

Fronteras de la Física en el siglo XXI

Octavio Miramontes y Karen Volke (Editores)

CopIt-arXives
Publishing Open Access
with an Open Mind
2013

Este libro contiene material protegido por Leyes de Autor

Todos los derechos reservados ©2013
Publicado electrónicamente en México
Publicado primeramente en 2013 por Copit-arXives

Miramontes, Octavio, Volke, Karen (editores)

Fronteras de la Física en el Siglo XXI/

por Octavio Miramontes y Karen Volke (editores)

Incluye bibliografía e índice

Copit-arXives, México DF 2013

ISBN: 978-1-938128-03-5 ebook

1. Física moderna. 2. Cosmología 3. Astrofísica 4. Física de altas energías
5. Información 3. Estructura de la materia 4. Física no lineal
6. Sistemas Complejos 7. Física estadística 8. Física médica
9. Materiales 10. Nanociencias 11. Óptica y micromanipulación
11. Física y sociedad 12. Econofísica 13. Fenómenos colectivos

ISBN: 978-1-938128-03-5 ebook

Derechos y permisos

Todo el contenido de este libro es propiedad intelectual de sus autores quienes, sin embargo, otorgan permiso al lector para copiar, distribuir e imprimir sus textos libremente, siempre y cuando se cumpla con lo siguiente: El material no debe ser modificado ni alterado, la fuente debe ser citada siempre y los derechos intelectuales deben ser atribuidos a sus respectivos autores, estrictamente prohibido su uso con fines comerciales.

Producido con software libre incluyendo \LaTeX y Linux. Compuesto en Adobe Palatino. Indexado en el catálogo de publicaciones electrónicas de la Universidad Nacional Autónoma de México y en Google Books.

Este libro ha pasado por revisión de pares

CopIt-arXives

Cd. de México - Cuernavaca - Madrid - Curitiba
Viçosa - Washington DC - Sheffield

Con el apoyo de
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Instituto de Física

Agradecimientos

Todas las figuras e imágenes son cortesía de www.wikimedia.org o bien de los autores, al menos que se señale lo contrario explícitamente.

Imágen de portada: ESO/José Francisco Salgado ©. Diseño de portada: Dulce Aguilar.

Los editores agradecen profundamente a las siguientes personas por su comprensión y apoyo decidido. Manuel Torres Labansat, Eugenio Ley Koo, Ignacio Garzón, Pedro Miramontes, Luis Felipe Rodríguez, Gustavo Martínez Mekler, Carlos Mejía Monasterio, Luis Mochán, Alberto Güijosa, Fernando Ramírez, Alejandro Raga, Luis Urrutia, Rocio Jáuregui, Shahen Hacyan, José Ignacio Jiménez y Eliane Ceccon. Gracias especiales para Sven Siegmund (Leipzig) por proporcionar el formato `proceedings.cls` que se ha usado en el estilo de este libro.

Los editores agradecen el apoyo de DGAPA-UNAM proyecto PAPIIT IN-101712.

Índice general

Autores	IX
Prólogo	XIII
Introducción	XV
Origen, Evolución y Estructura de la Materia	1
Vladimir Avila-Reese Un Universo en evolución	3
1. Preámbulo	3
2. El Universo homogéneo	4
2.1. Dinámica y geometría	4
2.2. Historia térmica	7
2.3. Inflación	10
2.4. Radiación Cósmica de Fondo en Microondas (RCFM)	10
3. El Universo inhomogéneo: formación de estructuras	12
3.1. Evolución lineal de las perturbaciones: Materia oscura exótica (MO). . .	13
3.2. Evolución no lineal de las perturbaciones: el Universo en computadora	15
4. Éxitos y retos a futuro	17
4.1. Mediciones de los parámetros cosmológicos	19
4.2. Consistencia y predicciones	20
4.3. Retos a mediano plazo	21
5. Perspectivas y Epílogo	25
6. Algunas lecturas recomendadas	27
Genaro Toledo La materia y sus nuevas estructuras	29
1. Introducción	29
2. Atomismo	30
3. La estructura del átomo y la estructura nuclear	30
4. Comportamiento de los componentes del átomo	32
5. El surgimiento de la idea de partones	33

6.	La interacción fuerte como teoría de norma	36
7.	Hiperones e Hipernúcleos	38
8.	Estados exóticos	40
9.	Materia en condiciones extremas	41
10.	Perspectivas	43
11.	Referencias	44
Myriam Mondragón Física de altas energías		45
1.	Introducción	45
2.	Altas energías	46
3.	El Modelo Estándar de las partículas elementales	47
	Renormalizabilidad	49
	Interacciones fundamentales	50
	Materia y anti-materia	55
	Bosón de Higgs y renormalizabilidad	55
	Materia oscura	59
4.	Misterios sin resolver	61
5.	Más Allá del Modelo Estándar	62
	Más simetría	62
6.	Fronteras de la física de altas energías	69
	Frontera de la Energía	69
	Frontera de la Intensidad	70
	Frontera del Cosmos	70
7.	Referencias	71
Miguel Alcubierre Agujeros Negros		75
1.	Introducción	75
2.	Gravitación y geometría	76
3.	Relatividad especial	77
4.	Relatividad general	80
5.	Curvatura y las ecuaciones de campo de Einstein	81
6.	La solución de Schwarzschild y los agujeros negros	84
7.	Agujeros negros generales	88
8.	Agujeros negros astrofísicos y colapso gravitacional	89
9.	Como ver lo invisible: las ondas gravitacionales	91
10.	¿Agujeros negros en Suiza?	93
11.	Referencias	94
Saúl Ramos-Sánchez El universo de las supercuerdas		95
1.	Gestación de revoluciones científicas	95
2.	El despertar de las supercuerdas	96

3.	Más que sólo cuerdas	101
4.	Nuestro universo hecho de cuerdas	105
5.	Dualidad holográfica	107
6.	Las supercuerdas en México y su futuro	110
7.	Referencias	112
El Mundo de lo Pequeño		115
Carlos Villarreal Fuerzas de Casimir		117
1.	Origen de las fuerzas de Casimir	118
2.	Fuerza de Casimir entre placas conductoras ideales	120
3.	Fuerzas de Casimir en cavidades conductoras.	122
4.	Pistón de Casimir	125
5.	Fuerzas de Casimir en materiales dispersivos.	126
6.	Fuerzas de Casimir electrónicas y acústicas.	129
7.	Efecto Casimir en sistemas no inerciales.	130
8.	Perspectivas.	132
9.	Algunas lecturas recomendadas	132
10.	Referencias	132
Karen Volke La luz sobre el micromundo: Un laboratorio en un chip		135
1.	De la miniaturización tecnológica al Lab-en-un-Chip	135
2.	La micromanipulación con luz	139
3.	Retos y avances en las técnicas de detección	148
4.	Investigación multidisciplinaria y sistemas integrados	155
5.	Referencias	158
Cecilia Noguez Física a la escala nanométrica		161
1.	Introducción	161
2.	¿Qué es nanociencia? ¿Qué es nanotecnología?	163
3.	Plasmónica	166
4.	Aplicaciones de la plasmónica: Estado actual y perspectivas	169
5.	Cuando el futuro de la nanotecnología nos alcance	175
6.	Referencias	175
Rosario Paredes Materia ultrafría		177
1.	Introducción	177
2.	La Física Estadística de la Condensación de Bose	178
3.	Condensación de Bose-Einstein en un laboratorio	179
	Enfriamiento láser	180
	Enfriamiento por evaporación	181
4.	Gas degenerado de Fermi en un laboratorio	182

5.	Gases ultrafríos con interacción	183
6.	Átomos fríos: Un laboratorio cuántico	186
	Condensados de Bose en redes ópticas	187
	Cruce BEC-BCS en un gas de fermiones interactuantes	189
7.	El reto de una computadora cuántica	192
8.	Referencias	193
Carlos Pineda Información cuántica		195
1.	Historia y algunos prerequisites	195
2.	Desarrollo actual y perspectivas	204
3.	Desarrollo a futuro	206
4.	Referencias	207
La Materia Compleja		209
Octavio Miramontes Evolución y materia compleja		211
1.	Introducción	211
2.	Origen y evolución de la materia	212
3.	Emergencia e interdisciplina	213
4.	La física de la emergencia	214
5.	Desequilibrio, fluctuaciones y autoorganización	215
6.	Sin tregua: la evolución de la materia es inevitable	219
	La materia compleja y el cómputo emergente	222
7.	La materia compleja viva	224
8.	El futuro	226
9.	Referencias	227
Lucas Lacasa Redes, Interacciones, Emergencia		233
1.	Introducción	233
2.	Redes complejas: definiciones y ejemplos	234
	Los inicios	234
	Ejemplos de redes complejas	236
	Medidas clave	239
3.	Estructura y dinámica: propiedades	242
	Redes Small-World: el mundo es un pañuelo	242
	El modelo de Watts-Strogatz	243
	Redes libres de escala	244
	Asortatividad: un problema de máxima entropía	246
4.	Aplicaciones	247
	Fenómenos de propagación: epidemias, apagones y extinciones	247
	Robustez frente a ataques: el caso de una red trófica	248

	Navegación en red y algoritmos de búsqueda	249
5.	Perspectivas de futuro	250
6.	Referencias	251
Bartolo Luque	Números críticos autoorganizados	253
1.	Introducción	253
2.	Criticalidad autoorganizada	254
	Pilas de arena	255
3.	Pilas de números: conjuntos primitivos	257
	Cuentas	260
4.	Retroalimentando la teoría de números y los sistemas complejos	263
5.	Anímate a explorar por tu cuenta	264
6.	Referencias	265
Denis Boyer	Procesos difusivos: de moléculas a animales	267
1.	Introducción	267
2.	Difusión simple	268
	Caminatas aleatorias y Teorema Límite Central	268
	Propiedades de primer paso	271
	Número de sitios distintos visitados y procesos de aniquilación	273
3.	Movilidad de organismos complejos: perspectivas presentes y futuras	275
	Más allá de la difusión simple	275
	Biología y modelos basados en agentes	281
4.	Conclusiones	285
5.	Referencias	286
Francisco J. Sevilla	Movilidad y agentes	289
1.	Introducción	289
2.	Fenómenos colectivos: los efectos de interacción entre agentes	292
3.	Sistemas de agentes brownianos autopropulsados	295
	Autopropulsión	296
	Transiciones de fase en un sistema de partículas autopropulsadas.	297
4.	Direcciones futuras	300
5.	Referencias	302
	Física Interdisciplinaria	307
Gerardo García Naumis	Física y Sociedad	309
1.	Introducción	309
2.	Econofísica	313
	Reparto de riqueza en un mundo de recursos limitados	314
	Termodinámica de la riqueza	318

3.	Sociofísica	318
	Transiciones de tipo social	322
	Conflictos y formación de alianzas	327
4.	Análisis de las sociedades mediante leyes fundamentales de la física	333
	El gran balance de energía y entropía	334
	La civilización humana en el Universo	337
5.	El dilema del futuro	338
6.	Referencias	338
Ana M. Contreras y Hernán Larralde	Econofísica	341
1.	¿De qué se trata la Economía?	341
2.	Los puentes entre la Física y la Economía	345
3.	¿Qué estudia la Econofísica?	347
	Finanzas cuantitativas	347
	Teoría de juegos y el juego de minorías	351
	¡Y mucho más!	353
4.	Referencias	355
Mercedes Rodríguez	Física Médica	359
1.	Resumen	359
2.	Introducción	360
3.	¿Qué es la física médica?	360
	La física médica, ¿profesión o disciplina científica?	361
	Tres descubrimientos clave	361
4.	Imagenología médica	362
	Formación de imágenes planas con rayos X	363
	Tomografía Computarizada (CT)	364
5.	Radioterapia	369
	Teleterapia	369
	Radioterapia de Intensidad Modulada (IMRT)	370
	Hadronterapia	371
6.	El presente y futuro de la física médica en México	373
	Infraestructura para el tratamiento de cáncer en México	373
	Estadísticas del Instituto Nacional de Cancerología (INCan)	373
	Los físicos médicos clínicos y la investigación	374
	Investigación en física médica	375
	El futuro del PET en México – un ejemplo a seguir	377
7.	Tendencias globales	378
	Tratamiento personalizado del cáncer	378
	Explotando el potencial de la antimateria	381
8.	Referencias	381

Gonzalo González	Perspectivas sobre los nuevos materiales del siglo XXI	385
1.	Introducción	385
2.	Materiales para la captura de CO ₂	385
	Uso de los cerámicos alcalinos para la captura de CO ₂	387
3.	Materiales para su uso en las energías alternativas	388
4.	Nanocompuestos <i>in situ</i> en procesos de solidificación rápida	391
5.	Materiales nanoestructurados en base a SPD	394
6.	Reflexiones finales	397
7.	Referencias	399
Héctor Zenil	El Universo Algorítmico	403
1.	Computación digital y el concepto de algoritmo	403
	Máquinas de Turing y universalidad	404
	El mundo de los programas simples	405
	Autómatas celulares	407
2.	¿La naturaleza algorítmica del mundo?	409
	Probabilidad algorítmica y la distribución universal	410
	Complejidad de Kolmogorov	411
3.	¿Cuán diferente es nuestro mundo a un mundo digital?	411
	Información y teorías de gravedad cuántica	412
	El Principio Holográfico	413
	A manera de conclusión	414
4.	Referencias	415

Autores

Miguel Alcubierre. Investigador Titular del Instituto de Ciencias Nucleares de la Universidad Nacional Autónoma de México. Es un especialista en temas de relatividad numérica, gravitación, agujeros negros y cosmología.

Vladimir Ávila-Reese. Investigador Titular del Instituto de Astronomía de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sus intereses incluyen la formación y evolución de galaxias en el contexto cosmológico, los problemas de la materia y energía oscuras y aplicaciones cosmológicas de los estallidos de Rayos Gamma.

Denis Boyer. Investigador Titular del Departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México e Investigador asociado al Centro de Ciencias de la Complejidad de dicha universidad. Es especialista en temas como la formación de patrones, problemas de movilidad y búsqueda, dinámica social y varios otros tópicos de la física estadística y de los sistemas complejos.

Germinal Cocho Gil. Investigador Emérito del Departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México, Investigador-Fundador asociado al Centro de Ciencias de la Complejidad de dicha universidad y profesor de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Sus intereses científicos son muy diversos e incluyen la medicina, la física de altas energías, los sistemas complejos, las relaciones entre ciencia y sociedad entre otros.

Ana María Contreras. Es Investigadora Posdoctoral en el Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM. Sus áreas de interés incluyen la econofísica, óptica cuántica y fenómenos no lineales.

Gerardo García Naumis. Investigador Titular del Departamento de Física Química del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se interesa por problemas de la física estadística de sistemas desordenados y quasiperiódicos, sistemas complejos, biofísica, dinámica social, así como de física del estado sólido, fluidos y nanotecnología.

Gonzalo González. Investigador Titular del Instituto de Investigación en Materiales de la Universidad Nacional Autónoma de México. Es un especialista en la investigación de materiales novedosos que incluye la deformación plástica de compuestos metálicos. Es también experto en tópicos de la microscopía electrónica para la caracterización de materiales.

Lucas Lacasa Saiz de Arce. Profesor del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la ETSI-

Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid en España. Es un especialista en diversos temas de los sistemas complejos y la física estadística fuera de equilibrio que incluyen la dinámica de redes complejas, teoría de números y series de tiempo.

Hernán Larralde. Es Investigador Titular del Instituto de Ciencias Físicas de la UNAM. Sus áreas de interés incluyen los fenómenos no lineales, procesos estocásticos, sistemas complejos, física estadística y sistemas fuera de equilibrio.

Bartolome Luque Serrano. Profesor del Departamento de Matemáticas Aplicadas de la ETSI-Aeronáuticos de la Universidad Politécnica de Madrid en España. Es un especialista en diversos temas de la física de los sistemas complejos y la física estadística que incluyen la dinámica de redes booleanas y complejas, teoría de números, series de tiempo. Adicionalmente se interesa por problemas de astrobiología y complejidad biológica. Es un reconocido divulgador de la ciencia.

Octavio Miramontes Vidal. Investigador Titular del Departamento de Sistemas Complejos del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México e Investigador asociado al Centro de Ciencias de la Complejidad de dicha universidad. Sus áreas de interés incluyen la dinámica de sistemas complejos, la física no lineal, problemas de movilidad y búsqueda, dinámica social y varios otros tópicos de complejidad biológica.

Myriam Mondragón. Investigadora Titular del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se interesa por problemas de la física de altas energías y teoría del campo, materia oscura y cosmología.

Cecilia Noguez. Investigadora Titular del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Es experta en diversos aspectos de propiedades ópticas de nanopartículas, propiedades ópticas y electrónicas de superficies y efecto Casimir en la escala nanométrica.

Rosario Paredes. Investigadora Titular del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Se interesa por el estudio de condensados de Bose-Einstein y la dinámica de gases degenerados de Fermi con interacción.

Carlos Pineda. Investigador del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Estudia problemas relacionados con la computación cuántica, el caos, matrices aleatorias y otros problemas de la física cuántica.

Saúl Ramos. Investigador del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sus intereses incluyen la cosmología, la fenomenología de cuerdas y la física más allá del modelo estándar.

Mercedes Rodríguez. Investigadora Titular del Departamento de Física Experimental del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sus áreas de interés incluyen la dosimetría termoluminiscente y sus aplicaciones, así como la simulación Monte Carlo del transporte de radiación, entre otros problemas de la física médica.

Francisco J. Sevilla. Investigador del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de

la Universidad Nacional Autónoma de México. Sus intereses incluyen la física de fenómenos fuera de equilibrio, los condensados Bose-Einstein y la difusión anómala.

Genaro Toledo. Investigador del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sus intereses incluyen la física de estados resonantes y la materia en condiciones extremas.

Carlos Villarreal. Investigador Titular del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México e Investigador asociado al Centro de Ciencias de la Complejidad de dicha universidad. Sus áreas de interés incluyen la dinámica de sistemas complejos, la física no lineal, la física cuántica, el efecto Casimir, la epidemiología, redes complejas y otros tópicos de la física biológica.

Karen Volke. Investigadora Titular del Departamento de Física Teórica del Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. Sus intereses académicos incluyen el estudio de haces de luz estructurados y la micromanipulación de materia con luz.

Héctor Zenil. Investigador Asociado del Departamento de Ciencias de la Computación de la Universidad de Sheffield en el Reino Unido. Es un especialista en temas de aleatoriedad de algoritmos finitos, computo natural y emergente, teoría de la complejidad algorítmica y conducta de programas de cómputo simple.

Prólogo

Las formas de organización social bien conocidas a lo largo del siglo XX han perdido vigencia. El “socialismo real” se ha colapsado y la formación capitalista actual esta sumida en una crisis profunda y generalizada. La gente común esta confundida, domina la astrología, el misticismo y se fortalecen los pensamientos tradicionales de “familia”, “raza” y “religión”. Aunque la dinámica social en Sudamérica da pie al optimismo, en general no se ve claro el camino a seguir. Predomina el escepticismo y hasta el rechazo hacia la ciencia. Teniendo en cuenta lo anterior, vale la pena recordar lo sucedido de modo similar en otras épocas de la historia y como las síntesis científicas fueron factores importantes en la resolución de otras crisis.

Recordemos la transición, asociada a los movimientos románticos en la Europa después de la Revolución Francesa, alrededor de 1800. Como en la época actual, tuvo lugar una crisis de la razón y se dudaba de la ilustración y del progreso. En el marco de la física se dio la transición de la dinámica newtoniana de pocos cuerpos a la termodinámica en que, a pesar de tenerse un número enorme de cuerpos, emergen variables colectivas como la temperatura y la presión que obedecen ecuaciones sencillas universales, como la ecuación de los gases perfectos. Esto implicó la importancia de dinámicas probabilísticas en lo local; pero deterministas en lo colectivo. Posteriormente se tuvo síntesis como la de la electricidad, el magnetismo y la óptica, con Maxwell; y la mecánica estadística con Gibbs y Boltzmann. Con la mecánica estadística se unifican la mecánica y la termodinámica.

La historia de la física en el siglo XX es bien conocida con sus momentos cúspide en la mecánica cuántica y la relatividad. En gran medida la física en los inicios del siglo XXI es parte de la tradición *Solvay*. Pero en el momento actual, ha adquirido gran importancia el estudio de la dinámica de los sistemas complejos, sistemas compuestos de elementos e interacciones heterogéneas, en que existen conflictos dinámicos y no es posible optimizar al mismo tiempo las diferentes variables, dando lugar a soluciones cuasiequivalentes.

Para una mejor comprensión de aspectos fundamentales de nuestro tiempo de crisis es necesario que la física mire hacia otras ciencias y al conocimiento del “hombre común”, de modo que se pueda afirmar que en la ciencia actual son importantes las interfases inteligentes entre disciplinas y la vida diaria. Para ello, destaca la importancia de la divulgación científica como “constructora de puentes”.

Otro aspecto de la ciencia actual es la búsqueda de los fundamentos de las disciplinas,

viendo hasta que punto las teorías científicas actuales no son fundamentales, sino que tienen un carácter emergente, como es el caso de la termodinámica. Físicos importantes, incluyendo premios Nobel, estudian el posible carácter emergente de la física cuántica y las teorías de norma de la física del micromundo, en la búsqueda de aspectos colectivos que impliquen síntesis como las que tuvieron lugar en el siglo XIX, con la mecánica estadística y el electromagnetismo, síntesis que impliquen puentes entre la física, la biología y las ciencias sociales y con la visión del mundo del "hombre común". Teniendo en cuenta lo anterior, nace este libro en que se presentan los avances de la física actual para que los universitarios de diversas disciplinas y niveles tengan elementos de juicio que les permitan interactuar con disciplinas más o menos vecinas.

Germinal Cocho Gil
México, D.F. 2013

Introducción

Varias razones han motivado la existencia de este libro. Comencemos por mencionar que la física deja el siglo XX y transita hacia otros horizontes donde los desafíos abiertos no son pocos y cuya naturaleza fundamental hace pensar en nuevas revoluciones científicas en ciernes. Luego, la *raison d'être* es la exploración colectiva de un gran número de ideas visionarias que habrán de inquietar las mentes de los jóvenes lectores a quienes este libro va especialmente destinado. Para este propósito, nos servimos de otra de las grandes contribuciones de la física de nuestros días: la WWW. El presente libro ha sido específicamente pensado para ser distribuido ampliamente y leído de manera abierta y gratuita por la internet. En un mundo donde la cultura, la información y la educación son cada vez más presas de la mercantilización y por ende, su acceso es cada vez más difícil y restrictivo, nos proponemos innovar.

Ciencia y tecnología se nutren mutuamente guiadas por el entorno histórico en el que se desenvuelven. Juntas empujan las fronteras de nuestro conocimiento sobre el universo y la naturaleza. A través de los capítulos del presente libro, se hace patente este proceso de retroalimentación entre ciencia básica y aplicada. En su imparable búsqueda para comprender, desde el origen, estructura y evolución del universo hasta los mecanismos que gobiernan la complejidad social, la física se vale de innumerables recursos intelectuales al mismo tiempo que los impulsa. Una guía infalible y prueba de los modelos teóricos más revolucionarios son los experimentos, que hoy en día han alcanzado grados de sofisticación en otros tiempos inimaginables. Tampoco debemos olvidar otra herramienta *experimental* imprescindible en la ciencia moderna: las simulaciones por computadora. Gracias a ellas, actualmente es posible, por ejemplo, reconstruir imágenes tridimensionales a partir de un conjunto de *rebanadas*, o anticipar lo que se puede esperar en un experimento antes de realizarlo, pero lo más sorprendente, es que nos permiten también recrear escenarios a los que de otro modo no podríamos acceder, porque aún no existíamos, como en los orígenes del universo.

El libro se divide en cuatro partes, cada una de ellas agrupando varios capítulos relacionados con un objetivo común: dar cuenta de la situación actual en diferentes áreas de la física contemporánea, así como una perspectiva de los correspondientes retos y problemas abiertos. Este libro pretende orientar, y ante todo, motivar al lector, para que identifique, quizás, aquellas áreas que más llaman su atención y que posiblemente formarán parte de

su futuro en la ciencia.

En la primera parte, dedicada al "Origen, evolución y estructura de la materia", se revisan conceptos que van desde los más elementales constituyentes de la materia hasta el estudio del universo a escalas astronómicas, incluyendo su evolución y algunos de sus componentes más enigmáticos. Específicamente, en el capítulo "Un universo en evolución", Vladimir Ávila hace un recorrido muy completo de la historia del universo y de como se fue construyendo nuestro conocimiento de ella, incluyendo los últimos avances y los nuevos retos del modelo cosmológico más aceptado. Nos describe como es que, gracias a observaciones astronómicas con mayor alcance y precisión, la cosmología se ha convertido en una rama de la ciencia con bases muy sólidas.

Pero la evolución del universo no podría comprenderse sin entender a la par lo que lo constituye, tema que nos lleva a los capítulos "La materia y sus nuevas estructuras" de Genaro Toledo y "Física de altas energías" de Myriam Mondragón. Ambos tratan de manera complementaria la constitución de la materia hasta su nivel más elemental, y de cómo se conecta esto con el origen del universo. Genaro Toledo describe el camino que siguió la física desde la teoría atómica hasta el descubrimiento de los quarks y los leptones que, junto con los mediadores de sus interacciones, son los constituyentes más elementales de la materia. Poco a poco se ha ido comprobando la existencia de tales componentes subatómicos, gracias a los experimentos en los grandes colisionadores realizados a muy altas energías. Myriam Mondragón, por su parte, nos describe con detalle el Modelo Estándar, que nos da las claves para entender tanto la constitución de la materia y la anti-materia, como las interacciones fundamentales en la física, que permiten que los quarks formen hadrones, que los protones y neutrones formen los núcleos atómicos y que los núcleos y electrones formen átomos. Adicionalmente, en ambos capítulos se pone de manifiesto toda una serie de predicciones cuya investigación e intentos por corroborar, de un modo u otro, continuarán revolucionando la física del nuevo siglo, como por ejemplo, el elusivo bosón de Higgs, o los misterios de la materia y la energía oscura.

