

# **Números críticos autoorganizados**

por  
**Bartolo Luque**

Este es un capítulo separado que integra el libro

## **Fronteras de la Física en el Siglo XXI**

**Octavio Miramontes y Karen Volke** (Editores)

CopIt-arXives, 2013

México, D.F.

ISBN: 978-1-938128-03-5

©CopIt-arXives

<http://scifunam.fisica.unam.mx/mir/copit/TS0011ES/TS0011ES.html>

# Índice general

Bartolo Luque	<b>Números críticos autoorganizados</b>	<b>1</b>
1.	Introducción . . . . .	1
2.	Criticalidad autoorganizada . . . . .	2
	Pilas de arena . . . . .	3
3.	Pilas de números: conjuntos primitivos . . . . .	5
	Cuentas . . . . .	8
4.	Retroalimentando la teoría de números y los sistemas complejos . . . . .	11
5.	Anímate a explorar por tu cuenta . . . . .	12
6.	Referencias . . . . .	13

# Números críticos autoorganizados

Bartolo Luque, Universidad Politécnica de Madrid, España

## 1. Introducción

Recuerdo que, un año antes de comenzar mis estudios universitarios, todavía no tenía claro si estudiar Física o Matemáticas. La Física me resultaba apasionante, pero tenía la impresión de que sus resultados, siempre provisionales, carecían de la rotundidad de los teoremas matemáticos. Aunque por otra parte, era consciente de que los resultados matemáticos consistían en proposiciones analíticas. En cierto modo, vacías, en contraste con las proposiciones sintéticas de la Física, que necesitaban confirmación empírica. Las mates eran un juego cerrado sobre sí mismo y la física pretendía desvelar la realidad.

Finalmente, el consejo de gente mayor, y el simple hecho de que la mitad del currículum de Física fueran Matemáticas, me decantaron por hacerme físico. La cuántica, la relatividad, la cosmología o la física de partículas seguían de moda en los 80; pero un nuevo movimiento aparecía con fuerza: los sistemas complejos. La teoría del caos, las transiciones de fase, los autómatas celulares, la criticalidad autoorganizada y un largo etcétera estaban conformándose en lo que vendría a ser un nuevo paradigma. Por una parte, el enfoque filosófico de esta nueva ciencia complementaba la tradición clásica reduccionista (nunca tuve la sensación de que se contrapusiera, como muchos afirman) para dar cuenta de fenómenos emergentes que claramente eran más que la suma de las partes. Por otra parte, esta ciencia percolaba por todas las disciplinas artificialmente estancas de la ciencia: ecología, genética, geología, química, sociología, economía... Y utilizaba el ordenador como laboratorio-simulador, lo que hoy se conoce como tercera vía al binomio teoría-experimento del método científico clásico. Todo perfecto para mi carácter diletante y mis intereses dispares.

También recuerdo que cuando empezamos a publicar en el campo de los sistemas complejos, hace ya dos décadas, nos rechazaban artículos diciéndonos que las hormigas eran electrones en las revistas de Física y que los electrones no eran hormigas en las de Biología. Eso ya está superado y ahora los sistemas complejos gozan de aceptación y una envidiable actividad. Y eso a pesar de que la complejidad sigue siendo como la pornografía: nadie sabe definirla con precisión, aunque todo el mundo es capaz de reconocerla

cuando la ve. Siguiendo esa tradición transdisciplinaria, en los últimos años nuestro grupo ha venido desarrollando trabajos que construyen puentes entre la Física y la teoría de números. En fin, ya sabemos que: "ni los números no son partículas, ni las partículas son números..."pero desde luego obviarlo ha sido para mi toda una satisfacción para colmar mis aspiraciones adolescentes.

La teoría de números está llena de problemas de enunciados sencillos que, sin embargo, después de mucho tiempo permanecen irresueltos [1]. Dos ejemplos clásicos son la existencia de infinitos primos gemelos (primos de la forma  $p$  y  $p + 2$ ) y la conjetura de Golbach (todo número par mayor que 2 es expresable como la suma de dos primos). Por su naturaleza, muchos de estos problemas se prestan a exploración numérica mediante ordenador. En muchos casos, encontrar un solo contraejemplo numérico permitiría determinar inmediatamente la falsedad de una conjetura. Eso ocurre incluso con la conjetura más famosa de las matemáticas: la hipótesis de Riemann. La existencia de un solo cero no trivial fuera de la línea crítica daría al traste con la hipótesis. Tradicionalmente la teoría de números ha sido territorio exclusivo de matemáticos, sin embargo, recientemente los físicos han comenzado a mostrar interés en el área [2]. En especial, con herramientas propias de la mecánica estadística y las ciencias de la complejidad se están proponiendo nuevos enfoques y alcanzando resultados interesantes. En este capítulo veremos un ejemplo de este contubernio, donde se juega con conceptos como la criticalidad autoorganizada, los conjuntos primitivos y las redes complejas.

