmospheric aerosol samples collected south of Mexico City. Proceedings of the XVI International Seminar on X-ray Analysis. Universidad de la Frontera, Chile. 4 to 7 November, 2018. Pp. 47-55.
Sitio web	SEDEMA (2019). Programa para contingencias ambientales atmosféricas en la ZMVM. Secretaría de Medio Ambiente <a href="http://www.aire.cdmx.gob.mx/descargas/ultima-hora/calidad-aire/pcaa/pcaa-historico-contingencias.pdf">http://www.aire.cdmx.gob.mx/descargas/ultima-hora/calidad-aire/pcaa/pcaa-historico-contingencias.pdf</a> . Consultado 10/01/20.

#### 11.3.10. Aspecto del informe

Cabe la posibilidad de que un informe con una inmejorable ejecución experimental, un análisis adecuado, discusión y conclusiones de muy alta calidad, quede arruinado por un aspecto pobre. Al presente, con la amplia difusión de los procesadores de texto y programas de graficación, el aspecto de un informe debe tener una muy buena presentación. La limpieza, orden y claridad con que se entregue el informe son factores que deciden frecuentemente, por ejemplo, si el postulante a un empleo es merecedor de él o si un manuscrito puede ser aceptado para publicación.

Pensando que ya es prácticamente universal el uso de los mencionados procesadores de texto, existen varias recomendaciones con respecto al tipo de letra que debe usarse en diferentes casos. Todas estas reglas también son aplicables a la presentación de las gráficas en un informe o artículo. La tabla 11.4 muestra estas sugerencias.

Tabla 11.4. Recomendaciones para tipos de letra a usar en un informe de laboratorio.

<i>Texto</i>	<i>Tipo de letra</i>	<i>Ejemplo</i>
Títulos	Letra sin patín ( <i>sans serif</i> )	<b>Título</b>
Textos largos	Letra con patín	Texto
Símbolos de unidades	Letra con patín normal	cm
Símbolos de cantidades	Letra cursiva	<i>A</i>
Vectores	Letra negrita	<b>A</b>
Símbolos para tensores	Letra sin patín, negrita y cursiva	<b><i>T</i></b>
Matrices	Letra cursiva	<i>M</i>
Símbolos de elementos	Letra con patín normal	Cu

Para que no haya confusiones con números que tienen valores absolutos menores que uno, es indispensable escribir un cero antes del punto decimal (por ejemplo, 0.25 y no .25). También es conveniente escribir una cruz ( $\times$ ) en vez de un punto ( $\cdot$ ) cuando se presenten multiplicaciones (como en la notación científica,  $5 \times 10^3$ ).

Por último, en el Apéndice H aparece una muestra de un informe basado en un experimento realizado en un laboratorio de enseñanza, tratando de seguir los lineamientos marcados en este capítulo. El ejemplo mostrado ahí reproduce casi por completo el informe ejemplificado en el trabajo de Miranda (2000).

## EJERCICIOS

### CAPÍTULO 2

- a. Un experimento escolar para medir la carga del electrón (experimento de Millikan), da como resultado  $4.66 (0.62) \times 10^{-10}$  ues. Calcule los errores absoluto, relativo y porcentual si el valor convencionalmente verdadero (en este caso, definido) de la carga del electrón es  $1.602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$  C. Utilice que  $1 \text{ ues} = 3.336 \times 10^{-10}$  C (ues es la *unidad electrostática de carga*).
- b. Dos grupos de estudiantes hacen experimentos para determinar el coeficiente de dilatación lineal térmica del aluminio, cuyo valor convencionalmente verdadero es  $\alpha = [23.0 (1.1)] \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . El primer equipo obtuvo un valor de  $\alpha = [22.0 (2.1)] \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ , mientras que para el segundo grupo el resultado fue  $\alpha = [24.1 (1.8)] \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ . Calcule los errores porcentuales en cada caso y diga cuál de las dos mediciones es más exacta. Considerando la definición de precisión y las incertidumbres en ambos resultados, identifique cuál de las dos mediciones es más precisa, con base en la incertidumbre relativa de cada una.
- c. Es posible hacer un experimento casero para estimar el valor de la velocidad de la luz,  $c$ . Usando tiras de “gomita” de dulce, se encuentran los máximos de amplitud en ondas estacionarias en el interior de un horno de microondas (puntos derretidos de las tiras). La frecuencia de emisión del *klystron* del horno es  $f = 2.45$  GHz; los fabricantes no proporcionan la incertidumbre, por lo que puede suponerse que es del 1 %. La distancia medida entre los máximos de amplitud (es decir, la mitad de la longitud de onda) es  $\lambda/2 = 6.2 (0.2)$  cm. Sabiendo que  $c = \lambda f$ , calcule el valor estimado de la velocidad de la luz, así como los

errores absoluto, relativo y porcentual del resultado, considerando el valor real de  $c$  de la Tabla 3.1.

## CAPÍTULO 3

- a. Escriba el equivalente de un año-luz en m y en km, en ambos casos con notación científica.
- b. ¿Cuál es el valor convencionalmente verdadero para el diámetro de un átomo de hidrógeno en su estado base? Escriba el resultado en m, mm y  $\mu\text{m}$ .
- c. La velocidad máxima en una autopista de los Estados Unidos de América es de 65 millas/hora. Escriba el equivalente en km/h y en m/s.
- d. Un café regular se vende (sin apearse a las normas oficiales mexicanas) en vasos de 12 onzas líquidas para el tamaño chico y de 16 onzas líquidas para el tamaño mediano. Escriba la capacidad de cada vaso en unidades de uso común del Sistema Internacional.
- e. Un aparato eléctrico opera con una intensidad de corriente de 12 A, a una diferencia de potencial de 120 V en la línea eléctrica. Dado que la potencia se calcula como  $P = VI$ , diga cuál es su consumo en watts. Si el aparato funciona durante 24 h, calcule cuál fue su consumo de energía, en joules.
- f. El hierro se funde a 1 808 K. Escriba esta temperatura en las escalas Celsius y Fahrenheit.

## CAPÍTULO 4

- a. Se hace una prueba para medir el tiempo de reacción de encendido-apagado de un cronómetro digital, que cuenta con una resolución de 0.01 s. Los resultados obtenidos se aprecian en la tabla (se escriben en centésimas de segundo).

15	15	16	12	16	19	13	13	16	15	12
15	13	16	16	12	12	13	15	16	16	16
15	15	16	13	16	16	16	15	16	16	19
16	13	12	16	16	12	16	16	12	12	15
19	16	16	16	16	15	16	16	13	16	16
19	16	13	16	16	13	12	16	13	16	16
16	12	15	16	12	15	15	16	13	15	16
19	15	16	19	16	15	15	15	16	16	16
16	12	16	16	18	16	15	16	16	13	13
19	16	16	12	16	12	19	16	15	16	16

Calcule la media, la desviación estándar y la desviación estándar de la media. Además, encuentre la moda del conjunto de datos.

- Dibuje un histograma con los datos del problema anterior.
- ¿Cuántas mediciones se necesitan si se pide que la desviación estándar de la media no exceda el 1 % de la media?
- Se midieron las resistencias de 100 resistores, con un valor proporcionado por el fabricante de  $47 \Omega$ , con una "tolerancia" de 5 %. Los resultados (en  $\Omega$ ) se muestran en la tabla (las incertidumbres se calculan mediante las fórmulas dadas por el fabricante del multímetro).

46.8	46.9	47.4	47.2	46.6
47.3	47.1	47.4	47.1	46.9
47.3	47.2	47.1	47.2	46.9
47.2	47.4	46.8	46.9	47.2
47.3	47.3	47.4	47.0	46.8
47.4	46.8	46.9	46.9	47.0
47.2	47.5	47.0	47.3	47.2
47.0	47.3	46.9	46.9	47.1
46.6	47.5	47.6	46.8	46.7
46.9	47.0	47.4	47.0	47.2
47.2	47.4	47.2	47.0	47.2
47.0	47.7	47.1	46.7	46.5
47.0	47.5	46.9	47.1	46.6
46.8	46.2	46.9	46.9	46.5
47.3	46.8	47.5	47.0	46.9
47.1	47.0	46.9	46.5	46.7
47.2	47.0	46.9	47.2	47.2
46.9	47.1	47.1	47.0	46.8
47.0	46.7	46.5	46.9	46.9
47.0	46.7	47.0	47.0	46.8

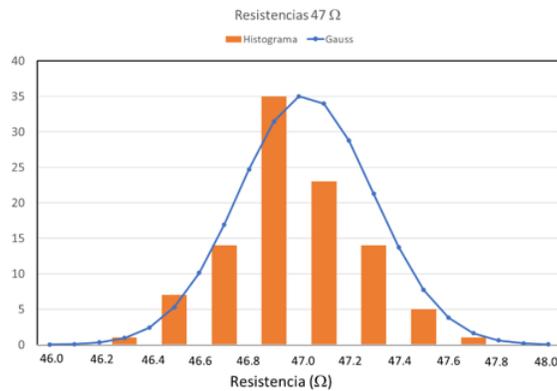
Construya el histograma y ajuste la distribución normal correspondiente siguiendo los pasos que se muestran a continuación.

- i Ordene todos los datos de la tabla de menor a mayor.
- ii Observe cuál es el valor más pequeño ( $R_{min}$ ) y cuál el más grande; en este caso, si el último decimal es impar, sume un decimal para que tener un número par ( $R_{max}$ ). Calcule la diferencia ( $R_{max} - R_{min}$ ) y divida entre 8, que es el número de clases en el histograma (este número no tiene por qué usarse siempre que se dibuje un histograma; depende del problema particular).
- iii Sume el número resultante ( $\Delta R$ ) al valor más pequeño ( $R_{min} + \Delta R$ ), luego sume dos veces este valor ( $R_{min} + 2\Delta R$ ) y así sucesivamente hasta llegar a  $R_{max}$ .
- iv Cuento el número de resultados que están en el intervalo ( $R_{min}, R_{min} + \Delta R$ ), enseguida en ( $R_{min} + \Delta R, R_{min} + 2\Delta R$ ), y de esta forma para todos los intervalos.
- v Determine la media  $m$  y la desviación estándar  $s$  de las resistencias medidas. También encuentre la mediana y la moda.
- vi Usando la ecuación para la distribución normal

$$f(x) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{s}\right)^2\right]},$$

calcule el valor de  $f(x)$  para  $x$  en todo el intervalo, por ejemplo,  $[R_{min} - \Delta R, R_{max} + \Delta R]$ , usando unos 20 valores para  $x$ .

- vii Multiplique cada uno de los valores obtenidos para  $f(x)$  por el número más alto de casos en las clases del paso iv y divida entre el valor más alto de  $f(x)$  obtenido en el paso vi.
- viii Dibuje el histograma con los valores del paso iv, señalando claramente los límites de cada una de las clases.
- ix Sobre el histograma, grafique la curva correspondiente a los valores obtenidos en el paso vii. Debe obtener algo semejante a la figura, creada con Excel®.



- e. En un estudio acerca de la concentración de azufre en partículas respirables presentes en el interior de una vivienda y en el exterior, se encuentran los siguientes resultados para el cociente de las concentraciones  $S_{int}/S_{ext}$ :

0.079	0.404	0.530	0.568	0.673	0.835	1.084
0.215	0.444	0.533	0.574	0.685	0.880	
0.273	0.464	0.536	0.595	0.689	0.918	
0.277	0.489	0.552	0.598	0.698	0.936	
0.296	0.492	0.558	0.608	0.709	0.970	
0.297	0.493	0.559	0.609	0.717	1.015	
0.363	0.520	0.560	0.619	0.747	1.074	

Las incertidumbres son del orden de 5 % para cada cociente (Reynoso et al., 2023). Calcule la media, desviación estándar y desviación estándar de la media. A continuación, construya un histograma, dando un ancho de clase de 0.2. Con base en los datos obtenidos, dibuje en el histograma una curva de distribución normal con los parámetros obtenidos.

- f. Un comerciante de piezas de vidrio adquirió un lote y para seguir procedimientos de control de calidad midió la masa de cada pieza. Obtuvo los siguientes resultados (las masas aparecen en gramos, con una incertidumbre de 1 g):  
Dibuje un histograma y concluya si puede identificar dos fabricantes de las piezas distintos o no.

119	121	122	130	108	112	131	111	119	123
123	117	128	113	109	112	111	103	128	120
128	111	111	109	112	112	113	103	118	106
128	106	112	104	110	115	113	110	119	108
123	111	127	110	111	108	109	108	109	125
120	108	131	110	102	104	108	128	124	122
109	126	126	108	109	116	110	120	104	129
122	126	125	109	111	108	100	116	120	128
108	127	109	100	108	117	109	117	107	120
127	110	121	113	111	108	107	118	128	112

## CAPÍTULO 5

- a. Se mide el tiempo que tarda un carro en recorrer una distancia  $d \pm u(d)$ , dando como resultado  $t \pm u(t)$ . Obtenga una expresión analítica para la incertidumbre de la velocidad de dicho carro <sup>1</sup>.
- b. El período de un péndulo simple está determinado por la ecuación

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

en donde se midieron la longitud  $L$  del péndulo y la aceleración de la gravedad,  $g$ . Si los resultados fueron  $L \pm u(L)$  y  $g \pm u(g)$ , encuentre una expresión para la incertidumbre del período, en función de las incertidumbres de  $L$  y  $g$ .

- c. En un experimento es necesario calcular el volumen de una esfera. Para ello se mide su diámetro con un calibrador. Se obtiene el resultado 4.55 (0.01) cm. ¿Cuál es el volumen de la esfera, *incluyendo su incertidumbre*? Escriba también la ecuación con la cual calcula dicha incertidumbre.
- d. En un experimento es necesario calcular el momento de inercia de una esfera. Para ello se mide su diámetro con un calibrador. Se obtiene el resultado 4.55 (0.01) cm. La masa  $M$  resulta igual a 63.5 (0.5) g. Si el momento de inercia de una esfera es  $I = 2MR/5$ , donde  $R$  es el radio

<sup>1</sup>Aunque estrictamente hablando la incertidumbre debe escribirse entre paréntesis, por simplicidad en algunos de estos ejercicios se escribe con el signo  $\pm$ .

¿cuál es el valor de  $I$ , *incluyendo su incertidumbre*? Escriba también la ecuación con la cual se calcula dicha incertidumbre. ¿Cuánto vale su incertidumbre relativa?

- e. Se pide calcular la energía potencial gravitacional  $E_P$  de un cuerpo con masa  $M = 32.0$  (0.1) g, situado a una altura  $h$  de 0.5 (0.05) m. Sabiendo que la aceleración de la gravedad es  $g = 9.78$  (0.01) m/s<sup>2</sup>, calcule  $E_P$ , *incluyendo su incertidumbre*.
- f. Una bala de masa  $M \pm u(M)$  se mueve con una velocidad  $v \pm u(v)$ . Obtenga una expresión analítica para la incertidumbre de la energía cinética de la bala.
- g. Si se conoce la aceleración de la gravedad  $g \pm u(g)$  y se mide la masa de un bloque  $M \pm u(M)$ , escriba la ecuación necesaria para calcular el peso del bloque.
- h. Se pide calcular la potencia disipada por una resistencia eléctrica cuando se le aplica una diferencia de potencial  $V = 8.25$  (0.01) V, pasando por ella una corriente  $I = 0.20$  (0.025) A. Sabiendo que la potencia se calcula mediante la ecuación  $P = VI$ , calcule su valor, *incluyendo su incertidumbre*.
- i. En los resultados de análisis clínicos de un paciente, la concentración de glucosa fue de 91 mg dL<sup>-1</sup>. De acuerdo con Pérez-Castorena y Guevara-Hernández (2002), la incertidumbre expandida para este tipo de mediciones es aproximadamente 7 %. Puesto que el intervalo aceptable de concentraciones para la glucosa en suero está entre 55 mg dL<sup>-1</sup> y 99 mg dL<sup>-1</sup>, estime, con base en el intervalo de incertidumbre, si la concentración de glucosa en el paciente hará necesario someterlo a un tratamiento especial para reducirla.
- j. Se mide la capacitancia  $C$  de un lote de 50 condensadores, con un valor nominal de 2.2 nF y una "tolerancia" de 10 %. Los resultados obtenidos (en nF) se muestran en la siguiente tabla:

2.29	(0.12)	2.27	(0.12)	2.33	(0.12)	2.07	(0.11)	2.12	(0.11)
2.28	(0.12)	2.23	(0.12)	2.23	(0.12)	2.34	(0.12)	2.04	(0.11)
2.22	(0.12)	2.27	(0.12)	2.11	(0.11)	2.08	(0.11)	2.14	(0.12)
2.32	(0.12)	2.25	(0.12)	2.25	(0.12)	2.21	(0.12)	2.03	(0.11)
2.31	(0.12)	2.22	(0.12)	2.06	(0.11)	2.09	(0.11)	2.21	(0.12)
2.30	(0.12)	2.17	(0.12)	2.35	(0.12)	2.19	(0.12)	2.04	(0.11)
2.31	(0.12)	2.19	(0.12)	2.16	(0.12)	2.04	(0.11)	2.19	(0.12)
2.23	(0.12)	2.09	(0.11)	2.10	(0.11)	2.29	(0.12)	2.15	(0.12)
2.09	(0.11)	2.27	(0.12)	2.23	(0.12)	2.21	(0.12)	2.22	(0.12)
2.20	(0.12)	2.19	(0.12)	2.08	(0.11)	2.25	(0.12)	2.09	(0.11)

Calcule el valor medio de la capacitancia, junto con una incertidumbre estándar combinada. Para esto, considere que la incertidumbre tipo B es el promedio de las incertidumbres tipo B de cada uno de los datos. Si la “tolerancia” es de 10 %, explique si el valor de la incertidumbre estándar combinada es mayor o menor que dicha “tolerancia.”