Por otro lado, la evolución del universo, en una etapa posterior, dio lugar a los enigmáticos "Agujeros negros", cuyos misterios explica Miguel Alcubierre en el capítulo bajo el mismo nombre. La relatividad especial y la general se presentan en forma clara como los fundamentos que permiten entender su formación, su existencia y los tipos posibles de agujeros negros, desmoronando de paso algunos mitos asociados a estos objetos astronómicos. Su detección indirecta es también un interesante aspecto que se discute en este capítulo, junto con su vínculo con las esquivas ondas gravitacionales, que permanecen como un tema abierto.

El último capítulo de esta sección lo presenta Saul Ramos bajo el título "El universo de las supercuerdas". Desde siempre, los físicos nos hemos acostumbrado a pensar que las teorías físicas son consistentes unas con otras en el sentido de que ninguna formulación teórica exitosa debe contradecir a otra igualmente exitosa. Llevado a su extremo, este pensamiento diría que todas las fuerza y las partículas del universo deberían entenderse a partir de una única teoría, la "teoría del todo". La teoría de cuerdas es un marco teórico en

esta dirección, donde se intenta reconciliar a la relatividad general con la mecánica cuántica. Cuando a la teoría de cuerdas se adicionan otras partículas y la supersimetría, se tiene la llamada teoría generalizada de las supercuerdas. Esta rama de la física es un terreno activo de investigación y como toda teoría nueva, tiene un buen número de seguidores y de críticos, quedando entonces como uno de los mayores desafíos para la física de ahora y el futuro inmediato.

La segunda sección del libro está dedicada a el “Mundo de lo pequeño”; pero a un nivel más cercano a nuestra experiencia diaria, al menos al nivel de laboratorio. Es decir, no se trata ya de los constituyentes más elementales de la materia, sino de sistemas meso, micro y nanoscópicos, constituidos por un conjunto de átomos, y de la física que ocurre a estas escalas. Es bien sabido que a escalas pequeñas surgen algunas interacciones de carácter puramente cuántico, que no tienen analogía en el terreno clásico, es por lo tanto una frontera de fenómenos muy especiales y sorprendentes. Tal es el caso de las “Fuerzas de Casimir”, indetectables a escalas macroscópicas, que tienen su particular origen en la llamada energía de punto cero del vacío cuántico, como explica con bastante detalle Carlos Villarreal en su capítulo sobre este tema. Las fuerzas de Casimir dependen de la forma y tamaño de los objetos, y para que se manifiesten, no es necesario que exista un vacío en el sentido real. Aquí, como explica Villarreal, el vacío cuántico se entiende más bien como la ausencia de un campo de magnitud finita entre los objetos que se atraen. Más aún, este concepto se ha extendido para considerar fluctuaciones de otro tipo de campos confinados, como campos acústicos. Existen varios problemas abiertos en este tema, entre ellos, la existencia de fuerzas de Casimir repulsivas, que es aún motivo de debate, la influencia de estas interacciones en el diseño y funcionamiento de micro y nanodispositivos, etcétera.

En el capítulo “La luz sobre el micromundo: un laboratorio en un chip”, Karen Volke revisa el papel de la óptica en la exploración y manipulación de objetos a escalas meso y microscópica, encaminado al desarrollo de los sistemas integrados conocidos como *lab-on-a-chip*. Aquí se describen desde algunas técnicas elementales de microfabricación, una gran variedad de trampas ópticas con distintas funcionalidades y diferentes métodos de microscopía óptica de superresolución, hasta el reto de integrar todos estos elementos en dispositivos capaces de llevar a cabo diferentes tipos de análisis, pero con el tamaño de un chip miniatura. Para ello es necesario combinar la experiencia de científicos de distintas disciplinas, lo que abre nuevos retos a la investigación multidisciplinaria. Si se continua reduciendo la escala espacial, los principios de la física clásica ceden terreno a las descripciones cuánticas; así como los efectos de superficie comienzan a predominar sobre los de volumen. Las propiedades de la materia cuando está formada por un número pequeño y cuantificable de átomos pueden cambiar radicalmente dependiendo de este número y de la forma en que se dispongan. De todo esto nos da cuenta Cecilia Noguez en su capítulo “Física a escala nanométrica”. Aquí se hace la distinción entre la nanociencia y la nanotecnología y se abordan los avances y retos de cada una, así como de sus aplicaciones. Entre éstas se incluye la plasmónica, que involucra el diseño de nanopartículas para la generación de plasmones de superficie localizados, que es una de las aplicaciones con mayor

potencial en la actualidad, junto con la emergente nanotecnología quiral. También en este caso, la investigación multidisciplinaria encuentra un campo fértil de desarrollo y una gran cantidad de problemas abiertos, esperando por las futuras generaciones.

¿Y qué sucede si tenemos una colección cuantificable de átomos, pero no en la fase sólida, sino líquida o gaseosa, o más aún, en nuevos estados de la materia? Rosario Paredes da respuesta a esta pregunta en el capítulo "Materia ultrafría". Estos fluidos son completamente cuánticos, las propiedades ondulatorias de la materia se hacen patentes, pero su comportamiento colectivo está asimismo fuertemente determinado por sus propiedades estadísticas, si se trata de bosones o de fermiones. Aquí se revisan los principios teóricos y los experimentos que conducen a la formación de un condensado de Bose-Einstein, al igual que los que conducen a un gas degenerado de Fermi. Ambos ocurren a temperaturas y densidades extremadamente bajas. El papel de las interacciones entre átomos son también tema de este capítulo, así como las excitantes posibilidades de realizar nuevos experimentos con estos sistemas, que permitan entender aspectos nuevos o aún oscuros de la mecánica cuántica. De hecho, una de las aplicaciones más relevantes que se vislumbra para estos sistemas de átomos fríos es en la joven área de "Información cuántica", que es descrita por Carlos Pineda. La intuición de nuestra experiencia cotidiana resulta totalmente ineficaz ante las consecuencias de la mecánica cuántica, y cuando esto se aplica en el contexto de la teoría de la información, surgen posibilidades sumamente interesantes para el desarrollo del cómputo y las comunicaciones, donde lo que queda por hacer supera ampliamente lo que hasta ahora se ha conseguido, que no es ni poco ni insignificante. La computadora cuántica es, pues, uno de los grandes retos de la física del nuevo siglo.

La tercera parte del libro está dedicada a "La materia compleja", es decir, sistemas compuestos por un conjunto de partes interconectadas, cuyas propiedades no pueden ser inferidas de las propiedades de sus partes individuales. En este contexto, es muy revelador contrastar los libros sobre física que, al mismo tiempo que revisan de manera global los avances de esta ciencia, intentan adelantarse a su tiempo al listar una serie de preguntas abiertas y sus posibles respuestas. De manera repetida se habló, visionariamente, en los inicios y mediados del siglo XX, sobre el papel que la física podría tener en el estudio de la materia viva. Si bien no fue el primero en hacerlo, Erwin Schrödinger, pilar de la física del siglo XX, condensó en su clásico *¿Qué es la vida?* una opinión muy completa sobre una visión física de la vida. Al preguntarse ¿viola la vida las leyes de la física? ¿Faltan aún leyes en la física, precisamente las necesarias para describir la vida? ¿Qué es lo característicamente vivo? Schrödinger hizo uno de los primeros intentos de acercar el concepto de orden termodinámico al de complejidad biológica. Fue en los años sesenta del siglo XX, cuando se desarrolló el concepto de estructuras disipativas en el contexto de la termodinámica fuera del equilibrio creándose, con ello, los fundamentos para la investigación de los procesos autoorganizados en sistemas complejos, la *física de la emergencia*, como lo llama Octavio Miramontes en su capítulo "Evolución y materia compleja". Es justamente en este capítulo que se hace un recorrido breve del origen evolutivo de la materia compleja viva y de los mecanismo físicos de la complejidad y la emergencia.

La emergencia y la autoorganización no serían posibles a no ser por la interacción de las partes constituyentes de los sistemas complejos, como lo explica Lucas Lacasa en su capítulo "Redes, interacciones, emergencia". Por ello, la dinámica de interacciones se ha convertido, en los primeros años del siglo XXI, en un tópico de extrema importancia para el estudio de la física de la complejidad y para ello se ha desarrollado un gran cuerpo teórico que estudia la dinámica y arquitectura de las *redes complejas*. Con ello se intenta explicar como la *arquitectura* formada por las interacciones, abre las puertas a la comprensión de los fenómenos colectivos (transiciones de fase, extinciones en cascada, etcétera) que aparecen en el seno de los sistemas complejos.

En la línea de lo anterior, Bartolo Luque discute un ejemplo singular en su capítulo "Números críticos autoorganizados". Las redes complejas tienen una serie de propiedades universales compartidas entre sí, independientemente del ejemplo particular del que se trate. Algunas tienen propiedades fractales y algunas presentan el fenómeno de "mundo pequeño". Los ejemplos van desde las redes complejas que se forman entre las moléculas de agua líquida y que le confieren propiedades únicas y muy especiales; hasta las redes neuronales en el cerebro pasando, desde luego, por las favoritas de los jóvenes del siglo XXI: las redes sociales tipo *Twitter* y *Facebook*. Luque nos presenta; sin embargo, una red muy especial, la red formada entre números enteros, y con ello nos transporta a una interesante discusión sobre las inesperadas relaciones entre la teoría de números en matemáticas y la física de los sistemas complejos.

Las redes complejas son relaciones entre elementos que interactúan y su representación gráfica es en forma de grafos estáticos. Sin embargo, el mundo de las interacciones incluye al de los elementos móviles y por ello, sus redes tienen conectividad local cambiante y los fenómenos que surgen de ello no son simples. El estudio de la difusión y movilidad es muy importante para la comprensión de fenómenos que siguen siendo enigmas para la física, por ejemplo, a nivel molecular, el transporte de materia y las transiciones hacia la turbulencia, la cinética de reacciones químicas autocatalíticas, los motores moleculares, etcétera. A otro nivel, la difusión y movilidad engendran fenómenos aún parcialmente explicados como son, por ejemplo, el flujo génico en poblaciones o el flujo de información en sociedades. Son precisamente este tipo de problemas de frontera los que Denis Boyer discute en su capítulo "Procesos difusivos: de moléculas a animales".

La movilidad de un conjunto de partículas correlacionadas (movilidad colectiva) es una de las fronteras de la física en el siglo XXI y ello lo explica Francisco Sevilla en su capítulo "Movilidad y agentes". Considere el lector a las parvadas de pájaros volando en sincronía o los cardúmenes de peces y ¿por qué no?, la movilidad de humanos entrando y saliendo de un recinto. En los tres casos, se tienen flujos de individuos en los que interacciones locales y percepción individual sobre la posición y velocidad de los vecinos inmediatos, ayudan a la toma de decisiones que se traducen en flujos de movimiento coherente de todo el conjunto, en un proceso social autoorganizado y por ende, fuera de equilibrio. La fenomenología física que emerge en estos sistemas es extremadamente rica y constituye un verdadero reto para la física estadística, los sistemas complejos y –desde

luego— para la *física de lo social*.

La cuarta y última parte del libro trata de la incursión de la física en otras disciplinas, es decir, la "Física interdisciplinaria". De inmediato cobra relevancia la pregunta ¿Existe la física de lo social? como se sugiere en el párrafo anterior. Uno de los autores de estas líneas recuerda una conversación sostenida por ahí del año 2005 con un colega físico de mayor edad. La plática giraba alrededor un artículo publicado en esos días en una de las revistas más veneradas por los físicos: *Physical Review Letters*. El texto de marras trataba sobre la dinámica y arquitectura de las redes complejas con implicaciones para las redes sociales. La opinión del colega, hecha con cierto desdén, fue literalmente "es verdad que eso es ciencia; pero no es física". Dicho de tal manera vino a convertirse en uno de los más bellos ejemplos ilustrativos de lo expuesto por alguna vez por Max Planck: "una nueva verdad científica no triunfa por convencer a sus oponentes y hacerles ver la luz, sino porque sus oponentes finalmente mueren, y crece una nueva generación que se familiariza con ella". Hoy en día existe una febril actividad de los físicos interesados por la física de los fenómenos sociales. Pero esto ni siquiera es tan nuevo como parece. Prueba de lo anterior es la bien documentada amistad entre Galileo Galilei y Thomas Hobbes y el hecho de que las ideas físicas del primero influyeron decisivamente en el pensamiento político del segundo, quien, por cierto, además de ser uno de los pilares de la filosofía política, era un hábil matemático y físico. Respondiendo a la pregunta inicial, Gerardo García Naumis inicia la última sección del presente libro con su capítulo "Física y sociedad", en el que deja muy claro que la física de lo social si es, efectivamente, un febril campo de investigación donde los fenómenos sociales, como manifestaciones de la naturaleza, son perfectamente entendibles desde la física. No desde la física tradicional, sino desde la física que se dibuja en los albores del siglo XXI. No hablamos de reduccionismo, hablamos de la nueva física de los sistemas complejos sociales.

Nuestra sociedad moderna se basa en la economía de mercado y todos nosotros, como lo destacan Ana María Contreras y Hernán Larralde, hemos oído hablar de las crisis económicas, del neoliberalismo, de la inflación y el desempleo, etcétera; pero pocos sabemos, bien a bien, de qué se trata la economía. Menos, todavía, sabemos que muchas herramientas y enfoques propios de la física hallan aplicaciones en el estudio y descripción de sistemas económicos y financieros. Es justamente a esto que los autores del capítulo "Econofísica" se abocan, a mostrar como herramientas de la física estadística y de los sistemas complejos, están construyendo la teoría económica del mañana.

Pero quizá no existe una área donde la actividad de los físicos haya impactado de manera tan decisiva el bienestar de los humanos que la medicina, como lo narra Mercedes Rodríguez en su capítulo "Física médica". De una u otra manera, esta área de la física se concentra en idear y mejorar métodos para el diagnóstico no invasivo (imagenología médica) y en innovar y perfeccionar métodos para curar enfermedades mediante el uso, por ejemplo, de radiaciones (radioterapia) o más recientemente de métodos nanotecnológicos para el suministro de medicamentos en lugares extremadamente localizados. Esta rama interdisciplinaria de la física es sumamente importante para entender la salud

humana y promover el bienestar social. Como ciencia, también enfrenta una variedad de desafíos abiertos que habrán de ocupar a los físicos del mañana.

Además de la salud, el bienestar humano esta dado por una serie de factores donde la ciencia y la tecnología se conjugan para aportar soluciones. Tal es el caso de la ciencia de los materiales, como lo destaca Gonzalo Gonzáles en su capítulo “Perspectivas de los nuevos materiales del siglo XXI”. En esta contribución se narran con detalle algunas de las líneas de investigación abiertas para atacar problemas ambientales como el cambio climático o la búsqueda de nuevas fuentes de energía que puedan, eventualmente, reemplazar a las que provienen de los combustibles fósiles.

Finalmente, la sección y el libro, acaban con el capítulo “El universo algorítmico” de Héctor Zenil, que describe una de las ideas más audaces y polémicas de la física contemporánea: ¿Tiene el universo un carácter digital? ¿Es el universo una enorme computadora? El autor revisa como la teoría de la computación y la teoría de la información algorítmica intentan explicar la emergencia de estructura y la persistencia de principios físicos, dando lugar incluso a posibles reinterpretaciones de teorías físicas en términos de información.

El presente libro consta de veinte ensayos de autores reconocidos como autoridades en sus campos. La selección de los autores no ha sido arbitraria. Son una muestra de una generación que tendrá en sus manos el desarrollo de la física en las proximas tres décadas –por lo menos– y cuya obra futura dejará una marca al mismo tiempo que abrirá más caminos. Los autores, desde luego, no son todos los que deberían estar y muchos otros temas de igual relevancia han quedado fuera. A todos aquellos ausentes les ofrecemos una disculpa. Los límites de espacio han impuesto su voluntad, que no es la nuestra.

Octavio Miramontes y Karen Volke
México, D.F. 2013

Origen, Evolución y Estructura de la Materia

Un Universo en evolución

Vladimir Avila-Reese, Instituto de Astronomía, UNAM, México

1. Preámbulo

En los últimos lustros, gracias a las observaciones astronómicas, la cosmología pasó de una ciencia especulativa a ser una ciencia de alta precisión, consolidándose así el modelo cosmológico estándar actual. Sus pilares son las bien cimentadas teorías de la Relatividad General (TGR) y de la Gran Explosión, el modelo Inflacionario y el paradigma gravitacional. De acuerdo a este último, las estructuras cósmicas de gran escala -galaxias, grupos y cúmulos de galaxias, así como la compleja red de filamentos, paredes y huecos- son el producto de la evolución por acción de la gravedad de desviaciones infinitesimales de la homogeneidad (el campo de perturbaciones primordial). El modelo cosmológico estándar describe exitosamente: (1) la dinámica y geometría del Universo bajo la hipótesis *-a posteriori* comprobada- de homogeneidad e isotropía del espacio (Principio Cosmológico); (2) el contenido material y energético del cosmos y su variación global con la expansión; (3) el origen cuántico del campo de perturbaciones y su evolución gravitacional ulterior, pasando por las anisotropías de la Radiación Cósmica de Fondo en Microondas (RCFM) al finalizar la era caliente, y dando lugar posteriormente a las galaxias y estructuras de gran escala del Universo actual cuya edad es de 13.7 mil millones de años. Una característica peculiar que revela el modelo cosmológico estándar es el proceso constante de transformación a estados y sistemas cada vez más complejos. Tomando prestado el término de la biología, diremos entonces que el Universo está en un constante proceso de evolución¹.

A pesar del éxito del modelo estándar, éste ha planteado interrogantes tan profundas que ponen a la física en el umbral de algo radicalmente nuevo. De acuerdo a las mediciones astronómicas, la densidad cósmica actual está constituida sólo en un 4.5% por materia ordinaria, es decir las partículas y campos conocidos del Modelo Estándar de la física de partículas elementales². Otro 22.5% lo constituye la así llamada materia oscura fría, misma que produce gravedad pero que no interactúa electromagnéticamente y

¹Para una visión complementaria, véase el capítulo “Evolución y materia compleja”, de Octavio Miramontes, en este libro.

²Véase el capítulo “Física de altas energías”, de Myriam Mondragón, en este libro.

que es no relativista (fría) desde muy temprano. El restante 73 %, requerido para explicar la expansión acelerada del Universo y el faltante en densidad cósmica para hacer plana la geometría, podría estar en forma de un campo repulsivo, bautizado ante nuestra ignorancia con el nombre genérico de energía oscura, siendo la constante cosmológica la que mejor la describe observacionalmente. Haciendo énfasis en la inverosímil composición que implica el modelo cosmológico actual, en la jerga científica se lo llama el modelo MOF- Λ (Materia Oscura Fría con constante cosmológica Λ). La materia y energía oscuras, componentes invisibles que constituyen el 95.5 % del Universo actual, se proponen como nuevos sectores oscuros del Modelo Estándar de partículas y campos, mismo que pronto dejará de ser el estándar seguramente. La unidad entre el micro- y macro-cosmos en su máxima expresión. Pero podría ser también que el problema de la materia y energía oscuras estén señalando la necesidad de introducir modificaciones a la TGR o de pensar en más dimensiones espaciales.

Los retos en el campo están lanzados, la caja de Pandora está abierta. Las respuestas que se logren al resolver estos retos, estimularán en el futuro nuevos paradigmas hacia el entendimiento del Universo, su evolución y de la naturaleza en general. Parece ser que un atributo de la naturaleza es la complejidad, misma que es máxima en el caso del Universo como sistema físico, de tal manera que su comprensión puede darse sólo a través de enfoques que integren esa complejidad. Por eso, para plantear cuáles son los retos en el siglo XXI de la cosmología, hay que entender primero las múltiples aristas del problema.

En este Capítulo se hará un recuento de los ingredientes relevantes que llevaron a la consolidación del modelo cosmológico actual, tanto a nivel del Universo homogéneo como de evolución de sus inhomogeneidades. Se describirán los principales éxitos y posibles conflictos de este modelo, así como los grandes retos que se plantean para resolver tales conflictos. Finalmente se especulará sobre los nuevos caminos que podrán surgir en la cosmología del futuro, mismos que rayan en la metafísica si no ponemos bien los pies en el cielo.

2. El Universo homogéneo

2.1. Dinámica y geometría

La cosmología moderna surgió con la aplicación de la TGR a un sistema físico llamado Universo. Tal “atrevimiento” no pudo haber sido más que por parte de Albert Einstein. Sus famosas ecuaciones de campo conectan el contenido material y energético (fuente) con la geometría del espacio-tiempo³. El movimiento (dinámica), interpretado en la mecánica newtoniana como producto de la fuerza gravitacional, es en realidad una consecuencia de la curvatura que sufre el espacio-tiempo por la presencia de materia y campos. En este esquema el universo no puede ser estacionario. Los prejuicios y observaciones limitadas

³Véase el capítulo “Agujeros Negros”, de Miguel Alcubierre, en este mismo libro.

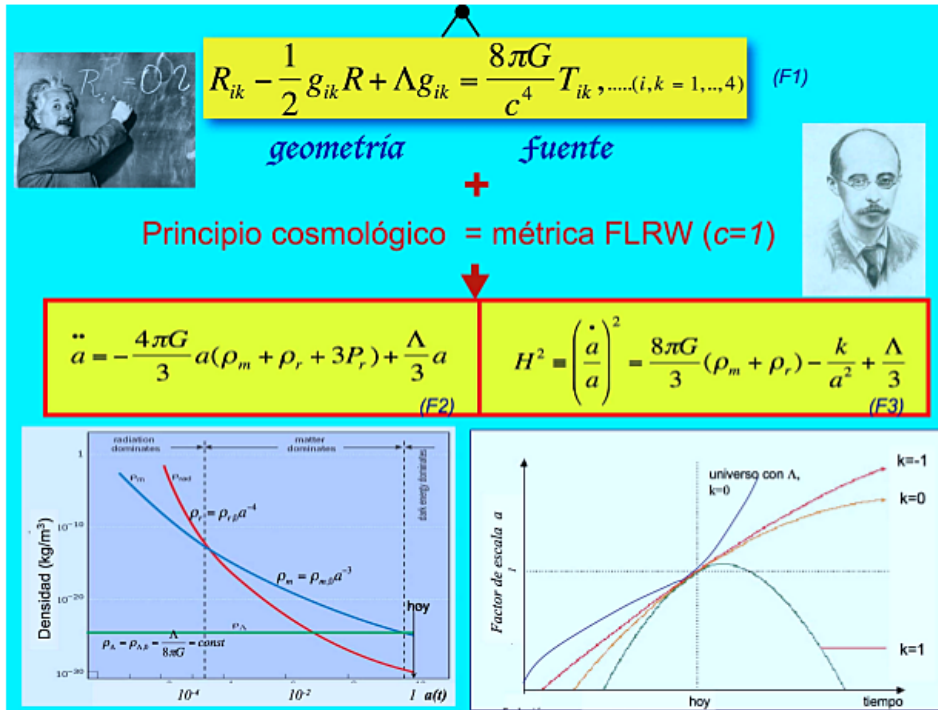


Figura 1: Ecuación de campo de Einstein en forma tensorial y las ecuaciones de Friedmann con Λ que se derivan de ella al suponer una métrica FLRW. Las densidades de las diferentes componentes del Universo decrecen con el factor de escala (expansión) a con diferentes leyes (ver panel inferior izquierdo) de tal manera que hay una era cuando dominaba la radiación, luego la materia y después la constante cosmológica. Las soluciones genéricas de las ecuaciones de Friedmann dan diferentes posibles comportamientos del factor de escala con el tiempo, $a(t)$ como se ve en el panel inferior derecho.

de principios del s. XX, indujeron a Einstein a considerar como hipótesis un universo estacionario (y finito). Para lograrlo, introdujo entonces un término dado por el tensor métrico multiplicado por una constante Λ en la parte geométrica de la ecuación de campo, misma que se escribe entonces en su notación tensorial como la ecuación (F1) de la figura 1⁴. En (F1), R_{ik} , R y g_{ik} tienen que ver con la estructura del espacio-tiempo, T_{ik} con la fuente de materia y energía y G y c son la constante gravitacional y velocidad de la luz en

⁴Los tensores son objetos geométricos que describen relaciones lineales entre escalares, vectores y otros tensores de una manera que sean independientes del sistema de coordenadas elegido. En ese sentido, los tensores son los objetos matemáticos ideales para describir las propiedades cuadri-dimensionales del espacio-tiempo y su conexión con la distribución de materia. Así como Newton tuvo que introducir el cálculo diferencial e integral para enunciar la mecánica clásica, Einstein encontró en el campo tensorial la herramienta adecuada para enunciar la TGR.

el vacío. Usando la métrica homogénea e isotrópica de Friedmann-Lemaitre-Roberston-Walker (FLRW), es decir el Principio Cosmológico, las $4 \times 4 = 16$ ecuaciones de campo se reducen a las dos ecuaciones de Friedmann (F2 y F3 en la figura 1), donde $a(t)$ es el factor de escala en función del tiempo cósmico, el punto indica derivada con relación al tiempo, ρ y P son la densidad y presión de las diferentes componentes ($m =$ materia no relativista, $r =$ radiación), k es la curvatura del espacio y H es el parámetro de Hubble. Estas dos ecuaciones describen por completo la dinámica del universo FLRW, es decir el cambio con el tiempo de las distancias expresadas a través del factor de escala o expansión; en el panel inferior derecho de la figura 1 se muestran los casos genéricos de la dinámica, es decir cómo se comporta $a(t)$, mismos que están asociados a la curvatura.

La expansión del espacio descrita por $a(t)$ produce que la longitud de onda de la radiación se estire por el mismo factor. El *corrimiento al rojo* de la luz de galaxias alejadas, $z = (\lambda_{obs} - \lambda_{em})/\lambda_{em}$, se relaciona entonces con a así: $a(t) = 1/(1 + z(t))$, donde t es el tiempo cuando fue emitida la radiación y se define que al tiempo de observación actual, t_0 , $a(t_0) = 1$. Entonces, cuando se dice que la luz de una galaxia está corrida a $z = 1$, significa que las escalas eran un factor 2 menores en la época que se emitió esa luz. Para saber a qué tiempo cósmico corresponde eso, hay que definir el modelo cosmológico: $z \rightarrow a \rightarrow t$.