## 2. Criticalidad autoorganizada

Si hay un concepto capital en ciencias de la complejidad ese es sin duda el de "transición de fase". Como escribió el matemático D. Ruelle: "Se podría decir que un físico es alguien que no considera evidente que el agua deba hervir o congelarse cuando se eleva o disminuye su temperatura" [3]. En un sistema puede producirse un fuerte cambio cualitativo en sus propiedades macroscópicas, conocidas como parámetros de orden, al variar adecuadamente parámetros del sistema, llamados de control. Cuando esto ocurre hablamos de transición de fase [4]. Eso sucede, por ejemplo, al hervir o congelar agua variando la temperatura. Un sistema en equilibrio térmico a temperatura  $T$  se caracteriza por su energía libre:  $F = U - TS$  donde  $U$  y  $S$  son la energía y la entropía del sistema respectivamente. Muchas transiciones de fase ocurren a causa de la competencia entre la tendencia del sistema a minimizar la energía (orden) y a maximizar la entropía (desorden) con la restricción de que la energía libre sea mínima.

Al hablar genéricamente sobre transiciones de fase se distingue entre transiciones de primer y segundo orden. Una transición de fase de primer orden envuelve una reestructuración de la sustancia a nivel microscópico, como es el caso del agua al hervir y cambiar de líquido a gas. El parámetro de orden que define la transición es discontinuo y el calor latente no se hace cero. En contraste, una transición de segundo orden no puede ser detec-

tada al observar un ejemplo microscópico de la sustancia. En ella el parámetro de orden es continuo, las propiedades macroscópicas del sistema no cambian discontinuamente como en el caso de las transiciones de fase de primer orden. Sin embargo, alguna de las derivadas de primer orden de estas magnitudes macroscópicas cambian discontinuamente. Muchas transiciones de fase de segundo orden separan una fase simétrica (ordenada) de otra asimétrica (desordenada) y por ello se conocen también como transiciones orden-desorden. Los puntos del espacio de fases en donde las transiciones de fase de segundo orden se producen, son llamados puntos críticos. Y hablamos de fenómeno crítico cuando nos referimos al comportamiento de un sistema en las cercanías de un punto crítico. El dominio crítico separará la fase ordenada y la desordena en el espacio de fases [4].

Sorprendentemente, en la naturaleza encontramos muchos ejemplos de sistemas que se encuentran en el borde de las transiciones, en puntos críticos. En particular los biológicos, hecho que se conoce en el mundillo como "hipótesis del borde del caos". ¿Cómo consiguen esos sistemas complejos situarse en los puntos críticos? En algunos casos, si se trata de sistemas adaptativos sometidos a presiones de selección, los sistemas pueden explorar el espacio de fases en busca de su óptima adaptación como ocurre con los virus de RNA. Pero en otros casos, semejante argumento no tiene ni tan siquiera sentido. Por eso la aparición de la criticalidad autoorganizada a finales de los años 80 ('Self-Organized Criticality' o en breve: SOC) tuvo una extraordinaria acogida. Lo que nos muestra la SOC es un mecanismo plausible para que un sistema se sitúe por sí mismo, sin necesidad de regular desde el exterior un parámetro de control como por ejemplo la temperatura, en los puntos críticos de su espacio de fases. SOC pretende explicar el comportamiento de sistemas compuestos de muchos elementos, que interactúan a pequeña escala y evolucionan espontáneamente hacia un macroestado crítico metaestable. En dicho estado, una pequeña perturbación local puede desencadenar reacciones en cadena de todos los tamaños. Es uno de los mecanismos generales que se han propuesto para dar explicación a la ubicuidad de semejantes casos, así como a la presencia de leyes de potencias, fractalidad y ruido  $1/f^\alpha$  [5–7].

## Pilas de arena

El primer sistema dinámico, descrito en 1987, que exhibía criticalidad autoorganizada fue la pila de arena abeliana, conocido también como el modelo BTW en honor a sus creadores Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld [8, 9]. Desde su presentación, la pila de arena se convirtió en el paradigma ilustrativo de la SOC. Algunos científicos han simulado montones de arena mediante programas de ordenador. Otros han efectuado delicados experimentos con pilas reales. Al formar una pila de arena añadiendo granos poco a poco, el montón de arena en forma de cono aumenta poco a poco su pendiente media hasta alcanzar un valor crítico cuasiestable. Si la pila se forma sobre una plancha finita, el montón deja de crecer cuando la cantidad de arena añadida queda compensada, en término medio, por la eliminada por los bordes a través de avalanchas. En ese momento, la pila se

encuentra en estado crítico. Bak y sus colaboradores crearon un autómata celular bidimensional de reglas sencillas inspirado en la pila de arena, aunque claramente diferente y mucho más sencillo. El autómata ha sido descrito infinidad de veces, pero volveremos a hacerlo aquí para comentar los ingredientes básicos de la SOC:

(1) El autómata consiste en un tablero de  $L \times L$  casillas. Cada posición, celda de coordenadas  $(x, y)$ , posee en un instante  $t$  un valor entero  $h(x, y; t) \geq 0$  que podemos interpretar como granos de arena apilados en esa casilla. Si el sistema está en equilibrio ninguna de sus casillas tendrá más de 3 granos de arena.