## CAPÍTULO 6

- Para medir el volumen de un paralelepípedo se miden sus tres dimensiones, las cuales dan como resultado 5.1 (0.1) cm, 3.25 (0.15) cm y 10.0 (0.1) cm. ¿Cuántas cifras significativas tiene cada una de las mediciones? Al calcular el volumen, ¿cuántas cifras significativas deben escribirse en el resultado?
- Redondee los siguientes números a dos cifras significativas: 4903, 0.0432, 0.00006502, 200, 3010,  $3^9$ .
- En un experimento se mide la resistencia de una bobina de cobre como función de la temperatura. Se obtienen los siguientes resultados: Dibuje una gráfica en papel milimétrico y otra con Excel®, Google® Hojas de cálculo o algún otro programa de graficación disponible. Haga una comparación de las ventajas de una y otra. Incluya la incertidumbre en la gráfica.

T (°C)	R (Ω)
21 (0.5)	147.2 (1.7)
25 (0.5)	149.2 (1.7)
30 (0.5)	151.8 (1.8)
35 (0.5)	154.9 (1.8)
40 (0.5)	157.7 (1.8)
45 (0.5)	160.4 (1.8)
50 (0.5)	162.8 (1.8)
55 (0.5)	165.7 (1.9)
61 (0.5)	168.6 (1.9)
83 (0.5)	180.3 (1.9)

- d. Se da un resultado de medición como 6802.427 (0.158) cm. Redondee la incertidumbre a dos cifras significativas y escriba el resultado en congruencia con esto.
- e. Se desea calibrar un termistor (resistor cuya resistencia cambia con la temperatura), para lo cual se miden los valores de la siguiente tabla.

T (°C)	R (kΩ)
23 (1)	11.22 (0.15)
26 (1)	9.86 (0.14)
29 (1)	8.57 (0.12)
32 (1)	7.65 (0.11)
35 (1)	6.91 (0.10)
38 (1)	6.15 (0.09)
41 (1)	5.53 (0.09)
44 (1)	5.10 (0.08)
47 (1)	4.53 (0.07)
50 (1)	4.10 (0.07)
53 (1)	3.75 (0.07)
56 (1)	3.30 (0.06)
59 (1)	3.00 (0.06)
62 (1)	2.75 (0.05)
65 (1)	2.50 (0.05)
68 (1)	2.26 (0.05)
71 (1)	2.04 (0.04)
74 (1)	1.84 (0.04)
77 (1)	1.68 (0.04)
80 (1)	1.54 (0.04)
83 (1)	1.39 (0.04)
86 (1)	1.32 (0.04)
89 (1)	1.21 (0.03)
91 (1)	1.20 (0.03)

Dibuje una gráfica de la resistencia del termistor (medida con un multímetro digital) como función de la temperatura, que se midió con un termómetro de alcohol en vidrio, con todos los aspectos descritos en el texto y eligiendo las escalas más apropiadas. Puede hacerse en papel o por medio de un programa de graficación.

## CAPÍTULO 7

- a. Para determinar la densidad de un líquido, se mide la masa  $M$  del líquido con una báscula que tiene resolución de 1 g, como función del volumen  $V$  del fluido (medido con una probeta con resolución de 1 mL e incertidumbre también de 1 mL, según el fabricante). Los resultados aparecen en la siguiente tabla.

Volumen (mL)	Masa (g)
16 (1)	56 (1)
20 (1)	61 (1)
26 (1)	66 (1)
31 (1)	71 (1)
36 (1)	76 (1)
42 (1)	82 (1)
49 (1)	89 (1)
61 (1)	100 (1)
67 (1)	106 (1)
71 (1)	111 (1)
75 (1)	115 (1)
81 (1)	121 (1)
86 (1)	125 (1)
90 (1)	129 (1)
95 (1)	135 (1)
100 (1)	139 (1)

La masa de la probeta sin líquido es de 41 (1) g. Dibuje una gráfica de la masa como función del volumen del líquido y dé una interpretación de los parámetros  $m$  y  $b$  de una recta que se ajuste a los resultados experimentales,  $V = mM + b$ .

- b. La frecuencia de vibración  $f$  de una cuerda se expresa en términos de la tensión  $T$  de la cuerda, su longitud  $l$  y masa  $m$  por medio de la

ecuación:

$$f = \frac{1}{2l} \sqrt{\frac{T}{m}}$$

Dado que  $f$ ,  $l$  y  $T$  se pueden medir, describa un cambio de variable para determinar  $m$ .

- c. Generalmente, un termistor obedece a la relación entre temperatura y resistencia mediante la ecuación (Bentley, 2000):

$$R_\theta = K \exp\left(\frac{\beta}{\theta}\right)$$

Donde  $R_\theta$  es la resistencia a la temperatura absoluta  $\theta$ ,  $K$  y  $\beta$  se conocen como constantes del termistor. Con los datos del problema 5 del Capítulo 6, haga el cambio de variable de  $T$  a  $\theta$  y mediante un ajuste semilogarítmico por regresión lineal, encuentre las constantes  $K$  y  $\beta$ .

- d. En un experimento para estudiar la dilatación lineal de una varilla, resulta la ecuación

$$L = L_0 (1 + \alpha \Delta T)$$

Donde  $L$  es la longitud de la varilla,  $L_0$  una longitud de referencia (constante),  $\Delta T$  el cambio de temperatura y  $\alpha$  la constante de dilatación lineal. Describa un procedimiento para determinar  $\alpha$ .

- e. En un circuito LC, se tiene que la frecuencia de resonancia obedece a la ecuación:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si se hacen mediciones de  $\omega$  como función de  $C$ , explique cómo puede determinarse  $L$  mediante un ajuste gráfico.

- f. Se tiene un circuito con un resistor  $R$  conectado en serie con un capacitor  $C$ . La diferencia de potencial en el condensador, como función del tiempo  $t$  desde que se inicia la descarga, está expresada mediante:

$$V = V_1 e^{-t/RC}$$

donde  $V_1$  es la diferencia de potencial en el instante en que comienza la descarga del capacitor (al tiempo  $t = 0$ ). En un circuito real, donde  $R = 99.5$  (1.4)  $\Omega$  y  $C = 185.2$  (4.6) nF, se mide la diferencia de potencial

$t$ (s)	$V$ (V)	$t$ (s)	$V$ (V)
0	3.77 (0.065)	90 (0.5)	1.52 (0.038)
5 (0.5)	3.58 (0.063)	95 (0.5)	1.45 (0.037)
10 (0.5)	3.41 (0.061)	100 (0.5)	1.38 (0.037)
15 (0.5)	3.29 (0.059)	110 (0.5)	1.25 (0.035)
20 (0.5)	3.07 (0.057)	120 (0.5)	1.14 (0.034)
25 (0.5)	2.92 (0.055)	130 (0.5)	1.03 (0.032)
30 (0.5)	2.78 (0.053)	140 (0.5)	0.94 (0.031)
35 (0.5)	2.65 (0.052)	150 (0.5)	0.85 (0.030)
40 (0.5)	2.52 (0.050)	160 (0.5)	0.77 (0.029)
45 (0.5)	2.39 (0.049)	170 (0.5)	0.70 (0.028)
50 (0.5)	2.28 (0.047)	180 (0.5)	0.63 (0.028)
55 (0.5)	2.18 (0.046)	190 (0.5)	0.57 (0.027)
60 (0.5)	2.05 (0.045)	200 (0.5)	0.52 (0.026)
65 (0.5)	1.95 (0.043)	210 (0.5)	0.48 (0.026)
70 (0.5)	1.86 (0.042)	220 (0.5)	0.43 (0.025)
75 (0.5)	1.77 (0.041)	230 (0.5)	0.39 (0.025)
80 (0.5)	1.68 (0.040)	240 (0.5)	0.36 (0.024)
85 (0.5)	1.61 (0.039)		

en el condensador como función del tiempo y se obtienen los siguientes resultados:

Inicialmente, construya una gráfica de  $V$  como función de  $t$ . Posteriormente, dibuje una gráfica semilogarítmica y ajuste una recta de  $\ln V$  en función de  $t$ . ¿Qué interpretación se le puede dar a la pendiente de esta recta? ¿Y a la ordenada al origen? Compare el valor de la pendiente con el valor esperado obtenido a partir de los resultados de medición de  $R$  y  $C$ . Tenga en cuenta que podría necesitarse un cambio de unidades. ¿Qué puede decir del valor calculado de la ordenada al origen?

- g. La ley de Hooke establece que la elongación  $x$  de un resorte es proporcional a la fuerza  $F$  que se le aplica, ya sea para estirarlo o comprimirlo, es decir,  $F = kx$ , donde  $k$  se conoce como constante de elasticidad del resorte. En un experimento cuyo fin es determinar  $k$  para un resorte, este se coloca verticalmente y se le cuelgan diferentes cargas con masa  $M$ , que ejercen una fuerza sobre el resorte igual a su peso; se mi-

de entonces la longitud del resorte,  $s$ , como función de la masa  $M$ . Se requiere la elongación del resorte,  $x = s - s_0$ , donde  $s_0$  es la longitud del resorte cuando no se aplica ninguna fuerza, así como el peso  $W$ , considerando un valor de la aceleración de la gravedad  $g = 9.78$  ( $0.85$ )  $\text{m s}^{-2}$ . Se obtuvieron los siguientes resultados para la longitud  $s$  (en mm) como función de  $M$  (en g), para un resorte en el que  $s_0 = 41$  (1) mm:

$M$	$s$	$M$	$s$	$M$	$s$	$M$	$s$
30	49	120	73	230	101	390	143
40	52	140	78	250	106	400	146
50	54	150	81	270	112	420	152
50	54	170	85	290	116	440	157
70	61	190	90	300	120	450	159
80	63	200	93	320	125	450	160
90	65	200	94	350	132	470	163
100	68	220	99	370	138		

La incertidumbre de  $M$  es 1 g y la de  $s$  es 1 mm. Calcule la elongación  $x$  y el peso  $W$  en cada punto. A partir de esto, dibuje una gráfica de  $x$  como función de  $W$  (cada punto con la incertidumbre correspondiente) y encuentre la constante de elasticidad del resorte.

- h. Se utiliza un péndulo simple para determinar la aceleración de la gravedad. La relación entre el periodo y la longitud se muestra en el ejercicio 2 del capítulo 5. Se mide, entonces, el periodo como función de la longitud. Para el primero se usa una fotocpuerta con resolución de 0.01 s (se puede usar esto como incertidumbre tipo B), mientras que la longitud se mide con un flexómetro (resolución de 1 mm). Dadas las dificultades geométricas para medir la longitud del péndulo, es mejor asignar una incertidumbre de 5 mm. Se mide en cuatro ocasiones el tiempo que tarda el péndulo en hacer 10 oscilaciones. Los resultados aparecen en la siguiente tabla.

Después de convertir las unidades de la longitud a metros, haga un cambio de variable a  $X = L^{1/2}$ ; calcule el promedio de los tiempos para cada longitud y de aquí el periodo de oscilación,  $T$ , incluyendo la incertidumbre estándar combinada para cada uno. Construya una gráfica de  $T$  como función de  $X$ . Por medio de un ajuste con regresión lineal, evalúe la pendiente de la recta obtenida. A partir de la

$L$ (cm)	$T_1$ (s)	$T_2$ (s)	$T_3$ (s)	$T_4$ (s)
87.0	20.13	19.97	19.66	20.00
90.5	20.28	20.13	20.12	20.16
92.0	20.44	20.59	20.44	20.43
93.0	20.50	20.56	20.50	20.47
94.5	20.69	20.62	20.66	21.00
96.2	20.87	20.97	21.06	20.93
99.0	21.28	21.10	21.31	21.15
103.2	21.59	21.60	21.60	21.50
109.5	22.12	22.16	22.10	22.10

ecuación mostrada en el ejercicio 2 del capítulo 5, halle una relación entre la aceleración de la gravedad,  $g$ , y la pendiente de la recta. Considerando que en la Ciudad de México el valor verdadero de  $g = 9.78$  ( $0.01$ )  $\text{m s}^{-2}$ , cuantifique el error en su resultado de medición.

- i. Se busca determinar el índice de refracción del acrílico, mediante la ley de Snell:

$$n_i \text{sen} \theta_i = n_o \text{sen} \theta_o$$

en donde  $n_i$  y  $n_o$  son los índices de refracción del medio desde donde incide el haz luminoso y el medio de transmisión, respectivamente;  $\theta_i$  y  $\theta_o$  son los correspondientes ángulos de incidencia y de refracción. Con el haz de un láser verde, cuya longitud de onda es 532 (10) nm, se miden los ángulos de incidencia y refracción con respecto a una superficie lisa de un paralelepípedo de acrílico. Los ángulos se miden con un transportador cuya resolución es  $0.5^\circ$ . Se obtienen los siguientes resultados:

- i Primero, convierta los ángulos de grados a radianes.
- ii Calcule el seno de los ángulos, además de encontrar una expresión para la incertidumbre de la función seno y aplicarla a los resultados de la tabla.
- iii Construya una gráfica de  $\text{sen} \theta_o$  como función de  $\text{sen} \theta_i$  y haga un ajuste con regresión lineal. Dado que se considera que

$\theta$ (°)	$\theta$ (°)
5 (1)	2.5 (0.5)
10 (1)	5.0 (0.5)
15 (1)	8.5 (0.5)
20 (1)	12.0 (0.5)
25 (1)	16.5 (0.5)
30 (1)	19.0 (0.5)
35 (1)	22.5 (0.5)
40 (1)	25.5 (0.5)
45 (1)	28.0 (0.5)
50 (1)	31.5 (0.5)
55 (1)	33.0 (0.5)
60 (1)	36.0 (0.5)
65 (1)	38.0 (0.5)
70 (1)	40.5 (0.5)

el índice de refracción del aire es igual a 1, la pendiente de la recta debe ser el inverso del índice de refracción del acrílico.

- iv Determine el índice de refracción del acrílico (junto con su incertidumbre) y los errores absoluto y porcentual, suponiendo que  $n_0 = 1.49$ .

## CAPÍTULO 8

- a. En el ejercicio 1 del capítulo 6 se hizo una prueba para medir el tiempo de reacción de encendido-apagado de un cronómetro digital, con resolución de 0.01 s. De acuerdo con el valor medio encontrado en ese problema, discuta si el criterio de la mitad de la resolución, o la resolución misma, es adecuado para asignar la incertidumbre a los tiempos medidos con este instrumento. Responda a la pregunta: ¿tiene sentido fabricar cronómetros de operación manual con esta resolución?