La ecuación (F2), despreciando los términos de radiación (ρ_r y P_r), se puede escribir en forma de una ley de fuerzas en una esfera de masa $M = (4\pi/3)R^3\rho_m$: $F = -GM/R^2 + (\Lambda/3)R$, donde $R \equiv a$, lo cual muestra que la constante cosmológica se puede interpretar como una *fuerza repulsiva* que aumenta con la distancia. Por cierto, el estado estacionario en equilibrio ($F = 0$) que Einstein deseaba no se logra con este término pues el equilibrio no es estable: una perturbación en R se amplifica rápidamente por la forma de la ecuación. Pero además, años después E. Hubble descubrió que las galaxias se alejan con una velocidad proporcional a su distancia, $v = H_0 \times D$, lo cual significa que es todo el espacio el que se está expandiendo con una tasa igual a H_0 (la constante de Hubble): el Universo no es estacionario. Einstein aceptó su error. ¡Sin embargo, las observaciones actuales muestran que ese término repulsivo que acelera la expansión sí es necesario!

La ecuación (F3) se puede reescribir en términos de valores al tiempo presente t_0 :

$$(H/H_0)^2 = \Omega_r a^{-4} + \Omega_m a^{-3} - (k/H_0) a^{-2} + \Omega_\Lambda \quad (1)$$

donde $\Omega_i \equiv \frac{\rho_i(t_0)}{\rho_c(t_0)}$ y ρ_c es la densidad crítica; recuerde que el factor de escala a t_0 se normaliza a 1, $a(t_0) = 1$. En la ecuación (1) se hizo uso de la segunda ley de la termodinámica aplicada a la primera ecuación; considerando que la ecuación de estado de una componente dada es $P_i = w_i \rho_i c^2$, se obtiene entonces que $\rho_i \propto a^{-3(1+w_i)}$. En el caso de la radiación $w_r = 1/3$, de la materia $w_m = 0$ y de la constante cosmológica, $w_\Lambda = -1$ (como resultado, ver cómo decrecen las densidades con el factor de expansión $a(t)$ en la figura 1). En la generalización a energía oscura (EO), el índice de la ecuación de estado w_{EO} puede tomar otros valores (siempre menores a $-1/3$ para producir aceleración tardía) e incluso cambiar con el tiempo. La determinación de los parámetros H_0 , Ω_m , Ω_r , Ω_Λ (u

Ω_{EO} y w_{EO}) y k es el principal reto de la cosmología observacional. Integrando la ecuación (1), ellos definen el comportamiento del factor de escala con el tiempo, $a(t)$, es decir la dinámica del Universo homogéneo. Cada término en la parte derecha de la ecuación (1) refleja el rol que juegan en la dinámica los diferentes componentes. Muy en el pasado, cuando $a(t) \ll 1$, domina el término de la radiación. Debido a que ρ_r decrece más rápido que ρ_m con la expansión (figura 1), hay un tiempo ($t_{ig} \approx 70,000$ años) cuando ambas se hace iguales; antes domina en la dinámica la radiación y luego de ella, domina la materia. Posteriormente la dinámica dependerá de la curvatura del espacio, pudiendo ser la velocidad de expansión más lenta o más rápida de acuerdo a si la curvatura es negativa o positiva. Todo indica que la geometría es plana, entonces este término es 0. El término de Ω_Λ es constante, es decir empieza a dominar tardíamente, cuando $\rho_m(a)$ ha decrecido por debajo del valor constante de $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$ (ver figura 1). Integrando la ecuación (1) cuando domina radiación, materia y Λ , es fácil mostrar que respectivamente $a(t) \propto t^{1/2}$, $a(t) \propto t^{2/3}$, y $a(t) \propto \exp(\frac{\Lambda}{3}H_0t)$; en los dos primeros es expansión frenada y en el último es expansión acelerada (exponencial con t).

2.2. Historia térmica

En un universo en expansión, hacia el pasado las densidades y temperaturas de sus componentes se hacen mayores, a excepción de la asociada a la constante cosmológica, ρ_Λ . Los estados del plasma cosmológico a las altas temperaturas y presiones del pasado y sus cambios a medida que el volumen aumenta (historia térmica del Universo, figura 2) se describen por la *Teoría de la Gran Explosión*⁵. La temperatura de la radiación cósmica de fondo, T_r , se usa como indicadora de la temperatura del fluido cosmológico pues a altas energías los diferentes campos y partículas se acoplan con la radiación y están en equilibrio térmico con ella. La temperatura pico de la distribución de Planck de los fotones, T_r , decrece proporcional a la expansión: $T_r = T_0/a$, donde $T_0 = 2.725$ K es al día de hoy. La historia térmica tiene una descripción formal a partir de $a \approx 10^{-15}$ ($t \approx 10^{-10}$ s), cuando $T_r \approx 10^{15}$ K o $E = kT_r \sim 10^2$ GeV, cercano al límite de los experimentos de laboratorio y del Modelo Estándar de partículas. En esta época se rompe la simetría electrodébil y las partículas estándar adquieren su masa a través del mecanismo de Higgs; a partir de entonces existen 4 campos y las familias de partículas/antipartículas de quarks y leptones más las partículas portadoras de las interacciones (ver figura 2).

Todas las partículas estándar al principio eran relativistas y estaban en equilibrio térmico con la radiación. Una partícula p se vuelve no relativista (n.r.) cuando su energía cinética decrece por debajo de la energía en reposo por lo que ese tiempo depende de su masa:

$$kT_p \approx m_p c^2 \quad \text{y} \quad T_p \approx T_r = T_0/a \propto t^{-1/2} \quad \rightarrow \quad t_{n.r.} \propto m_p^{-2} \quad (2)$$

⁵Este nombre es muy desacertado pues nunca hubo una explosión como tal; para ello tiene que haber gradientes de temperatura y presión, cosa que viola el Principio Cosmológico. Surgió de una expresión peyorativa de F. Hoyle en una entrevista en la BBC en los 50's.

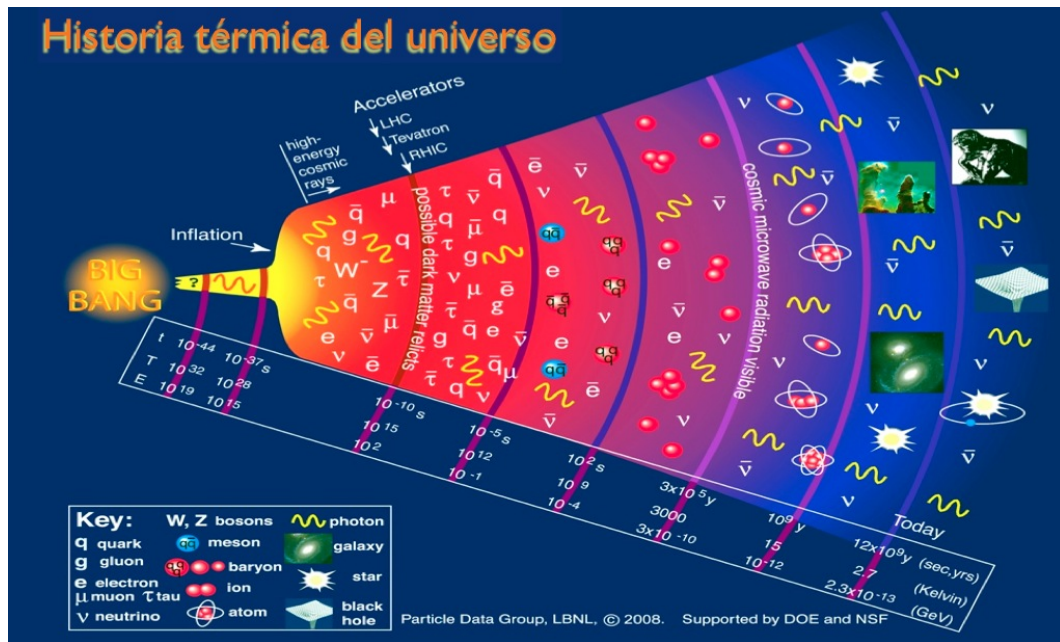


Figura 2: Etapas relevantes de la historia térmica del Universo (Particle Data Group, LBNL). Tiempo t en segundos (s) y años (y), temperatura T en grados Kelvin (K) y energía E en GeV.

El que las partículas abandonen el equilibrio térmico depende de dos escalas de tiempo: su tasa de reacción y la tasa de expansión del Universo. Si la tasa de reacción es menor que de la tasa de expansión, entonces la distancia entre las partículas aumenta más rápido de lo que ellas pueden interactuar y esas partículas se *desacoplan*. La fascinante historia térmica del Universo depende entonces de la dinámica global y de las propiedades de las partículas y campos (masas y secciones de choque). Con la expansión partículas cada vez menos masivas dejan de ser relativistas y un poco antes o después, dependiendo del tipo de interacción, se desacoplan del resto de las partículas y la radiación, permitiendo la formación de sistemas más complejos. Entre los procesos relevantes *después de la ruptura de la simetría electrodébil* están (figura 2):

- La *aniquilación de los hadrones, incluyendo bariones*, antes de 1 s de edad, y de *los leptones* a los ~ 10 s. Previo a estas épocas las respectivas partículas/antipartículas se aniquilaban y se creaban eficientemente en interacción con la radiación caliente. Con la expansión la radiación se enfría y no le alcanza ya la energía para crear los pares, primero de hadrones y luego de leptones. Sin embargo, debido a la asimetría bariónica (y leptónica), por cada $\sim 10^9$ parejas de partículas-antipartículas, había una sin antipartícula, siendo esta fracción la que constituye la materia bariónica estable actual. El cuándo y cómo se produjo la *asimetría bariónica* es aún un problema abierto, pero más allá de eso, gracias a esta minúscula asimetría estamos aquí... ¡y además con la capacidad de medir que por cada $\sim 10^9$ fotones

en la RCFM hay justamente 1 barión!

- El *desacoplamiento de los neutrinos* a ~ 1 s; antes las tasas de reacciones electrodébiles de los neutrinos eran más rápidas que la tasa de expansión por lo que, a través de estas reacciones, protones y neutrones estaban en equilibrio sin poder existir uno separado del otro. Al decaer la temperatura, la tasa de interacción de los neutrinos es superada por la de expansión y dejan de ser eficientes sus reacciones, congelándose entonces la fracción de neutrones a protones, aunque el neutrón en estado libre continúa desintegrándose. En los primeros minutos es posible ya la formación de los núcleos atómicos de los elementos más ligeros (*nucleosíntesis primigenia*), principalmente del H y del He. Fracciones en masa de aproximadamente 3/4 y 1/4 para el H y el He quedan fijas en esos primeros minutos, mismas que cambiarán muy poco luego por las reacciones termonucleares en las estrellas.

- El *desacoplamiento de la radiación* a $\sim 380,000$ años; antes de eso, el plasma electrónico interactúa eficientemente por dispersión elástica con los fotones, pero con la expansión incluso la pequeña fracción de los fotones más energéticos ya no alcanza para dispersar a los electrones mismos que se *recombinan* para formar átomos, primero de H y luego de He. A partir de entonces, los fotones viajan libremente y hoy los detectamos en microondas como la RCFM a $T_0 = 2.725$ K, la información más remota que tenemos del Universo.

Sobre la historia térmica *antes de la ruptura de la simetría electrodébil* ($t \lesssim 10^{-10}$ s), se conjeturan una serie de procesos que esperan su comprobación cuando se alcancen las energías involucradas en laboratorio. Algunos de ellos son las rupturas de *supersimetrías* propuestas en los modelos más allá del estándar; estos ocurren a temperaturas superiores a $\sim 10^2 - 10^3$ GeV, siendo desde entonces que las masas de las partículas estándar y las de sus pares supersimétricos se harían muy diferentes; además estas últimas no interactúan electromagnéticamente pero sí débilmente, es decir antes de la ruptura de la simetría electrodébil podían estar en equilibrio térmico con el resto de las partículas, quedando fijada su densidad de reliquia Ω_X antes de esta ruptura. Dicha densidad es cercana a la que se infiere para la materia oscura, razón por la que las partículas supersimétricas, en especial las más ligeras como son los *neutralinos*, son el principal *candidato a materia oscura*.

En la era electrodébil prima un denso plasma de quark-gluones, así como de partículas masivas que se crean a esas energías, por ej. los bosones W y Z y los bosones de Higgs (todos ya descubiertos en el laboratorio). Cuando la temperatura supera los $\sim 10^{31}$ K ($\sim 10^{19}$ GeV), se debe dar la *Gran Unificación de los campos fuerte y electrodébil*. Hacia esta época, llamado el *tiempo de Planck* ($t_P = 5.1 \times 10^{-43}$ s), las densidades son tales que los efectos gravitacionales y de mecánica cuántica se hacen igual de importantes; se requiere entonces de una *teoría cuántica de la gravedad* para describir la física anterior a esa época. En este sentido, se especula que antes del tiempo de Planck se puede haber dado la Super Unificación (Teoría del Todo) entre el campo fuerte-electro-débil (cuántica) y la gravedad (TGR); teorías como la de cuerdas y M-branas logran esto a costa de introducir más dimensiones que se propone se compactifican a las escalas de Planck, dejando sólo las

3+1 dimensiones que conocemos⁶. Se puede decir que el límite de posibles descripciones físicas del Universo es hasta el tiempo de Planck.

2.3. Inflación

Con la expansión, hacia los 10^{-36} s la temperatura decae a $\sim 10^{27}$ K ($\sim 10^{15}$ GeV), propiciando la *separación del campo fuerte del electrodébil*. Esta transición de fase se cree puede haber generado un campo escalar llamado *inflatón*, el cual al asentarse en su estado mínimo de energía a través de una transición de fase, genera una fuerza repulsiva (falsos vacíos con ecuación de estado $P = -\rho_{vac}c^2$) que expande exponencialmente al Universo, sacando fuera del horizonte prácticamente a todas las escalas antes conectadas -y por ende en equilibrio térmico- y haciendo plana la curvatura del espacio si es que antes no lo era. La enorme energía potencial que libera el inflatón hasta el fin de la inflación ($t \approx 10^{-33}$ s) recalienta al Universo, repoblándolo con el plasma de quarks-gluones y otras partículas surgidas antes, durante la ruptura de simetría del campo fuerte con el electrodébil. Es importante notar que la cuestión del punto cero del campo no está resuelta; formalmente el tensor de energía-momento del vacío diverge por lo que se introduce un corte ‘ultravioleta’ a la energía de Planck (10^{19} GeV), lo cual da un valor para este tensor de 10^{76} GeV⁴ y se supone que se cancela por completo con el recalentamiento. ¡Nótese que este valor es $\sim 10^{122}$ veces mayor que el que se infiere para la constante cosmológica hoy en día!

La inflación fue propuesta para resolver limitaciones que tiene la teoría de la Gran Explosión: el problema de la planitud (¿por qué la geometría del espacio es plana?), del horizonte (¿cómo es que la RCFM está en equilibrio termodinámico en regiones que al momento de haberse producido estuvieron causalmente desconectadas?), y el origen de las perturbaciones. Estas últimas provienen de las fluctuaciones cuánticas del punto cero del vacío, las cuales al ser sacadas fuera del horizonte, adquieren naturaleza relativista como perturbaciones a la métrica del espacio-tiempo. Además, la ‘sobredensidad’ en función de la escala de estas perturbaciones al finalizar la inflación se predice como

$$\delta \propto \ell^{-2} \propto M^{-2/3} \quad (3)$$

y con una distribución gaussiana; ℓ y $M \propto \ell^3 \bar{\rho}$ son el tamaño y masa de la perturbación. El factor de proporcionalidad (amplitud) no se predice en la teoría.

2.4. Radiación Cósmica de Fondo en Microondas (RCFM)

Esta radiación producida a los 380,000 años o $a \approx 10^{-3}$ es la huella del Universo caliente de la Gran Explosión y marca el límite de información cósmica que podemos tener a través de la radiación electromagnética. Toda señal que provenga de antes pierde “in-

⁶Ver el capítulo de Saúl Ramos, “El universo de las supercuerdas”, en este mismo libro.

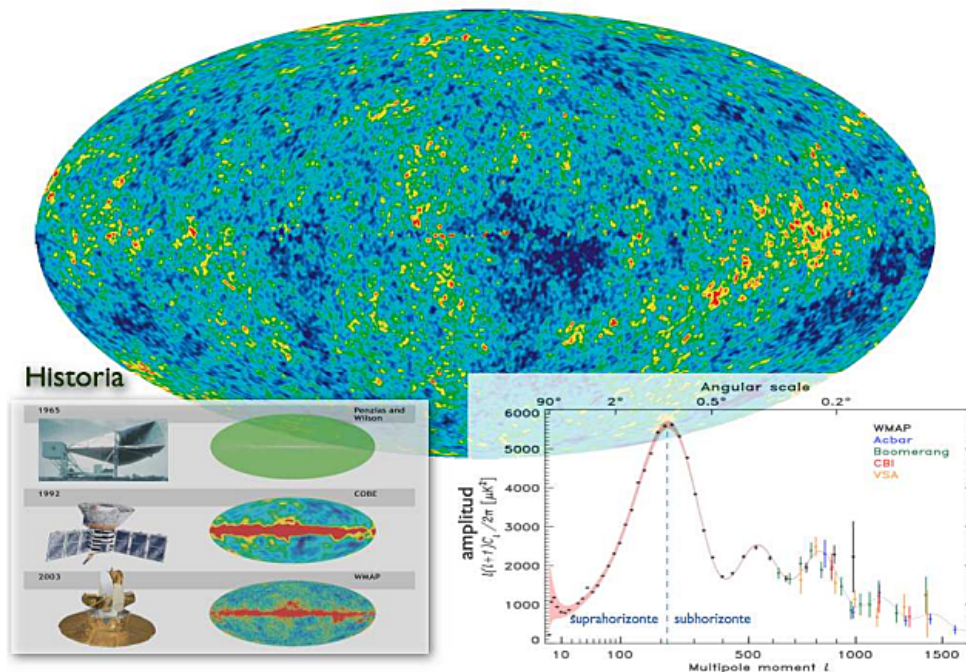


Figura 3: Anisotropías de la RCFM en el cielo obtenidas con el satélite WMAP. Las fluctuaciones en la imagen son de $\pm 200 \mu K$ ($\mu K = 10^{-6} K$) alrededor de $2.725 K$ y corresponden a las semillas de las estructuras de gran escala actuales. *Recuadro inferior a la derecha*: Espectro de potencias angular de esas fluctuaciones (diferentes símbolos corresponden a datos del WMAP y otros experimentos; el área sombreada rosa corresponde al modelo cosmológico estándar, MOF- Λ). El primer pico acústico determina el tamaño angular con el que hoy vemos lo que fue el horizonte en la época en que se generó la RCFM. Ese tamaño implica geometría plana.

dividualidad” por su termalización⁷. En la astrofísica lidiamos con una situación similar con las estrellas: es tan alta la opacidad del plasma en el interior de ellas que la radiación llega a la fotosfera termalizada. No obstante, confrontando los modelos de los interiores estelares con detalladas observaciones de la fotosfera, se ha desarrollado una teoría completa de la física estelar. Entenderá usted entonces por qué el gran interés de estudiar la ‘fotosfera cosmológica’. Dos Premios Nobel en Física han sido ya otorgados por este tipo de estudios. El primero, a los dos radioastrónomos que descubrieron en 1965 esa radiación en microondas que llega uniformemente de todo el cielo. El segundo, a los dos líderes del satélite COBE que a principios de los 90 midió con alta precisión el espectro de la RCFM (¡una planckiana perfecta!) y descubrió las esperadas anisotropías en la misma

⁷Si algún día construimos detectores de neutrinos cosmológicos, entonces esa frontera se podrá mover hasta $\sim 1 s$; antes de eso, incluso los neutralinos se termalizan.

(figura 3). Estas anisotropías son tenues desviaciones espaciales en la temperatura, cuyas amplitudes el COBE midió en $\delta T/T \approx 10^{-4}$. Debido a que la RCFM proviene de la última superficie dispersora, cuando materia y radiación todavía estaban acopladas, las fluctuaciones en T están asociadas a perturbaciones en la densidad del plasma de esa época, $\delta = \delta\rho/\rho \approx 3\delta T/T$.

El COBE tenía una resolución angular pobre, 7 grados. Con experimentos en tierra, globos y satélites, se medían las anisotropías a escalas angulares cada vez menores y con mayor precisión. En la década del 2000, el satélite WMAP permitió literalmente escuchar el pulso del Universo temprano hasta 0.2 grados de resolución angular. A una escala angular $\Theta \approx 1$ grado se detectó el primer pico acústico y a escalas menores, los picos 2 y 3 (figura 3). Estos picos son las oscilaciones gravito-acústicas del plasma de bariones-radiación causalmente conectado; a escalas mayores a las del horizonte (las que midió inicialmente el COBE) no pueden haber oscilaciones. La escala del primer pico está entonces asociada al tamaño físico del horizonte a $z = 1081$ ($a \approx 10^{-3}$); el tamaño angular que subtende el mismo al día de hoy depende principalmente de la geometría del espacio. El valor medido para Θ implica que la geometría es plana con alta probabilidad. La diferencia en amplitud entre el primer y segundo pico depende principalmente de la densidad bariónica, Ω_b . En general, toda la forma del espectro de potencias angular depende, además de la amplitud (normalización), geometría y Ω_b , de la mayoría de los parámetros cosmológicos. En conclusión, la RCFM contiene gran parte del "código genético" del Universo y sus estructuras.

3. El Universo inhomogéneo: formación de estructuras

El modelo cosmológico sería incompleto -y aburrido- si se limitara sólo al Universo homogéneo e isotrópico. El estudio de las perturbaciones (inhomogeneidades) y su evolución es clave para entender las estructuras cósmicas observadas, así como las anisotropías en la RCFM, cuando ni átomos existían. Como vimos, ellas corresponden a perturbaciones muy tenues cuyo origen se remonta posiblemente a fluctuaciones cuánticas generadas antes de 10^{-32} s de edad del Universo. El proceso de evolución gravitacional de las perturbaciones durante el Universo caliente ocurre en el régimen lineal, es decir cuando todavía $\delta \ll 1$, y depende de qué están hechas esas perturbaciones. En este régimen cada perturbación de una dada escala evoluciona prácticamente aislada -independiente de lo que pasa en otras escalas- y se expande casi como lo hace el Universo. Cuando $\delta > 1$ entramos al régimen no lineal donde la gravedad de todas las escalas se hace importante y para $\delta \gg 1$ la perturbación colapsa gravitacionalmente, separándose de la expansión del Universo.

3.1. Evolución lineal de las perturbaciones: Materia oscura exótica (MO).

Dado el campo de fluctuaciones primigenio, p. ej. el generado en la inflación, el desarrollo ulterior del mismo en un medio en expansión se da en dos fases:

▷ (a) suprahorizonte: al principio perturbaciones de todas las escalas fueron sacadas del horizonte por la inflación; sin embargo, a pesar de estar causalmente desconectadas, ellas crecen en amplitud cinematicamente según la TGR: $\delta \propto a^2$ ($t < t_{ig}$) y $\delta \propto a$ ($t > t_{ig}$); en este caso no importa de qué estén hechas, son simplemente perturbaciones a la métrica.

▷ (b) subhorizonte: las escalas más pequeñas son las primeras en lograr conectarse causalmente, es decir que su tamaño queda por debajo del horizonte a un dado tiempo t , $\ell < L_H \sim ct$; se activan entonces los procesos microfísicos y la evolución depende de la composición de la perturbación. Si son de bariones+radiación, el análisis perturbativo del fluido muestra que hay una escala de Jeans L_J tal que si la perturbación es mayor a ella puede colapsarse pero si es menor, es estable, mostrando una solución de *oscilación gravito-acústica*, es decir el gradiente de presión (principalmente debido a la radiación) equilibra a la gravedad. Es fácil mostrar que durante el dominio de la radiación ($t < t_{ig}$) $L_J(t) \approx L_H(t)$ de tal manera que las perturbaciones de bariones-radiación que cruzan el horizonte son estables y se describen como ondas gravito-acústicas. Sin embargo, con el enfriamiento de la radiación, el fluido es cada vez menos ideal en el sentido de que el camino libre medio de los fotones aumenta (difusión fotónica). Esto produce que el estado de oscilación gravito-acústica de perturbaciones cada vez mayores se amortigüe, proceso conocido como *amortiguamiento de Silk*. Los cálculos muestran que hasta la época de la recombinación se borraron perturbaciones de escalas menores a $\sim 5 \times 10^{13} M_\odot$, ¡es decir desaparecieron las semillas para formar grupos de galaxias y las mismas galaxias!

La teoría de formación de galaxias estaba en crisis. Al auxilio llegaría en los años 80 la propuesta de MO⁸. Las *perturbaciones primigenias de MO*, al no interactuar con la radiación, no están sujetas a pasar por la fase de oscilaciones gravito-acústicas y mucho menos de sufrir el amortiguamiento de Silk. No obstante, existe otro proceso de borrado para las perturbaciones de este tipo: el de *flujo libre*. Si las partículas de MO son relativistas, estas se mueven libremente por su geodésica ($v = c$) abandonando las regiones sobredensas más pequeñas que el tamaño del horizonte a una época dada t . Entonces mientras más tiempo permanecen relativistas las partículas de MO, perturbaciones más grandes son borradas por el flujo libre. De acuerdo a la ecuación (2), la época en que una partícula térmica se hace no relativista es inversamente proporcional al cuadrado de su masa. Partículas poco masivas se vuelven no relativistas muy tarde alcanzando a borrarse así perturbaciones de grandes escalas, mientras que para las muy masivas, el borrado por flujo libre deja de operar desde épocas muy tempranas, sobreviviendo casi todas las escalas.

⁸La MO era ya aceptada en la astronomía para explicar el problema de las fuerzas faltantes en estudios dinámicos de galaxias, grupos y cúmulos de galaxias suponiendo gravedad newtoniana. Estudios basados en lentes gravitatorias vendrían a confirmar dichas conclusiones. Las galaxias parecen estar embebidas en enormes halos de MO, veinte y más veces más masivos que ellas, responsables de las fuerzas faltantes.