(2) La regla dinámica de oro del sistema es bien simple: Si  $h(x, y; t)$  alcanza un valor igual o mayor a 4, entonces difunde su contenido equirrepartiendo los cuatro granos a sus inmediatos cuatro vecinos. Las condiciones de contorno del tablero son abiertas, para permitir la disipación de granos por los bordes. De modo que si una casilla está en un borde del tablero los granos pueden caer del sistema.

Más formalmente la dinámica del autómata quedaría descrita por:

$$h(x, y; t + 1) = \begin{cases} h(x, y; t) - 4 & \text{si } h(x, y; t) \geq 4, \\ h(x, y; t) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De modo que si se cumple la primera condición, el contenido perdido de 4 granos se equi-reparte entre los vecinos:  $h(x + 1, y; t + 1) = h(x + 1, y; t) + 1$ ,  $h(x - 1, y; t + 1) = h(x - 1, y; t) + 1$ ,  $h(x, y + 1; t + 1) = h(x, y + 1; t) + 1$  y  $h(x, y - 1; t + 1) = h(x, y - 1; t) + 1$ . Estas reglas locales pueden interpretarse como una ecuación no lineal discreta con difusión espacial.

(3) Una vez el sistema está relajado, se perturba de nuevo lanzando un grano, aumentando en una unidad el valor de una casilla escogida al azar. El sistema evoluciona hasta un estado crítico, donde el número total de granos sobre el tablero se hace cuasiconstante. Una vez alcanzado este estado, las pequeñas perturbaciones, como añadir un grano, provocan respuestas-avalanchas a todas las escalas.

Cuando se simula el sistema comprobamos que independientemente de la condición inicial, tras un transitorio, el número de granos en el tablero se hace casi-estacionario. El estado crítico actúa como atractor de la dinámica. Este atractor es distinto al punto crítico en las transiciones de fase de la mecánica estadística. Normalmente el punto crítico se alcanza por regulación de un parámetro como la temperatura, por ejemplo. En el autómata pila de arena no se altera ningún parámetro, el sistema evoluciona por sí solo a un estado metaestable. Cuando medimos la distribución de tamaños de avalanchas de granos que salen del sistema o las duraciones temporales del efecto dominó en las difusiones que produce una perturbación aparecen leyes potenciales. Estas, junto a la autosimilaridad espacial de las casillas implicadas en la difusión y el ruido  $1/f^\alpha$  de la cantidad total de granos

en el tablero a lo largo del tiempo, son la impronta de muchos fenómenos regulados por mecanismos SOC y aparecen en los puntos críticos de las transiciones de fase [5–7].

### 3. Pilas de números: conjuntos primitivos

Hemos descrito muy brevemente cómo a finales de la década de los 80 del siglo pasado, Bak, Tang and Wiesenfeld [8, 9] presentaron el concepto de criticalidad autoorganizada como un posible mecanismo capaz de explicar cómo un sistema multicomponente puede evolucionar de manera natural a un estado crítico autoorganizado sin la necesidad de un ajuste externo de sus parámetros. A partir de este trabajo seminal y de la aptitud fuertemente decidida de Per Bak, se generó una cantidad enorme de teoría, análisis de datos experimentales y modelos en muchas áreas de la ciencia. Hoy parece claro que muchos fenómenos exhiben SOC [5–7] y sin embargo, sigue sin existir una definición rigurosa de las condiciones bajo las cuales esperaríamos que se produjera. Para cazar el mecanismo fundamental los teóricos han intentado definir el modelo más simple posible que exhiba comportamiento crítico autoorganizado. En este sentido, Flyvbjerg, a finales de los 90, introdujo un modelo extramadamente simple (la máquina de pinball) junto con una definición mínima de consenso [10, 11]: un sistema SOC debe estar constituido por un *medio* a través del cual las *perturbaciones* pueden propagarse causando una *modificación* del mismo, de modo que las respuestas sean *críticas* y el medio permanezca *invariante en un sentido estadístico*. En el caso del autómatas pila de arena el medio lo constituyen los granos de arena sobre el tablero, las perturbaciones son los granos que colocamos al azar, la propagación se produce a través de la regla umbral de cuatro granos y su difusión a vecinos, las respuestas críticas son las avalanchas que acaban expulsando granos del tablero y modificando el contenido del mismo y el contenido total de granos del tablero permanece invariante en sentido estadístico.

Por otra parte, en los últimos años se está evidenciando la fuerte dependencia entre los procesos que se sustentan en una red y su topología [12, 13]. Concretamente, existe interés por las posibles relaciones entre el comportamiento SOC y las redes libres de escala [13], caracterizadas por leyes de potencia en la distribución de sus enlaces  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , y cómo los estados críticos autoorganizados pueden emerger en este acoplamiento entre topología y dinámica [14–17]. Vamos a intentar abordar ambos puntos, el sistema mínimo que exhiba SOC y su relación con las redes complejas, a través de la teoría de números. En particular, haremos uso de la sencilla idea de “conjunto primitivo”.