## CAPÍTULO 9

- a. Usando los datos del problema 1 del capítulo 7, haga un ajuste con regresión lineal, calcule la pendiente y la ordenada al origen y utilice la interpretación que hizo en ese problema para determinar el error a partir del valor convencionalmente verdadero para la pendiente y del resultado de medición asociado con la interpretación que dio para la ordenada al origen. Evalúe el coeficiente de correlación lineal de Pearson.
- b. Se hacen dos conjuntos de mediciones del espesor másico de un patrón de Fe, cuyo valor certificado es de  $42.3 (2.1) \mu\text{g cm}^{-2}$  para la calibración de un detector de rayos X con la técnica Fluorescencia de rayos X. Los resultados, en unidades de  $\mu\text{g cm}^{-2}$ , se muestran en la tabla, para los conjuntos A y B.

A	B
41.3 (2.1)	42.6 (2.1)
39.4 (2.0)	42.3 (2.1)
41.4 (2.1)	43.2 (2.2)
42.3 (2.1)	42.7 (2.2)
41.1 (2.1)	42.4 (2.1)
42.7 (2.2)	42.4 (2.1)
42.9 (2.2)	42.5 (2.1)
42.7 (2.2)	42.6 (2.1)
41.6 (2.1)	42.7 (2.1)
42.5 (2.1)	42.5 (2.1)
43.5 (2.2)	43.2 (2.2)
43.3 (2.2)	42.2 (2.1)
42.4 (2.1)	

Calcule la media, desviación estándar e incertidumbre estándar combinada para cada uno de los conjuntos de datos. Con esto, evalúe el error absoluto y relativo del espesor medido para cada uno de los conjuntos de datos. Realice un análisis de varianza de una vía (ANOVA) con los conjuntos de datos y determine si las medias para ambos

conjuntos son iguales, considerando una  $\alpha = 0.05$ .

- c. Con todos los resultados de medición (conjuntos A y B) de la tabla del ejercicio anterior, use el criterio de Chauvenet para decidir si alguno de ellos puede considerarse como un valor atípico, usando como respaldo los valores de la Tabla 9.2.
- d. Un fabricante de recipientes de vidrio tiene dos lotes de piezas. Necesita medir la masa de los recipientes para saber si los dos lotes son equivalentes. Los resultados que obtuvo, expresados en gramos, con una incertidumbre de 1 g, están en las tablas:

Lote 1.

<b>119</b>	<b>121</b>	<b>122</b>	<b>130</b>	<b>108</b>	<b>112</b>	<b>131</b>	<b>111</b>
<b>123</b>	117	128	113	109	112	111	103
<b>128</b>	111	111	109	112	112	113	103
<b>128</b>	106	112	104	110	115	113	110
<b>123</b>	111	127	110	111	108	109	108
<b>120</b>	108	131	110	102	104	108	
<b>109</b>	126	126	108	109	116	110	
<b>122</b>	126	125	109	111	108	100	
<b>108</b>	127	109	100	108	117	109	
<b>127</b>	110	121	113	111	108	107	

Aplice ANOVA para determinar si las masas promedio de cada lote se pueden considerar como iguales, tomando como base una  $\alpha = 0.05$ .

## CAPÍTULO 10

- a. Encuentre las dimensiones de la relación del alcance  $R$  de un proyectil que se lanza en dirección horizontal con velocidad  $\nu_0$ , a partir de una función

$$R = f(h, \nu_0, g)$$

en donde  $h$  es la altura a la que se lanza el proyectil y  $g$  la aceleración de la gravedad.

Lote 2.

119	123	128
128	120	120
118	106	116
119	108	117
109	125	118
124	122	
104	129	
120	128	
107	120	
128	112	

- b. Considere las oscilaciones pequeñas de un péndulo simple. Encuentre la relación funcional del periodo de oscilación  $T$  con la longitud del péndulo  $L$  y la aceleración de la gravedad,  $g$ .
- c. La velocidad cuadrática media  $v_{rms}$  de las moléculas en un gas depende de su temperatura  $T$  y su masa molar  $M$ , involucrando también la constante de los gases ideales,  $R$ . Usando el análisis dimensional, encuentre la relación funcional correspondiente. Use el hecho de que  $\dim R = L^2MT^{-2}\Theta^{-1}N^{-1}$ .
- d. ¿Cuáles son las dimensiones de la constante de proporcionalidad de la tercera ley de Kepler? Esta establece que el cuadrado del periodo  $T$  de la órbita de un planeta es proporcional al cubo de su semieje mayor  $a$ .
- e. La velocidad de propagación del sonido en un gas  $v_P$  (por ejemplo, el aire), es función de la presión  $P$  y la densidad  $\rho$  de dicho gas. Encuentre la dependencia de la velocidad con ambas variables.
- f. La velocidad de la luz puede expresarse en términos de la permitividad del vacío  $\epsilon_0$  y la constante de permeabilidad  $\mu_0$ . Encuentre, con análisis dimensional, cuál podría ser esta relación. Aquí,  $\dim \epsilon_0 = L^{-3}M^{-1}T^4I^2$  y  $\dim \mu_0 = LMT^{-2}I^{-2}$ .
- g. El radio  $r$  de la trayectoria de una partícula cargada (carga  $q$ ) que se mueve en una región con un campo magnético uniforme perpendi-

cular a la trayectoria, depende también de su masa  $m$ , su velocidad  $v$  y la intensidad del campo magnético  $B$ . Por medio de análisis dimensional, encuentre una relación entre el radio con las otras cuatro variables. En este caso,  $\dim B = MT^{-2}I^{-1}$ .

## APÉNDICE A. ALFABETO GRIEGO

Tabla A.1. Alfabeto griego.

Mayúscula	Minúscula	Nombre en español	Nombre en inglés
A	α	Alfa	Alpha
B	β	Beta	Beta
Γ	γ	Gamma	Gamma
Δ	δ	Delta	Delta
E	ε	Épsilon	Epsilon
Z	ζ	Dseta	Zeta
H	η	Eta	Eta
Θ	θ	Teta	Theta
I	ι	Iota	Iota
K	κ	Kappa	Kappa
Λ	λ	Lambda	Lambda
M	μ	Mi	Mu
N	ν	Ni	Nu
Ξ	ξ	Csi	Xi
O	ο	Ómicron	Omicron
Π	π	Pi	Pi
P	ρ	Ro	Rho
Σ	σ, ζ	Sigma	Sigma
T	τ	Tau	Tau
Υ	υ	Ípsilon	Upsilon
Φ	φ, φ	Fi	Phi
X	χ	Ji	Chi
Ψ	ψ	Psi	Psi
Ω	ω	Omega	Omega

## APÉNDICE B. EXPRESIONES PARA PROPAGAR LA INCERTIDUMBRE DE OPERACIONES COMUNES

En este apéndice se aplica la ley de propagación de incertidumbres para diversas operaciones matemáticas de uso común, con algunos ejemplos numéricos.

### B.1. FUNCIONES DE UNA VARIABLE

Para el caso en que  $y = f(x)$ , función de una sola variable con incertidumbre  $u(x)$ , tenemos:

$$u(y) = \left| \frac{df}{dx} \right| u(x), \quad (\text{B.1})$$

Tabla B.1. Ecuaciones para propagar incertidumbres de funciones de una variable.

$f(x)$	$u(y)$
$ax^n$	$ nax^{n-1} u(x)$
$e^x$	$e^x u(x)$
$\ln x$	$\frac{u(x)}{x}$
$\text{sen } x$	$ \cos x  u(x)$
$\text{cos } x$	$ \text{sen } x  u(x)$

---

#### Ejemplo B1

Medimos la longitud del lado de una mesa cuadrada,  $l = 1.25$  (0.15) m. Su área  $A = l^2$ , por lo que la incertidumbre es  $u(A) = 2lu(l) = 2 \times 1.25 \times 0.15$

m<sup>2</sup>

= 0.38 m<sup>2</sup>. El resultado se debe escribir como  $A = 1.56 (0.38) \text{ m}^2$ .

---

### Ejemplo B2

En un experimento de refracción, se mide un ángulo  $\theta = 45.0^\circ (1.0^\circ)$ . Se necesita calcular el seno del ángulo, por lo cual  $u(\text{sen } \theta) = |\cos \theta| u(\theta) = |\cos (45.0^\circ)| \times 1.0^\circ$ . Se convierten los ángulos a radianes, por lo que  $\cos (45.0^\circ) = \cos (0.78 \text{ rad})$  y  $u(\theta) = 1.0^\circ = 0.017 \text{ rad}$ . El resultado será entonces  $\text{sen } \theta = 0.707 (0.012)$ .

---

## B.2. FUNCIONES DE DOS O MÁS VARIABLES

Debemos recordar que la ley de propagación de la incertidumbre (para cantidades no correlacionadas) se escribe como:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^k \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i). \quad (\text{B.2})$$

De esta manera, para diversas operaciones matemáticas utilizadas frecuentemente, con una función  $f(x, y)$  de dos variables  $x, y$ , se obtienen las expresiones dadas en la Tabla B.2.

Tabla B.2. Expresiones para la incertidumbre en funciones de dos variables.

$f(x, y)$	$u(f(x, y))$
$x + y$	$\sqrt{\left(\frac{\partial(x+y)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial(x+y)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)} = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$
$x - y$	$\sqrt{\left(\frac{\partial(x-y)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial(x-y)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)} = \sqrt{u^2(x) + u^2(y)}$
$xy$	$\sqrt{\left(\frac{\partial(xy)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)} = \sqrt{y^2 u^2(x) + x^2 u^2(y)} = xy \sqrt{\frac{u^2(x)}{x^2} + \frac{u^2(y)}{y^2}}$
$\frac{x}{y}$	$\sqrt{\left(\frac{\partial(x/y)}{\partial x}\right)^2 u^2(x) + \left(\frac{\partial(x/y)}{\partial y}\right)^2 u^2(y)} = \sqrt{\frac{u^2(x)}{y^2} + \frac{x^2 u^2(y)}{y^4}} = \frac{x}{y} \sqrt{\frac{u^2(x)}{x^2} + \frac{u^2(y)}{y^2}}$

Cuando las funciones dependen de más de dos variables, estas expresiones solo deben extenderse o combinarse entre sí. También conviene notar que, en el caso de una resta, el resultado podría ser muy pequeño, si las dos magnitudes son semejantes; pero la incertidumbre relativa sería muy grande. Aquí convendría más utilizar un criterio basado en la experiencia, puesto que no hay una regla establecida al respecto.

### Ejemplo B3

En un experimento donde estudiamos el proceso de carga de un condensador en un circuito RC, medimos la resistencia y obtuvimos un valor  $R = 99.4 (1.5) \Omega$ , mientras que la capacitancia del condensador fue  $C = 185.2 (4.6) \text{ nF} = [185.2 (4.6)] \times 10^{-9} \text{ F}$ . El tiempo característico de carga es  $\tau = RC = (99.4 \Omega) \times (185.2 \times 10^{-9} \text{ F}) = 18.4 \times 10^{-6} \text{ s} = 18.4 \mu\text{s}$ . Utilizando la ecuación para la incertidumbre de un producto en la Tabla B.2, encontramos que

$$u(\tau) = RC \sqrt{\frac{u^2(R)}{R^2} + \frac{u^2(C)}{C^2}} = (18.4 \mu\text{s}) \sqrt{\left(\frac{1.5}{99.4}\right)^2 + \left(\frac{4.6}{185.2}\right)^2} = 0.53 \mu\text{s}.$$

de manera que debemos escribir  $\tau = 18.4(0.53) \mu\text{s}$ .

## APÉNDICE C. GRAFICACIÓN CON PROGRAMAS DE CÓMPUTO

Actualmente se ha difundido mucho más el uso de programas de cómputo para dibujar las gráficas con los resultados de medición provenientes de un experimento, así como de posibles derivaciones de los análisis de datos. Dependiendo de los recursos accesibles a quien realiza el experimento, así como de su área de especialidad, entre muchos otros programas podemos citar Excel®, Google® Hojas de cálculo, *Statistica*®, *Stata*®, *SPSS*®, *Origin*®, *Mathematica*®, *Matlab*®, *R*®, etc. También otras personas desarrollan sus propios programas para graficar sus resultados de medición. La recomendación en este caso es que cada quien utilice la herramienta o programa que lo haga más productivo, si bien en general los dos primeros programas son los más accesibles. Una posible debilidad es que para la mayoría de las publicaciones científicas se solicita enviar las gráficas en formatos como TIFF, JPG o PNG, de alta resolución, algo difícil de lograr con Excel®. En estos casos es mejor buscar alternativas.

Dado que Excel® es un programa disponible para una gran cantidad de usuarios de muchas áreas, no solo la Física, en esta sección explicaremos cómo construir una gráfica con él. El primer paso es el de llenar la hoja de cálculo con los datos para las variables dependiente e independiente; de preferencia, con las columnas de las incertidumbres experimentales. Algunos equipos de medición ya tienen la capacidad de exportar los resultados en formatos legibles por Excel®, como la hoja XLXS o en formato ASCII con extensión CSV (*comma separated value*), por lo que sólo será necesario leer dicho archivo. La Figura C.1a muestra los datos para el experimento de la Figura 6.5. Conviene que la variable independiente esté a la izquierda de la dependiente. A continuación, seleccionamos los datos que queremos graficar, marcando primero la variable independiente y después (usando la tecla CTRL), la variable dependiente (Figura 6.5b).

	A	B	C	D
1	d/cm	u(d)/cm	C/nF	u(C)/nF
2	1.28	0.25	1.27E-01	2.00E-03
3	1.85	0.25	9.31E-02	2.00E-03
4	2.23	0.25	5.28E-02	2.00E-03
5	2.69	0.25	3.90E-02	2.00E-03
6	3.42	0.25	3.08E-02	2.00E-03
7	4.02	0.25	2.51E-02	2.00E-03
8	4.92	0.25	1.91E-02	2.00E-03
9	5.50	0.25	1.70E-02	2.00E-03
10	6.04	0.25	1.58E-02	2.00E-03
11	6.37	0.25	1.40E-02	2.00E-03
12	6.81	0.25	1.29E-02	2.00E-03

Figura C.1. (a) Datos experimentales para la construcción de una gráfica en Excel<sup>®</sup>. (b) Datos experimentales seleccionados.

En seguida, en el menú “Insertar” se escoge la opción “Gráficos” y “Dispersión.” En este caso, es recomendable usar la primera opción de gráfica (superior izquierda en la Figura C.2).

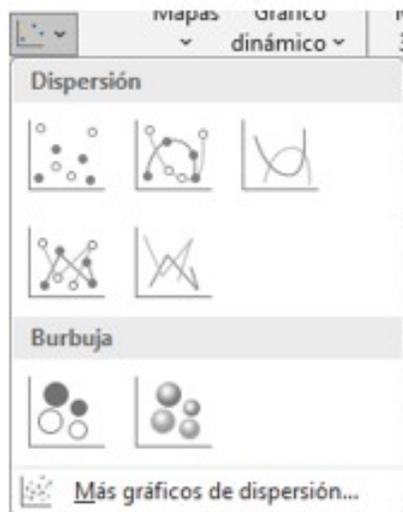


Figura C.2. Opciones para contruir gráficos de dispersión en Excel<sup>®</sup>.

Aparecerá un primer boceto de la gráfica sobre la hoja de trabajo. Es conveniente usar la opción “Mover gráfico”, en la parte superior derecha de la barra de herramientas, después de seleccionar la gráfica, para colocarla en una hoja nueva (Figura C.3), con la nueva ventana que se abre, como la

mostrada en el lado derecho de la figura.

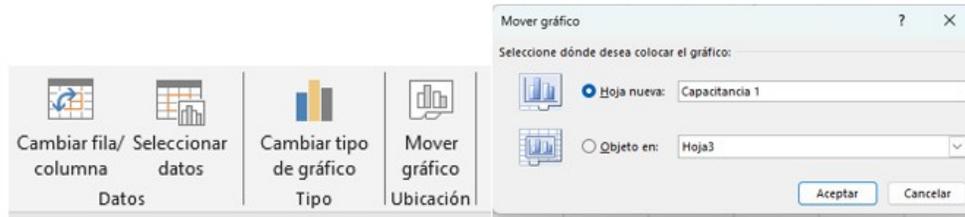


Figura C.3. Pasos para mover la gráfica a una hoja separada.