MO caliente, tibia y fría: el amortiguamiento por flujo libre da lugar a esta clasificación de la MO, dependiendo de la masa de la partícula en la mayoría de los casos. De hecho, las únicas partículas de MO confirmadas experimentalmente son los neutrinos, pero por su baja masa ($m_{\nu_e} < 2 \text{ eV}$) se trata de MO caliente, perturbaciones de la cual se habrían borrado desde escalas de cúmulos de galaxias para abajo. En cambio, para MO fría (MOF), por ej. partículas de $\sim 100 \text{ GeV}$ como serían los neutralinos, se borran perturbaciones sólo de escalas $< 10^{-5} M_\odot$, es decir para fines prácticos sobreviven todas las escalas.

Si en la densidad de materia del Universo domina la MOF, entonces las perturbaciones dominantes son de MOF y ellas no sufren de procesos de amortiguamiento. El campo gravitacional de las mismas atrae a los bariones que formarán luego galaxias. Esto a grandes rasgos. En más detalle, el objetivo es calcular el espectro de potencias del campo de perturbaciones acopladas de MOF-bariones-radiación a la época de la recombinación, partiendo del espectro primordial. La convolución del espectro de potencias con una función de ventana se traduce en una cantidad más intuitiva, la varianza o exceso promedio de masa en esferas de una dada masa M , $\sigma(M) \equiv \langle \delta M/M \rangle$. En el régimen lineal, $\sigma(M) \sim \delta(M)$. Vimos que este último es predicho en la inflación como $\delta \propto M^{-\alpha}$, con $\alpha \approx 2/3$ (ecuación 3).

Para perturbaciones de MOF que en principio crecen en amplitud fuera y dentro del horizonte, sucede un efecto interesante llamado *estancamiento por expansión o efecto Mészáros*. La perturbación subhorizonte de MOF es inestable gravitacionalmente siendo la escala temporal de esta inestabilidad $t_{grav} \sim 1/(G\rho_m)^{1/2}$. Por otro lado, la escala temporal de la expansión es $t_{exp} \sim 1/(G\rho_r)^{1/2}$; entonces, en épocas $t < t_{ig}$, debido a que $\rho_m \ll \rho_r$, sucede que $t_{grav} \gg t_{exp}$, es decir la expansión es más rápida que la inestabilidad gravitacional, quedando prácticamente estancado el crecimiento de δ . Cuando domina la materia, $t > t_{ig}$, este estancamiento ya no ocurre. Por lo tanto, las perturbaciones que fueron cruzando el horizonte antes de t_{ig} , primero las más pequeñas y luego las más grandes, congelaron su evolución temporalmente hasta que domina la materia. Esto produce el aplanamiento de la varianza $\sigma(M)$ a masas menores a la del horizonte en la igualdad, $M_H(t_{ig}) \approx 3 \times 10^{13} M_\odot$: a masa menores, se deformó de tal manera que $\sigma(M) \propto 1/\ln M$, es decir, es casi constante; masas mayores ya no sufrieron del estancamiento conservando la varianza su forma inicial, $\sigma(M) \propto M^{-2/3}$. Este aplanamiento a escalas de galaxias tendrá profundas implicaciones en las propiedades de las galaxias.

Campo de fluctuaciones procesado.- Como producto de la evolución gravitacional lineal, la varianza $\sigma(M)$ (o δ) del campo de perturbaciones a la época de la recombinación queda en principio así (figura 4): para masas menores a $\approx 3 \times 10^{13} M_\odot$, sólo sobrevivieron perturbaciones de MOF y su espectro de potencias procesado es tal que $\sigma(M) \propto 1/\ln M$; el gas bariónico es gradualmente atrapado en los pozos de potencial de estas perturbaciones salvando así el problema de formación de galaxias. A escalas mayores, la dependencia de σ con M es la originalmente producida en la inflación: $\sigma(M) \propto M^{-2/3}$. Por otro lado, las perturbaciones de bariones-radiación que sobreviven al amortiguamiento de Silk (mayores a $\approx 5 \times 10^{13} M_\odot$) presentan oscilaciones gravito-acústicas que se diluyen parcialmente

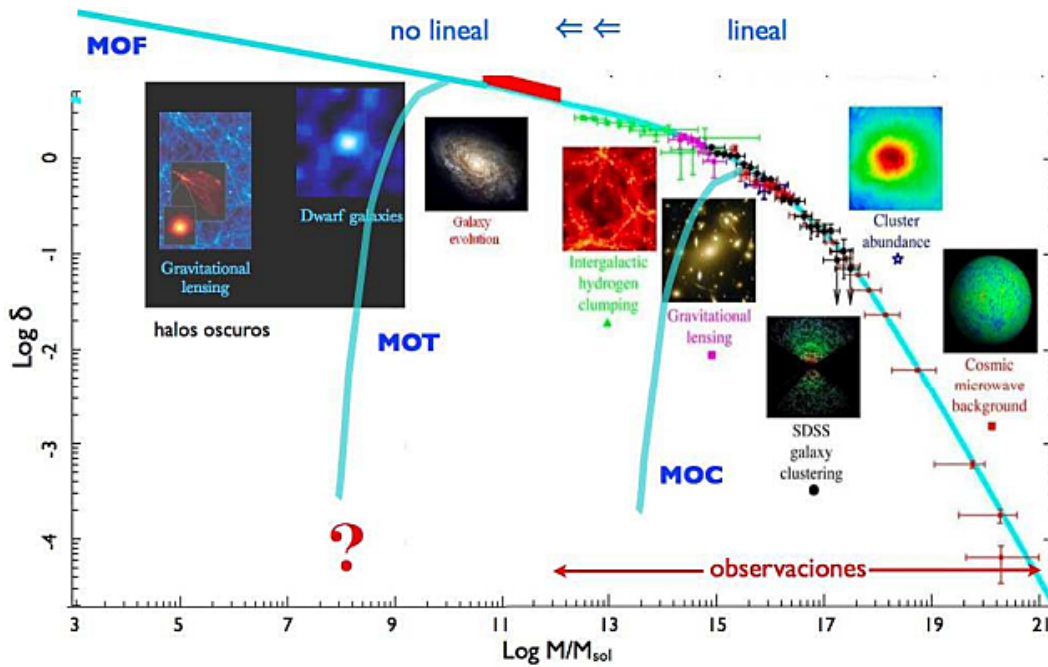


Figura 4: Contraste de densidad δ de las perturbaciones en función de su masa en la recombinación pero linealmente extrapolado al día de hoy (se multiplicó por un factor de $\approx 10^4$). La varianza $\sigma(M)$ es proporcional a δ . Curvas turquesas: diferentes modelos cosmológicos de acuerdo al tipo de materia oscura (MOF, MOT y MOC); el caso MOC (neutrinos) queda descartado. Puntos con barras de error: sondeos observacionales a diferentes escalas, donde las perturbaciones aún están en el régimen lineal o cuasi-lineal. El reto actual es constreñir el espectro de potencias a las escalas menores o al menos determinar si existen o no halos oscuros en las pequeñas escalas que predice el modelo de MOF.

por la presencia de la MOF; menor es la densidad bariónica Ω_b , más diluidas resultarán las oscilaciones. Es por esto que los cocientes de amplitudes entre los picos acústicos en las anisotropías de la RCFM reflejan con precisión Ω_b . En la figura 4 se ilustra el $\sigma(M)$ del modelo MOF- Λ comparado con una serie de observaciones a diferentes escalas y tiempos.

3.2. Evolución no lineal de las perturbaciones: el Universo en computadora

El campo de perturbaciones procesado en la época de la recombinación, caracterizado por la varianza $\sigma(M)$, es la condición inicial para calcular el proceso ulterior de formación de estructuras cósmicas. En un modelo donde la MOF domina, este proceso será en su primera fase de carácter netamente gravitacional. En el régimen no lineal ($\delta > 1$), la evolución gravitacional de las perturbaciones ya no permite estudiarlas por separado de

acuerdo a sólo su escala; todas las escalas se afectan unas a otras en el complejo proceso de colapso gravitacional. Por eso se requiere de simulaciones numéricas de N cuerpos. En la década de los 80 se realizaron las primeras simulaciones cosmológicas con $\sim 30,000$ partículas; hoy en día se superan las 10^{10} partículas en volúmenes de cientos de Megaparsecs por lado. En el método de los N cuerpos se usa un conjunto finito de partículas que muestrean la función de distribución subyacente. La discretización del sistema en N partículas “representativas” que se mueven a lo largo de las características del sistema subyacente, lleva a dos ecuaciones acopladas para calcular la aceleración instantánea que recibe cada partícula y así estimar su desplazamiento. La primera ecuación es la segunda ley de Newton para un campo gravitacional aplicada a cada partícula y la segunda describe el potencial gravitacional producido por la distribución de todas las partículas alrededor.

El problema de formación de estructuras cósmicas requiere entonces considerar un enorme intervalo de escalas. Para estudiar la estructura y evolución de esferoides colapsados (halos) de escalas galácticas, hay que usar partículas poco masivas para que el halo quede compuesto por miles o millones de ellas. Pero al mismo tiempo, hay que tomar en cuenta las escalas mayores al halo pues ellas influyen sobre su ensamblaje; además para lograr una muestra representativa del Universo, hay que simular volúmenes grandes lo cual multiplica el número de partículas y por ende el tiempo de cómputo. Los astrofísicos computacionales han ideado muchas técnicas para optimizar el cálculo y usan supercomputadoras cada vez más poderosas. Es toda una industria. Mencionemos algunos de los principales resultados obtenidos sobre la formación de estructuras cósmicas de puro MOF:

- ▶ La evolución gravitacional del campo de perturbaciones produce una estructura a gran escala conformada por paredes, filamentos, nudos y enormes huecos; se la bautizó como la esponja o telaraña cósmica (figura 5). Tal resultado es debido a que el colapso gravitacional es más eficiente siempre en el eje semi-menor de las estructuras: un elipsoide se achata formando una pared, una pared confluye hacia un filamento y el filamento confluye en un nudo. Todas estas estructuras conviven en la distribución de estructuras a gran escala.

- ▶ El grado de acumulamiento o correlación espacial de la materia es tal que a escalas más pequeñas mayor es el acumulamiento; hacia escalas grandes, $> 20 - 100$ Mpc, la distribución promedia de masa llega a ser incluso disgregada pues dominan los huecos. Esto es consecuencia directa del espectro de potencias inicial: la amplitud de las perturbaciones disminuye con la escala (figura 4).

- ▶ Las estructuras más pequeñas colapsan gravitacionalmente en promedio más temprano, formando sistemas en equilibrio virial soportados contra la gravedad por la dispersión de velocidades de sus partículas. Son los halos oscuros, estructuras en cuyos centros se forman las galaxias. La *función de masa de los halos*, es decir cuántos hay de cada masa por unidad de volumen, es una ley de potencias que decrece con la masa y a partir de cierta masa grande el decrecimiento se hace exponencial. Además, con el tiempo van apa-

reciando halos más masivos, producto de la fusión de los más pequeños y de la acreción de materia difusa (*ensamblaje jerárquico*). Los halos muy masivos al día de hoy pueden serlo tanto como los cúmulos ricos de galaxias.

► El perfil de densidad de los halos es aproximadamente universal, siendo los menos masivos más concentrados. Hacia el centro la densidad crece como $\rho(r) \propto r^{-\gamma}$, con $\gamma \approx 1$. La velocidad circular de los halos, $V_c(r) = \sqrt{\frac{GM(<r)}{r}}$, correlaciona con la masa como $V_c \propto M^{1/3}$. Los halos adquieren un pequeño momento angular por torcas de marea y muestran una muy rica población de subhalos con una función de masa tal que el número acumulativo de subhalos va como $N(> m_{sub}) \propto m_{sub}^{-1}$.

Todo lo descrito se refiere a estructuras de pura MOF. ¿Qué tiene que ver esto con las galaxias luminosas y las estructuras que ellas tejen a gran escala? Se entiende que el gas bariónico es atrapado gradualmente en los pozos potenciales de la MOF, disipa energía por procesos radiativos y fluye entonces hacia los centros de los halos oscuros formando sistemas en equilibrio, las galaxias. En el interior de ellas transcurre el drama cósmico de la formación y evolución estelar; la retroalimentación energética que éstas ejercen sobre el gas, en particular las explosiones de supernovas y los estallidos de rayos gamma; los choques de galaxias cuando sus halos se fusionan; el engorde de hoyos negros supermasivos en los centros galácticos y las poderosas eyecciones de gas que se producen en el disco de acreción hacia estos hoyos negros⁹; y así, una larga lista de complejos procesos astrofísicos, muchos de ellos poco entendidos aún. A través de simulaciones cosmológicas que incluyen la hidrodinámica y los mencionados procesos, así como con métodos semi-analíticos y semi-empíricos, se está buscando llevar el modelo cosmológico actual a sus últimas consecuencias: las propiedades y evolución de las galaxias, incluso de las más pequeñas.

4. Éxitos y retos a futuro

De las fluctuaciones cuánticas a las galaxias luminosas, del plasma caliente dominado por radiación y otras partículas relativistas al Universo frío en expansión acelerada y con estructuras tan complejas como los seres con conciencia. Así de ambicioso es el modelo cosmológico. Su principal base, la TGR y la teoría de la Gran Explosión, han pasado todo tipo de pruebas de refutabilidad haciendo predicciones hasta ahora comprobadas. En particular, hay tres predicciones fundamentales de la teoría de la Gran Explosión que han sido demostradas observacionalmente: (1) el corrimiento al rojo de las galaxias debido a la expansión (prueba de que el Universo no es estacionario, tal como predijeron las ecuaciones de Friedmann), (2) las abundancias de los elementos ligeros producidas en la nucleosíntesis primigenia y (3) la RCFM que proviene de todo el cielo con una temperatura promedio de $T_0 = 2.725$ K y una distribución de cuerpo negro perfecta. Además las

⁹Véase el capítulo “Agujeros negros” de Miguel Alcubierre, en este mismo libro.

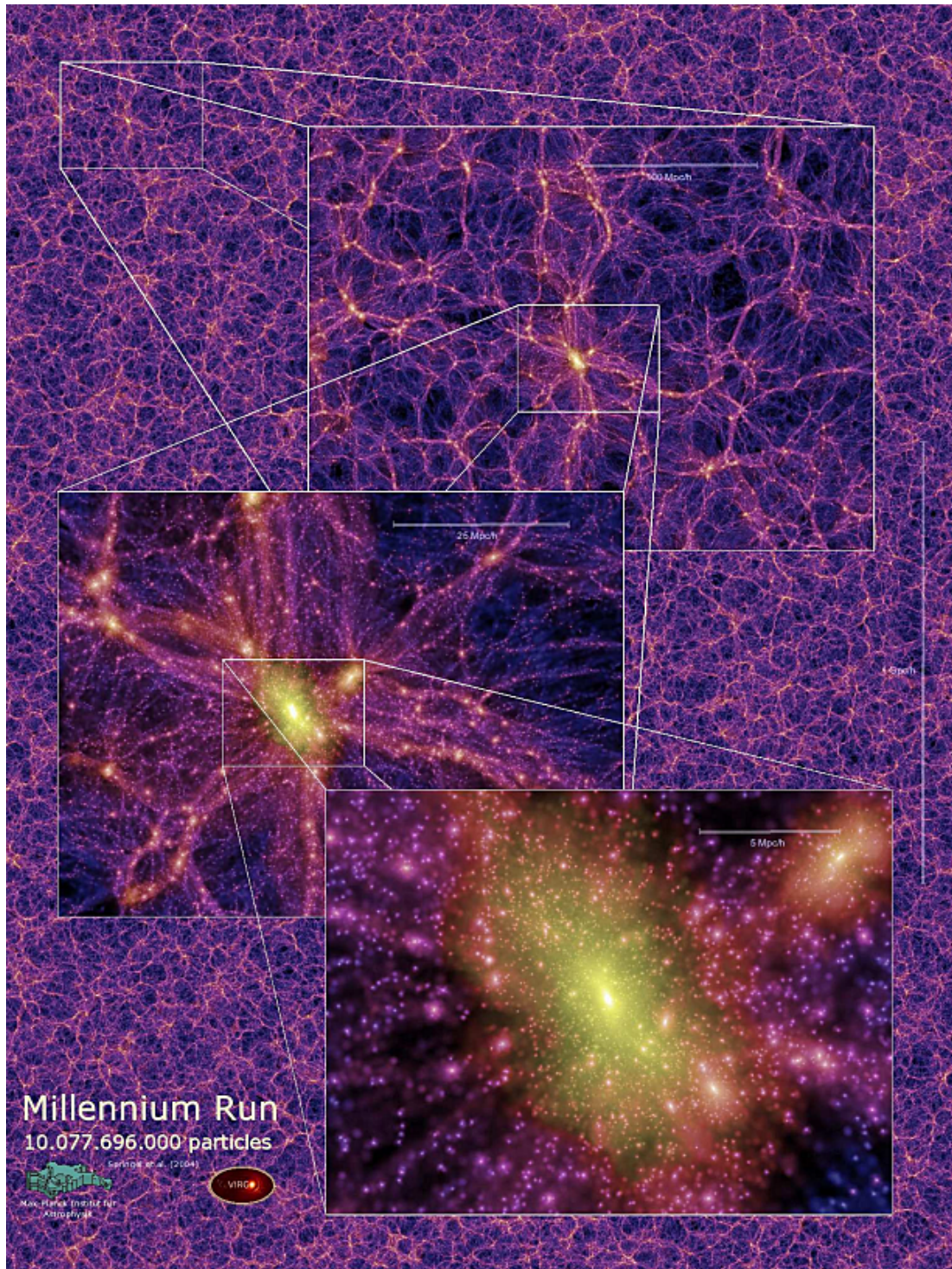


Figura 5: La telaraña cósmica de gran escala obtenida en la simulación cosmológica de puro MOF *Millennium*. Se muestran acercamientos a diferentes escalas, correspondiendo el recuadro inferior a la escala de un halo de cúmulo de galaxias; nótese la riqueza de subhalos al interior de dicho halo. El gas bariónico tiene que ser atrapado gravitacionalmente por los (sub)halos y al disipar energía radiativamente, cae al centro de los mismos donde formará galaxias luminosas.

observaciones de la distribución de galaxias a grandes escalas así como la uniformidad de la RCFM comprueban que el Principio Cosmológico es válido en la época de la recombinación y actualmente a escalas mayores a ~ 300 Mpc; a escalas mucho menores, la gravedad ha hecho que la distribución de materia sea altamente inhomogénea localmente.

El modelo MOF- Λ , como todo modelo estándar, por un lado tiene parámetros que deben ser constreñidos con las mediciones y por otro, hace predicciones finas que deben ser comprobadas con el experimento/observación. Y claro, tiene limitaciones, como ser la explicación de por qué los parámetros tienen los valores que se miden. ¿Cuál es el estatus del modelo cosmológico estándar en estos aspectos?

4.1. Mediciones de los parámetros cosmológicos

Para el modelo MOF- Λ plano, entre los parámetros del universo homogéneo (ver §2.1) y los relacionados a las perturbaciones suman media docena. Si se relajan suposiciones como la de curvatura cero y se generaliza la constante cosmológica a otras formas de energía oscura (EO), los parámetros aumentan a más de una docena. Es casi imposible que un único sondeo cosmológico pueda constreñir todos los parámetros de manera independiente. Por eso la estrategia ha sido combinar varios sondeos observacionales. En orden de precisión y menor degeneración (dependencias) entre los parámetros, los principales sondeos usados han sido: las anisotropías de la RCFM medidas con el satélite WMAP; el diagrama de Hubble con supernovas tipo Ia (SN Ia)¹⁰; el tamaño angular de la huella de las oscilaciones acústicas bariónicas (ver §3.1) en la distribución espacial de galaxias a $z > 0$; la distribución a gran escala de las galaxias luminosas, misma que permite reconstruir el espectro de potencias de las perturbaciones; la densidad de materia Ω_m que se infiere de estudios en rayos X de cúmulos de galaxias y suponiendo que la fracción de materia oscura a bariónica de los cúmulos es la misma del Universo; el valor del parámetro de Hubble local, H_0 , medido de la ley de Hubble, $v_r = H_0 \times D$ usando patrones lumínicos precisos (p. ej. estrellas cefeidas) a grandes distancias con el 'Hubble Space Telescope'.

La última década ha sido espectacular en resultados de sondeos cosmológicos que han permitido constreñir la mayoría de los parámetros con precisiones menores al 5 – 10 %. Como resultado, las mediciones indican que el Universo en el que vivimos tiene las siguientes propiedades (por lo menos en nuestra idealización de cosmologías tipo FLRW):

- Curvatura del espacio: es plana (euclideana) al 0.6 % $\Rightarrow \Omega_{tot} = 1$
- Composición: $\Omega_b = 0.046 \pm 0.002$, $\Omega_{MOF} = 0.227 \pm 0.014$, $\Omega_\Lambda = 0.728 \pm 0.016$

¹⁰Usando las SN Ia como patrones lumínicos, la observación de las mismas hasta $z \sim 1.7$ permitió calcularles sus distancias lumínicas d_L y ponerlas en el diagrama $d_L - z$ donde cada modelo cosmológico tiene su curva, dependiendo principalmente de la historia de tasa de expansión del dado modelo. Desde las primeras mediciones por dos grupos independientes que recibieron el Nobel en Física 2011 por eso, los modelos que mejor ajustan son aquellos que muestran expansión acelerada desde $z \approx 0.5$, siendo antes desacelerada. Esto implica entonces densidad positiva de constante cosmológica Ω_Λ o energía oscura en general.

- Tasa de expansión: $H_0 = 74.3 \text{ kms}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = 1/13.198 \text{ Gaño}^{-1}$ al 3 %
- Espectro de potencias: $\sigma_8 = 0.812 \pm 0.026$ (normalización), $n_s = 0.960 \pm 0.013$ (pendiente, equivalente a $\alpha \approx 2/3$ en $\sigma(M) \propto M^{-\alpha}$, ver. ecuación 3)

La edad actual que implican estos parámetros es de 13.72 Gaños al 1 % y el volumen para la geometría plana es infinito. A costa de aumentar parámetros, se puede relajar la condición de que el índice de la ecuación de estado de la EO es -1 (válido para el caso de constante cosmológica). Suponiendo que w_{EO} es constante, se encuentra que $w_{EO} \approx -1$ (entre -0.9 y -1.1). Suponiendo que w_{EO} cambia con z como una función de 2 parámetros, se encuentra que el caso de $w_{EO} = -1$ y constante es compatible con las inferencias dentro del 1σ . Las mediciones permiten también constreñir el número efectivo de familias de neutrinos, N_{eff} . Esto depende bastante del valor de H_0 ; para la determinación reciente reportada arriba, $N_{eff} = 4.13 \pm 0.67$, sugiriendo la existencia de una cuarta especie de neutrinos. Para determinar H_0 con precisión se requirió de un estudio muy detallado de calibración de estrellas cefeídas cercanas con el telescopio infrarojo 'Spitzer'. Es asombroso que la astronomía, una vez más, ponga restricciones a las propiedades de las partículas elementales: cortesía de la unidad que prima en la naturaleza.

4.2. Consistencia y predicciones

Habiendo quedado definidos los parámetros del modelo estándar MOF- Λ , es importante constatar que el mismo sea consistente globalmente con las diversas observaciones que se usaron para constreñirlos y que, aquello que sean predicciones a nivel de evolución de estructuras cósmicas, concuerde con la realidad.

La primera gran consistencia a remarcar es el *espectro de potencias angular de las anisotropías de la RCFM* (figura 3). Este espectro contiene el código genético del Universo y tiene que ver con la riqueza de los procesos físicos tempranos descritos en §§3.1. Cuesta creer que un modelo que se desvíe de la TGR y no contenga la fracción dominante de MOF del modelo estándar pueda ser consistente con semejante acuerdo conceptual como es para el modelo MOF- Λ . Para rematar, según el modelo, el efecto de las *oscilaciones acústicas bariónicas* del plasma caliente detectadas en la RCFM tienen que dejar impresa su huella en la distribución de galaxias a gran escala $\sim 13,000$ millones de años después, algo que se observa en los catastros modernos de cientos de miles de galaxias.

La segunda consistencia a remarcar tiene que ver con escalas menores a las detectadas en las anisotropías de la RCFM. El espectro de potencias o varianza $\sigma(M)$ de las perturbaciones en el régimen lineal que predice el modelo MOF- Λ no se deforma demasiado a escalas intermedias y/o épocas remotas pero aún accesibles al telescopio. Entonces, aplicando correcciones por evolución gravitacional lineal bien entendidas, se puede inferir de ciertas observaciones el valor de σ a diferentes escalas; de mayor a menor, algunos de estos sondeos observacionales son (ver figura 4): las abundancias de cúmulos en el Universo local, la función de autocorrelación de dos puntos medida en catastros de galaxias locales, mediciones de lente débil alrededor de galaxias, el espectro de potencias de las nubes de

$\text{Ly-}\alpha$ en absorpci3n a $z \sim 2 - 3$ (protogalaxias), etc. *El acuerdo de estas observaciones con el $\sigma(M)$ del modelo MOF- Λ consistente con la RCFM es remarkable.*

Las simulaciones cosmol3gicas descritas en §§3.2 hacen *predicciones detalladas de la estructura a gran escala de MOF* (figura 5). Sembrando galaxias con m3todos semi-anal3ticos o semi-emp3ricos en la telaraña oscura, se obtienen enormes catastros simulados de galaxias que se pueden comparar con los catastros reales. El acuerdo es asombroso. La estructura filamentaria del Universo observado es indistinguible de la predicci3n. Las propiedades estadísticas que se miden en ambos casos, como ser la funci3n de autocorrelaci3n de dos puntos, coinciden muy bien. Esta funci3n para galaxias reales de distintos tipos, es diferente: galaxias m3s rojas y viejas suelen estar m3s acumuladas que las m3s azules y j3venes. Lo mismo ocurre con las galaxias modeladas. Pero este acuerdo no se limita al Universo local sino que se da tambi3n en las comparaciones que se han hecho a altos corrimientos al rojo.