En teoría de números, un conjunto primitivo de  $N$  números naturales es aquel en que sus elementos no pueden dividirse entre sí de manera exacta [1, 18, 19]. Por ejemplo, el conjunto  $\{14, 23, 49, 59, 88, 90, 94\}$  es primitivo como el lector puede comprobar al intentar dividir sin éxito todas las parejas posibles. Para construir nuestro sistema SOC, consideremos el conjunto ordenado de  $M - 1$  números naturales  $\{2, 3, 4, \dots, M\}$ , que a partir de ahora llamaremos repositorio, donde no incluimos al cero ni al uno. Supongamos que en

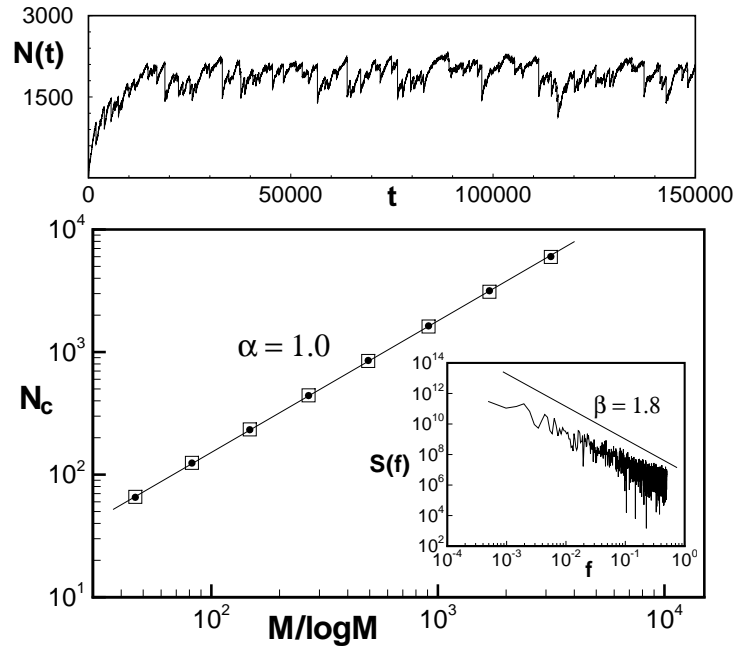


Figura 1: Arriba: Ejemplo de evolución temporal de un conjunto primitivo de tamaño  $N(t)$  para un repositorio de tamaño  $M = 10^4$  y una condición inicial  $N(0) = 0$ . Nótese que después de un breve transitorio,  $N(t)$  se autoorganiza fluctuando alrededor de un valor medio estable  $N_c$ . Abajo: (puntos negros) Comportamiento escalante del valor medio  $N_c$  en función del tamaño característico del sistema  $M/\log M$  y su ajuste a  $N_c \sim (M/\log M)^\gamma$ , con  $\gamma = 1.05 \pm 0.01$ . (cuadrados) Escalamiento de  $N_c$  predicho por la ecuación 8. Figura insertada: gráfica en log-log del espectro de potencias de  $N(t)$ , mostrando ruido  $f^{-\beta}$  para la serie temporal  $N(t)$  con  $\beta = 1.80 \pm 0.01$  (este último valor es un promedio sobre  $10^5$  realizaciones de  $N(t)$  a partir de 4096 pasos de tiempo después de un transitorio para cada una de ellas y  $M = 10^4$ ).

el instante  $t$  nuestro conjunto primitivo es el antes citado, formado por  $N(t) = 7$  elementos. A partir de estos sencillos ingredientes vamos a intentar construir un modelo que exhiba SOC. Las reglas dinámicas serán:

(R1) Perturbación: un número  $a$  se toma al azar del repositorio y se introduce en el conjunto primitivo. Supongamos en nuestro ejemplo que  $a = 7$ .

(R2) Disipación: si  $a$  divide y/o es dividido por  $s$  elementos del conjunto primitivo, entonces decimos que se produce una avalancha instantánea de divisiones de tamaño  $s$  y estos elementos son devueltos al repositorio. De manera que el conjunto permanece siendo primitivo, pero con un nuevo tamaño  $N(t+1) = N(t) + 1 - s$ . En nuestro ejemplo, como 7 divide a los números 14 y 49, se produce una avalancha de tamaño  $s = 2$  y el nue-



vo conjunto primitivo en  $t + 1$  estará constituido por  $N(t + 1) = 7 + 1 - 2 = 6$  elementos:  $\{7, 23, 59, 88, 90, 94\}$ .

(R3) Se itera el proceso comenzando de nuevo en R1.

Observemos que el sistema propuesto se *perturba* al introducirse nuevos números en el conjunto primitivo y es *dissipativo* puesto que los números que ahora son divisibles con el recién incorporado son expulsados del conjunto y devueltos al repositorio.