Una vez hecho esto, se pueden editar todas las propiedades de la figura, como modificar los ejes, cambiar formas y colores de los puntos experimentales, colores del fondo, etc. Todo esto se realiza haciendo “doble *click*” en el elemento a modificar. Para agregar títulos a los ejes, hay que seleccionar la gráfica y escoger el menú “Diseño de gráfico.” En la parte superior izquierda de este menú aparecen las opciones que se muestran en la Figura C.4. En la ventana de estas opciones se elige la opción de “Títulos del eje” para escribir el nombre de la variable y sus unidades, tanto en  $x$  como en  $y$ .

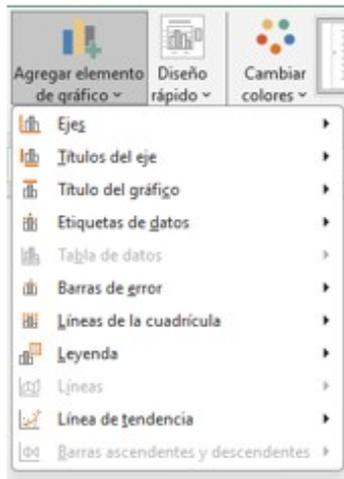


Figura C.4. Ventana para agregar elementos del gráfico, en particular agregar títulos a los ejes y las barras de incertidumbre (aquí etiquetadas incorrectamente como “Barras de error”).

Para añadir las barras de incertidumbre a cada punto experimental, se

vuelve a seleccionar el menú de “Diseño de gráfico” y se abre la ventana de “Agregar elemento de gráfico.” Como se aprecia en la Figura C.5, al marcar la opción “Barras de error” surge otra ventana, con diversas opciones para el valor que se tiene para las incertidumbres.

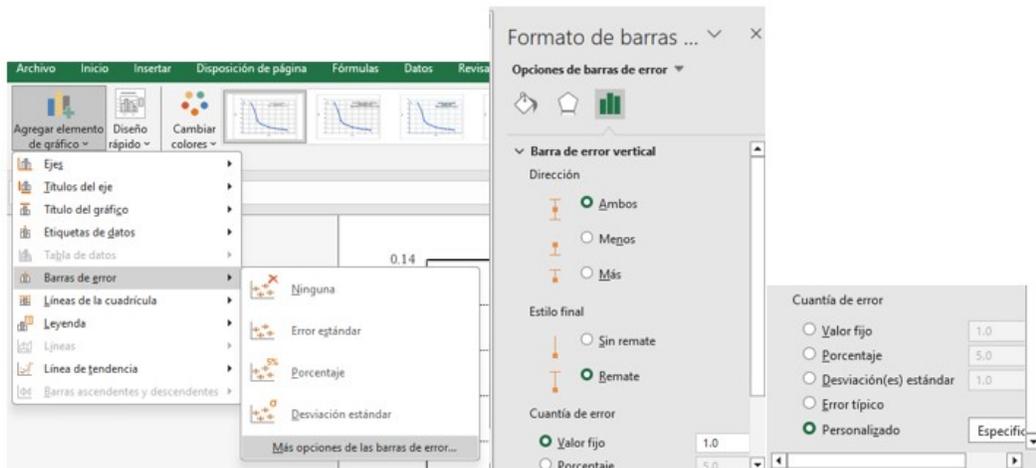


Figura C.5. Ventanas para editar las barras de incertidumbre.

Podemos tener todas las opciones de la ventana en nuestro experimento. Pero cuando las incertidumbres están en una columna de la hoja de cálculo, se usa la función inferior “Más opciones de barra de error.” De esta manera, del lado derecho de la pantalla se muestra el menú para dar formato a las barras de incertidumbre, originalmente solo la coordenada  $y$ . En la parte inferior se tiene la opción “Personalizado.” Se hace *click* en la ventana “Especificar” y se puede ver ahora una ventana titulada “Barras de error personalizadas,” con dos renglones para el valor que se dará a la incertidumbre hacia arriba y hacia abajo, como se ve en la Figura C.6.

En esta ventana se hace *click*, primero, en la flecha del primer renglón, con lo que se verá una nueva ventana únicamente para esta parte de la barra de incertidumbre. De nuevo se hace *click* en la flecha y será necesario ahora dirigirse a la hoja de cálculo donde están los datos, conforme a lo mostrado en la Figura C.7. Se marca la columna con las incertidumbres y se oprime INTRO (o ENTER). Ya estará asignada la parte vertical de la barra. Se repite el procedimiento para la parte inferior y se tendrá la barra completa. Para agregar la barra de incertidumbre de la coordenada  $x$ , primero hay que seleccionar alguna de las barras en la gráfica y repetir todo el pro-

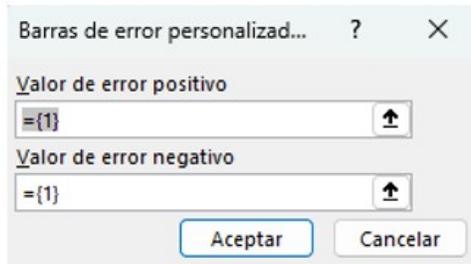


Figura C.6. Ventana para establecer el valor de las barras de incertidumbre postivia y negativa (incorrectamente etiquetados como "Valor de error...").

cedimiento anterior. Una vez que se escogieron las dos columnas para las incertidumbres en  $x$  y en  $y$ , aparece la ventana de la Figura C.8, con las celdas de ambas. Se oprime "Aceptar" y con esto tendremos ya las barras de incertidumbre para cada punto experimental.

$C_{Exp}/C_{Pred}$	$C_{Exp}$	$u(C_{Exp})$
1.85E+00	1.27E-01	2.00E-03
1.97E+00	9.31E-02	2.00E-03
1.34E+00	5.28E-02	2.00E-03
1.20E+00	3.90E-02	2.00E-03
1.20E+00	3.08E-02	2.00E-03
1.15E+00	2.51E-02	2.00E-03
1.07E+00	1.91E-02	2.00E-03
1.07E+00	1.70E-02	2.00E-03
1.09E+00	1.58E-02	2.00E-03
1.02E+00	1.40E-02	2.00E-03
1.00E+00	1.29E-02	2.00E-03

Figura C.7. Selección de la columna con los valores de incertidumbre.

El resultado de este procedimiento, en el cual también se modificó el

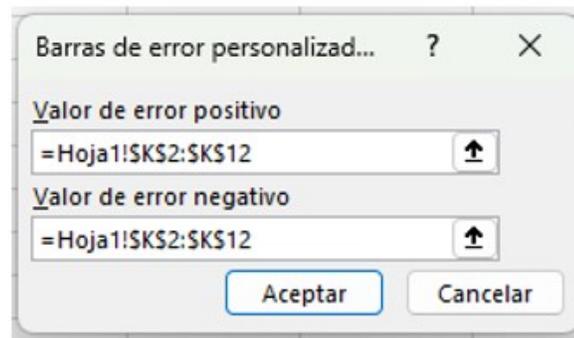


Figura C.8. Celdas con los valores para las barras de incertidumbre de una de las coordenadas de la gráfica.

título de la gráfica, se aprecia en la Figura C.9.

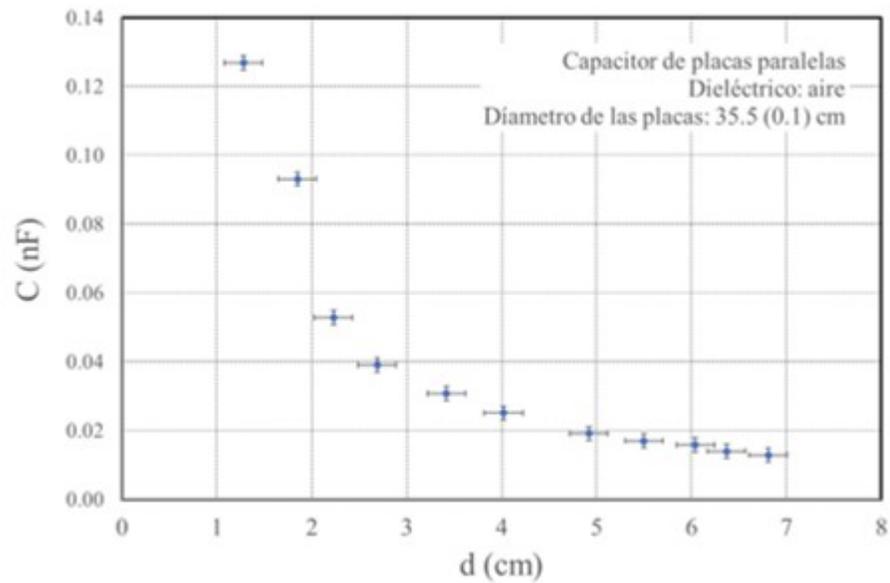


Figura C.9. Gráfica obtenida en Excel ® con el procedimiento descrito en este apéndice.

## APÉNDICE D. OBTENCIÓN DE LAS ECUACIONES PARA MÍNIMOS CUADRADOS

Efectuamos un experimento, en el que hicimos mediciones de  $N$  parejas de datos, con coordenadas  $(x_i, y_i)$ , donde el subíndice  $i$  tiene los valores 1 hasta  $N$ . Para el ajuste de la recta, partimos de los residuos en la variable dependiente  $y$ , tal como lo muestra la Figura D.1., que es igual a la Figura 7.6.

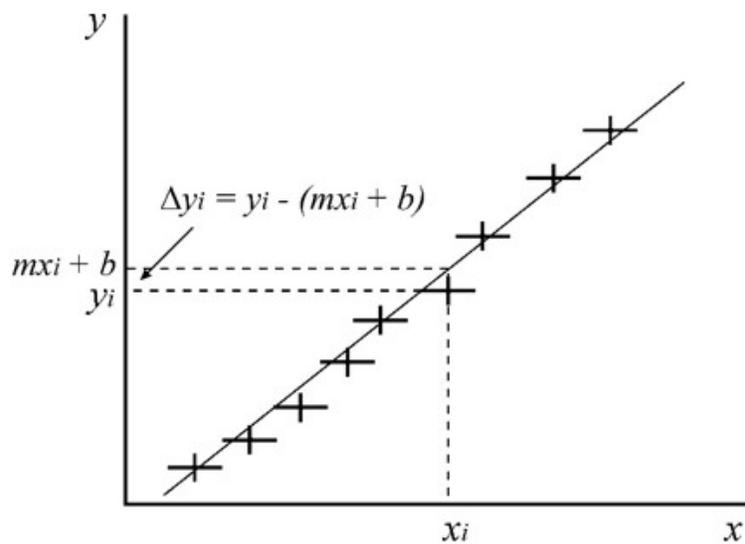


Figura D.1. Distancia vertical (residuo) entre el punto experimental y la ordenada predicha por la recta que se va a ajustar.

Deseamos minimizar la suma de los cuadrados de los residuos

$$(\Delta y_i)^2 = [y_i - (mx_i + b)]^2 = y_i^2 + m^2 x_i^2 + b^2 + 2mx_i b - 2mx_i y_i - 2y_i b$$

La suma de los cuadrados de los residuos es entonces

$$S = \sum (\Delta y_i)^2 = \sum y_i^2 + m^2 \sum x_i^2 + Nb^2 + 2mb \sum x_i - 2m \sum x_i y_i - 2b \sum y_i$$

En este caso, las incógnitas son la pendiente  $m$  y la ordenada al origen  $b$ , por lo que podemos hacer la minimización igualando a cero las derivadas parciales de  $S$  con respecto a  $m$  y  $b$ :

$$\frac{\partial S}{\partial m} = 2m \sum x_i^2 + 2b \sum x_i - 2 \sum x_i y_i = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = 2Nb + 2m \sum x_i - 2 \sum y_i = 0.$$

Esto es un sistema de dos ecuaciones simultáneas de primer grado para  $m$  y  $b$ , que podemos resolver con cualquiera de los métodos conocidos (determinantes, despeje, etc.), obteniendo como resultado:

$$m = \frac{N \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

$$b = \frac{\sum (x_i^2) \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2},$$

que son las ecuaciones 7.7 y 7.8. También es posible obtener las mismas ecuaciones minimizando la  $\chi^2$  (Bevington, 2003).

## APÉNDICE E. USO DE EXCEL® PARA AJUSTE DE RECTAS CON MÍNIMOS CUADRADOS

En este apéndice utilizamos los resultados de medición de intensidad de corriente  $I$  y diferencia de potencial  $V$  aplicados a una resistencia. En la hoja representada en la Figura E.1 evaluamos las sumas presentes en las ecuaciones 7.7 y 7.8 (celdas A22, C22, E22 y F22), además de que obtenemos el número de parejas de datos en la celda B26.

Introducimos las ecuaciones 7.7 y 7.8 en las celdas B28 y B29 para calcular la pendiente  $m$  y la ordenada al origen  $b$ , respectivamente. Usamos estos resultados, entonces, para calcular los residuos en la columna G, haciendo la suma en la celda G22. Posteriormente, determinamos las incertidumbres de  $m$  y de  $b$  en las celdas B31 y B32, aplicando también la desviación  $S_y$  de la celda B30. Por último, los coeficientes de correlación lineal  $r$  y de determinación  $R^2$  aparecen en las celdas B33 y B34, respectivamente.

La ventaja de usar este método en Excel® es que si hay más datos basta con aumentar el número de renglones, o si son menos, con eliminar los renglones excedentes. El conteo de parejas en la celda B26 será automático, al igual que el resto de los cálculos.

	A	B	C	D	E	F	G
1	$I$	$u(I)$	$V$	$u(V)$	$I^2$	$IV$	$\Delta(V)$
2	A	A	V	V	A <sup>2</sup>	AV	V <sup>2</sup>
3	0.018	0.001	2.60	0.03	0.00032	0.047	0.0014
4	0.020	0.001	2.81	0.03	0.00040	0.056	0.0002
5	0.022	0.001	3.06	0.03	0.00048	0.067	0.0008
6	0.024	0.001	3.30	0.04	0.00058	0.079	0.0027
7	0.026	0.001	3.57	0.04	0.00068	0.093	0.0020
8	0.028	0.001	3.87	0.04	0.00078	0.108	0.0001
9	0.030	0.001	4.13	0.04	0.00090	0.124	0.0001
10	0.032	0.001	4.41	0.05	0.00102	0.141	0.0000
11	0.034	0.001	4.65	0.05	0.00116	0.158	0.0003
12	0.036	0.001	4.96	0.05	0.00130	0.179	0.0008
13	0.038	0.001	5.25	0.05	0.00144	0.200	0.0030
14	0.040	0.001	5.52	0.06	0.00160	0.221	0.0038
15	0.042	0.001	5.77	0.06	0.00176	0.242	0.0024
16	0.044	0.001	6.05	0.06	0.00194	0.266	0.0043
17	0.046	0.001	6.28	0.06	0.00212	0.289	0.0010
18	0.048	0.001	6.52	0.07	0.00230	0.313	0.0001
19	0.050	0.001	6.75	0.07	0.00250	0.338	0.0006
20	0.052	0.001	7.01	0.07	0.00270	0.365	0.0008
21	0.054	0.001	7.19	0.07	0.00292	0.388	0.0123
22	0.684		93.70		0.02690	3.673	0.037
23	SUMA(A3:A21)		SUMA(C3:C21)		SUMA(E3:E21)	SUMA(F3:F21)	SUMA(G3:G21)
24	$\Sigma x$		$\Sigma y$		$\Sigma x^2$	$\Sigma xy$	$\Sigma(\Delta(y)^2)$
25							
26	$N$	19	CONTAR(A3:A21)				
27							
28	$m$	132	(B26*F22-A22*C22)/(B26*E22-A22^2)				
29	$b$	0.19	(E22*C22-A22*F22)/(B26*E22-A22^2)				
30	$s_y$	0.0466	RAIZ(G22/(B26-2))				
31	$s_m$	0.98	B30*RAIZ(B26/(B26*E22-A22^2))				
32	$s_b$	0.037	B30*RAIZ(E22/(B26*E22-A22^2))				
33	$r$	1.000	COEF.DE.CORREL(A3:A21,C3:C21)				
34	$R^2$	0.999	G27^2				

Figura E.1. Hoja de Excel ® para ajustar una recta a un conjunto de datos.