En el caso de los cúmulos y grupos, la masa total (dominada por MO) de estos sistemas se puede medir a trav3s de la cinemática de las galaxias que los conforman o por la temperatura del gas en rayos X que abunda en ellos. Haciendo conteos de estos objetos se puede entonces medir cúantos de una dada masa total hay por unidad de volumen (*funci3n de masa*). La funci3n de masa de grupos/cúmulos observada es similar a la funci3n de masa de halos grandes ($M > 10^{13} M_{\odot}$) obtenida en el modelo MOF- Λ (ver §§3.2).

A escalas m3s pequeñas (galaxias), las predicciones directas se complican (1) por la alta no linealidad involucrada y (2) por el efecto de los bariones cuya f3sica es mucho m3s compleja que la gravitacional que rige a la MOF. No obstante, hay ciertas propiedades y correlaciones que no se afectan tanto aparentemente por estos efectos. Una de ellas es la estrecha relaci3n entre la masa estelar (o luminosidad) de las galaxias de disco, como la nuestra, con su velocidad de rotaci3n: $M_s \propto V_{rot}^n$ con $n \approx 3.3$ (*relaci3n de Tully-Fisher*). Esta dependencia es muy similar a la predicha para los halos de MOF (ver §§3.2).

4.3. Retos a mediano plazo

El modelo MOF- Λ es totalmente consistente con la compleja f3sica involucrada en las anisotropías de la RCFM así como con el espectro de potencias en masa a escalas intermedias que se infiere de múltiples observaciones. El modelo hace predicciones asombrosas en lo que respecta a la estructura de gran escala del Universo y las abundancias de cúmulos y grupos de galaxias. Los retos y el principal desarrollo lógico en el campo para los siguientes 5-10 años están ahora en: **(1)** sondear las predicciones del modelo a escalas galácticas y subgalácticas para lo cual se requiere consolidar una teor3a de formaci3n y evoluci3n de galaxias acorde con las observaciones actuales y las que vendrán, y **(2)** entender y comprobar la naturaleza de las componentes invisibles dominantes que son parte del modelo. Veamos m3s en detalle estos retos.

(1) Sondeos a pequeñas escalas. En la actualidad se debaten acaloradamente potenciales problemas del modelo MOF- Λ a estas escalas. Los m3s relevantes son: (a) los halos de

MOF parecen ser más concentrados hacia el centro (ver sobre el perfil de densidad §§3.2) que lo que se infiere de determinaciones dinámicas en galaxias enanas y de bajo brillo superficial; (b) el número y concentración de los subhalos al interior de halos galácticos (ver §§3.2) parecen ser excesivos comparados a lo que trazan las galaxias satélites en la Vía Láctea y Andrómeda; (c) el ensamblaje de masa estelar de las galaxias formadas en los halos menos masivos de MOF parece ser demasiado temprano con relación a lo que se infiere de las observaciones para estas galaxias.

En general, estos problemas podrían señalar que el MOF- Λ implica demasiada potencia (densidad) a escalas $\lesssim 10^{10} M_{\odot}$. Desde el punto de vista de formación de estructuras, el MOF- Λ es el modelo más simple: un espectro de potencias (o varianza $\sigma(M)$) sin corte, partículas oscuras con velocidad ≈ 0 y completamente no auto-interactantes (no colisionales). Se pueden introducir modificaciones. Por ejemplo, si se propone **MO tibia (MOT)** en vez de fría, aparece un corte natural en el espectro de potencias a escalas $\sim 10^8 - 10^{10} M_{\odot}$. Partículas exóticas de MOT pueden ser los *neutrinos estériles*, los *gravitinos*, etc. Los halos menores a $\sim 10^{10} M_{\odot}$ ya no se forman en este caso a no ser por fragmentación tardía de estructuras mayores. Los halos mayores al corte son algo menos concentrados que en el caso de MOF y a escalas más grandes ya todo es igual que en el caso de MOF. El modelo tibio (MOT- Λ) mantiene el éxito del frío (MOF- Λ) a grandes escalas y resuelve el aparente problema de los satélites (y quizá el de ensamblaje estelar muy temprano).

No obstante, en el escenario de MOF- Λ , considerando correctamente los procesos astrofísicos de formación de galaxias, se puede también explicar por qué habiendo tantos subhalos pequeños en el halo de la Vía Láctea es que se observan tan pocas galaxias satélites: el potencial gravitacional en ellos es tan débil que el gas calentado por el fondo de radiación UV no puede ser atrapado y el que se atrapa se pierde fácilmente con unas pocas supernovas que exploten. Eso sí, tendría entonces que existir una gran cantidad de subhalos oscuros poblando el halo de nuestra y otras galaxias. En el caso de MOT, esta población no existe. Entonces un reto observacional clave para decidir entre MOF (por ej. neutralinos) y MOT (p. ej. neutrinos estériles) es *descubrir si existe esa abundante población de subhalos oscuros*, para lo cual se están aplicando técnicas de lente gravitacional, el futuro de la astronomía observacional (figura 4). También se planea explorar la distribución del gas de hidrógeno en el remoto pasado, cuando aún no se formaban las galaxias ($z \sim 10 - 20$), y ver si hay sobredensidades a escalas muy pequeñas lo cual descartaría a la MOT. Es muy emocionante la situación: con telescopios se podría definir sobre la naturaleza de las partículas elementales exóticas dominantes en el Universo; en un caso se trata de partículas de modelos supersimétricos, en el otro, de introducir algunas especies más de neutrinos.

Otro tipo de modificación que se introduce es la de proponer que las partículas oscuras puedan auto-interactuar moderadamente, en cual caso el proceso de colapso gravitacional implica cierto grado de efectos gravo-térmicos que afectaría principalmente las regiones centrales de los halos, pudiéndolos hacer menos concentrados ahí.

Sin embargo, es importante recalcar que las pruebas a pequeñas escalas son muy de-

pendientes de la “gastrofísica”, es decir de los complejos procesos de formación y evolución de las galaxias bariónicas. Por eso, uno de los retos claves es contar con una teoría para estos procesos por un lado y por otro, perfeccionar las observaciones locales y del pasado de la población de galaxias de baja masa. Es muy probable que los potenciales problemas mencionados arriba se deban más que a un problema del MOF- Λ , a procesos físicos aún no entendidos en la evolución de las galaxias y en la interpretación de las observaciones.

(2a) ¿Qué es la materia oscura? misma que en el modelo estándar constituye el 22.5% de la densidad cósmica en el Universo actual y que se evoca para explicar las fuerzas faltantes inferidas en observaciones de galaxias, grupos/cúmulos de galaxias, de lente gravitatoria y de movimientos de bulto a gran escala. Desde el punto de vista de formación de estructuras (§3), la MO debe ser de tipo fría, aunque podría ser también tibia (ver el punto (1) arriba). La propuesta más aceptada para la MOF es que son *partículas masivas débilmente interactuantes*, como las de los modelos *supersimétricos* introducidos para superar las limitaciones del Modelo Estándar actual de partículas y campos. La combinación lineal más ligera de partículas supersimétricas son los *neutralinos*, χ ; éstas son partículas neutras, sin carga de color, interactuantes sólo a nivel electrodébil y gravitacional, no decaen en partículas ordinarias y su densidad cósmica, establecida en el Universo temprano, concuerda con el valor de Ω_{MOF} actual. Estas propiedades y sus masas, predichas en valores $m_\chi \gtrsim 100$ GeV, es lo que se requiere como MOF en el modelo cosmológico estándar.

Evidencias experimentales de la existencia de los neutralinos o partículas similares; es el gran reto. Se dice que el Premio Nobel está asegurado para el grupo que descubra tales partículas. Y no es para menos pues se confirmaría, por un lado, la propuesta de supersimetría y por otro, el modelo cosmológico actual. Existen muchos experimentos bajo tierra o en minas a la caza de estas elusivas partículas. Si existen, al no interactuar electromagnéticamente, atraviesan átomos y moléculas de manera desapercibida. No obstante, hay una mínima probabilidad de dispersión elástica (colisión) con los núcleos atómicos; si se da esta dispersión, el núcleo rebota y excita algunos niveles electrónicos del átomo; la desexcitación produce fotones de una cierta energía que se esperan detectar en los experimentos. Hasta el momento, los reportes de algunos experimentos han sido marginalmente positivos (v. gr. DAMA/LIBRA, CREST-II, CoGeNT) y otros negativos (v. gr. CDMS Xenon10, Xenon100). La búsqueda continúa, aunque aún limitada a un reducido espacio de parámetros. Existen también candidatos a MOF de naturaleza diferente como los axiones.

Evidencias indirectas de los neutralinos pueden darse a través de observaciones en rayos gamma hacia ciertas regiones del cielo donde se estima que la MOF es densa (centro de la Galaxia, galaxias satélites cercanas, cúmulos de galaxias). Resulta que, al ser partículas Majorana, el χ es su propia antipartícula, de tal manera que si chocan, se aniquilan en fotones de rayos gamma de una dada energía. Detectores directos de rayos gamma en el espacio así como aquellos en tierra basados en la detección de los chubascos de partículas que producen los fotones gamma en la atmósfera, están en la incesante busca de este tipo

de evidencias; algunos dicen tener ya cierta señal pero no aún con la exactitud necesaria. La aniquilación de $\chi\bar{\chi}$ produce también pares e^+e^- , $\nu\bar{\nu}$, etc. que se están buscando con diversos tipos de detectores.

Por último, cabe la posibilidad de que a las energías que alcance el LHC se pueda dar la producción y descubrimiento (indirecto) de partículas supersimétricas de existir ellas.

(2b) ¿Qué es la energía oscura? o más en general, ¿qué causa la expansión acelerada reciente del Universo (apenas desde $z \sim 0.5$ ó $a \sim 0.67$)? El caso de la constante cosmológica (con $\Omega_\Lambda=0.73$) es consistente con las observaciones actuales. La encarnación física más inmediata de Ω_Λ es la de una remanente del vacío cuántico de la inflación tal que desde $z \sim 0.5$ supera al término de materia en la ecuación (1) de Friedmann y actuó por ende repulsivamente dada su presión negativa, $P = -\rho_{vac}c^2$ (ver §§2.1). Esta propuesta tiene dos conflictos estéticos: (1) es un ajuste increíblemente fino el que después de la inflación quede un valor del campo del vacío $\sim 10^{122}$ veces menor (§§2.3) y (2) es anticopernicano que esta despreciable fracción de vacío empiece a dominar justo cuando el factor de escala del Universo, $a \sim 0.67$, es cercano al actual, $a = 1$.

En vista de estos problemas, se ha desarrollado un enorme número de alternativas para explicar la expansión acelerada. En lo más general, se las puede dividir en aquellas:

(1) que plantean que existe físicamente la EO -es un término más en la parte derecha de la ecuación de Einstein (F1, figura 1);

(2) que modifican la TGR (parte izquierda de dicha ecuación) y/o introducen más dimensiones, siendo la gravedad la única interacción que se propaga por todas;

(3) que proponen que la expansión acelerada no es global sino que debido que estamos en una subdensidad de gran escala o es el producto de la acción recíproca de las inhomogeneidades (perturbaciones) de gran escala.

También se han planteado alternativas que combinan (1) y (2). En el caso de EO como un término fuente, se proponen modelos con campos escalares que tienen índices de ecuación de estado diferentes de $w_{EO} = -1$ y que cambian con el tiempo (v. gr., quintaesencia, energía Fantasma, campos camaleónicos, etc.) o de plano con ecuaciones de estado distintas a la usual (v. gr. gas de Chaplygin.).

Los astrónomos abrieron la caja de Pandora, ellos deben cerrarla. Ha habido una explosión de ideas teóricas con relación al problema de la EO; sin duda es tierra fértil para la creatividad físico-matemática. No obstante, la guía metodológica para avanzar en este fascinante problema en los siguientes años está estrechamente relacionada con las observaciones. Lo más sensato es enfocarse primero en comprobar si la EO tiene las propiedades de Λ , es decir si $w_{EO} = -1$ y constante. Proyectos astronómicos en curso buscarán extender el diagrama de Hubble hasta $z \sim 3-5$ con alta precisión, de tal manera que $w_{EO} = -1$ se pueda constreñir con una exactitud $< 5\%$, así como constatar que w_{EO} no cambia en el tiempo. Una mayor exactitud en la determinación del espectro de potencias de las perturbaciones es también clave para explorar si la EO es uniforme, como lo es para Λ , o si está sujeta a desviaciones de la uniformidad. Los sondeos deben también ser capaces de discriminar posibles modificaciones a la TGR, para lo cual se requieren de determinaciones de w_{EO}

que sean sensibles al mismo tiempo a la historia de expansión (escala global) como a la tasa de crecimiento de las estructuras cósmicas (escalas menores). Diferencias entre ambas determinaciones señalarían la necesidad de modificar la TGR. Creatividad y mucho esfuerzo deben ser dedicados para realizar estos asombrosos experimentos astronómicos donde, en cierta manera, el objeto “manipulado” es el Universo y sus estructuras.

5. Perspectivas y Epílogo

A lo largo de este Capítulo vimos cómo se fue integrando el conocimiento básico de la física y astrofísica en un modelo capaz de describir la evolución del Universo y sus perturbaciones y cuyos parámetros, gracias al impetuoso avance de la astronomía, han sido determinados con precisión. Sin embargo, este modelo dista mucho aún de ser una teoría; es más bien un punto de partida para empezar la exploración integral de lo que será seguramente un nuevo paradigma en la ciencia, un paradigma que atañe a los aspectos más fundamentales de la naturaleza física, el espacio-tiempo y la integración del micro- y macro-cosmos en un contexto evolutivo. Los valores medidos de los parámetros del modelo estándar no dejan de ser sorprendentes, con una composición del Universo dominada en más de un 95 % hoy en día por posibles componentes invisibles y ajenas a las partículas y campos del Modelo Estándar de la física de altas energías. Cuando mejor parecía que llegamos a conocer observacionalmente nuestro Universo, se vienen a revelar nuevos grandes misterios.

Ante la pléora de propuestas teóricas surgidas para abordar estos misterios, el camino a seguir en la siguiente década será seguramente el descrito en §4.3: más que confirmar propuestas concretas, la estrategia es ir descartando muchas de ellas así como regiones del espacio de parámetros de dichas propuestas. Para ello se requiere lograr más precisión, tanto en la determinación de los parámetros cosmológicos, como de las posibles familias de partículas y campos más allá de los modelos estándar respectivos. Si el modelo MOF- Λ persiste en el marco de observaciones más precisas y hacia las escalas galácticas/subgalácticas, y la propuesta que la MOF son partículas supersimétricas (p. ej. los neutrininos) se confirma directa o indirectamente (ver §4.3), entonces la reveladora unidad entre “partículas y galaxias” abrirá el camino a una nueva teoría unificada de campos. Esto aplica también si es que hay un corte en el espectro de potencias y la MOT (v. gr. neutrinos estériles) es favorecida.

Es muy probable que en el contexto de una nueva teoría unificada de campos, las dos componentes oscuras del modelo MOF- Λ sean en realidad más y tengan cierto tipo de interacción en el sector oscuro. De comprobarse algo así, esto abriría las puertas para una descripción unificada de la MO y EO (Λ en este caso) y de la posibilidad de escudriñar más allá de la era de Planck ($t \lesssim 10^{-43}$ s, ver §2.2), hacia lo que llaman Teorías del Todo.

Una pregunta que raya en lo metafísico por ahora es si hubo o no un principio, un tiempo cero. Como vimos en §2.2, si no se toman en cuenta los efectos cuánticos sobre la

gravedad, existe entonces una singularidad gravitacional y por ende un tiempo cero. No obstante, no hay razón para obviar dichos efectos en vista de su rol fundamental en todo proceso de altas energías y de unificación de los campos de interacción. Desde el punto de vista cuántico, las partículas no pueden ocupar un espacio menor a su longitud de onda, cosa que ocurre a escalas menores a la de Planck. Entonces el espacio-tiempo tiene que ser cuantizado, lo cual implica que pierde su propiedad de continuidad y ya no tiene sentido preguntarse que pasó antes del tiempo de Planck; el tiempo como tal no existía. Definitivamente una de las grandes cuestiones abiertas para el futuro es la física de la época de Planck y antes, donde surgen formulaciones cuánticas como las del Multiverso.

El modelo MOF- Λ tiene en la inflación aún una frontera que carece de evidencias observacionales directas. La señal más tangible que se predice son las ondas gravitacionales que se manifiestan en la polarización de las anisotropías de la RCFM. Dicha polarización (modo B) es muy tenue y con el WMAP se logró poner sólo cierta cota superior a su valor, lo cual descartó por lo pronto algunos modelos de inflación. Con el satélite Planck, ya en órbita, se espera detectar el modo B y si es que no se logra, entonces pondrá una nueva cota superior. Se puede pensar entonces en experimentos para detectar dicho modo, aunque este tipo de experimentos, costosos y con un único objetivo, no son la mejor estrategia. Es un reto a futuro encontrar la manera adecuada de lograr evidencias más directas de esa fase clave que se propone en la historia del Universo, la inflación.

El problema de la EO, de encontrarse que $w_{EO} \neq -1$, podría despuntar también en la dirección de modificaciones a la TGR y/o de introducir dimensiones extra que se proyectan sobre nuestra brana 3D. Nótese que la validez de la TGR y de la gravedad newtoniana como su límite de campo débil, ha sido comprobada experimentalmente sólo hasta escalas del sistema solar. En los contextos de modificación a la TGR y dimensiones extra hay también cabida para descripciones unificadas, es decir que resuelvan tanto el problema de la EO, como de la MO, bajo el mismo esquema. De ser estas las explicaciones a los problemas de la MO y EO, faltaría rehacer toda la cosmología y formación de estructuras de tal manera que logre el acuerdo con las observaciones como lo hace el modelo MOF- Λ .

Finalmente, los avances en la cosmología, astrofísica y física de partículas -en un enfoque multidisciplinario- permitirán seguramente al intelecto humano en las siguientes décadas abordar científicamente cuestiones como las del principio antrópico y la teleología. Por ahora, simplemente es una curiosidad la marcada tendencia observada en nuestro Universo a desarrollar estructuras cada vez más complejas, tal como son los observadores que lo estudian. Nuestra civilización y otras civilizaciones, sin ser el fin último, podemos constatar que un camino evolutivo hacia formas de existencia aún más complejas está en nuestras manos y esto requiere, antes que nada, capacidad de entender la naturaleza y a nosotros como parte de ella. El rol de la cosmología en el quehacer humano es clave. A este propósito cito, para culminar, palabras del Karl Popper:

“Creo, sin embargo, que al menos existe un problema filosófico por el que se interesan todos los hombres que reflexionan: es el de la cosmología, el proble-

ma de entender el mundo... incluidos nosotros y nuestro conocimiento como parte de él. Creo que toda ciencia es cosmología, y, en mi caso, el único interés de la filosofía, no menos que el de la ciencia, reside en los aportes que ha hecho a aquella; en todo caso, tanto la filosofía como la ciencia perderían todo su atractivo para mí si abandonasen tal empresa."

6. Algunas lecturas recomendadas

A continuación sigue una lista de publicaciones del mismo autor, recomendadas para profundizar en este tema.

1. V. Avila-Reese, "La historia del universo," en *Origen, naturaleza y conocimiento del universo. Un acercamiento interdisciplinario*, Ed. H. Velázquez Fernández, pp. 51–66, 2004.
http://miro.fisica.unam.mx/var/171_4.pdf
2. V. Avila-Reese, "El espacio y el tiempo en la astronomía," en *Diccionario Tiempo Espacio*, Eds. B. Berenzon & G. Calderón, vol. Tomo I, pp. 73–90, 2008.
http://miro.fisica.unam.mx/var/e_t_full.pdf
3. V. Avila-Reese, "Un universo inverosímil," *Ciencia*, vol. 60, no. 1, pp. 55–66, 2009.
<http://miro.fisica.unam.mx/var/08-UniversoInverosimil.pdf>
4. V. Avila-Reese, "Un universo inverosímil o ¿necesidad de un nuevo paradigma en la física?" *Boletín de la Sociedad Mexicana de Física*, vol. 23, no. 3, pp. 143–146, 2009.
<http://miro.fisica.unam.mx/var/Boletin-electronico-233.pdf>
5. V. Avila-Reese, "En el mundo de las galaxias," *Revista Digital Universitaria*, vol. 12, no. 5, 2011.
<http://www.revista.unam.mx/vol.12/num5/art50/>
6. V. Avila-Reese and L.F. Rodríguez, "En expansion acelerada: el Premio Nobel de física 2011," *Boletín de la Sociedad Mexicana de Física*, vol. 25, no. 4, pp. 231–236, 2011.
<http://miro.fisica.unam.mx/var/bol-25-4.pdf>
7. V. Avila-Reese, "Materia invisible en el Universo", Memorias de la Reunión "Ciencia y Humanismo", Academia Mexicana de Ciencias, pp. 41–50, 2012.
<http://miro.fisica.unam.mx/var/MI-Avila.pdf>

La materia y sus nuevas estructuras

Genaro Toledo, Instituto de Física, UNAM, México

1. Introducción

Cada objeto material que observamos a nuestro alrededor está formado por una colección de elementos más pequeños, cuyas propiedades determinan las características del objeto que forman. De esta observación surgen dos preguntas muy importantes: i) Si esto es válido para objetos cada vez más pequeños, ¿existe el objeto último que ya no es una colección de elementos? ii) Si se manipulan las propiedades de los elementos, ¿se pueden modificar las características del objeto que conforman?

En éste capítulo abordamos estas preguntas de manera conjunta, mostrando los grandes logros alcanzados hasta el momento en la búsqueda del elemento último y las inmensas posibilidades de crear nuevos objetos, utilizando el conocimiento de las propiedades de los elementos conocidos. Para dar una perspectiva amplia, comenzamos con una breve revisión del concepto de átomo. El saber que éste tiene estructura, nos llevará a introducir a los electrones y al núcleo atómico como sus componentes, identificaremos a los electrones como un tipo de elementos llamados leptones, mientras que el núcleo veremos que está formado por otros tipos de elementos, los protones y neutrones, los que a su vez están compuestos de otros elementos llamados quarks, de los que existen seis tipos. De entre ellos, sólo dos forman naturalmente a los neutrones y protones. En este punto será relevante describir a la interacción fuerte entre quarks. Veremos que la magnitud de ésta interacción es diferente dependiendo de la energía a la que ocurre. Mientras que a bajas energías es efectivamente muy intensa, haciendo que los quarks se ligen y formen grupos como los protones y neutrones, a altas energías esta interacción decrece considerablemente lo que permite a los quarks una libertad aparente.

Lo descrito anteriormente nos llevará a preguntarnos qué tipo de grupos se pueden formar, haremos énfasis en los llamados hiperones los cuales incluyen un tipo de quark distinto a los que forman al protón y al neutrón, y si estos a su vez pueden formar un tipo nuevo de núcleos, los llamados hipernúcleos. Más aún, nos preguntaremos cuántos quarks son necesarios para formar a estos grupos. Mostraremos entonces a los llamados estados exóticos que contienen un número mayor de quarks que los que forman a un

protón. Con las características de la interacción fuerte, veremos cómo se comporta la materia en condiciones extremas de temperatura o densidad. Lo primero se hace explorado experimentalmente colisionando núcleos pesados a altas energías; mientras que para el segundo caso, se estudia la materia y sus propiedades en el interior de las estrellas de neutrones. Todos estos aspectos son líneas de investigación activa y con el progreso alcanzado en este campo, concluiremos dando una perspectiva para este siglo, el cual se perfila como uno en el que bien podrían descubrirse nuevas estructuras de la materia.

2. Atomismo

El concepto de elemento último existía en la India y la Grecia antigua (Demócrito 450 AC), pero más allá del terreno especulativo, no existía el conocimiento científico ni la capacidad tecnológica para adentrarse en estos objetos más allá de unas cuantas micras¹. Así, podemos entender que una roca caliza al ser triturada resulta en pequeños residuos con propiedades similares a las de la roca original. Es hasta el siglo XIX que el uso de métodos más elaborados para el estudio y la caracterización sistemática de los materiales dieron como resultado la identificación de elementos los cuales podían ser entendidos como de un solo tipo o átomo y que su combinación daba lugar a los compuestos químicos. Este resultado se debe a John Dalton, quién postuló la primera teoría científica del átomo en 1805.

Esta versión de la estructura de la materia tiene su representación más práctica en la llamada Tabla periódica de los elementos propuesta por Dmitri Mendeléyev en 1897 [1]. Así, por ejemplo, un átomo de oxígeno puede combinarse con dos átomos de hidrógeno para formar un objeto denominado molécula de agua con un tamaño típico de 3 Angstroms con propiedades físicas y químicas distintas a la de los átomos con los que fue creado². Esta simple observación nos permite apreciar el gran potencial que representa conocer a todos los átomos y sus propiedades. Si podemos combinarlos en formas novedosas, podemos crear materiales con nuevas características. Las innovaciones en materiales que vemos en nuestros días es fruto de la carrera tecnológica en esta dirección³. La búsqueda de estos nuevos materiales no es a ciegas, ésta explota las propiedades intrínsecas de los átomos mismos.

3. La estructura del átomo y la estructura nuclear

El átomo está formado, a su vez, por otros elementos más pequeños: protones, neutrones y electrones. En su parte central se concentran los protones y neutrones formando un núcleo al cual le circundan los electrones. En este punto es importante establecer las

¹ Un grano de polvo mide aproximadamente una micra ($1\mu m = 10^{-6}$ m).

² $1\text{Å} = 1 \times 10^{-10}$ m. 1Å es el valor típico del tamaño de un átomo.

³ Véase “Los nuevos materiales del siglo XXI” de Gonzalo González en este mismo libro.

características de estos elementos básicos para entender al átomo. Algunas de sus propiedades relevantes son: la masa (M), la carga eléctrica (Q_e) y el espín (s). En la Tabla 1 se presentan algunas propiedades de los componentes del átomo.