Para familiarizarnos con la dinámica realizamos una serie de simulaciones de Monte Carlo para diferentes valores de tamaño de repositorio  $M$ . En la parte superior de la figura 1 hemos representado  $N(t)$  para una realización concreta, con  $M = 10^4$  y  $N(0) = 0$ . Observemos que después de un breve transitorio,  $N(t)$  se autoorganiza fluctuando alrededor de un valor crítico medio  $N_c$  bien definido. En la misma figura, abajo hemos graficado en log-log el espectro de potencias de  $N(t)$ : el sistema evidencia ruido  $f^{-\beta}$ , con  $\beta = 1.80 \pm 0.01$ . Las fluctuaciones alrededor de la media son el resultado de la perturbación producida por la introducción en el conjunto primitivo a cada paso de tiempo de nuevos números extraídos del repositorio (el forzamiento externo por la regla R1). Eventualmente (de acuerdo con la regla R2), una avalancha producida por divisiones puede causar una *modificación* en el tamaño y composición del conjunto primitivo. Estas avalanchas constituyen la respuesta del sistema a las perturbaciones y son las que mantienen el tamaño del conjunto primitivo alrededor de  $N_c$ , en estado metaestable. Arriba, en la figura 2 hemos representado un ejemplo de la evolución temporal de los tamaños de estas avalanchas. Abajo, mostramos la distribución de probabilidad  $P(s)$  del tamaño  $s$  de las mismas para distintos tamaños  $M$  de repositorio. Se ajustan a leyes de potencias  $P(s) \sim s^{-\tau} \exp(s/s_0)$  con  $\tau = 2.0 \pm 0.1$ , apuntando que las respuestas a las perturbaciones son críticas. Observemos que la relación de ley de potencias está truncada en valores  $s_0(M)$  en las colas debidos al efecto del tamaño finito  $M$  de los repositorios. La localización concreta de estos valores escala con el tamaño característico del sistema  $s_0 \sim (M/\log M)^\omega$  con  $\omega = 1.066 \pm 0.003$ , como es típico de un sistema de tamaño finito en estado crítico [5]. Más adelante, explicaremos por qué el tamaño característico del sistema es  $M/\log M$  y no simplemente  $M$ , como intuitivamente podría parecer.

Podemos concluir de acuerdo con la definición de Flyvbjerg [10], que nuestro modelo de división exhibe SOC. Las avalanchas de números conducen al sistema a estados de estabilidad marginal, que no son otra cosa que conjuntos primitivos de distintos tamaños y composiciones. Dado un repositorio  $[2, M]$ , las fluctuaciones temporales son la expresión de una búsqueda estocástica en el espacio de configuraciones de los conjuntos primitivos posibles.

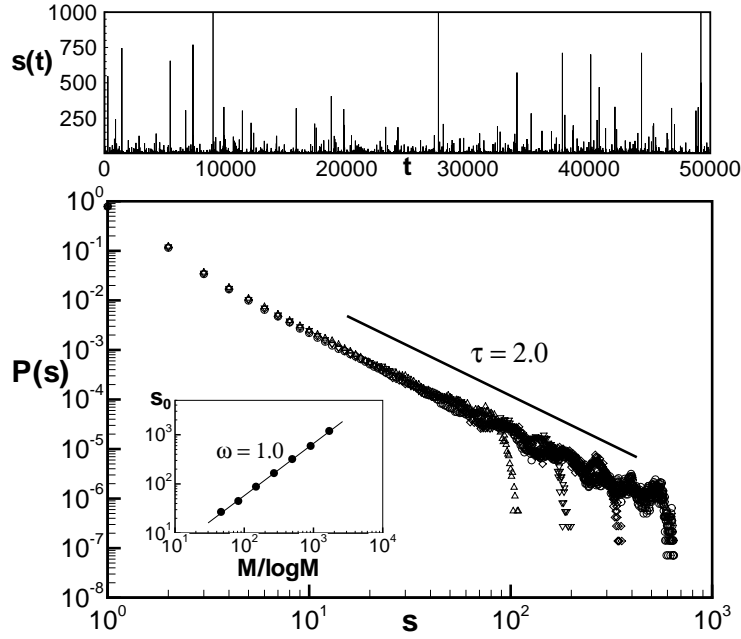


Figura 2: Arriba: ejemplo de una realización del modelo de división mostrando el tamaño de las avalanchas a lo largo del tiempo. Abajo: Distribución de probabilidad  $P(s)$  de que una avalancha de tamaño  $s$  ocurra para diferentes tamaños del repositorio  $M = 2^{10}$  (triángulos),  $M = 2^{11}$  (triángulos invertidos),  $M = 2^{12}$  (diamantes) y  $M = 2^{13}$  (círculos). En cada caso encontramos  $P(s) \sim s^{-\tau} \exp(s/s_0)$  con  $\tau = 2.0 \pm 0.1$ . Nótese que la relación de ley de potencia evidencia un límite  $s_0$  a partir del cual el comportamiento es exponencial debido a efectos de tamaño finito. Figura insertada: Relación de escala de los valores  $s_0$  como función del tamaño característico del sistema  $M/\log M$ , con un exponente  $\omega = 1.0$ .