## APÉNDICE F. PROBABILIDADES DE COEFICIENTES DE CORRELACIÓN

En la Tabla F.1 se presenta la probabilidad de que  $N$  mediciones de dos variables no correlacionadas resulten en un coeficiente de correlación  $r$  tan grande como  $r_0$ . Esta probabilidad se denota como  $\text{Prob}_N(|r| \geq |r_0|)$ . Es decir, si se encuentra que hay un coeficiente de correlación  $r_0$  para el cual esta probabilidad es pequeña, entonces no es de esperar que no exista la correlación (esto es, sí se presume que las variables estén correlacionadas).

Tabla F.1. Probabilidad porcentual  $\text{Prob}_N(|r| \geq |r_0|)$  de que  $N$  mediciones de dos variables no correlacionadas resulten en un coeficiente de correlación  $|r| \geq |r_0|$ , como función de  $N$  y  $r_0$ . Los espacios en blanco representan probabilidades menores que 0.05 %. Adaptada de Taylor (2022).

N	$r_0$										
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
3	100	94	87	81	74	67	59	51	41	29	0
4	100	90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
5	100	87	75	62	50	39	28	19	10	3.7	0
6	100	85	70	56	43	31	21	12	5.6	1.4	0
7	100	83	67	51	37	25	15	8.0	3.1	0.6	0
8	100	81	63	47	33	21	12	5.3	1.7	0.2	0
9	100	80	61	43	29	17	8.8	3.6	1.0	0.1	0
10	100	78	58	40	25	14	6.7	2.4	0.5		0
11	100	77	56	37	22	12	5.1	1.6	0.3		0
12	100	76	53	34	20	9.8	3.9	1.1	0.2		0
13	100	75	51	32	18	8.2	3.0	0.8	0.1		0
14	100	73	49	30	16	6.9	2.3	0.5	0.1		0
15	100	72	47	28	14	5.8	1.8	0.4			0
16	100	71	46	26	12	4.9	1.4	0.3			0
17	100	70	44	24	11	4.1	1.1	0.2			0
18	100	69	43	23	10	3.5	0.8	0.1			0
19	100	68	41	21	9.0	2.9	0.7	0.1			0
20	100	67	40	20	8.1	2.5	0.5	0.1			0
25	100	63	34	15	4.8	1.1	0.2				0
30	100	60	29	11	2.9	0.5					0
35	100	57	25	8.0	1.7	0.2					0
40	100	54	22	6.0	1.1	0.1					0
45	100	51	19	4.5	0.6						0
	0	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	
50	100	73	49	30	16	8.0	3.4	1.3	0.4	0.1	
60	100	70	45	25	13	5.4	2.0	0.6	0.2		
70	100	68	41	22	9.7	3.7	1.2	0.3	0.1		
80	100	66	38	18	7.5	2.5	0.7	0.1			
90	100	64	35	16	5.9	1.7	0.4	0.1			
100	100	62	32	14	4.6	1.2	0.2				

## APÉNDICE G. DISTRIBUCIÓN F

La distribución  $F$  fue expuesta en 1924 por R.A. Fisher. Se define para dos variables aleatorias  $U_1$  y  $U_2$ , que tienen  $m$  y  $n$  grados de libertad, respectivamente. La variable aleatoria

$$V = \frac{U_1/m}{U_2/n} \quad (\text{G.1})$$

tiene la función de distribución  $F(x) = 0$  cuando  $x \leq 0$  y

$$F(x) = P(V \leq x) = \frac{\Gamma(\frac{m+n}{2})}{\Gamma(\frac{m}{2})\Gamma(\frac{n}{2})} m^{m/2} n^{n/2} \int_0^x \frac{t^{(m-2/2)}}{(mt+n)^{(m+n)/2}} dt \quad (\text{G.2})$$

cuando  $x > 0$  y la función gamma se define a través de la ecuación:

$$\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\lambda-1} dt \quad (\text{G.3})$$

La Figura G.1 presenta un ejemplo de la densidad de probabilidad de esta distribución.

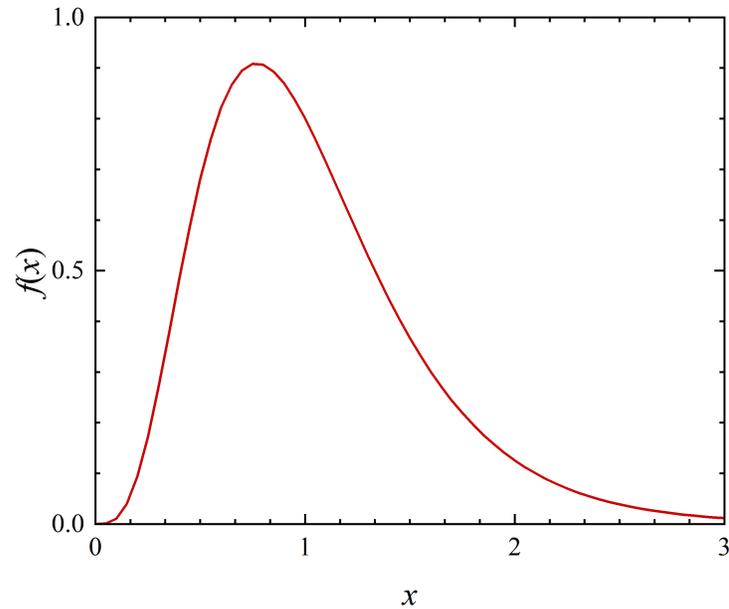


Figura G.1. Densidad de probabilidad  $f(x)$  de la distribución  $F$  con (10, 50) grados de libertad.

En las Tablas G.1 a G.4 se presenta la probabilidad de que  $N$  mediciones de dos variables no correlacionadas resulten en un coeficiente de correlación  $r$  tan grande como  $r_0$ . Esta probabilidad se denota como  $\text{ProbN}(|r| \geq |r_0|)$ . Es decir, si se encuentra que hay un coeficiente de correlación  $r_0$  para el cual esta probabilidad es pequeña, entonces no es de esperar que no exista la correlación (esto es, sí se presume que las variables estén correlacionadas).

Tabla G.1. Valores de  $x$  para los cuales la función de distribución  $F$  con  $(m, n)$  grados de libertad tiene el valor 0.95. Adaptada de Kreyszig (1994).

<b>m →</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>n</b>									
<b>1</b>	161	200	216	225	230	234	237	239	241
<b>2</b>	18.5	19	19.2	19.3	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
<b>3</b>	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
<b>4</b>	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
<b>5</b>	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
<b>6</b>	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
<b>7</b>	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
<b>8</b>	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
<b>9</b>	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
<b>10</b>	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
<b>11</b>	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
<b>12</b>	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
<b>13</b>	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
<b>14</b>	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
<b>15</b>	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
<b>16</b>	4.49	3.61	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
<b>17</b>	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
<b>18</b>	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
<b>19</b>	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
<b>20</b>	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
<b>22</b>	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
<b>24</b>	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
<b>26</b>	4.21	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
<b>28</b>	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
<b>30</b>	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
<b>32</b>	4.15	3.30	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19
<b>34</b>	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17
<b>36</b>	4.11	3.26	2.87	2.63	2.48	2.36	2.28	2.21	2.15
<b>38</b>	4.10	3.24	2.85	2.62	2.46	2.35	2.26	2.19	2.14
<b>40</b>	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.15	2.12
<b>50</b>	4.03	3.13	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
<b>60</b>	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
<b>70</b>	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
<b>80</b>	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00
<b>90</b>	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
<b>100</b>	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97
<b>150</b>	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94
<b>200</b>	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93
<b>1000</b>	3.85	3.00	2.61	2.38	2.22	2.11	2.02	1.95	1.89
<b>∞</b>	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

Tabla G.2. Valores de  $x$  para los cuales la función de distribución  $F$  con  $(m, n)$  grados de libertad tiene el valor 0.95. Adaptada de Kreyszig (1994).

<b>m →</b>	<b>10</b>	<b>15</b>	<b>20</b>	<b>30</b>	<b>40</b>	<b>50</b>	<b>100</b>	<b>∞</b>
<b>n</b>								
<b>1</b>	242	246	248	250	251	252	253	254
<b>2</b>	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
<b>3</b>	8.79	8.70	8.66	8.62	8.59	8.58	8.55	8.53
<b>4</b>	5.96	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.56	5.63
<b>5</b>	4.74	4.61	4.56	4.50	4.46	4.44	4.41	4.37
<b>6</b>	4.06	3.94	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
<b>7</b>	3.64	3.51	3.44	3.38	3.34	3.32	3.27	3.23
<b>8</b>	3.35	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	2.97	2.93
<b>9</b>	3.14	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.76	2.71
<b>10</b>	2.98	2.85	2.77	2.70	2.66	2.64	2.59	2.54
<b>11</b>	2.85	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.46	2.40
<b>12</b>	2.75	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.35	2.30
<b>13</b>	2.67	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.26	2.21
<b>14</b>	2.60	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
<b>15</b>	2.54	2.40	2.33	2.25	2.20	2.18	2.12	2.07
<b>16</b>	2.49	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.07	2.01
<b>17</b>	2.45	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.02	1.96
<b>18</b>	2.41	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	1.98	1.92
<b>19</b>	2.33	2.23	2.16	2.07	2.03	2.00	1.94	1.88
<b>20</b>	2.35	2.20	2.12	2.04	1.99	1.97	1.91	1.84
<b>22</b>	2.30	2.15	2.07	1.98	1.94	1.91	1.85	1.78
<b>24</b>	2.25	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
<b>26</b>	2.22	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
<b>28</b>	2.19	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.73	1.65
<b>30</b>	2.16	2.01	1.93	1.84	1.79	1.76	1.70	1.62
<b>32</b>	2.14	1.99	1.91	1.82	1.77	1.74	1.67	1.59
<b>34</b>	2.12	1.97	1.89	1.80	1.75	1.71	1.65	1.57
<b>36</b>	2.11	1.95	1.87	1.78	1.73	1.69	1.62	1.55
<b>38</b>	2.09	1.94	1.85	1.76	1.71	1.68	1.61	1.51
<b>40</b>	2.08	1.92	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
<b>50</b>	2.03	1.87	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
<b>60</b>	1.99	1.84	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.59
<b>70</b>	1.97	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.45	1.35
<b>80</b>	1.95	1.79	1.70	1.60	1.54	1.51	1.43	1.32
<b>90</b>	1.94	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.41	1.30
<b>100</b>	1.93	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.39	1.28
<b>150</b>	1.89	1.73	1.64	1.53	1.48	1.44	1.34	1.22
<b>200</b>	1.88	1.72	1.62	1.52	1.46	1.41	1.32	1.19
<b>1000</b>	1.84	1.68	1.58	1.47	1.41	1.36	1.26	1.08
<b>∞</b>	1.83	1.67	1.57	1.46	1.39	1.35	1.24	1.00

Tabla G.3. Valores de  $x$  para los cuales la función de distribución  $F$  con  $(m, n)$  grados de libertad tiene el valor 0.99. Adaptada de Kreyszig (1994).

<b>m →</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>	<b>6</b>	<b>7</b>	<b>8</b>	<b>9</b>
<b>n</b>									
<b>1</b>	4052	4999	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022
<b>2</b>	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
<b>3</b>	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
<b>4</b>	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
<b>5</b>	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
<b>6</b>	13.7	13.3	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
<b>7</b>	12.2	10.9	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
<b>8</b>	11.3	9.55	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
<b>9</b>	10.6	8.65	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
<b>10</b>	10.0	8.02	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
<b>11</b>	9.65	7.56	6.22	5.67	5.32	5.07	4.39	4.74	4.63
<b>12</b>	9.33	7.21	5.95	5.41	5.06	4.32	4.64	4.50	4.39
<b>13</b>	9.07	6.93	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
<b>14</b>	8.86	6.70	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03
<b>15</b>	8.68	6.51	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
<b>16</b>	8.53	6.36	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78
<b>17</b>	8.40	6.23	5.13	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
<b>18</b>	8.29	6.11	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
<b>19</b>	8.18	6.01	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
<b>20</b>	8.10	5.93	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
<b>22</b>	7.95	5.85	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
<b>24</b>	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
<b>26</b>	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
<b>28</b>	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12
<b>30</b>	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
<b>32</b>	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02
<b>34</b>	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98
<b>36</b>	7.40	5.25	4.38	3.89	3.57	3.35	3.18	3.05	2.95
<b>38</b>	7.35	5.21	4.34	3.86	3.54	3.32	3.15	3.02	2.92
<b>40</b>	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
<b>50</b>	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
<b>60</b>	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
<b>70</b>	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
<b>80</b>	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
<b>90</b>	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.84	2.72	1.61
<b>100</b>	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.32	2.69	2.59
<b>150</b>	6.81	4.75	3.92	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53
<b>200</b>	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50
<b>1000</b>	6.66	4.63	3.80	3.34	3.04	2.82	2.66	2.53	2.43
<b>∞</b>	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.40

Tabla G.4. Valores de  $x$  para los cuales la función de distribución  $F$  con  $(m, n)$  grados de libertad tiene el valor 0.99. Adaptada de Kreyszig (1994).

$m \rightarrow$	10	15	20	30	40	50	100	$\infty$
<b>n</b>								
<b>1</b>	6056	6157	6209	6261	6287	6300	6330	6366
<b>2</b>	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
<b>3</b>	27.2	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.2	26.1
<b>4</b>	14.5	14.2	14.0	13.3	13.7	13.7	13.6	13.5
<b>5</b>	10.1	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
<b>6</b>	7.87	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
<b>7</b>	6.62	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.75	5.65
<b>8</b>	5.81	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	4.95	4.86
<b>9</b>	5.26	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.42	4.31
<b>10</b>	4.85	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
<b>11</b>	4.54	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.71	3.60
<b>12</b>	4.30	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.47	3.36
<b>13</b>	4.10	3.82	3.66	3.51	3.43	3.38	3.27	3.17
<b>14</b>	3.94	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.11	3.00
<b>15</b>	3.80	3.52	3.37	3.21	3.13	3.08	2.98	2.87
<b>16</b>	3.69	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.86	2.75
<b>17</b>	3.59	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.76	2.65
<b>18</b>	3.51	3.23	3.08	2.92	2.84	2.78	2.68	2.57
<b>19</b>	3.43	3.15	3.00	2.84	2.76	2.71	2.60	2.49
<b>20</b>	3.37	3.09	2.94	2.78	2.69	2.64	2.54	2.42
<b>22</b>	3.26	2.98	2.83	2.67	2.53	2.53	2.42	2.31
<b>24</b>	3.17	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
<b>26</b>	3.09	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.25	2.13
<b>28</b>	3.03	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.19	2.06
<b>30</b>	2.98	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.13	2.01
<b>32</b>	2.93	2.66	2.50	2.34	2.25	2.20	2.08	1.96
<b>34</b>	2.89	2.62	2.46	2.30	2.21	2.16	2.04	1.91
<b>36</b>	2.86	2.58	2.43	2.26	2.17	2.12	2.00	1.87
<b>38</b>	2.83	2.55	2.40	2.23	2.14	2.09	1.97	1.84
<b>40</b>	2.80	2.52	2.37	2.20	2.11	2.06	1.94	1.80
<b>50</b>	2.70	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.82	1.68
<b>60</b>	2.63	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.75	1.60
<b>70</b>	2.59	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.70	1.54
<b>80</b>	2.55	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.66	1.49
<b>90</b>	2.52	2.24	2.09	1.92	1.82	1.76	1.62	1.46
<b>100</b>	2.50	2.22	2.07	1.89	1.80	1.73	1.60	1.43
<b>150</b>	2.44	2.16	2.00	1.83	1.73	1.66	1.52	1.33
<b>200</b>	2.41	2.13	1.97	1.79	1.69	1.63	1.48	1.28
<b>1000</b>	2.34	2.06	1.90	1.72	1.61	1.54	1.38	1.11
$\infty$	2.32	2.04	1.88	1.70	1.59	1.52	1.36	1.00