Consideremos, en esta imagen, la forma en que se construye un átomo. El átomo más simple es el de Hidrógeno, con un protón constituyendo el núcleo y un electrón orbitando. Dado que ambos tienen cargas eléctricas opuestas, ellos se atraen entre sí. Sin embargo, se sabe que una carga eléctrica en una trayectoria circular necesariamente emite radiación; pero ésta no es observada. La mecánica cuántica viene a explicar éste hecho, al mostrar que la forma en que el electrón puede desprenderse de energía por radiación no es un continuo sino que adquiere valores discretos.

El siguiente elemento en complejidad es el Helio, el cual consiste de dos protones en el núcleo y dos electrones orbitando. Dependiendo de las condiciones de formación, el núcleo también contiene uno o dos neutrones (denominados ${}^3\text{He}$ o ${}^4\text{He}$). Aquí resalta un posible problema, pues los protones por tener cargas iguales deben sentir una repulsión electromagnética entre sí, lo que haría que el Helio se destruyera; pero eso no sucede. Una interacción adicional, lo suficientemente fuerte, actúa de forma tal que, a pesar de la repulsión electromagnética, los protones se mantienen dentro del núcleo. Esta es llamada la interacción nuclear (o fuerte), la cual veremos en detalle más adelante.

Elemento	Masa	Carga eléctrica	Espín
Electrón	$M_e = 9.1 \times 10^{-31}\text{Kg}$	-e	1/2
Protón	$1836 M_e$	+e	1/2
Neutrón	$1840 M_e$	0	1/2

Tabla 1: Algunas propiedades de los componentes del átomo. e es la unidad de carga del positrón.

Con esta información, entendemos que los diferentes átomos que conforman a los elementos de la Tabla periódica son objetos que se van formando con distintas proporciones de protones y neutrones en el núcleo. Esto constituye la base de la materia que forma todos los objetos de nuestro entorno. En la tabla periódica existen elementos que no son estables, es decir, la atracción nuclear no es lo suficientemente fuerte para mantener a todos los protones y neutrones juntos, típicamente por el exceso de estos respecto a los protones, por lo que el núcleo se desprende de neutrones favoreciendo que exista un número igual de protones y neutrones. Esto es conocido como la energía de simetría.

La observación de que la masa del protón y el neutrón son muy cercanas una de otra sugiere que existe una simetría en donde, si no consideramos sus cargas eléctricas, ambas partículas pueden ser vistas como un solo estado, el cual bajo la acción de la interacción electromagnética se desdobra (se proyecta) en dos componentes: el protón y el neutrón. Este efecto es similar al desdoblamiento de un estado de espín 1/2 bajo la acción de un campo magnético (efecto Zeeman). A esta propiedad se le llama *Isoespín* (I). El protón y el

neutrón se describen entonces como componentes de un estado de Isoespín $I = 1/2$ y la tercera componente (I_3) distingue a uno del otro, $I_3 = 1/2$ para el protón y $I_3 = -1/2$ para el neutrón. El conocimiento de estas propiedades nos ha permitido hacer aplicaciones que impactan directamente en nuestra vida diaria. El hecho de que haya elementos inestables no les resta aplicabilidad, por ejemplo los llamados elementos radiactivos tienen una amplia aplicación en el sector médico, como elementos útiles en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades. También se utilizan para la generación de energía, etcétera.

4. Comportamiento de los componentes del átomo

El estudio de los electrones, hasta el momento, muestra que éste no tiene estructura y su tamaño es menor a 10^{-22} metros, por lo que se le considera como una partícula puntual, es decir este es uno de los objetos últimos con esas propiedades. Objetos similares al electrón, pero que difieren en la masa, son el muón (μ) con una masa de $206 M_e$ y el tau (τ) con una masa de $3477 M_e$ [2]. Veamos ahora la estructura de los componentes de los núcleos atómicos. Más allá de la complejidad que representa estudiar el núcleo como un sistema de muchos cuerpos, éste está basado en el conocimiento de las propiedades de los protones y neutrones que lo constituyen. Habíamos mencionado que el núcleo puede desprenderse de neutrones para aumentar su estabilidad, sin embargo, también se observa que en algunos casos los núcleos emiten un electrón (e) mientras que aumentan su número de protones (Z), esto ocurre en un tiempo relativamente largo respecto al tiempo que los electrones dan sus saltos en la escalera de energía y a los procesos de interacción fuerte, este es el fenómeno llamado decaimiento beta nuclear y es un ejemplo típico de la llamada interacción débil, la cual permite que protones, neutrones y electrones interactúen entre sí.

Para sistematizar la descripción de estos fenómenos, se han creado modelos teóricos cada vez más elaborados. En 1935, Hideki Yukawa propuso que la interacción fuerte entre nucleones procede a través del intercambio de una partícula de espín cero (denominada también escalar) en el núcleo atómico. Esto lo podemos escribir en una teoría utilizando el formalismo Lagrangiano (básicamente el Lagrangiano es una función de la forma $L \equiv T - V$, donde T es la energía cinética y V es el potencial de interacción) como un término de la siguiente forma:

$$L_Y = g_Y \bar{\Psi} \phi \Psi \quad (1)$$

en donde Ψ representa al nucleón que decae, $\bar{\Psi}$ representa al nucleón que se crea, ϕ a la partícula escalar y g_Y es la intensidad con que interactúan. Este corresponde a un potencial de la forma

$$V_Y(r) = -\frac{g_Y^2}{4\pi r} e^{-m_\phi r} \quad (2)$$

el cual es atractivo y para un rango del orden de 1 Fermi ($1 \text{ Fermi} = 1 \times 10^{-15} \text{ m}$) le debe corresponder una masa del orden de $m_\phi \approx 190 \text{ MeV}/c^2$. Experimentalmente se determinó que ésta partícula es el pión (π) con masa $m_\pi = 134 \text{ MeV}/c^2$.

Posteriormente, al colisionar protones con protones se encontraron evidencias de otros objetos parecidos al protón y al neutrón. El término *Hadrones* se utiliza para referirse a los objetos que interactúan a través de la interacción fuerte. Estos se clasifican en dos grupos según su número cuántico de espín: *bariones* (semi-entero) y *mesones* (entero) y se asigna un número bariónico igual a 1 para bariones y 0 para los mesones.

El decaimiento beta del neutrón por su parte fué descrito en 1933 por Enrico Fermi vía un término de interacción de la forma:

$$L_{Fermi} = G_{Fermi}(\bar{\Psi}_N \Gamma \Psi_N)(\bar{\Psi}_l \Gamma \Psi_l) \quad (3)$$

donde Γ es un elemento que especifica la forma de la interacción, cuyos detalles no son relevantes por el momento y G_{Fermi} es la magnitud de la interacción. Los subíndices representan a los nucleones (N) y a los leptones (l), estos últimos son el electrón y otra partícula que en su momento no era observable y se le denominó neutrino. La clasificación completa de leptones incluye al muón y al tau con sus correspondientes neutrinos. La teoría de Fermi, si bien describe el decaimiento beta apropiadamente, al calcular procesos de dispersión se obtiene que la sección eficaz crece proporcional a la energía al cuadrado, lo cual limita su validez a valores de energía que no violen la unitariedad de la teoría, es decir que la probabilidad de que ocurra el proceso sea menor que 1, correspondiendo a valores alrededor de 100 GeV. Con la proliferación de hadrones y los problemas inherentes a las formulaciones teóricas de ese tiempo, se podía pensar que posiblemente el protón y el neutrón no eran los elementos últimos en la cadena de la estructura de la materia. Un nuevo salto en el desarrollo del conocimiento estaba en puerta.

5. El surgimiento de la idea de partones

Uno de los primeros indicios de que el protón tiene estructura fué la observación de que al colisionar protones a energías mayores a 10 GeV (en el sistema centro de masa) se produce un número grande de piones con momentos casi colineales con el eje de la colisión, a pesar de que en principio estos pueden emitirse en cualquier dirección. Esto se puede explicar si consideramos que los hadrones, como el protón, están compuestos de otros elementos, así, en lugar de tener una colisión entre objetos como bolas de billar, se tiene una colisión entre objetos que se pueden interpenetrar y por lo tanto los productos son preferentemente colineales, pues la probabilidad de que cada uno de los elementos de un protón colisione de frente con uno del protón opuesto es muy baja. Otra evidencia indirecta, como ya hemos mencionado, fué la proliferación de descubrimientos de mas hadrones, el hecho de que fueran tantos y lo aprendido a nivel atómico sugería que estos debían poder describirse usando un número reducido de componentes. A estos compo-

Quark			Carga eléctrica	No. bariónico	Espín
u	c	t	+2/3	1/3	1/2
d	s	b	-1/3	1/3	1/2

Tabla 2: Propiedades de los Quarks

mentos se les denominó *partones*. Actualmente, estos constituyentes son llamados quarks (q).

Un Barión está constituido por tres quarks (qqq) de forma que el número bariónico de un quark es $1/3$. Las antipartículas correspondientes, o antiquarks (\bar{q}) tienen número bariónico $-1/3$. Los mesones están constituidos por un quark y un antiquark ($q\bar{q}$) y por lo tanto el número bariónico es cero.

Los primeros quarks establecidos corresponden al quark up (u) y al quark down (d) el protón está formado por dos quarks u y un quark d (uud) y el neutrón por dos quarks d y un quark u (ddu). De esta manera, todos los elementos de la tabla periódica, y por ende nuestro entorno, está básicamente constituido por estos elementos fundamentales.

El incremento de la región de energía que los experimentos pudieron explorar, dio origen al descubrimiento de otros hadrones que requieren la existencia de otros tipos de quarks. Para la interacción fuerte la diferencia entre ellos es solamente energética, por lo que sólo da indicios de su masa. A través de la interacción débil se puede distinguir que son diferentes tipos de quarks, no solo por su masa, sino también por la forma en que interactúan. Adicionales al u y d , existen los quarks s , c , b y t (ver Tabla 2).

La carga eléctrica de los quarks es una fracción de la carga eléctrica del electrón (en magnitud). Se puede verificar esta propiedad comparando las predicciones de la probabilidad de que un mesón decaiga produciendo un electrón y un positrón (la anti-partícula del electrón), con los valores experimentales. Considerando que este procede vía la aniquilación de los quarks en un fotón, la cual es proporcional a la carga de estos, con la subsecuente creación del electrón y el positrón a partir del fotón.

Los quarks son partículas de espín $1/2$. Esto puede ser determinado observando la distribución angular de la dispersión $e^+e^- \rightarrow q\bar{q}$ comparada con $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, como los muones tienen espín $1/2$, excepto por las diferencias de masa, los espectros deben ser similares.

La necesidad de un número cuántico adicional surge al comparar un barión formado por tres quarks iguales, consideremos por ejemplo el quark u , este tendrá una carga eléctrica $2/3+2/3+2/3=+2$ y espín $1/2$ o $3/2$ (usando las reglas de suma de momento angular). Note que, como todos los quarks son iguales, no podemos distinguir a uno de otro y por lo tanto decimos que el estado formado es simétrico. Sin embargo, dado que es una partícula de espín fraccionario, la descripción cuántica nos dice que este debe ser un estado antisimétrico (Teorema espín-estadística). Para conciliar estos dos hechos, se propuso

que cada quark debe existir en tres tipos distinguibles debido a una propiedad adicional, tal que la combinación de estos es neutra. Mas de tres daría la posibilidad de distinguirlos con ese número cuántico en los grupos formados por tres quarks, lo cual no se observa. Por analogía con los tres colores primarios, a esta propiedad se le denominó el color, y se denota por sus siglas en inglés como Rojo (R), Azul (B) y Verde (G), de forma que su combinación es neutra de color o blanca.

$$R + B + G = \textit{Neutro}$$

Experimentalmente, la comparación de las secciones eficaces de la aniquilación de un par electrón-positrón produciendo hadrones con respecto a la de la producción de un par muón-antimuón

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \textit{hadrones})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = \sum_{q=u,d,s,\dots} e_q^2, \quad (4)$$

indica que esta consideración es correcta. En esta ecuación, si consideramos solo quarks u , d y s en ausencia de color, se tiene que $R = 2/3$ mientras que con color $R = 2$, esta última corresponde con la observación experimental.

La evidencia de la existencia de otras partículas, llamadas gluones, surge de la dispersión electrón-nucleón, la cual ocurre vía la interacción electromagnética. Así, a bajas energías (longitud de onda mayor al tamaño del protón) el fotón intercambiado solo ve la carga eléctrica del protón, conforme se aumenta la energía (longitud de onda menor que el tamaño del protón) el fotón puede sondear la estructura interna del protón y romperlo, esto es lo que se denomina la dispersión inelástica profunda. Este proceso indica que las partículas que participan en la dispersión interactuando débilmente y eléctricamente llevan solamente alrededor de la mitad del momento del nucleón. Es decir, algo mas, que es inerte a estas interacciones y se identifica con los gluones lleva el resto del momento. La observación de tres chorros de hadrones en la aniquilación de un electrón y un positrón se identifica con la emisión de un gluón adicional a un par quark-antiquark.

Con estos elementos en juego, nuevas estructuras de la materia se predijeron y siguen siendo descubiertas. La forma en que se pueden representar sistemáticamente invocan propiedades de simetría asociadas con las masas de los quarks, de manera muy similar a como el protón y el neutrón son representados como componentes de un solo estado.

Como ejemplo, en la figura 1 (a) se muestran aquellos mesones formados por quarks u , d y s , como función de su tercera componente de isospín y extrañeza, el cual corresponde al contenido de quarks extraños (al quark s le corresponde una extrañeza -1, y el opuesto a su antipartícula), bajo la suposición de que $m_u = m_d = m_s$. El quark y el antiquark tienen sus espines anti-alineados, es decir en total tienen espín $1/2 - 1/2 = 0$, adicionalmente tienen la propiedad de que ante el intercambio de sus coordenadas espaciales ($\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ el estado formado cambia de signo. Por esas características, se les llama mesones pseudoescalares. Una combinación similar de quarks pero con los espines alineados, es decir, con espín total 1 se denominan mesones vectoriales. De manera análoga, se pueden formar estados

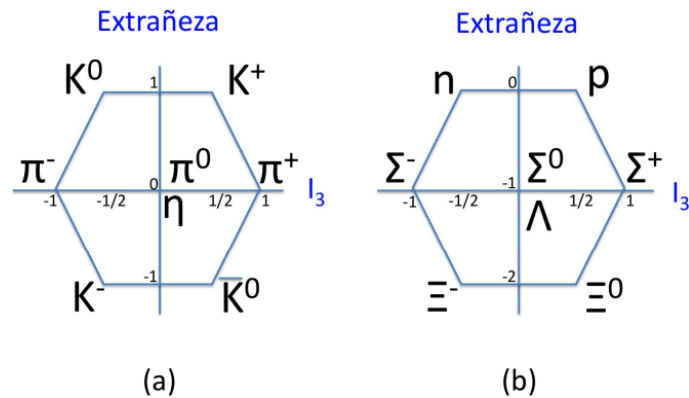


Figura 1: a) Mesones pseudoescalares, b) Bariones de espín 1/2.

bariónicos, en cuyo caso los estados que forman pueden ser de espín 1/2 o 3/2, el caso más sencillo es el de espín 1/2, como lo son el protón y el neutrón. En la figura 1 (b) se muestra un ejemplo de estos. Esto constituye la base del llamado modelo de quarks para describir a los hadrones [3].

Hadrones que contienen quarks más pesados se siguen descubriendo. Aquellos con quarks b ofrecen un potencial interesante para entender cómo se transforma un quark pesado en otro más ligero, hasta llegar a los estados formados por quarks u y d que forman nuestro entorno. Además, la descripción teórica actual requiere que algunos fenómenos observados en hadrones ligeros como la violación de la simetría de conjugación de carga y paridad (CP) tenga el mismo origen para el caso de hadrones pesados, lo cual está en proceso de estudio.

Vale la pena mencionar que experimentos como BABAR en Estados Unidos y BELLE en Japón han ya explorado esta área y están en desarrollo nuevos experimentos, las llamadas fábricas de B, como superKEKB en Japón, dedicados exclusivamente a estudiar este tipo de partículas.

6. La interacción fuerte como teoría de norma

La interacción fuerte entre quarks, con todas las propiedades que hemos descrito anteriormente, puede describirse a través del Lagrangiano correspondiente y de sus propiedades de simetría. En particular, el Lagrangiano debe ser invariante bajo el grupo de simetría $SU(3)$, asociada a la simetría de color que ya hemos discutido, la cual es exacta pues no se observa ningún hadrón que tenga color. En la práctica esto corresponde a aplicar una *transformación de norma local* a los campos que describen a los quarks en el Lagrangiano sin interacciones, de la forma:

$$\Psi \rightarrow e^{-ig_s T^a \theta_a(x)} \Psi,$$

en donde g_s es un parámetro constante, T^a corresponde a los 8 generadores del grupo de simetría $SU(3)$, ($a=1,2,3,\dots,8$). $\theta_a(x)$ son 8 parámetros que dependen de la posición. Para garantizar que el Lagrangiano que describe a los quarks sea invariante ante dicha transformación se necesita que existan partículas de espín 1 sin masa, también llamados campos de norma (los gluones) en un número igual al número de generadores del grupo, éstos son los responsable del intercambio de color (o carga de color) entre quarks, es decir, de que existan las interacciones. Un punto importante en esta descripción es que los gluones llevan carga de color y por lo tanto pueden interactuar entre ellos. Esta formulación es llamada la cromodinámica cuántica o QCD (por sus siglas en inglés).

El parámetro de acoplamiento $\alpha_s \equiv g_s^2/4\pi$ depende de la energía a la que se mida. Esto tiene que ver con la posibilidad de que a una energía dada los efectos cuánticos asociados a la creación y aniquilación de partículas tienen un efecto neto no nulo, análogo al apantallamiento de las cargas eléctricas por efecto de la polarización del medio. La dependencia en energía tiene la siguiente forma [4]:

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{\alpha_s(\mu^2)}{1 + \frac{\alpha_s(\mu^2)}{12\pi}(33 - 2n_f)\text{Log}(Q^2/\mu^2)} \quad (5)$$

donde μ es una escala de energía de referencia, a la cuál se realiza una medición, n_f es el número de sabores o tipos de quarks. Note que, dado que en el denominador se tiene la suma de un término que crece logarítmicamente, este parámetro disminuye para altas energías, lo que significa que los quarks interactúan entre sí cada vez menos intensamente y por lo tanto decimos que la teoría es *asintóticamente libre*. Por el contrario, a bajas energías este parámetro crece y la energía necesaria para vencer esa interacción y separar a los quarks es tan grande que es energéticamente más favorable producir un par quark-antiquark que tener a los quarks separados, este fenómeno es llamado *confinamiento*. En la figura 2 se muestra este comportamiento estimado teóricamente y diferentes mediciones experimentales los cuales se distribuyen según lo predicho [2].

En la región de confinamiento, los quarks de manera efectiva son mejor descritos en términos de los hadrones que forman, mas aún, dado que la constante de acoplamiento es grande, el uso de los métodos perturbativos para calcular las probabilidades de que ocurran los diferentes procesos no son aplicables, por lo que es común también referirse a esta región como *no-perturbativa*. También es importante señalar que es todavía un reto teórico calcular las propiedades de los hadrones a partir de QCD, los avances más sólidos vienen a través de cálculos numéricos utilizando una discretización del espacio (lattice-QCD). Por otra parte, en el régimen en el que los métodos perturbativos son aplicables, los resultados experimentales concuerdan con las predicciones de QCD.

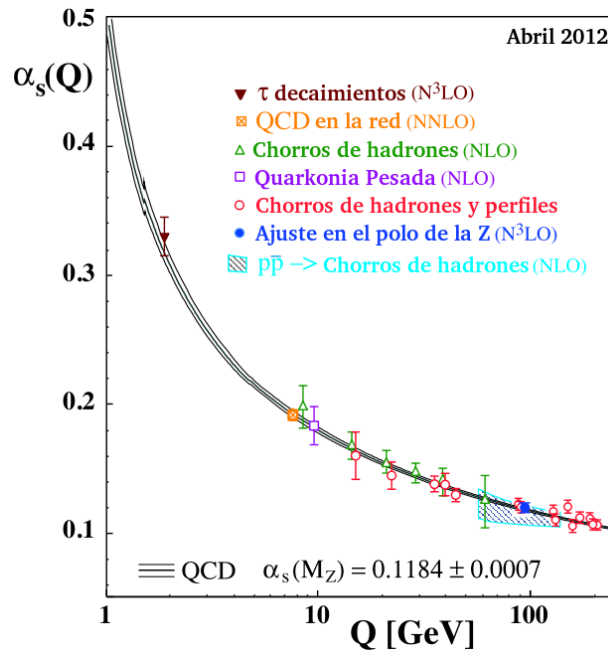


Figura 2: Evolución de la constante de acoplamiento fuerte, tomado de [2].

7. Hiperones e Hipernúcleos

El quark s o extraño es el siguiente quark más pesado que los quarks u y d . Podemos trazar el origen de este quark a la observación del proceso $\pi^- + p \rightarrow k^+ + \Sigma^-$. Los hadrones finales contienen un antiquark \bar{s} y un quark s respectivamente (ver figura 1). A los bariónes que contienen por lo menos un quark extraño se les denomina *hiperones*. En la figura 1(b) se presentan algunos de los hiperones formados por combinaciones de quarks u , d y s en distintas proporciones. Por ejemplo, al hiperón Λ^0 lo podemos visualizar de manera simplista como un neutrón al cual se le ha quitado un quark d y se le ha sustituido por un quark s , figura 3. Este cambio, aparentemente simple, ofrece una inmensa variedad de posibilidades en la formación de nuevos estados. Supongamos que tenemos un núcleo formado por protones y neutrones ¿Qué pasa si en lugar de uno de ellos el núcleo contiene otro barión con propiedades distintas? El caso más sencillo es que se trate de un hiperón, si este es capturado por un núcleo se forma lo que llamamos un *hipernúcleo*, un estado que tiene propiedades completamente distintas a cualquier núcleo de los elementos conocidos. Es decir, tendríamos una tabla periódica tridimensional cuyo nuevo eje corresponde al contenido de extrañeza o hiperones.

Este tipo de núcleos es ya una realidad, un hipernúcleo puede ser producido por colisiones de hadrones o fotones con un núcleo, compuesto solo de protones y neutrones, en el cual se producen y/o intercambian quarks extraños. Un ejemplo es el hipertritón

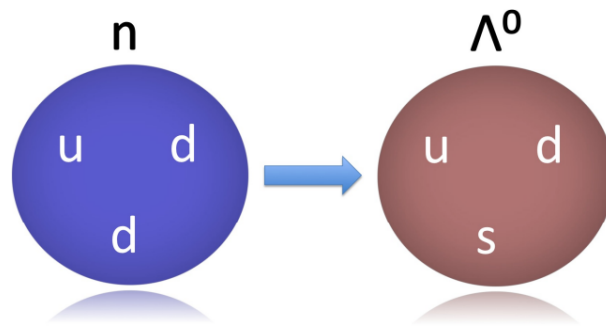
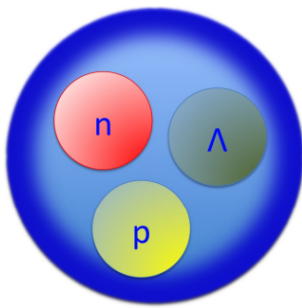
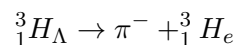
Figura 3: Neutrón e Hiperón Λ .

Figura 4: Hiper núcleo.

${}^3_1H_\Lambda$ (en donde usamos la notación ${}^A_Z E_Y$, con A = No. de bariones en el núcleo, Z =No. de protones, Y = Hiperón) que está formado por tres elementos y uno de ellos es un hiperón Λ , figura 4 (un protón, un neutrón y una Λ). Como la Λ decae emitiendo un pión y un protón, el hipernúcleo se transforma de la siguiente manera:



La observación de este decaimiento indica la formación del hipernúcleo. Este es el primer tipo de hipernúcleo en el que se ha estudiado el efecto debido a otro sabor. Adicional a las posibilidades de nuevos estados, este tipo de procesos representa una herramienta muy útil para estudiar las interacciones entre hiperones y nucleones (YN) e hiperones con hiperones (YY) las cuales son muy difíciles de estudiar en procesos de dispersión. Estudios de este tipo de estados se han realizado y continúan en estudio por las colaboraciones STAR en RHIC, ALICE en el LHC, JLAB en Estados Unidos y FINUDA en Italia entre otros [5, 6].

8. Estados exóticos

La existencia de hadrones multiquark más allá de los tipos de mesones ($q\bar{q}$) y bariones (qqq), como los que hemos discutido anteriormente, ha sido una pregunta desde el comienzo del Modelo de quarks. La observación de que *todas los grupos de quarks en la naturaleza son incoloras*, nos permitió entender que los tres colores (anticolores) se encuentran en la misma cantidad, o que la cantidad neta de cada color es cero, con los mesones (R-antiR) y bariones (RBG) siendo los ejemplos más simples. Sin embargo, las combinaciones de quarks permitidas por la neutralidad de color son más diversas, y en general tienen la forma:

$$(3q)^p(q\bar{q})^n; \quad (p, n \geq 0)$$

Las combinaciones que usualmente se observan son los casos para $p = 1, n = 0$ o $p = 0, n = 1$. Los otros casos corresponden a los denominados estados *exóticos*. Por ejemplo, $qq\bar{q}\bar{q}$ ($p = 0, n = 2$) conocido como tetraquark, y $qqqq\bar{q}$ ($p = 1, n = 1$) conocido como pentaquark, corresponden a un mesón y un barión exótico respectivamente. Como los gluones también llevan carga de color, esta regla puede ser ampliada de forma tal que se mantenga la condición de que la combinación es incolora. Por ejemplo, un estado formado por 3 gluones (no es ni barión ni mesón), es un estado exótico al cual se le denomina por su nombre en inglés como *glueball*. Los mesones con números cuánticos exóticos pueden ser de distintos tipos: mesones híbridos ($q\bar{q}g$), estados multiquark ($q\bar{q}q\bar{q}\dots$) o estados multimesón (M_1, M_2, \dots). Estos estados son de gran importancia para entender mejor a la interacción fuerte ya que, dado que estamos en el régimen no perturbativo, se tienen que construir modelos que capturen las propiedades más relevantes de QCD y con ellas predecir las propiedades de estos estados. Más aún, la forma en que los gluones se combinan también requiere de un conocimiento de la forma en que está construida la teoría.