## Cuentas

Vamos a abordar analíticamente el problema. Para ello necesitamos considerar algunos conceptos elementales de teoría de números. Consideremos  $d(n)$ , la *función divisor* [20], que simplemente nos proporciona el número de divisores de  $n$ , excluyendo a 1 y  $n$ :

$$d(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \left( \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right), \quad (1)$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  es la función parte entera de un número. La cantidad media de divisores de un número arbitrario del repositorio  $[2, M]$  será entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M-1} \sum_{n=3}^M d(n) &= \frac{1}{M-1} \sum_{k=2}^M \left\lfloor \frac{M}{k} \right\rfloor \simeq \sum_{k=2}^M \frac{1}{k} \\ &\simeq \log M + 2(\gamma - 1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

De modo, que la probabilidad media de que dos números  $a$  y  $b$  tomados al azar de  $[2, M]$  sean divisibles es aproximadamente  $P = Pr(a|b) + Pr(b|a) \simeq 2 \log M/M$ . Si asumimos como aproximación que los  $N$  elementos del conjunto primitivo no están correlacionados, la probabilidad de que un nuevo número genere una avalancha de tamaño  $s$ , dividida o sea dividido, es en promedio  $(2 \log M/M)N$ . Podemos entonces, fácilmente, construir una ecuación de campo medio que describa la evolución del sistema. En esta ecuación veremos cómo a cada paso de tiempo un número del repositorio escogido al azar es introducido en el conjunto primitivo presente y eso produce una avalancha de tamaño medio  $(2 \log M/M)N$ :

$$N(t+1) = N(t) + 1 - \left(\frac{2 \log M}{M}\right)N(t). \quad (3)$$

Observemos que el punto fijo de esta ecuación,  $N_c = M/(2 \log M)$ , el valor crítico medio alrededor del cual el sistema se autoorganiza, escala con el tamaño del sistema como:

$$N_c(M) \sim \frac{M}{\log M}. \quad (4)$$

Este es el punto que nos apunta como tamaño característico del sistema, no a  $M$  como podría esperarse intuitivamente, sino a  $M/\log M$ . Este comportamiento de escala ya nos había aparecido en otros modelos en teoría de números que mostraban fenómenos colectivos [21, 22].

En la figura 1 hemos dibujado (puntos negros) el valor de  $N_c$  como función del tamaño característico  $M/\log M$  a partir de simulaciones de Monte Carlo del modelo para diferentes tamaños de repositorios:  $M = 2^8, 2^9, \dots, 2^{15}$ . Para cada tamaño  $M$  estimamos  $N_c(M)$  promediando  $N(t)$  en el estado estacionario. Observemos que la relación de escala de la ecuación 4 funciona, sin embargo el valor numérico exacto de  $N_c(M)$  se infraestima sistemáticamente por la ecuación 3. Este resultado es razonable teniendo en cuenta que hemos asumido que los elementos de un conjunto primitivo están descorrelacionados, que obviamente no es el caso. Observemos por ejemplo, que cualquier número primo  $p \geq \lfloor M/2 \rfloor$  introducido en el conjunto primitivo, permanecerá en él por siempre. Podemos sortear esta deficiencia de la aproximación de campo medio considerando la función  $D(n)$ , que determina el número exacto de divisores de un número  $n \in [2, M]$ , i.e. la canti-

dad de números del repositorio que dividen o son divididos por  $n$ :

$$D(n) = d(n) + \left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor - 1. \quad (5)$$

Si definimos  $p_n(t)$  como la probabilidad de que un número  $n$  pertenezca a tiempo  $t$  al conjunto primitivo, entonces tendremos:

$$p_n(t+1) = \left(1 - \frac{D(n)}{M - N(t)}\right) p_n(t) + \frac{1}{M - N(t)} (1 - p_n(t)), \quad (6)$$

que nos proporciona la probabilidad estacionaria de supervivencia en el conjunto primitivo:

$$p_n^* = \frac{1}{1 + D(n)}. \quad (7)$$

En la figura 3 (derecha) mostramos esta probabilidad estacionaria de supervivencia del número  $n$  (puntos negros) obtenida a través de simulaciones numéricas para un sistema con  $M = 50$ , mientras los cuadrados representan los valores  $p_n^*$  obtenidos a través de la ecuación 7. Vamos bien, porque el acuerdo es más que aceptable. Podemos proceder ahora a estimar le valor crítico  $N_c(M)$  como:

$$N_c(M) \approx \sum_{n=2}^M p_n^* = \sum_{n=2}^M \frac{1}{1 + D(n)}. \quad (8)$$

En figura 1 representamos (cuadrados) los valores de  $N_c(M)$  predichos por la ecuación 8, mostrando de nuevo un excelente acuerdo con los resultados numéricos (puntos negros).

Finalmente, cálculos previos apuntan que la distribución de las avalanchas  $P(s)$  es proporcional al porcentaje de números que tienen  $s$  divisores. Para contrastar esta conjetura, en la figura 3 (izquierda) hemos representado el histograma que describe la cantidad de números que tienen un determinado número de divisores, obtenido a partir de la computación de  $D(n)$  para  $M = 10^6$ . Como podemos observar, la cola del histograma sigue una ley de potencias con exponente  $\tau = 2.0$ . Esto es fácil de ver analíticamente: los números responsables de semejante cola potencial son aquellos capaces de dividir a muchos números del repositorio, que necesariamente tienen que ser números pequeños relativamente al tamaño del repositorio ( $n \ll M$ ). Un número pequeño  $n$  divide típicamente a  $D(n) \simeq \lfloor \frac{M}{n} \rfloor$ . ¿Cuántos ‘números pequeños’ tienen  $D(n)$  divisores? La respuesta es  $n, n+1, \dots, n+z$  donde

$$\left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{M}{n-1} \right\rfloor = \dots = \left\lfloor \frac{M}{n-z} \right\rfloor. \quad (9)$$