## APÉNDICE H. EJEMPLO DE UN INFORME

### CAMPO ELÉCTRICO DE UNA ESFERA

**Javier Miranda**

Instituto de Física

*Universidad Nacional Autónoma de México*

*Ciudad Universitaria*

*04510 México, D.F.*

#### **Resumen**

El presente experimento tiene como finalidad demostrar que el campo eléctrico producido por una esfera cargada es proporcional al inverso del cuadrado de la distancia al centro de dicha esfera. Para esto se hicieron mediciones de la diferencia de potencial inducida en un conductor aislado, la cual es proporcional a la carga transferida a él por otro pequeño cilindro conductor sobre el cual la esfera indujo una carga. Esta última carga, a su vez, es directamente proporcional al campo eléctrico existente en el punto donde se situó el cilindro. Por ello, al construir gráficas log-log de la diferencia de potencial medida como función de la distancia del cilindro al centro de la esfera, se pudo observar si la variación corresponde a una dependencia con el inverso del cuadrado de dicha distancia. Se encontró que, al medir para varias tensiones en la esfera (3.0 kV, 4.0 kV y 4.5 kV), el promedio de las pendientes de las rectas ajustadas es  $-2.39$  (0.33), excluyendo el valor esperado  $-2$  del intervalo de incertidumbre, teniendo un error del 20 %

### 1. Introducción

En el espacio puede tenerse una carga  $q$ , la cual va a influir en el medio en que se encuentra. Si a la vez se coloca una carga de prueba  $q_0$  (una carga de prueba es una carga positiva tan pequeña como se quiera), aparecerá una fuerza coulombiana entre ambas cargas. Se define entonces el campo eléctrico  $\mathbf{E}$  producido por la carga  $q$  como:

$$E = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r, \quad (1)$$

en donde  $\mathbf{F}$  es la fuerza coulombiana entre  $q$  y  $q_0$ , y  $\mathbf{u}_r$  es el vector unitario de posición de  $q$  a  $q_0$ . Como puede verse,  $\mathbf{E}$  es una magnitud vectorial, cuya dirección y sentido son los mismos que los de la fuerza sobre una carga positiva. Ahora bien, si en vez de tener una carga puntual, se cuenta con una distribución de cargas puntuales, finita, es posible, lo mismo que en el caso de la fuerza, sumar vectorialmente el campo eléctrico debido a cada carga para obtener el campo total en un punto determinado. Esto es:

$$\mathbf{E} = \sum_i \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \mathbf{u}_r. \quad (2)$$

Cuando la distribución se transforma en continua, como sería el caso de un cuerpo cargado, la suma se convierte entonces en una integral:

$$\mathbf{E} = \int dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \mathbf{u}_r \quad (3)$$

Puede introducirse ahora el concepto de flujo de campo eléctrico. En general, el flujo de campo  $\Phi$  se define como:

$$\Phi = \mathbf{V} ds \quad (4)$$

en la que  $\mathbf{V}$  es el vector de campo y  $ds$  es el vector de un elemento diferencial de superficie. Para una superficie cerrada, el flujo de campo viene dado por

$$\Phi = \int \mathbf{V} ds \quad (5)$$

y para el caso del campo eléctrico se tiene:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} ds \quad (6)$$

en una superficie cerrada. Si se considera a continuación una carga puntual  $q$ , y se calcula el campo eléctrico en una esfera de radio  $r$  y con centro en la carga:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \mathbf{u}_r. \quad (7)$$

El vector  $d\mathbf{s}$  coincide en dirección con  $\mathbf{E}$ , por lo que el ángulo  $\theta$  entre ellos es  $0^\circ$  y  $\cos \theta=1$ . Por tanto,  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E ds$ . De aquí, el flujo eléctrico es:

$$\Phi_E = \int E ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int ds. \quad (8)$$

Pero esta integral es la superficie de la esfera,  $4\pi r^2$ . Entonces:

$$\Phi_E = \int E ds = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (9)$$

Se tiene de este resultado que el flujo depende sólo de la carga. Al extender a una superficie cualquiera, resulta:

$$\Phi_E = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int E \cos \theta ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\cos \theta ds}{r^2}. \quad (10)$$

Pero  $\cos \theta ds/r^2$  es el ángulo sólido subtendido por el elemento  $ds$ . Como el ángulo sólido total alrededor de un punto es  $4\pi$ , se sigue:

$$\Phi_E = \int E ds = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (11)$$

Este último resultado se conoce como *Ley de Gauss*, y es de gran importancia, puesto que es una de las ecuaciones de Maxwell, trascendentes en el electromagnetismo clásico.

Utilizando este resultado, se puede cuantificar la variación del campo eléctrico alrededor de una esfera cargada, de la siguiente manera: Se encierra la esfera en otra de mayor radio y concéntrica con la primera, de acuerdo a lo que muestra la figura 1. Es posible utilizar dicha esfera como superficie gaussiana. Resulta entonces:

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (12)$$

El campo en cada punto exterior de la esfera es el mismo, y el ángulo entre  $\mathbf{E}$  y  $d\mathbf{s}$  es  $0^\circ$ , por lo que  $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = E ds$ , y además

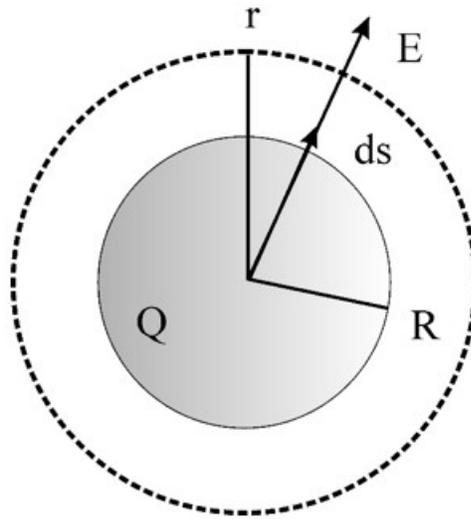


Figura 1. Geometría para el cálculo del campo eléctrico producido por una esfera cargada.  $Q$  es la carga,  $R$  es el radio de la esfera,  $E$  es el campo eléctrico,  $r$  es el radio de la esfera gaussiana y  $ds$  es el elemento diferencial de superficie de la esfera.

$$\int \mathbf{E} ds = E \int ds = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (13)$$

La integral es el área de la esfera,  $4\pi r^2$ . Por tanto:

$$\int \mathbf{E} ds = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}. \quad (14)$$

o bien

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (15)$$

Esto indica que el campo eléctrico de una esfera cargada equivale al de una carga puntual del mismo valor en el centro de la esfera. Con el experimento se trata de demostrar que el campo eléctrico es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia al centro de la esfera, tal como lo indica el resultado teórico.

## 2. Desarrollo experimental

Se hace el montaje del dispositivo de acuerdo a como lo muestra la figura 2. En ella, se tiene una esfera metálica (de diámetro 12.8 (0.1) cm),

sostenida por una barra de acrílico, por lo cual se mantiene aislada eléctricamente. La esfera está conectada a una fuente de alta tensión (marca *Cenco*, de 0 a 5 kV, corriente directa). La diferencia de potencial producida por la fuente se mide con un multímetro marca *Phillips*, conectada a una sonda de alta tensión, que en total da una incertidumbre de 4 %; con la sonda, la resolución es de 50 V. Separadamente, en el interior de una jaula de Faraday (conectada a tierra) se coloca una canastilla metálica, también aislada de la jaula por medio de un soporte de acrílico. Dicha canastilla se conecta a un electrómetro (marca *Keithley*, modelo 610C), el cual ofrece una incertidumbre de 1 % sobre el intervalo total en el cual se está midiendo, por medio de un cable coaxial que atraviesa la jaula de Faraday. La resolución depende del intervalo usado. Radialmente desde el centro de la esfera se extiende un hilo de seda, horizontal, fijo en el otro extremo a un soporte universal. Junto al hilo se colocan dos cilindros metálicos, de aproximadamente 1 cm de longitud y 1 cm de diámetro, sostenidos por sendas varillas de Teflon. El hilo sirve para situar los cilindros en la dirección radial, y la distancia al borde de la esfera se mide con un flexómetro, cuya resolución es de 0.1 cm. Los cilindros se unen por una de sus caras, poniéndolos a la distancia a la cual se quiere evaluar el campo eléctrico de la esfera. Este produce una polarización en los cilindros, haciendo que un lado quede cargado positivamente y el otro negativamente al momento de apartarlos; el valor de la carga es proporcional al campo eléctrico. Los cilindros, separadamente, se ponen en contacto con la canastilla, transfiriéndoles parte de la carga y causando una diferencia de potencial medible con el electrómetro. Esta diferencia de potencial es también proporcional a la carga transferida, resultando que, por transitividad, el potencial es proporcional al campo eléctrico de la esfera.

Durante el experimento, se tiene cuidado de separar los cilindros estando aún dentro del campo por medir, pues podría entonces tenerse la polarización debida a otro campo. También se evita el contacto de los cilindros con la jaula exterior, porque pueden perder su carga. Desde luego, debe aterrizar la canastilla (a través del electrómetro) antes de cargarla con el cilindro de carga con signo opuesto. Además, hay que cuidar que quien experimenta no tenga carga electrostática que afecte las mediciones. Después de cada medición, los cilindros metálicos se descargan, poniéndolos en contacto con la Jaula de Faraday, aterrizando también el electrómetro para descargar la canastilla. Más aún, los cilindros de Teflon se flamean con un mechero de alcohol, para eliminar la carga electrostática que pudiera haberse acumulado en ellos durante el proceso, y que puede alterar gravemente las mediciones. Lo mismo se ha hecho con los soportes aislantes de

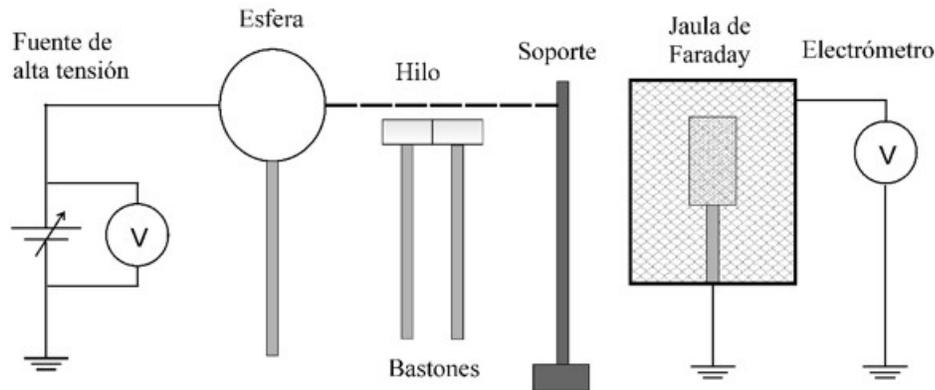


Figura 2. Diagrama del dispositivo experimental.

la esfera y la canastilla, pero sólo al principio. Se hicieron mediciones para distancias entre 10 cm y 50 cm desde el borde de la esfera, en pasos de 5 cm, pues a distancias mayores el campo no es efectivo, y en promedio diez mediciones para cada distancia. Además, se usaron los dos cilindros, pues se espera que la carga sea semejante en valor absoluto, aunque con signo opuesto. Se utilizaron tres tensiones diferentes para la esfera (3000 (120) V, 4000 (160) V y 4500 (180) V). Cabe señalar que, a causa de la gran dificultad para realizar las mediciones, fue necesario emplear tres sesiones de trabajo de tres horas cada una, hasta completar el experimento. Para cada lote de datos se construyen gráficas con escalas lineales, de la diferencia potencial en la canastilla medida con el electrómetro como función de la distancia al centro de la esfera. Se procede entonces a graficar en escalas logarítmicas, haciendo el ajuste por regresión lineal de estos resultados. Es decir, debe ajustarse la función

$$V_c = br^n, \quad (16)$$

ecuación en que  $V_c$  es la diferencia de potencial medida en la canastilla con el electrómetro,  $b$  es la ordenada al origen de la recta obtenida en el ajuste log-log,  $n$  es la pendiente de la recta y  $r$  es la distancia al centro de la esfera. Debe recordarse que la teoría, según la ec. (15), predice un comportamiento proporcional a  $r^n$ , donde  $n = -2$ .

### 3. Resultados

La Tabla 1 muestra los resultados de los promedios de las diferencias de potencial  $V_c$  medidas para cada distancia y cada tensión en la esfera. La

figura 3 muestra las gráficas lineales de  $V_c$  en función de  $r$  para cada caso, mientras que la figura 4 presenta las gráficas log-log correspondientes.

Tabla 1. Diferencias de potencial medida en la canastilla para cada distancia al centro de la esfera.

Tensión en la esfera (V)	Distancia al centro de la esfera (cm)	Diferencia de potencial $V_c^*$ (V)	
		Positiva	Negativa
3000 (120)	16.4 (0.1)	1.27 (0.05)	1.32 (0.05)
	21.4 (0.1)	0.57 (0.03)	0.56 (0.03)
	26.4 (0.1)	0.42 (0.03)	0.36 (0.03)
	31.4 (0.1)	0.26 (0.01)	0.25 (0.01)
	36.4 (0.1)	0.17 (0.01)	0.17 (0.01)
	41.4 (0.1)	0.15 (0.01)	0.12 (0.01)
4000 (160)	46.4 (0.1)	0.11 (0.1)	0.07 (0.01)
	16.4 (0.1)	1.53 (0.03)	2.60 (0.01)
	26.4 (0.1)	0.68 (0.03)	1.10 (0.01)
	36.4 (0.1)	0.26 (0.01)	0.30 (0.01)
	46.4 (0.1)	0.13 (0.01)	0.20 (0.01)
4500 (180)	56.4 (0.1)	0.05 (0.001)	0.04 (0.001)
	16.4 (0.1)	1.31 (0.04)	0.96 (0.04)
	21.5 (0.1)	0.84 (0.04)	0.66 (0.04)
	26.4 (0.1)	0.58 (0.04)	0.57 (0.04)
	31.4 (0.1)	0.50 (0.04)	0.43 (0.04)
	36.4 (0.1)	0.24 (0.04)	0.32 (0.04)
	41.4 (0.1)	0.26 (0.01)	0.21 (0.01)
	46.4 (0.1)	0.15 (0.01)	0.22 (0.01)
	56.4 (0.1)	0.14 (0.01)	0.14 (0.01)

\*Las incertidumbres mostradas en  $V_c$  corresponden a la incertidumbre estándar combinada.

Por otro lado, la Tabla 2 resume los parámetros de las ecuaciones que describen el comportamiento de los datos experimentales de cada uno de los casos estudiados.

Tabla 2. Parámetros de las curvas ajustadas a cada uno de los casos, de acuerdo con la ec. (16).  $V_c$  se obtiene en  $V$  cuando  $r$  se sustituye en cm.

Caso	$b$	$n$
3000 V, positivo	740 (240)	-2.30 (0.096)
3000 V, negativo	2 056 (860)	-2.64 (0.12)
4000 V, positivo	3 770 (370)	-2.71 (0.29)
4000 V, negativo	26 100 (4 600)	-3.18 (0.50)
4500 V, positivo	318 (17)	-1.94 (0.16)
4500 V, negativo	86 (32)	-1.57 (0.11)

Finalmente, de los datos mostrados en la Tabla 2, se evalúa el promedio del exponente  $n$ , dando como resultado  $n = -2.39 (0.33)$ .