Para ejemplificar este tipo de estudios, consideremos cómo se puede formar un estado tetraquark a partir de 2 mesones, fijándonos en dos propiedades de QCD:

- Sólo singletes de color pueden existir como partículas observables.
- Sólo algunas combinaciones de estados de color tienen un potencial atractivo, produciendo un estado ligado

Como un quark puede estar en tres estados de color distinto, se dice que corresponde a un triplete de color (3_C). Los estados que pueden formarse con quarks y antiquarks deben ser singletes de color, es decir neutros. En particular, la combinación de dos quarks, llamado *diquark* (qq'), corresponde a dos tripletes de color, $3_C \otimes 3_C$ los cuales, siguiendo las reglas de la combinación de representaciones de la teoría de grupos para el caso de SU(3), produce un objeto que tiene seis posibilidades o sextete y también un triplete de color. Es decir, estas combinaciones tienen color. Si hacemos la combinación de un diquark y un anti-diquark se puede producir entre otras combinaciones un singlete de color; este es nuestro *tetraquark*. El potencial que liga a los quarks en un tetraquark es consistente con

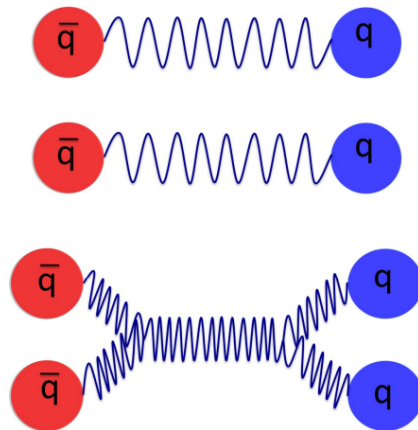


Figura 5: Modelo de flujo gluónico para el estado tetraquark, comparado con el caso de formación de dos mesones.

la imagen de la formación de un flujo gluónico como lo muestra la figura 5. Por supuesto, este estado debe tener menor energía que el estado de dos mesones para que sea estable, de otra manera haría una transición al estado de dos mesones. Para calcular la energía correspondiente existen distintos tratamientos que dependen del tipo de aproximaciones que se quieran considerar. En el caso que ejemplificamos, entre otras cosas, se requiere determinar la posición de los vértices que unen a los diferentes flujos gluónicos, tales que minimicen la energía potencial. Adicionalmente, en todos los casos se tienen que incorporar las propiedades de espín y sabor de los quarks involucrados. Existen abundantes análisis en la literatura [7] que involucran la mezcla de estados de mesón, glueballs e híbridos utilizando una variedad de métodos incluyendo teoría de perturbaciones, integrales de Feynman-Schwinger relativistas, lattice QCD y aproximaciones quirales efectivas. En años recientes, varios candidatos a hadrones multiquark han sido experimentalmente observados: Θ^+ (1540), Ξ^{--} (1862), y Θ_C (3099), son candidatos a ser estados pentaquark. X (3872) y D_s (2317) son candidatos a tetraquark [7], y más recientemente Z_b^+ (10610) y Z_b^+ (10650). Estados exóticos, podrían ser descubiertos en el sector de los quarks pesados, experimentos como superKEKB en breve (2017) esperan tomar datos que podrían ser reveladores de nuevos fenómenos.

9. Materia en condiciones extremas

Consideremos ahora qué pasa si la materia es llevada a condiciones extremas de densidad y/o temperatura. Dado que el acoplamiento fuerte depende de la energía, esperamos que los fenómenos sean muy diferentes a los que ocurren en condiciones normales. Para ubicarnos, la densidad nuclear normal es de alrededor de $0.2 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ a temperatura

ambiente. Si incrementamos la energía, la cual es directamente proporcional a la temperatura, podemos entrar a la región de desconfinamiento, en donde los quarks interactúan muy débilmente unos con otros; esto puede ser logrado haciendo colisionar núcleos pesados a altas energías, como lo ha hecho ya el experimento SPS en el RHIC (Relativistic Heavy Ion Collider) y es el programa de investigación principal en el experimento ALICE en el LHC (Large Hadron Collider). El estado que se forma durante la colisión se denomina el plasma de quarks y gluones, cuya formación puede ser inferida por la observación de un leptón y su antileptón, que por no interactuar fuertemente, presentan propiedades de este medio en el que se formaron, sin alteraciones por efectos de interacción fuerte. Otra observable que puede indicar que este estado se ha formado es la observación de la supresión de la formación de estados $c\bar{c}$ (también conocidos como J/ψ), la cual se espera que sea inhibida por este medio, en el cual es más favorable que un quark pesado como el c se acople a uno de los abundantes quarks ligeros en lugar de a otro pesado [8].

Si bien el incremento de la energía es una forma de entender la evolución de la interacción fuerte, el incremento en densidad tiene propiedades análogas. Podemos ver esto en el hecho de que al colisionar dos iones, lo que estamos haciendo es poner a uno muy cerca del otro. Este es un mecanismo que la naturaleza realiza de manera eficiente en las estrellas de neutrones. Para darnos una idea de las condiciones en que se encuentra la materia en tales estrellas, basta mencionar que contienen la cantidad de materia de aproximadamente un sol y medio pero en un radio de aproximadamente 10 Km, con temperaturas que relativas a las energías asociadas a las masas de las partículas que la conforman es prácticamente nula! Saber cómo se comporta la materia en este medio extremadamente denso constituye la principal interrogante para entender las propiedades de la estrella, figura 6. Sabemos que la parte más externa está formada por núcleos pesados, pero conforme vamos hacia el interior la densidad empieza a crecer muy rápidamente, de forma que los núcleos pierden su identidad y los nucleones y electrones empiezan a formar otras estructuras que van buscando condiciones de energía más estables. Se considera que los hiperones en el interior de las estrellas de neutrones aparecen a densidades de alrededor de 2 a 3 veces la densidad nuclear normal, dependiendo de la interacción entre nucleones e hiperones. Así, el estudio de los hipernúcleos puede servir como laboratorio para determinar esta interacción y por lo tanto incrementar nuestro entendimiento de las propiedades de los objetos macroscópicos que forman.

En la parte central de la estrella se pueden alcanzar densidades de hasta 10 veces la densidad nuclear normal, lo cual puede hacer que incluso los nucleones pierdan su identidad, volviéndose una mezcla de quarks y gluones, en la cual no solo los quarks u y d pueden estar presentes sino también los quarks s . A una estrella que tenga esta estructura puramente de quarks, se le denomina estrella extraña. Aquellas que presentan combinaciones de nucleones, hiperones y/o quarks se denominan mixtas. Una indicación de que una estrella tiene ese tipo de estructura interna es la observación de estrellas muy parecidas en masa a una estrella de neutrones pero con un radio menor, alrededor de 7 km.. Estas predicciones dependen fuertemente de la forma en que se modelan las estructuras

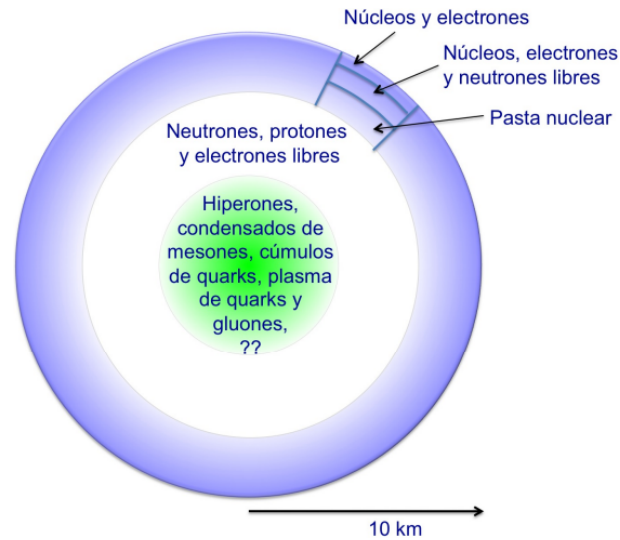


Figura 6: Perfil de la estructura de una estrella de neutrones.

de la materia, las cuales incluyen entre otras la simulación numérica, y son un tema muy activo de investigación teórica y experimental [9]. Hasta ahora no se ha confirmado la observación de ninguna estrella extraña, pero el incremento en la capacidad observacional ha puesto este tipo de estudios dentro del rango en que pueda ser verificable en el mediano plazo.

10. Perspectivas

La búsqueda del elemento último nos ha llevado a descubrir una gran diversidad de partículas. El conocimiento de sus propiedades nos ha permitido describirlas en términos de un grupo reducido de ellas. A saber, los quarks, los leptones y los mediadores de sus interacciones. Desde la concepción del átomo hasta la estructura del núcleo, se han enriquecido con la incorporación de más tipos de quarks, además de los quarks *u* y *d*. Hipernúcleos, estrellas de quarks o extrañas, estados exóticos como los tetraquarks y pentaquarks, el plasma de quarks y gluones, entre otros, serán sin duda parte central en las investigaciones de este siglo, con un gran potencial para enriquecer nuestro entendimiento de cómo se forman nuevas estructuras de la materia y sus aplicaciones en diversos ámbitos.

11. Referencias

- [1] G. Patterson, "Jean Perrin and the triumph of the atomic doctrine," *Endeavour*, vol. 31, no. 2, pp. 50–53, 2007.
- [2] J. Beringer, J. Arguin, R. Barnett, K. Copic, O. Dahl, D. Groom, C. Lin, J. Lys, H. Murayama, C. Wohl *et al.*, "Review of particle physics," *Physical Review D*, vol. 86, no. 1, p. 010001, 2012.
- [3] F. Halzen and A. D. Martin, *Quark & Leptons: an Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 2008.
- [4] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *Quantum field theory*. Perseus Books (Reading, Massachusetts, 1995).
- [5] T. Nagae, "Experimental progress in hypernuclear physics," *Progress of Theoretical Physics Supplement*, vol. 185, pp. 299–314, 2010.
- [6] J. Pochodzalla, "Hypernuclei - the next decade," *Acta Phys. Polon. B*, vol. 42, pp. 833–842, 2011.
- [7] F. Renga, "Signatures of exotic hadrons," *International Journal of Modern Physics A*, vol. 26, no. 29, pp. 4855–4879, 2011.
- [8] J. Letessier and J. Rafelski, *Hadrons and quark-gluon plasma*. Cambridge University Press, 2002.
- [9] N. K. Glendenning, *Compact stars: Nuclear physics, particle physics, and general relativity*. Springer Verlag, 2000.

Física de altas energías

Myriam Mondragón, Instituto de Física, UNAM, México

1. Introducción

La física de Altas Energías estudia las componentes más pequeñas de la materia, sus bloques constitutivos, y sus interacciones. Algunas de las preguntas que se hace la física de altas energías son: ¿De qué está hecha la materia? ¿Qué la mantiene unida? ¿Por qué es nuestro Universo como es? Es decir, explora las preguntas más fundamentales de la naturaleza de nuestro Universo.

Desde la época de los griegos los humanos se han hecho estas mismas preguntas. Ellos introdujeron el concepto de átomo, al cual pensaban como el bloque más pequeño e indivisible de la materia. El siglo XX vio adelantos espectaculares en nuestro entendimiento de la física. Se entendió cómo es y se comporta la materia a las escalas más pequeñas, con la teoría de la mecánica cuántica. Se desarrolló la teoría de la relatividad, que nos dice que el espacio y el tiempo se deben considerar juntos y que hay una velocidad límite para la materia, que identificamos con la velocidad de la luz. Armados con estos conocimientos podemos explorar nuestro Universo en la distancia y en el tiempo¹: las leyes de la física se cumplen en todo el Universo de igual manera. El hecho de que nada viaja más rápido que la velocidad de la luz nos permite, a partir de observaciones de objetos astronómicos muy lejanos, saber como era el Universo en épocas pasadas. Podemos estudiar objetos astrofísicos de gran tamaño, así como las componentes del núcleo atómico. En el siglo XX aprendimos también que el átomo no es indivisible, que está compuesto de un núcleo y una nube de electrones girando a su alrededor. Al unificar la mecánica cuántica y la teoría de la relatividad, P.A.M. Dirac predijo la existencia de anti-materia, en 1932 se encontró el primer positrón, la anti-partícula del electrón. Sin embargo todas las observaciones desde entonces apuntan a que hoy nuestro Universo está compuesto de materia, aunque se llegan a recibir algunas partículas de anti-materia del cosmos y se pueden crear en el laboratorio. Después se comprobó que el núcleo a su vez tiene componentes, los quarks. Ya se conocían los electrones y se descubrieron los neutrinos.

¹Ver el capítulo "Un Universo en evolución" de Vladimir Avila, en este mismo libro.

A lo largo de la segunda mitad del siglo XX, se elaboró y corroboró con gran precisión el Modelo Estándar de las partículas elementales, que constituye hasta ahora la teoría más exitosa para describir las componentes fundamentales de la materia y sus interacciones.

A finales del siglo XX se descubrió que los neutrinos tienen masa, que aunque es muy pequeña, implica una primera desviación del Modelo Estándar. Por otro lado, las observaciones astrofísicas indicaban desde los 1930's que había una discrepancia entre la materia luminosa observada y las curvas de rotación de las galaxias, que F. Zwicky explicó postulando que existe un tipo de materia no interactuante o no luminosa llamada materia oscura. ¿Cómo encaja todo esto? ¿Cuál es la relación entre lo más grande y lo más pequeño? ¿Por qué física de *altas energías*?

2. Altas energías

Para ver objetos o partículas necesitamos luz cuya longitud de onda sea similar al tamaño del objeto que deseamos observar. Por ejemplo, para ver los objetos que nos rodean necesitamos luz "normal" con longitudes de onda que van aproximadamente de 350 a 790 nm (nanómetros). ¿Pero qué sucede cuando queremos ver algo mucho más pequeño? Necesitamos aumentar nuestros sentidos, es decir, amplificar la señal a una que podamos ver. Ejemplos clásicos son un microscopio y un telescopio. En su experimento donde logró "ver" el núcleo de los átomos, Rutherford hizo chocar partículas α (núcleos de Helio) contra una lámina de oro. Registró la trayectoria de las partículas después de chocar contra la lámina de oro y se dio cuenta que algunas de ellas pasaban sin problemas, sin embargo un número considerable eran deflecionadas en dirección opuesta a la incidente, porque chocaban contra el núcleo del átomo. Así determinó la existencia del núcleo atómico y desarrolló el modelo atómico de Rutherford. En la física moderna de partículas elementales hacemos algo similar, pero a muy altas energías. Cuando queremos "ver" algo muy pequeño necesitamos longitudes de onda muy pequeñas o frecuencias muy grandes, es decir necesitamos energías muy altas. Para alcanzar estas energías necesitamos acelerar partículas a velocidades relativistas, cercanas a la de la luz. Después las hacemos chocar y vemos que resulta de las colisiones. Esto es algo parecido a la idea original de Rutherford, excepto que lo que se hace colisionar son dos haces de partículas moviéndose en direcciones opuestas. Al chocar, las partículas interactúan unas con otras de diversas maneras produciendo otras partículas, que pueden ser diferentes de las originales. En todo el proceso, la energía total se conserva, así que de partículas ligeras muy energéticas podemos producir partículas más masivas pero más lentas, esto gracias a la famosa relación entre masa y energía $E = mc^2$.

Esta es una caricatura de lo que sucede en un colisionador de partículas, como el Large Hadron Collider (LHC por sus siglas en inglés). Lo que se registra después de una colisión son las trazas que los productos de la colisión deja y su energía. De ahí se puede reconstruir que clase de partículas fueron producidas, si se extrae toda la información de

las partículas ya conocidas se pueden hacer descubrimientos de nuevas partículas y sus propiedades. Sobra decir que se usan métodos de detección y de análisis computacional muy sofisticados. El desarrollo de los colisionadores de partículas lleva consigo un gran desarrollo tecnológico. Un ejemplo muy conocido es el desarrollo del *world wide web* en CERN, que se usó en un principio para que los físicos asociados a las grandes colaboraciones pudieran comunicarse de una manera eficiente. Otros ejemplos son los desarrollos en tecnología, que van desde terapias contra el cáncer, procesamiento de imágenes para medicina, esterilización de alimentos, desarrollo de superconductores, desarrollo de cables multifilamentarios y fuentes de radiación de sincrotrón, hasta desarrollo de software y estimulación del cómputo paralelo y distribuido, por mencionar sólo algunos. Pero el estudio de los componentes de la materia y sus interacciones fundamentales, constituye ante todo, un enorme desarrollo cultural [1].



Figura 1: Una vista aérea del CERN, con las circunferencias de los aceleradores sobrepuestas, de 27 y 7 km respectivamente. Fuente: CERN

3. El Modelo Estándar de las partículas elementales

El Modelo Estándar (ME) de las partículas elementales se fue construyendo a través de una interacción entre la consistencia matemática de la teoría y los resultados experimentales desde mediados del siglo pasado [2–6]. La última confirmación del ME se hizo con el descubrimiento de una nueva partícula consistente con un bosón, la cual apunta a

ser el bosón de Higgs del Modelo Estándar, en julio de 2012 [7, 8]. Para entender lo que esto significa hay que estar consciente de que el ME ha sido confirmado antes en muchos experimentos a una precisión impresionante.

El marco matemático en el cual se encuentra descrito el ME es la teoría cuántica del campo [9–13]. La teoría cuántica del campo es la extensión relativista de la mecánica cuántica que describe a las partículas como excitaciones o cuantos de un campo (como el eléctrico o magnético) y que además toma en cuenta que el número de estas partículas puede cambiar en un proceso. ¿Cómo sucede esto? La experimentación nos dice que en algunos procesos unas partículas pueden decaer (transformarse) en otras, pero también nuevas partículas pueden ser creadas.

Se sabe que la invariancia de un sistema, descrito por un Lagrangiano, ante ciertas transformaciones está relacionado con la conservación de alguna cantidad física. O dicho de otra manera, a cada simetría global continua del sistema le corresponde una cantidad física conservada. Este es el teorema de Noether, formulado por la matemática austriaca Emmy Noether, que se cumple tanto en los sistemas clásicos como en los cuánticos. La invariancia ante rotaciones nos da la conservación del momento angular, la invariancia ante traslaciones en el espacio implica la conservación del momento y la invariancia ante las traslaciones en el tiempo implica la conservación de la energía. Por otro lado debemos considerar también a las simetrías internas del sistema, que son las que no están relacionadas a transformaciones del espacio-tiempo.

Un principio fundamental en las teorías del campo, tanto clásicas como cuánticas, es la invariancia de norma (gauge invariance). Este principio de invariancia de norma está basado en el hecho de que la física no debe depender de cómo describamos los parámetros internos del sistema. Una transformación de norma toma en cuenta los posibles cambios a estas configuraciones; al aplicar la transformación de norma al Lagrangiano éste debe quedar invariante. El teorema de Noether también se cumple aquí y la invariancia de norma global implica cantidades conservadas. En teoría cuántica del campo las transformaciones de norma se representan como cambios de fase que multiplican al campo. Una transformación de fase global cambia la fase de la misma manera en todos los puntos del espacio-tiempo. La cantidad conservada asociada a este cambio global de fase son las cargas, por ejemplo la carga eléctrica.

En el caso de las transformaciones de norma locales, la fase es una función de las coordenadas del espacio-tiempo. Al realizar la transformación de norma, para que el Lagrangiano permanezca invariante ante ésta, es necesario modificar la derivada convencional por una “derivada covariante”, que incluye el término de derivada ya conocido más un nuevo término. Este último representa la interacción del campo original (el que estamos transformando) con un nuevo campo vectorial, multiplicado por una constante que representa la intensidad de la interacción. Este nuevo campo se conoce como “campo de norma” y es un campo bosónico. Así, la invariancia ante transformaciones de norma locales implica una interacción.

La invariancia de norma local se puede ver también desde un punto de vista geométri-

co. Para definir la fase del campo debemos definir un marco de referencia local respecto al cual medimos esta fase. La invariancia de norma local refleja el hecho de que las propiedades físicas del sistema no pueden depender de nuestra elección del marco de referencia. Es, en cierto sentido, una extensión del principio de relatividad a las simetrías internas. En este caso también hay corrientes conservadas asociadas a la invariancia ante la transformación, pero el tratamiento es mucho más sutil y no se traduce en observables físicas.

Un ejemplo ilustrativo de una teoría de norma lo ofrece la electrodinámica cuántica, que es la teoría que incorpora la mecánica cuántica con la relatividad especial (QED por sus siglas en inglés). El campo en este caso representa partículas cargadas de espín $1/2$. La invariancia ante una transformación de norma global implica la conservación de la carga eléctrica a través de una corriente conservada. La invariancia ante una transformación de norma local implica la existencia de un campo vectorial de interacción, el campo electromagnético, cuyo cuanto es el fotón. La constante de acoplamiento entre el campo del fotón y los otros campos es la carga eléctrica. El grupo de norma en este caso es $U(1)$.

Estas transformaciones locales de norma se pueden generalizar a grupos de simetría más complicados, dando como resultado la existencia de cargas conservadas y las interacciones entre los campos a través de bosones de norma. El ME tiene la simetría global de Poincaré, que es la invariancia ante simetrías traslacionales y rotacionales y la invariancia de Lorentz, es decir todas las simetrías de una teoría relativista. Además incluye las simetrías internas del sistema descritas por las teorías de norma. Lo que se conserva en un proceso de partículas elementales son las cantidades asociadas a las simetrías del sistema, tanto espacio-temporales como internas.

Renormalizabilidad

Un aspecto importante de una teoría cuántica del campo, para que describa la física correctamente, es la renormalizabilidad [14, 15]. La teoría cuántica del campo se describe perturbativamente, tomando en cuenta las fluctuaciones cuánticas del campo a escalas de distancia muy pequeñas o, lo que es lo mismo, a momentos o energías muy grandes. En la visión moderna de la física, la renormalizabilidad parametriza la sensibilidad de la física de bajas energías a la física de altas energías. En este sentido, las teorías renormalizables son teorías efectivas, válidas a ciertas escalas de energía. Al hacer un experimento en física de altas energías, por ejemplo la medida de una masa o un acoplamiento, el resultado dependerá de la energía del centro de masa a la que se hizo el experimento. Esto se debe a que a diferentes energías aparecen diferentes correcciones cuánticas del campo, similar a la polarización de una carga eléctrica en el vacío. Al hacer el cálculo aparecen términos que divergen, es decir su valor se va a infinito, sin embargo estos términos pueden ser reabsorbidos (regularización) para dar una cantidad finita, ajustando los parámetros a sus valores físicos. La renormalización, previa regularización, toma en cuenta las correcciones de tal manera que el resultado sea siempre una cantidad finita, redefiniendo los parámetros de la teoría para que tengan una dependencia con la energía. Al conjunto de ecuacio-

nes diferenciales que describen como varían los parámetros del sistema con la energía se le conoce como grupo de renormalización. El ME es una teoría del campo renormalizable y en ella hay un número infinito de divergencias que no pueden ser reabsorbidas con un número finito de parámetros, por lo tanto siempre hay cantidades infinitas y la predicción total no es posible. La gravedad cuántica es una teoría del campo no-renormalizable.

Interacciones fundamentales

En la mecánica cuántica las partículas se distinguen en dos grupos: los bosones que tienen espín entero y los fermiones que tienen espín semi-entero. Las propiedades estadísticas de bosones y fermiones son muy diferentes. Los bosones siguen la estadística de Bose-Einstein y se pueden agrupar en un mismo estado cuántico, mientras que los fermiones siguen la estadística de Fermi-Dirac, donde dos partículas con los mismos números cuánticos no pueden estar en un mismo estado. Como ya mencionamos, en la teoría cuántica del campo las interacciones entre partículas se describen mediante el intercambio de otras partículas, conocidas como los “mediadores” de la fuerza. En el ME todas las partículas elementales que conforman la materia son fermiones, mientras que todas las partículas elementales que median o llevan la fuerza son bosones.

Las interacciones fundamentales que se conocen hasta ahora son la electromagnética, la débil, la fuerte y la gravitatoria. Se consideran fundamentales porque no se pueden escribir en términos de otras interacciones. La fuerza electromagnética y la de la gravedad son de alcance infinito y tienen una intensidad que decae con el cuadrado de la distancia. Sin embargo, no se tiene una teoría cuántica de la gravedad, que implicaría la existencia de un bosón mediador de la misma, o gravitón. Debido a que no hay una teoría cuántica de la gravedad y la masa de las partículas es muy pequeña comparada con la de los objetos macroscópicos, el ME no incluye a la gravedad.

Como ya se mencionó, un principio fundamental en el ME es la invariancia de norma (gauge), el grupo de norma del ME es $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ [16]. El grupo $SU(3)$ es el grupo que corresponde a la interacción fuerte. El producto de $SU(2) \times U(1)$ corresponde a la simetría electrodébil. Cada uno de estos grupos lleva asociado una constante, llamada constante de acoplamiento de norma que corresponde a la intensidad de la interacción.

Fuerza electrodébil

¿Cuáles son las propiedades la fuerza electrodébil? El bosón asociado con la fuerza electromagnética es el fotón, que no tiene masa ni carga eléctrica. El rango de esta fuerza es infinito y decae con el cuadrado de la distancia, similar a la gravitatoria pero 32 ordenes de magnitud más intensa. La fuerza débil es mediada por los bosones W^\pm , que tienen carga eléctrica y Z , que es neutro. A diferencia del fotón los bosones W^\pm y Z son masivos. Por esta razón, la fuerza débil es de corto rango, alrededor de 1×10^{-16} m. A bajas energías, la fuerza electromagnética y la débil se describen con modelos diferentes, las masa cero

del fotón y las masas de los W^\pm y Z hacen que estos modelos tengan un aspecto diferente. Cuando la energía asociada a la masa de las partículas W^\pm y Z ($M_W c^2$, $M_Z c^2$) es pequeña comparada con la energía de los procesos a considerar, la fuerza débil y la electromagnética se pueden describir con un sólo modelo y por lo tanto están unificadas [6]. En el Universo temprano, conforme la temperatura del Universo disminuyó pasó por una transición de fase, la simetría electrodébil se rompió y las partículas adquirieron masa.