El máximo valor de  $z$  cumple  $\frac{M}{n-z} - \frac{M}{n} = 1$ , que es  $z \simeq n^2/M$ . La frecuencia de  $D(n)$  es así  $fr(D(n)) = n^2/M$ , pero puesto que  $s \equiv D(n) \simeq M/n$ , tenemos que  $fr(s) \sim Ms^{-2}$ , y finalmente con normalización llegamos a:  $P(s) \sim s^{-2}$ .

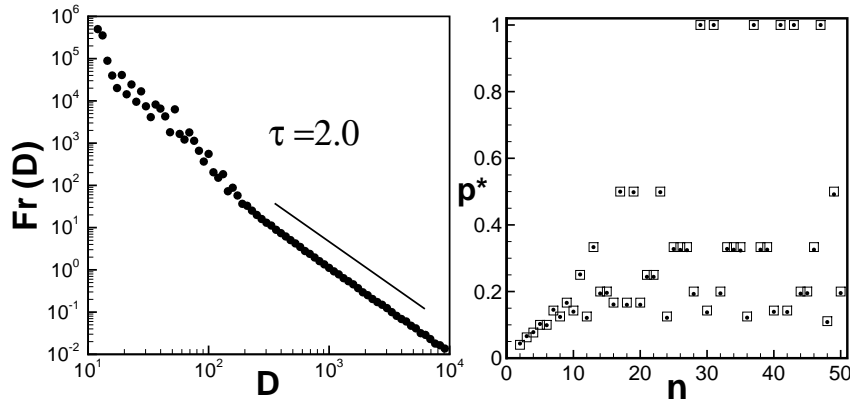


Figura 3: Izquierda: Histograma de la cantidad de números en  $[2, 10^6]$  que tienen  $D$  divisores. El histograma ha sido suavizado mediante bineo para reducir la dispersión. El ajuste de los datos nos proporciona un ley de potencias  $P(D) \sim D^{-\tau}$  con  $\tau = 2.01 \pm 0.01$ , en buen acuerdo con  $P(s)$  (ver texto). Derecha: (puntos negros) Probabilidad estacionaria de supervivencia de un número  $n$  en un conjunto primitivo para un repositorio de tamaño  $M = 50$ , obtenida a partir de simulaciones de Monte Carlo del modelo sobre  $10^6$  pasos de tiempo, donde hemos descargado un transitorio preliminar de  $10^4$  pasos. (cuadrados) Predicción teórica de esta probabilidad de supervivencia de acuerdo con la ecuación 7.

#### 4. Retroalimentando la teoría de números y los sistemas complejos

Volviendo a la definición de SOC dada por Flyvbjerg, ¿quién hace de *medio* en el modelo de división? Tenemos a los números, pero ¿qué "superficie" los sustenta? Observemos que el proceso puede entenderse como embebido en una red, donde los nodos son los números, y dos números se enlazan si son divisibles entre sí. Un conjunto primitivo constituye un subconjunto de nodos de esta red, que se modifica dinámicamente de acuerdo con las reglas del modelo. El grado, la conectividad, del nodo  $n$  es  $D(n)$ , y en consecuencia la distribución de conectividad en la red es  $P(k) \sim k^{-2}$ , una red libre de escala. Aquí el comportamiento SOC, que emerge debido a las propiedades de divisibilidad entre números, puede entenderse como una suerte de proceso de anti-percolación que ocurre en este red libre de escala. Observemos entonces que el modelo de división es un caso particular de una clase de modelos críticos autoorganizados: una red con  $M$  nodos con dos posibles estados (*on/off*) donde corre la siguiente dinámica:

(R1) Perturbación: a cada paso de tiempo un nodo en estado *off* se escoge de manera aleatoria y pasa a estado *on*.

(R2) Disipación: los  $s$  vecinos del nodo perturbado que estaban en estado *on* en ese instante cambian a *off*, y decimos que se ha producido una avalancha instantánea de tamaño  $s$ .  $N(t)$  mide el número de nodos en estado *on* en función del tiempo.

Su evolución seguirá una ecuación de campo medio que generaliza a la ecuación 3:

$$N(t+1) = N(t) + 1 - \frac{\langle k \rangle}{M} N(t), \quad (10)$$

donde  $\langle k \rangle$  es la conectividad media de la red. En cada caso  $N(t)$  se autoorganizará alrededor de un valor  $N_c(M)$ . Con una red regular o aleatoria, las fluctuaciones o las avalanchas, alrededor de  $N_c(M)$  seguirán una distribución Binomial y de Poisson respectivamente. Sin embargo, cuando la red sea libre de escala con distribución  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , las fluctuaciones seguirán una distribución de ley de potencias  $P(s) \sim s^{-\tau}$  con  $\tau = \gamma$ , y la dinámica será SOC. En este sentido, podemos decir que la topología libre de escala induce criticalidad.