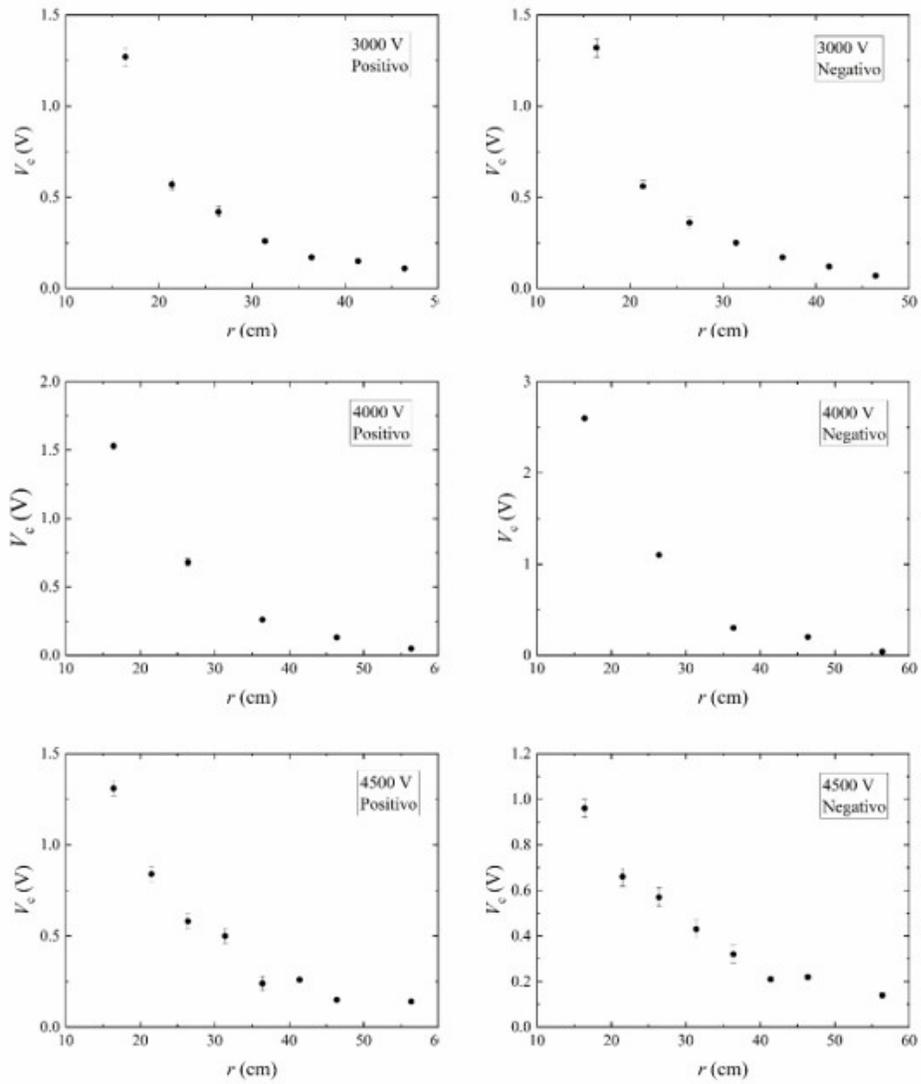


Figura 3. Gráficas de la diferencia de potencial en la canastilla,  $V_c$ , como función de la distancia al centro de la esfera.

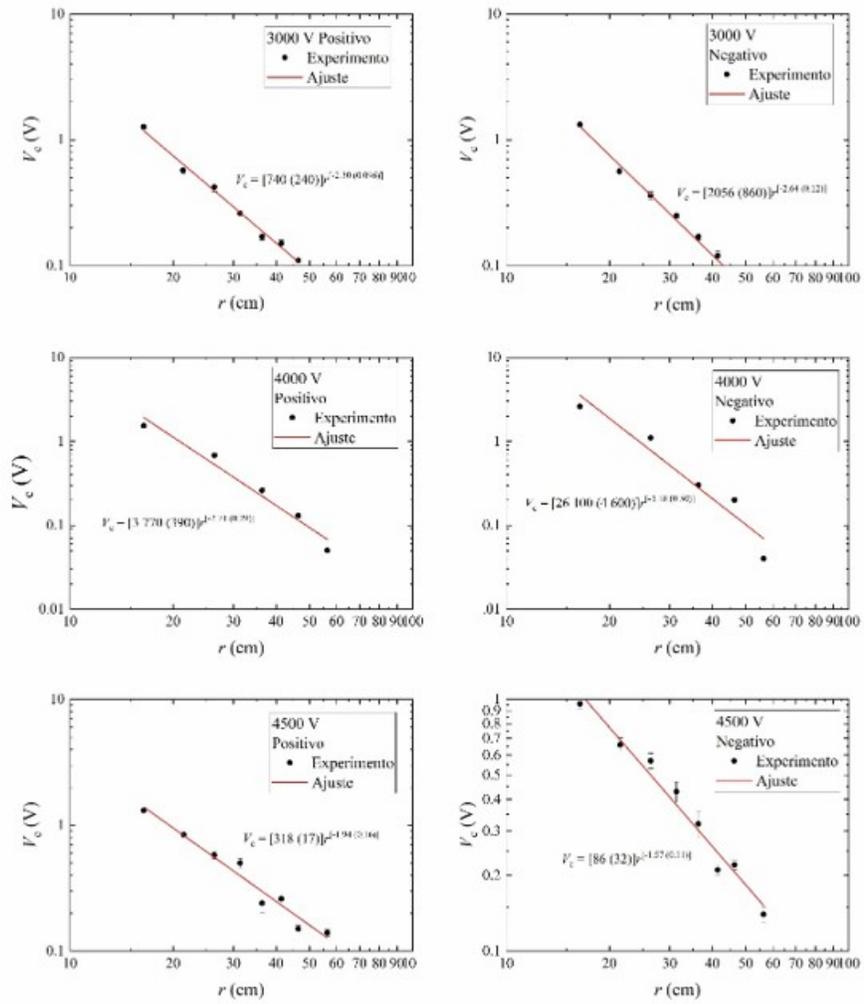


Figura 4. Gráficas de la diferencia de potencial en la canastilla,  $V_c$ , como función de la distancia al centro de la esfera, en escala logarítmica. Se muestran también las ecuaciones de las curvas ajustadas.

#### 4. Discusión

Las gráficas de la figura 3 muestran un comportamiento hiperbólico, de acuerdo con lo esperado. Se observa, por otra parte, que los exponentes encontrados y mostrados en la tabla 2, son aproximados a  $-2$ , tal como lo predice la teoría en la ec. (15). No obstante, el promedio de estos exponentes, que resulta  $n = -2.39 (0.33)$ , da un intervalo que excede ligeramente (en valor absoluto) el valor convencionalmente real, contando con un error del 20 %. Puede resaltarse que la incertidumbre en el exponente es del 14 %, la cual es bastante buena, tomando en cuenta lo complicado del procedimiento. La razón principal de esta diferencia es, sin duda, el hecho de que se está utilizando un método muy indirecto, *i. e.*, inducir una carga en los cilindros metálicos, que a su vez se transfiere parcialmente a la canastilla; en el proceso de medición pueden surgir muchos factores que afecten el resultado. Por ejemplo, a pesar de que los valores absolutos de la carga transferida a la canastilla por los cilindros cargados positiva y negativamente son del mismo orden de magnitud entre sí, se advierte que hay una gran variabilidad al modificar la tensión en la esfera. Esto podría deberse al cambio en las condiciones atmosféricas entre una y otra sesión de trabajo, como puede ser la humedad relativa, la cual produciría una más rápida descarga de los cilindros mientras se efectúan las mediciones. Se sugiere, por tanto, realizar el experimento bajo condiciones más reguladas. Hay que recalcar, además, la dificultad que existe para descargar por completo los bastones de Teflon, aún después de flamearlos. Esto altera la magnitud de las cargas transferidas a la canastilla, aunque, una vez descargadas, permiten obtener resultados coherentes en el promedio. Este efecto, evidentemente, influye en el parámetro  $b$  de cada ajuste, dando resultados totalmente diferentes para cada caso. Esto, sin embargo, no modifica las conclusiones alcanzadas acerca del comportamiento del campo eléctrico de la esfera.

#### 5. Conclusiones

El campo eléctrico de la esfera varía como  $r^{-2.39(0.33)}$ , comportamiento que difiere ligeramente del esperado  $r^{-2}$ . No obstante, dadas las dificultades que presenta el experimento para efectuar las mediciones, se considera que el resultado es bastante aceptable.

## 6. Bibliografía

- a. R. Resnick y D. *Halliday*, *Física*, Vol. II, 4<sup>a</sup> Ed. (Addison-Wesley Interamericana, México, D.F. 1995).
- b. D.C. Baird, *Experimentation*, 3<sup>a</sup> Ed. (Prentice Hall, Nueva York, 1999).
- c. J. Miranda, *Evaluación de la Incertidumbre en Datos Experimentales* (Instituto de Física, UNAM, México, 2000).

## APÉNDICE I. LOGARITMOS Y SUS PROPIEDADES

Un logaritmo se define como el exponente al cual hay que elevar número positivo, llamado base, para obtener un número. Esto es, si  $x = b^L$ , entonces  $\log_b x = L$ , donde  $b$  es la base. Usualmente se emplean dos bases para los logaritmos: 10 y  $e = 2.71828\dots$ . En el primer caso, no se escribe la base (por ejemplo,  $\log_{10} 1\,000 = \log 1\,000 = 3$ ); para el segundo, se definen los logaritmos naturales,  $\log_e x = \ln x$ .

Los logaritmos tienen las siguientes propiedades:

- No existen logaritmos de números negativos en el dominio de los números reales.
- El logaritmo de un número menor que 1 es negativo.
- El logaritmo de la base es igual a 1.
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y. \quad (\text{I.1})$$

- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia de los logaritmos:

$$\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y. \quad (\text{I.2})$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia:

$$\log_b x^y = y \log_b x; \quad (\text{I.3})$$

donde  $y$  puede ser positiva o negativa.

- La derivada de un logaritmo en cualquier base es:

$$\frac{d\log_b x}{dx} = \frac{1}{x \ln b}. \quad (\text{I.4})$$

## ÍNDICE ANALÍTICO

- Análisis dimensional, 3, 129, 130, 131, 132, 133, 167, 168, 213
- ANOVA, 122, 146, 165, 166
- Bitácora, 3, 10, 105, 106, 107, 110, 111, 112, 125, 136, 145, 211
- Bondad de ajuste, 93
- Calibración, 17, 18, 58, 80, 81, 82, 101, 117, 165, 209, 210
- Cambio de variable, 85, 87, 88, 93, 160, 162
- logarítmica, 85, 88, 196, 199
- Cifras decimales, 69, 71, 72, 95
- Cifras significativas, 69, 70, 71, 72, 145, 157, 158
- Clase, IV, 13, 22, 32, 37, 43, 46, 135, 148, 153, 154
- Coefficiente de correlación, 93, 94, 95, 96, 113, 121, 165, 183, 184, 186
- Coefficiente de determinación, 95, 98
- Coefficientes de sensibilidad, 63
- Constantes físicas, 23
- Covarianza, 61, 95, 113
- Cuadrados mínimos lineales, *Regresión lineal* 89, 91, 92, 93, 96, 115, 117, 118, 119, 121, 160, 162, 163, 165, 196
- Densidad de probabilidad, 47, 185, 186
- Función de, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 62, 63, 65, 79, 80, 81, 85, 86, 87, 91, 92, 93, 94, 97, 98, 117, 118, 124, 144, 155, 157, 159, 160, 161, 162, 163, 167, 170, 184, 185, 187, 188, 189, 190, 191, 196, 197, 198, 199
- Desviación, 21, 40, 41, 42, 44, 49, 50, 51, 54, 57, 58, 59, 62, 63, 64, 67, 89, 90, 97, 116, 125, 127, 144, 152, 153, 154, 165, 181
- Desviación estándar, 21, 42, 44, 49, 50, 51, 54, 57, 58, 59, 62, 63, 64, 89, 90, 97, 116, 125, 127, 152, 153, 154, 165
- Desviación estándar de la media, 44, 54, 57, 63, 97, 152, 154
- Dimensión, 14, 89, 129, 139
- Distribución, 38, 39, 40, 41, 42, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 59, 61, 65, 66, 81, 97, 98, 124, 125, 127, 153, 154, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 192
- asimétrica, 41
- bimodal, 39, 40
- binomial, 51, 53
- Exponencial, 49, 52, 86
- F, 124, 185, 186, 187, 188, 189, 190
- gaussiana, 49, 50, 98

- Momentos de una, 49  
   Normal, 49, 51, 59, 125, 153, 154  
   Poisson, 52  
   simétrica, 38, 39, 40, 41, 45  
   Triangular, 52  
   uniforme, 38, 52, 87, 167  
 Distribución de probabilidad, 46, 47, 49, 50, 51, 52, 53, 81, 98  
 Error, 2, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 32, 55, 56, 65, 66, 79, 80, 81, 84, 101, 106, 112, 139, 145, 150, 151, 163, 164, 165, 175, 176, 177, 191, 200, 208, 211, 214  
   absoluto, 16, 165  
   aleatorio, 17, 18  
   paralaje, 18, 19  
   porcentual, 16, 32, 84, 145, 150, 151, 164  
   relativo, 16, 65, 150, 151, 165  
   sistemático, 17, 18, 19, 66, 80, 84, 101, 106  
 Estadística, 2, 10, 36, 44  
 Ética, 136, 141, 146  
 Exactitud, 20, 21, 60, 139  
 Experimentación, 2, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 49, 66, 100, 208  
 Experimento, 2, 3, 8, 9, 10, 16, 17, 18, 20, 21, 36, 37, 38, 40, 44, 45, 46, 47, 52, 56, 57, 59, 60, 63, 68, 69, 73, 74, 75, 77, 80, 81, 82, 83, 85, 87, 91, 98, 100, 101, 102, 104, 105, 106, 107, 110, 112, 113, 114, 118, 125, 126, 128, 129, 135, 136, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 149, 150, 155, 157, 160, 161, 171, 172, 173, 176, 179, 191, 194, 195, 196, 200  
 Factor de cobertura, 66  
 Grados de libertad, 42, 66, 90, 124, 185, 186, 187, 188, 189, 190  
 Graficación, 38, 56, 68, 73, 74, 119, 121, 148, 157, 159, 173  
 Hipótesis, 5, 6, 9, 10, 122, 124  
   nula, 122, 124  
 Histograma, 36, 37, 38, 43, 46, 152, 153, 154  
 Incertidumbre, 2, 9, 17, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 69, 72, 73, 74, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85, 87, 89, 90, 91, 93, 96, 97, 98, 99, 101, 102, 103, 106, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 139, 143, 144, 145, 146, 150, 152, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 162, 163, 164, 165, 166, 170, 171, 172, 173, 175, 176, 177, 178, 181, 191, 195, 200, 201, 209, 210, 212, 214  
   barras de, 56, 79, 80, 175, 176, 177, 178  
   estándar combinada, 61, 63, 64, 66, 72, 73, 77, 80, 81, 157, 162, 165  
   expandida, 65, 73, 81, 156  
   porcentual, 65, 103  
   propagación de, 56, 63, 113, 170, 171  
   relativa, 65, 117, 146, 150, 156, 172  
   Tipo A, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66  
   Tipo B, 57, 58, 59, 60, 61, 63, 64, 66, 67, 77, 80, 101, 157, 162  
 Indicación, 54, 59, 60, 61, 106  
 Informe de laboratorio, 10, 112, 135, 136, 145, 148, 149  
 Inteligencia artificial, 3, 136  
 Ji cuadrada, 96, 97  
 Leyes, 5, 6  
 Magnitud, 12, 13, 14, 15, 16, 20, 21, 22, 32, 33, 36, 42, 44, 47, 54, 55, 68, 96,

- 97, 100, 113, 129, 132, 133, 136, 139, 192, 200  
 básica, 13, 132  
 derivada, 14
- Magnitudes, 12, 13, 14, 15, 22, 23, 24, 28, 31, 32, 33, 38, 55, 57, 73, 96, 113, 129, 130, 131, 132, 134, 145, 172  
 correlacionadas, 113  
 no correlacionadas, 113
- Matriz dimensional, 132, 133
- Media, 40, 41, 42, 44, 48, 49, 50, 51, 54, 57, 58, 62, 63, 96, 97, 98, 115, 123, 125, 127, 152, 153, 154, 165  
 pesada, 96  
 ponderada, 97, 98, 115
- Mediana, 40, 41, 153
- Medición, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 31, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 44, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 76, 77, 80, 81, 89, 93, 97, 98, 101, 102, 103, 104, 105, 112, 113, 122, 125, 143, 144, 145, 146, 147, 158, 161, 163, 165, 166, 173, 181, 195, 200, 208, 212  
 directa, 69  
 indirecta, 55
- Mediciones, 2, 11, 12, 15, 17, 18, 20, 21, 24, 36, 39, 40, 41, 44, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 61, 62, 64, 66, 67, 69, 73, 79, 81, 85, 96, 100, 101, 103, 104, 106, 122, 123, 124, 125, 127, 143, 144, 146, 150, 152, 156, 157, 160, 165, 179, 183, 184, 186, 191, 195, 196, 200, 210
- Mensurando, 15, 20, 21, 31, 36, 39, 40, 41, 42, 49, 55, 56, 57, 58, 61, 62, 63, 65, 66, 79, 122
- Método científico, 5, 7, 10, 213
- Metrología, 2, 10, 11, 139, 210
- Micrómetro, 29
- Mínimos cuadrados lineales. *Regresión lineal* 89, 91, 92, 93, 96, 115, 117, 118, 119, 121, 160, 162, 163, 165, 196
- Moda, 40, 41, 43, 152, 153
- Modelo, 7, 44, 46, 60, 73, 81, 85, 100, 106, 112, 125, 129, 131, 134, 143, 144, 195
- Muestra, 41, 42, 43, 46, 64, 66, 67, 125, 149  
 aleatoria, 41, 46, 185
- Observación, 7, 8, 9, 10, 36, 97
- Ordenada al origen, 82, 83, 84, 86, 89, 90, 145, 161, 165, 180, 181, 196
- Papel  
 log-log, 86, 87, 88, 191  
 semi-log, 86, 87
- Parámetros estadísticos, 21, 39, 43, 48, 52
- Pendiente, 74, 82, 83, 84, 85, 86, 88, 89, 90, 118, 144, 145, 161, 162, 163, 164, 165, 180, 181, 196
- Población, 34, 41
- Polinomio, 119, 120, 121, 122
- Precisión, 20, 21, 30, 139, 150
- Prefijos, 23, 24, 27, 28, 29, 30, 31
- Probabilidad, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 59, 66, 77, 81, 93, 97, 98, 125, 183, 184, 185, 186,
- Propagación de incertidumbre, 56, 170
- Recta, 82, 83, 84, 87, 89, 90, 91, 93, 96, 115, 116, 117, 144, 162, 163, 164, 179, 196
- Redondeo, 71  
 de cifras, 68, 69, 70, 71, 72
- Referencias, 2, 17, 105, 106, 136, 137, 142, 147, 148
- Regresión lineal, 91, 92, 93, 96, 115, 117, 118, 119, 121, 160, 162, 163, 165,