## 5. Anímate a explorar por tu cuenta

Quedan muchas cuestiones abiertas, como: ¿Cuál es la relación entre la topología específica de una red libre de escala y el espectro de potencias de la dinámica temporal del sistema? ¿Qué efecto puede tener el grado de asortatividad o disasortividad de las redes libres de escala en el modelo? ¿Qué sistemas físicos podrían mostrar este comportamiento? Podemos profundizar a partir de este sencillo modelo más en ese puente entre teoría de números y física estadística. Por ejemplo, podemos generalizar el modelo usando conjuntos emparentados con los conjuntos primitivos, como son los conjuntos  $k$ -primitivos [23], donde cada número divide o es dividido a lo sumo por otros  $k$  del conjunto ( $k$  actuaría como un umbral), hasta conjuntos primitivos relativos [24] y conjuntos primitivos cruzados [19] que permitirían contruir modelos SOC acoplados. Desde el punto de vista computacional [25], las propiedades del modelo como generador de conjuntos primitivos podrían ser estudiadas. Especialmente la tarea de determinar el tamaño máximo de un  $k$ -conjunto primitivo [19, 23], que podría ser atacado a través del modelo de división usando la teoría de valores extremos.

Por último, siguiendo con la cuestión del modelo de SOC más simple posible, incluso la máquina de pinball parece "demasiado complicada" [11] si la comparamos con nuestro modelo de división. Difícilmente se nos puede ocurrir un modelo más sencillo que el que hemos expuesto, pero no vamos a asegurar que este es el más simple de los posibles, más bien esperamos que sirva como acicate para seguir motivando esta cuestión que se mantiene abierta.

## 6. Referencias

- [1] R. Guy, *Unsolved problems in number theory*. Springer, 2004, vol. 1.
- [2] M. R. Watkins, number theory and physics archive. [Online]: <http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics.htm>
- [3] D. P. Ruelle, *Azar y caos*. Alianza Editorial, Madrid, 1993.
- [4] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. Newman, *The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group*. Oxford University Press, Inc., 1992.
- [5] H. Jensen, *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological systems*. Cambridge university press, 1998, vol. 10.
- [6] D. Sornette, *Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization, and disorder: concepts and tools*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] D. Turcotte, "Self-organized criticality," *Reports on progress in physics*, vol. 62, no. 10, p. 1377, 1999.
- [8] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality: An explanation of the  $1/f$  noise," *Physical Review Letters*, vol. 59, no. 4, pp. 381–384, 1987.
- [9] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld *et al.*, "Self-organized criticality," *Physical review A*, vol. 38, no. 1, pp. 364–374, 1988.
- [10] H. Flyvbjerg, "Simplest possible self-organized critical system," *Physical review letters*, vol. 76, no. 6, pp. 940–943, 1996.
- [11] —, "Self-organized critical pinball machine," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 340, no. 4, pp. 552–558, 2004.
- [12] M. Newman, "The structure and function of complex networks," *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [13] R. Albert and A. Barabási, "Statistical mechanics of complex networks," *Reviews of modern physics*, vol. 74, no. 1, p. 47, 2002.
- [14] K. Goh, D. Lee, B. Kahng, and D. Kim, "Sandpile on scale-free networks," *Physical review letters*, vol. 91, no. 14, p. 148701, 2003.
- [15] P. Fronczak, A. Fronczak, and J. Holyst, "Self-organized criticality and coevolution of network structure and dynamics," *PHYSICAL REVIEW-SERIES E*, vol. 73, no. 4, p. 46117, 2006.

- [16] G. Bianconi and M. Marsili, "Clogging and self-organized criticality in complex networks," *Physical Review E*, vol. 70, no. 3, p. 035105, 2004.
- [17] D. Garlaschelli, A. Capocci, and G. Caldarelli, "Self-organized network evolution coupled to extremal dynamics," *Nature Physics*, vol. 3, no. 11, pp. 813–817, 2007.
- [18] P. Erdos, "Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other," *J. London Math. Soc.*, vol. 10, pp. 126–128, 1935.
- [19] R. Ahlswede and L. H. Khachatrian, "The mathematics of paul erdős, vol. i algorithms and combinatorics," 1997.
- [20] M. Schroeder, *Number theory in science and communication: With applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity*. Springer, 2008, vol. 7.
- [21] B. Luque, L. Lacasa, and O. Miramontes, "Phase transition in a stochastic prime-number generator," *Physical Review E*, vol. 76, no. 1, p. 010103, 2007.
- [22] L. Lacasa, B. Luque, and O. Miramontes, "Phase transition and computational complexity in a stochastic prime number generator," *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 2, p. 023009, 2008.
- [23] S. Vijay, 2006, integers: Electronic journal of combinatorial number theory, 6, A01.
- [24] M. Nathanson, 2007, integers: Electronic journal of combinatorial number theory, 6, A01.
- [25] A. Percus, G. Istrate, and C. Moore, *Computational complexity and statistical physics*. Oxford University Press, USA, 2006.