- 196  
     múltiple, 93, 119, 121  
     ponderada, 115, 117, 118  
 Repetibilidad, 21, 57, 61, 104, 143  
 Reproducibilidad, 21, 104, 143  
 Residual, 40, 41  
 Residuo, 40, 90, 179  
 Residuos, 89, 96, 98, 123, 124, 179, 180, 181  
 Resolución, 54, 58, 59, 60, 61, 69, 74, 80, 91, 101, 102, 103, 143, 151, 159, 162, 163, 164, 173, 195  
 Resultado, 1, 8, 9, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 44, 54, 55, 56, 57, 59, 61, 65, 66, 68, 69, 71, 72, 77, 81, 86, 87, 89, 104, 106, 119, 125, 127, 128, 144, 145, 146, 150, 151, 155, 157, 158, 163, 165, 171, 172, 178, 180, 193, 194, 197, 200, 212  
 Resultado de medición, 15, 16, 17, 18, 10, 21, 55, 65, 66, 68, 77, 81, 158, 163, 165  
 Resultado experimental, 8, 127  
 Sesgo, 41  
 Signo decimal, 30  
 Símbolos de las unidades, 24, 31, 32  
 Sistema de magnitudes, 13, 14, 23, 129  
 Sistema de unidades, 23, 34  
 Sistema inglés, 34, 35  
 Sistema internacional de magnitudes, 13, 23  
 Sistema Internacional de Unidades, 2, 12, 22, 23, 25, 33, 212, 213  
 Sistemas de unidades, 10, 11, 33, 34, 209  
 Tendencia central, 38, 45  
 Teoría, 6, 7, 9, 129, 142, 196, 200  
 Unidad de medición, 22  
 Unidades básicas, 2, 23, 24, 25, 27  
 Unidades derivadas, 23, 24, 26, 27, 34  
 Valor  
     atípico, 125, 128, 166  
     convencionalmente, 20, 80, 146, 150, 151, 165, 200  
     verdadero, 12, 16, 20, 79, 80, 163  
     esperado, 97, 125, 161, 191  
     numérico, 12, 32, 33, 72  
 Valor convencional, 12, 16  
 Variable  
     dependiente, 74, 85, 93, 116, 120, 174  
     independiente, 73, 80, 93, 94, 95, 173, 174  
 Varianza, 21, 41, 42, 48, 49, 61, 98, 119, 122, 165  
 Vocabulario, 2, 11, 12, 139, 210

## REFERENCIAS

Amaro, I., Della Greca, A., Francese, R., Tortora, G., Tucci, C. (2023). AI Unreliable Answers: A Case Study on ChatGPT. In: Degen, H., Ntoa, S. (eds) Artificial Intelligence in HCI. HCII 2023. Lecture Notes in Computer Science, vol. 14051. Springer, Cham. Pp. 23-40.

APA (2021). Manual de publicaciones de la APA, 4ª edición. Editorial El Manual Moderno, México.

Barker, D.R., Diana, L.M. (1974). Simple method for fitting data when both variables have uncertainties. *American Journal of Physics*, 42(3), 224-227.

BCCT (2023). Recomendaciones sobre el uso de la IA Generativa para los estudiantes del PCT. Biblioteca Conjunta de Ciencias de la Tierra, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Bentley, J. (2000). *Sistemas de medición y control*. CECSA, México.

Berendsen, H.J.C. (2011). *A student's guide to data and error analysis*. Cambridge University Press. Cambridge.

Bevington, P.R., Robinson, D.K. (2003). *Data reduction and error analysis*. McGraw-Hill, Nueva York.

Canizales, A., Salazar, C., López, A. (2004). *La experimentación en la enseñanza de las Ciencias Naturales en el nivel primaria*. [Tesis de Maestría. Sinaloa: Universidad Pedagógica Nacional].

Carpi, A., Egger, A.E. (2008). *La Experimentación en la Investigación Científica: Variables y controles en la práctica*. <https://www.visionlearning.com>

/es/library/Proceso-de-la-Ciencia/49/La-Experimentaci%C3%B3n-en-la-Investigaci%C3%B3n-Cient%C3%ADfica/150/readingtoc\_4. Consultado el 12/1/2024.

Cooke, C. (1996). *An Introduction to Experimental Physics*. UCL Press, Londres.

Deming, W. E. (1964). *Statistical adjustment of data*. Dover, Nueva York.

Espinosa, A., Miranda J., Pineda, J.C. (2010). Evaluación de la incertidumbre en cantidades correlacionadas: aplicación al análisis elemental de aerosoles atmosféricos. *Revista Mexicana de Física* 56 (1) 134–140.

Fernández-Pareja, M.T. (2008). Cálculo de incertidumbres para expresar la calidad de medida. Aplicación a la calibración de los instrumentos de medida electromagnética de distancias. En *Memorias del Segundo Congreso Internacional de Matemáticas en Ingeniería y Arquitectura* (pp. 231-243).

Feynman, R.P. (1975). <https://www.youtube.com/watch?v=EYPapE-3FRw>, Consultado el 8/4/2024.

Figueroa Montaña, A., Ramírez Sánchez, H.U., Alcalá Gutiérrez, J. (2014). *Introducción a la metodología experimental*. Pearson Educación, México.

Fuentes Arderiu, X. (2002). Estudio de la incertidumbre asociada a los resultados obtenidos con ciertos procedimientos de medida bioquímico-clínicos. Tesis de doctorado, Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona.

Galindo Fentanes, E. (2013). *El quehacer de la ciencia experimental. Nuevo siglo XXI*, Ciudad de México.

García, J.L.G. (1959). *Sistemas de unidades físicas*. Anales de la Universidad de Murcia (Ciencias).

García Viviescas, A.X., Moreno Sacristán, Y.A. (2020). La experimentación en las ciencias naturales y su importancia en la formación de los estudiantes de básica primaria. *Bio-grafía*, 13(24). <https://doi.org/10.17227/bio-grafia.vol.12.num24-10361>

Garduño, R. (2006). Datos y reporte en el laboratorio de Mecánica. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, Ciudad de México.

Glen, S. (2024). Statistics How To. <https://www.statisticshowto.com/chauvenets-criterion/>. Consultado el 20/05/2024.

Gómez de Silva, G. (2001). Diccionario breve de mexicanismos. Academia Mexicana de la Lengua y Fondo de Cultura Económica, México.

González Muñoz, H. (2001). Incertidumbre en la Calibración de Calibradores Tipo Vernier. Centro Nacional de Metrología, El Marqués, Qro., México.

Gupta, S.V. (2012). Measurement uncertainties. Springer, Berlin.

Gutiérrez Aranzeta, C. (1998). Introducción a la metodología experimental. Limusa, México.

Halliday, D., Resnick, R., Walker, J. (1994) Fundamentals of Physics, 4a ed. Wiley, New York.

Hernández-López, A.E., Miranda Martín del Campo, J., Mugica Álvarez, V., Valle-Hernández, B.L., Mejía-Ponce, L.V., Pineda-Santamaría, J.C., Reynoso-Cruces, S., Mendoza-Flores, J.A., Rozanes-Valenzuela, D. (2021). A study of PM2.5 elemental composition in southwest Mexico City and development of receptor models with positive matrix factorization. *Revista Internacional de Contaminación Ambiental*, 37, 67-88.

Hoel, P.G. (1971). Introduction to mathematical statistics, 4a. ed. Wiley John Wiley & Sons, Nueva York.

IMNC (2002). NMX-CH-140-IMNC-2002. Guía para la expresión de incertidumbre en las mediciones. Instituto Mexicano de Normalización y Certificación, México.

IMNC (2009). NMX-Z-055-IMNC-2009 Vocabulario Internacional de Metrología – Conceptos fundamentales y generales, y términos asociados (VIM). Instituto Mexicano de Normalización y Certificación, México.

ISO (1984). International vocabulary of basic and general terms in metrology (VIM), published in the name of BIPM, IEC, ISO, and OIML, 1a Ed. ISO, Ginebra.

JCGM (2008). JCGM 100:2008: Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement. Joint Committee for Guides in Metrology, Ginebra.

JCGM (2012). JCGM 200:2012: International vocabulary of metrology — Basic and general concepts and associated terms (VIM), 3a. Ed. Joint Committee for Guides in Metrology, Ginebra.

Johnson, S.R. (2008). The Trouble with QSAR (or How I Learned to Stop Worrying and Embrace Fallacy), *J. Chem. Inf. Model.* 48, 25–26.

Kanare, H.M. (1985). Writing the laboratory notebook. American Chemical Society, Washington, DC.

Kirkup L., Frenkel, B. (2006). An introduction to uncertainty in measurement. Cambridge University Press. Cambridge.

Kreyszig, E. (1994). Introducción a la estadística matemática: principios y métodos. Limusa, México.

Lea, S.M., Burke, J.R. (1999) Física: La naturaleza de las cosas, Vol. 1. International Thomson Editores, México.

Martínez, L.M. (2005). La Bitácora de Laboratorio: Instrumento de Investigación y Trabajo. Departamento de Ingeniería, Coordinación de Ingeniería Electrónica y de Comunicaciones Universidad Iberoamericana, México.

Mejía-Ponce, L.V., Hernández-López, A.E., Miranda-Martín-del-Campo, J., Pineda-Santamaría, J.C., Reynoso-Cruces, S., Mendoza-Flores, J.A., Espinosa-Guzmán, A.A. (2022). *Journal of Atmospheric Chemistry* 79(3), 167-198.

Merrin, J. (2017). Introduction to error analysis. CreateSpace Independent Publishing Company. Klosterneuburg, Austria.

MetAs (2006). Historia del Sistema Internacional de Unidades (SI). Guía MetAs 6(2), 1-10.

Mininni, P. (2015). Física teórica 1, 2° cuatrimestre 2015. <http://materias.df.uba.ar/ft1a2015c2/2015/08/24/feynman-sobre-teoria-y-experimentos/>. Consultado el 8/4/2024.

Miranda, J. (2000). Evaluación de la incertidumbre en datos experimentales. Instituto de Física, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

Oberg, J. (1999). Why the Mars probe went off course [accident investigation]. *IEEE Spectrum*, 36(12), 34-39.

Oda, B. (2005). Introducción al análisis gráfico de datos experimentales. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, México.

OIPM (2019). The International System of Units (SI), 9a Ed. Oficina Internacional de Pesos y Medidas, Ginebra.

Pérez-Castorena, A., Guevara-Hernández, A. (2002). Cálculo de la incertidumbre asociada al resultado de la medición de glucosa. *Bioquímica* 27, 32-40.

Pérez Urquiza, M., Mitani, Y., Nava Jaimes H.O. (2009). Proficiency tests to evaluate commercially available IVD kits for glucose and cholesterol measurements. *Accred. Qual. Assur.* 14, 269-271.

Physlets (2024). Tracker video analysis tool for Physics education. <https://physlets.org/tracker/>. Consultado el 26/4/2024.

RAE (2011). Gramática básica de la lengua española, Real Academia Española. Espasa, Madrid.

RAE (2019). Gramática y Ortografía básicas de la lengua española, Real Academia Española. Espasa, Madrid.

RAE (2023). Diccionario de la lengua española. <https://dle.rae.es/>. Consultado el 16/8/2024.

Reich, E.S. (2010). *Plastic Fantastic: How the Biggest Fraud in Physics Shook the Scientific World*. St. Martin's Griffin, Nueva York.

Reynoso-Cruces, S., Miranda, J., Pineda, J.C. (2023). A Study of Elemental Composition and Risk Assessment Due to Exposure to Indoor PM10 in Two Residences in Mexico City. *Atmosphere* 14, 734.

Rich, J. D. (2011). An Experimental Study of Differences in Study Habits and Long-Term Retention Rates Between Take-Home and In-Class Examinations. *International Journal of University Teaching and Faculty Development*, 2(2), 121-129. Retrieved from <https://login.pbidi.unam.mx:2443/login?url=https%3A%2F%2Fwww.proquest.com%2Fscholarly-journals%2Fexperimental-study-differences-habits-long-term%2Fdocview%2F1722618786%2Fse-2%3Faccountid%3D14598>. Consultado el 6/2/2024.

Riveros, H., Rosas, L. (2006). *El método científico aplicado a las ciencias experimentales*. Trillas, México.

Riveros Rotge, H., Julián Sánchez, A., Riveros Rosas, H. (2009). *Método Científico Experimental*. Trillas, México.

Robb, S., Burnette III, J.M., Chapovskya, A., Palmer, K. and Wessler, S.R. (2015). An Open Source, Collaborative Electronic Notebook for Undergraduate Laboratory Classes. CourseSource. <https://doi.org/10.24918/cs.2015.1>

Rosas, E. (2019). Breve historia del Sistema Internacional de Unidades. *Universitaria* 2(13), 30-33.

Sierra Porta, D. (2011). *Técnicas experimentales para físicos*. Editorial Académica Española Saarbrücken, Alemania.

Sola Ayape, C., editor (2005). *Aprendizaje basado en problemas*. Trillas, México.

Sotolongo Costa, O. (2020). *Elementos de análisis dimensional*. Editorial Universidad de Almería, Almería.

StackExchange (2008). Examples for teaching: Correlation does not mean causation. <https://stats.stackexchange.com/questions/36/examples-for-teaching-correlation-does-not-mean-causation>. Consultado el 26/4/2024.

SCFI (1977). Norma mexicana NMX-Z-013/1-1977. Guía para la Redacción, Estructuración y Presentación de las Normas Mexicanas. Secretaría de Comercio y Fomento Industrial, México.

Taylor, J.R. (2022). An introduction to error analysis. University Science Books. Nueva York.

Tipler, P.E., Mosca, G. (2020). Física para la ciencia y la tecnología, 6ª Ed. Reverté, Barcelona.

York, D. (1966). Least-squares fitting of a straight line. *Canadian Journal of Physics*, 44(5), 1079-1086.

Zumbado Rivera E.A., Leiva Quesada J.E. (2021). Uso de la incertidumbre de medida por medio del método Nordtest en el laboratorio clínico. *Rev. Colegio de Microb. Quím. Clín. de Costa Rica*, 26, 208-218.

Zumdahl, S.S. y DeCoste D.J. (2012). Principios de Química, 7ª Ed. Cengage Learning Editores, México.

Zurita-Cruz, Jessie Nallely, Márquez-González, Horacio, Miranda-Novales, Guadalupe, & Villasís-Keever, Miguel Ángel. (2018). Estudios experimentales: diseños de investigación para la evaluación de intervenciones en la clínica. *Revista alergia México*, 65(2), 178-186. <https://doi.org/10.29262/ram.v65i2.376>