La fuerza débil es quiral. El concepto de quiralidad está relacionado con el de helicidad. La helicidad de una partícula es la proyección del espín en la dirección de movimiento, así, una partícula puede ser izquierda o derecha. Aunque la helicidad y la quiralidad sólo son lo mismo en el caso de partículas sin masa, el concepto de helicidad ayuda a entender intuitivamente el concepto de quiralidad. En la teoría del campo la quiralidad es una propiedad intrínseca de las partículas que está relacionada con las transformaciones izquierdas y derechas bajo el grupo de Poincaré. La quiralidad de la interacción débil se manifiesta en el hecho que sólo las partículas izquierdas y las anti-partículas derechas la sienten.

Fuerza fuerte, quarks y gluones

La fuerza fuerte es mediada por los gluones, que tienen carga de color, pero no carga eléctrica. Como su nombre lo indica, es la más intensa de las fuerzas fundamentales. Esta fuerza es de muy corto alcance.

Los núcleos atómicos están compuestos de partículas, a las que hasta ahora no se les ha visto estructura y se consideran fundamentales. Estas se llaman quarks (por la novela de James Joyce "Finnegan's Wake") y tienen propiedades peculiares. Los quarks tienen una propiedad o número cuántico llamado color. No tiene que ver nada con los colores que observamos con nuestros ojos (o las longitudes de onda que perciben nuestros ojos), es simplemente un nombre para una carga conservada. En los experimentos para explorar el interior de los núcleos atómicos se hizo evidente que los quarks tenían un número cuántico que puede tomar tres estados diferentes, y que las partículas compuestas de quarks, bariones y mesones, se encuentran siempre en una combinación neutra de este estado. Por eso se les acordó dar los nombres de los colores primarios.

Los quarks no se encuentran aislados, están siempre confinados al interior del núcleo atómico. Esto se debe a que la fuerza de color, o fuerza fuerte, aumenta con la distancia, a diferencia de la fuerza electromagnética. Este comportamiento es parecido al de la fuerza de un resorte. Sólo que en el caso de los quarks esta fuerza es tan intensa, que al separar un par quark anti-quark es energéticamente más favorable crear otros pares quark anti-quark del vacío que se acoplan a los quarks originales, que separar los quarks originales. A esta propiedad se le llama confinamiento. La fuerza fuerte, como su nombre lo indica, es la más intensa de las fuerzas fundamentales, pero de muy corto alcance. Su alcance es aproximadamente el tamaño del hadrón, es decir unos pocos femtometros (10^{-15} m). Los mediadores de la fuerza fuerte son los gluones (por glue, pegamento en inglés). Los

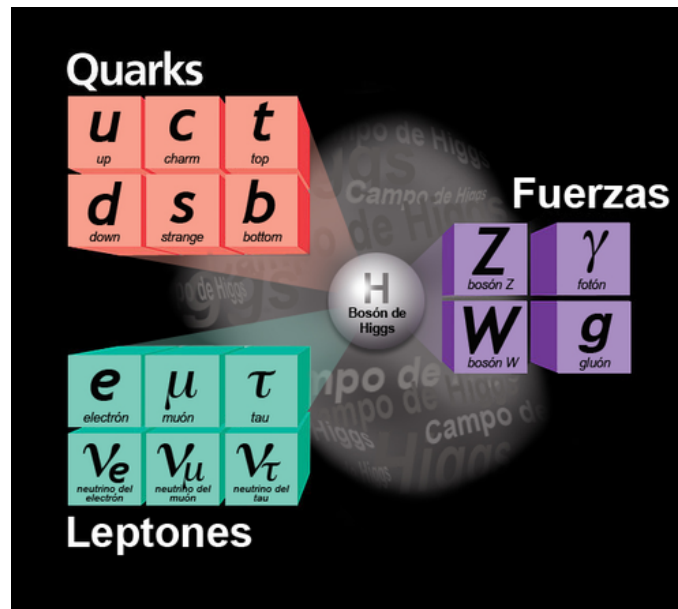


Figura 2: En la figura se muestran los quarks y leptones que conforman la materia, los bosones intermedarios que llevan las interacciones y el bosón de Higgs. Fuente: Fermilab.

gluones tienen también carga de color e interactúan con los quarks mediante la fuerza fuerte. Esto es otra vez diferente que en el caso de la fuerza electromagnética, donde los fotones no tienen carga eléctrica. A la teoría matemática que describe la interacción entre los quarks y gluones se le conoce como cromodinámica cuántica o QCD por sus siglas en inglés (quantum chromodynamics) [17]. En los procesos donde intervienen quarks éstos nunca aparecen aislados como ya dijimos, sino que al chocar e interactuar los quarks y gluones forman chorros o jets de hadrones.

Hay dos tipos fundamentales de quarks: up y down. Los quarks tienen carga eléctrica, por lo tanto, sienten la fuerza electromagnética. Los hadrones, que se clasifican en bariones (fermiones compuestos por tres quarks) y mesones (bosones compuestos por dos quarks), siempre tienen carga eléctrica que es un múltiplo entero de la carga del electrón. El neutrón y el protón son bariones, los quarks constitutivos del primero son udd y del segundo uud. Del hecho que el neutrón tiene carga eléctrica cero y el protón +1 sabemos que los quarks individuales tienen carga eléctrica fraccionaria, los tipo u tienen carga $2/3$ y los tipo d $-1/3$. El decaimiento de neutrón a protón en el decaimiento nuclear nos dice que el neutrón se transforma en protón y emite un electrón y un anti-neutrino del electrón. Dado que el neutrón está constituido por quarks esto nos dice, a un nivel más fundamental, que un quark down se convirtió en un quark up, por el intercambio de un bosón vectorial W^- , el cual después decae en el electrón y su anti-neutrino. Esto es una

prueba clara de que los quarks también sienten la fuerza débil.

Los quarks tipo up y down forman dobletes de la interacción electrodébil. Hay tres copias o familias de estos dobletes, las cuales se distinguen sólo por su masa: up-down, charm-strange y top-bottom. A los seis diferentes quarks se les asigna una etiqueta llamada “sabor”. Un quark de un sabor puede transformarse (decaer) en otro sabor mediante el intercambio de un bosón vectorial W , es decir por medio de la interacción débil.

Plasma de quarks y gluones

Se necesitan procesos extremadamente energéticos para poder ver a los quarks como partículas aisladas. Al inicio del Universo, apenas unas millonésimas de segundos después del Big Bang, los quarks y gluones se encontraban libres en un medio muy denso conocido como el plasma de quarks y gluones. La temperatura crítica para que exista el plasma de quarks y gluones es de alrededor de 2×10^9 grados (centígrados o Kelvin no hace diferencia en este caso), que es como 100,000 más caliente que el núcleo del nuestro sol. Conforme se enfrió este plasma, unos microsegundos después del Big Bang, los quarks se empezaron a confinar y a formar los protones y neutrones.

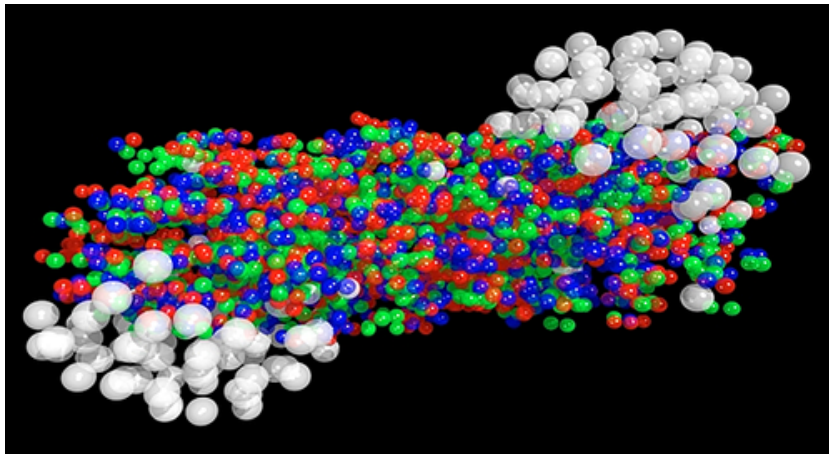


Figura 3: Plasma de quark y gluones. Fuente: CERN.

Leptones

Los leptones son también fermiones y forman, junto con los quarks, toda la materia conocida. Los leptones también vienen en seis variedades o “sabores” y pueden ser cargados, como el electrón, o neutros como los neutrinos. Los leptones cargados y neutros forman dobletes electrodébiles. Al igual que en el caso de los quarks, los leptones cargados y los neutros de diferentes dobletes se distinguen sólo por su masa.

Los dobletes de quarks up-down y leptones electrón- ν_e forman lo que se conoce como la primera generación de materia. La segunda está conformada por los quarks charm-strange y los leptones muón- ν_μ y la tercera generación la forman los quarks top-bottom y los leptones tau- ν_τ . En la figura 2 se muestran las tres generaciones de quarks y leptones y los bosones intermediarios.

Los dobletes electrodébiles tienen las mismas interacciones, y en principio, serían intercambiables si tuvieran la misma masa. En este caso la simetría del sabor sería exacta. Sin embargo, los quarks pueden decaer en otros quarks y los neutrinos pueden cambiar de un tipo a otro. A la parte de la física de partículas elementales que se ocupa de estudiar las interacciones entre las distintas generaciones se le conoce genéricamente como “física del sabor”, y a los procesos de decaimiento y transformación de un tipo de fermión a otro se le conoce como cambios de sabor. La información de las masas y mezclas (procesos que cambian el sabor) de los quarks está contenida en la matriz unitaria CKM (Cabibbo-Kobayashi-Maskawa). La información equivalente para los neutrinos se encuentra en la matriz PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata). Estas matrices parametrizan la diferencia entre el estado cuántico que participa en las interacciones electrodébiles y el estado cuántico que describe a la partícula propagándose libremente (estado de masa), que es una superposición de diferentes sabores.

En la naturaleza se observa una pequeña violación de la simetría de carga-paridad (CP). La simetría CP es la acción conjunta del cambio de signo en la carga y el cambio de signo en las coordenadas espaciales (paridad). Para poder tener violación de CP en los quarks y leptones es necesario tener tres generaciones de materia. Así, la violación de CP está incluida en la matriz de CKM, aunque ésta no predice su magnitud.

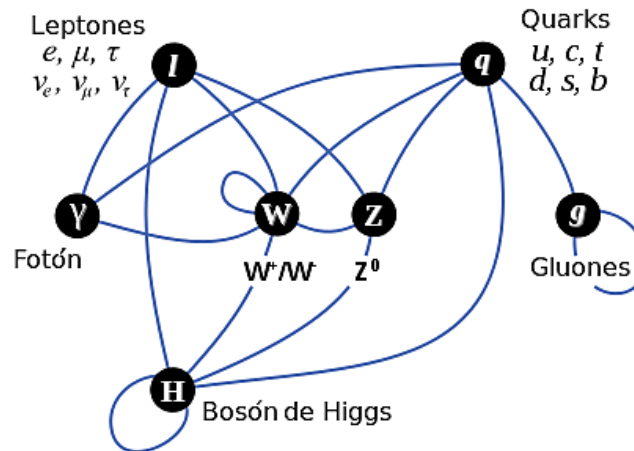


Figura 4: Las interacciones entre las partículas elementales.

Materia y anti-materia

A cada partícula de materia le corresponde además su anti-partícula, que tiene todos los números cuánticos opuestos, pero la misma masa. La existencia de las anti-partículas la predijo P.A.M. Dirac al desarrollar su teoría relativista de la mecánica cuántica. En 1932, en un experimento de rayos cósmicos hecho por C.D. Anderson, se encontraron los anti-electrones y se les llamó positrones. Cuando una partícula y su anti-partícula chocan se aniquilan y lo que queda son rayos gamma (fotones ultra-energéticos) u otros pares partícula y anti-partícula. Una pregunta obligada es por qué hay mas materia que anti-materia en nuestro Universo. Nos llegan partículas de anti-materia del cosmos, pero en una cantidad muchísimo menor que las de materia. También las podemos producir en el laboratorio, pero de las observaciones astrofísicas podemos inferir que el Universo está hecho principalmente de lo que llamamos materia y no de anti-materia. A este se le conoce como el problema de bariogénesis, o la creación de bariones (materia) en el Universo. Para poder explicar como se llegó a esta asimetría se necesita tener un sistema fuera de equilibrio, una asimetría inicial entre materia y anti-materia, así como una violación de la simetría de carga y paridad (CP). Estas se conocen como las condiciones de Sakharov para generar bariogénesis. Aunque el modelo de Sakharov explica de manera elegante la bariogénesis no hay suficiente asimetría bariónica o violación de CP en el ME para poder explicar la dominancia de materia sobre anti-materia en nuestro Universo.

Bosón de Higgs y renormalizabilidad

Previo a la introducción del bosón de Higgs no hay manera de explicar la masa de las partículas elementales [18–20]. Un término explícito de masa en el Lagrangiano para los bosones vectoriales, los mediadores de las interacciones, viola la invariancia de norma. Sin embargo, se sabía que la fuerza débil es de corto alcance, así que los bosones vectoriales debían de ser masivos. El campo de Higgs es indispensable para entender como adquieren masa todas las partículas del ME, así como garantizar la estabilidad y consistencia de la teoría. Esto sucede mediante el rompimiento espontáneo de la simetría electrodébil. El rompimiento espontáneo de una simetría se refiere al hecho de que las ecuaciones de movimiento de Lagrangiano pueden exhibir ciertas simetrías, pero al minimizar el sistema respecto a la energía, existen soluciones que no son invariantes bajo estas mismas simetrías.

El Higgs es un bosón escalar y se incorporó a la teoría del campo de las partículas elementales en analogía con los superconductores en estado sólido. El potencial de Higgs en el ME tiene forma de fondo de botella o de sombrero (el famoso “sombrero mexicano” en la literatura). Tiene un mínimo local en el centro, que es metaestable, y una línea continua de mínimos alrededor de un círculo que es el fondo del sombrero, ver figura 6. El mínimo del potencial puede estar sobre cualquier punto de este círculo. En el momento en que se minimiza el potencial, el valor esperado del vacío (vev) del campo de Higgs es diferente

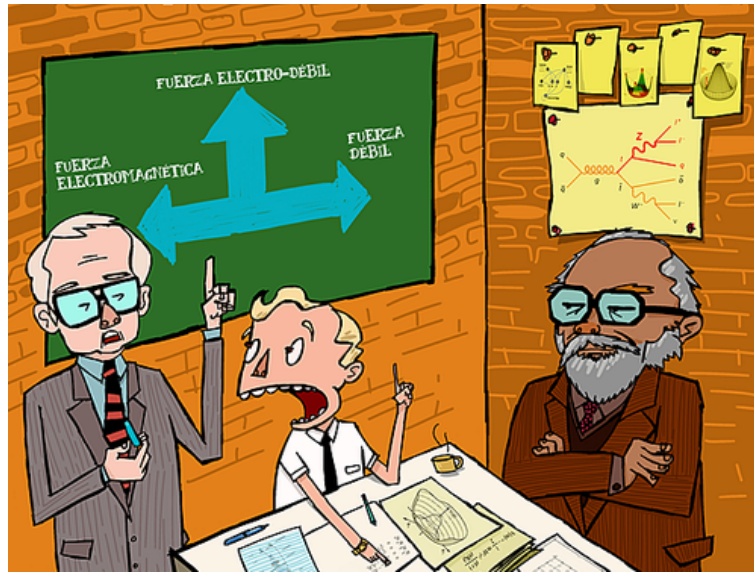


Figura 5: S. Weinberg, S. Glashow y A. Salam recibieron el Premio Nobel de física en 1979, por la formulación de la teoría electrodébil. Fuente: Rey Mico.

de cero y corresponde a un punto sobre este círculo. La simetría rotacional que existía en el mínimo metaestable se rompió espontáneamente al minimizar el potencial, cuando el vev del Higgs adquiere un valor particular. Al desarrollar el potencial del campo de Higgs alrededor del mínimo, aparecen términos cuadráticos en los campos W^\pm y Z . Estos términos corresponden a la masa de los bosones vectoriales, que son proporcionales a las constantes de norma y al vev del campo de Higgs. A la teoría de las interacciones electrodébiles se le conoce también como modelo de Weinberg-Glashow-Salam, por sus proponentes, que recibieron el Premio Nobel en 1979, después del descubrimiento de las corrientes neutras en 1973.

Una predicción de las teorías de norma acopladas a un campo escalar es precisamente la masa de los bosones vectoriales, encontrada en CERN por las colaboraciones UA1 y UA2 en 1983. El descubrimiento de los W^\pm y Z fue un indicio fuerte de que la descripción teórica de las interacciones fundamentales como teorías de norma con un campo escalar (Higgs) era la correcta.

Por otro lado, el campo de Higgs se acopla a los quarks a través de una constante llamada acoplamiento de Yukawa. Al minimizar el potencial la masa de los quarks resulta proporcional al vev del Higgs por el acoplamiento de Yukawa. El campo de Higgs tiene un término de auto-interacción, que resulta en un bosón escalar con masa, el bosón de Higgs, después del rompimiento de la simetría electrodébil.

El valor esperado del vacío (vev) del Higgs se puede inferir a través de las masas

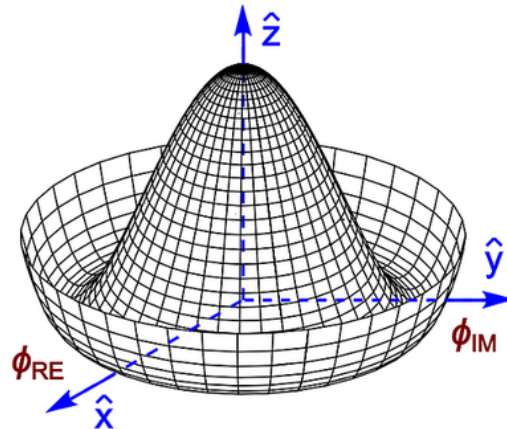


Figura 6: Potencial de Higgs en el Modelo Estándar.

de las partículas, y resulta ser 246 GeV. La masa de los bosones de norma W^\pm y Z es de alrededor de 91 y 80 GeV respectivamente. Sin embargo, la escala fundamental es la de Planck 10^{19} GeV, es decir el valor medido de las masas de los bosones vectoriales es aproximadamente 16 ordenes de magnitud más pequeño que la escala fundamental. Por otro lado, las masas de las partículas elementales también varían mucho entre sí, no son del mismo orden de magnitud. A esta discrepancia de ordenes de magnitud entre los parámetros físicos de una teoría se le conoce como un problema de naturalidad.

Todas las partículas reciben correcciones radiativas (correcciones cuánticas), que se pueden calcular a diferentes escalas de energía mediante el grupo de renormalización mencionado previamente. Para los fermiones y bosones vectoriales, las correcciones radiativas varían logarítmicamente con la energía. Sin embargo, para los bosones escalares, como el bosón de Higgs, las correcciones radiativas aumentan cuadráticamente con la energía. Esperaríamos que la masa del bosón de Higgs fuera del orden de la masa de los W^\pm y Z , como parece ser el caso. Sin embargo, las correcciones radiativas empujan a la masa a un valor muy grande. Para que la masa física sea del orden de 100 GeV, debería haber una cancelación entre la masa a nivel árbol (la parte sin correcciones radiativas) y las correcciones radiativas, es decir dos números muy grandes se cancelan para dar uno pequeño. Al problema de la estabilización de la masa del Higgs se le conoce como el problema de la jerarquía, implica un ajuste fino en los parámetros de la teoría. El problema de la jerarquía está relacionado con el de naturalidad ya que, con la física que conocemos hasta ahora, involucra discrepancias grandes entre los parámetros (masas en este caso) de las partículas, además de un ajuste fino. Sin embargo, el problema de la estabilización de la masa del Higgs podría tener una solución sin ajuste fino en una nueva teoría que involucre procesos físicos hasta ahora desconocidos. Esta nueva teoría podría también ser no-natural, en el sentido de que los parámetros físicos no son del mismo orden de magni-

tud. En este sentido, es la estabilización de la masa del Higgs lo que nos apremia a buscar teorías más allá del ME, que pueden o no cumplir con el criterio de naturalidad.

Recientemente se ha encontrado una partícula consistente con el bosón de Higgs del ME en las colaboraciones CMS y ATLAS en CERN [7, 8]. La masa de este bosón es de alrededor de 126 GeV. Este es justo el rango de masa más probable de un análisis global de las medidas de precisión [21].

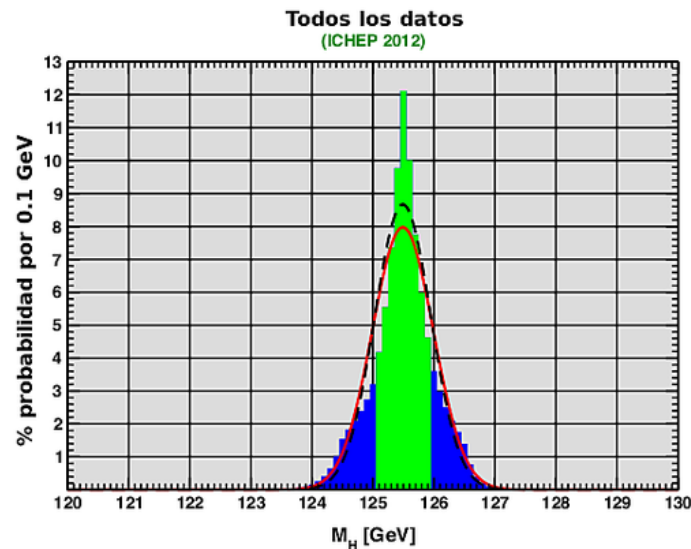


Figura 7: Ajuste de todas las medidas que involucran al bosón de Higgs para extraer el valor más probable de su masa. Ver [21].

El problema de las masas

La masa de los fermiones varía mucho, el quark más ligero, el up, tiene una masa de aproximadamente 2.3 MeV, mientras que el top, el más pesado y con los mismos números cuánticos, tiene una masa de ~ 173 GeV, es decir cinco ordenes de magnitud de diferencia. La masa del electrón, el leptón cargado más ligero, es de ~ 0.511 MeV y la del tau es de ~ 1.78 GeV, cuatro órdenes de magnitud más grande. Este es el problema de jerarquía pequeño o problema de la jerarquía de masas. Por otro lado, los neutrinos, que se pensaba tenían masa cero, en realidad tienen una masa pequeña, pero diferente de cero. En el caso de los neutrinos, lo que se ha medido hasta ahora en los experimentos es la diferencia de las masas al cuadrado entre pares de neutrinos. De estas cotas se puede deducir que el neutrino más pesado no puede tener una masa menor a 0.04 eV. Se tiene además una cota cosmológica que pone una cota superior a la suma de la masa de los neutrinos de 1 eV.

Esto significa que hay otros cinco ordenes de magnitud entre el neutrino más pesado y el electrón, lo cual hace el problema de la jerarquía de masas aún más pronunciado.

Una explicación de lo pequeño de la masa de los neutrinos, es que los neutrinos adquieren su masa por el mecanismo del subibaja (seesaw en inglés). Esto implica la existencia de partículas muy masivas que no han sido observadas, neutrinos derechos. Los neutrinos, como su nombre lo dice, tienen carga eléctrica nula. Por ser neutro, cabe la posibilidad de que los neutrinos sean sus propias anti-partículas. Si este es el caso, se dice que es un neutrino de Majorana, si no, se dice que es un neutrino de Dirac. Si el neutrino es una partícula de Majorana podemos suponer que además de los neutrinos izquierdos podría haber neutrinos estériles derechos, que no participan en la interacción débil. El mecanismo de subibaja supone la existencia de por lo menos dos neutrinos derechos muy masivos. La diagonalización de la matriz de masas de los neutrinos hace que los estados físicos, los eigenvalores de la matriz de masas, sean dos neutrinos muy masivos y otro muy ligero, que sería el observado. Entre más masivos los derechos más ligeros los izquierdos, de ahí el nombre de subibaja.

Un problema abierto en la física de partículas es por qué los hadrones tienen mucha más masa que la suma de las masas de sus quarks constituyentes. La suma de la masa de los quarks constituyentes de un protón o neutrón es apenas un 1 % de su masa total. Se supone que la dinámica de la interacción fuerte es responsable de la masa de los hadrones, sin embargo el mecanismo exacto se desconoce.

Materia oscura

La propuesta de una clase de materia no interactuante fue hecha por Jan Oort y posteriormente Fritz Zwicky alrededor de 1930, para explicar la discrepancia entre la masa estimada a partir de las curvas de rotación de las galaxias y la inferida a través de la luminosidad. Para que las curvas de rotación observadas sean consistentes con la masa de las galaxias hay que agregar una componente de materia no visible. Este tipo de materia no emite ni absorbe luz o radiación electromagnética, o si lo hace es a un nivel mínimo, y su única interacción significativa es la gravitatoria, por esta razón se le llamó materia oscura [22]. También a escalas mayores se observa la necesidad de suponer la existencia de materia oscura para explicar la dinámica de objetos astronómicos grandes, como los cúmulos de galaxias, donde se infiere que la mayor parte de la masa proviene de la materia oscura. A lo largo de los años la evidencia a favor de la hipótesis de materia oscura ha aumentado: análisis de las velocidades de los miembros de los cúmulos de galaxias, imágenes de las lentes gravitacionales, así como las observaciones del cúmulo Bala (Bullet cluster), entre otros. El cúmulo Bala es en realidad dos cúmulos colisionando y la observación de este objeto indica la existencia de dos tipos de materia, la ordinaria, que interactúa entre sí frenando el movimiento en direcciones opuestas y que produce emisión en rayos X, y otro tipo de materia que no interactúa y cuyas componentes en cada cúmulo se atraviesan, ver figura 8.



Figura 8: El Bullet cluster, la parte roja representa la materia visible o bariónica y la azul la materia oscura. Fuente: NASA.

La primera pregunta que surge a partir de la observación de la materia oscura es si ésta puede ser una de las partículas ya conocidas o alguna partícula aún no detectada en los laboratorios terrestres. Para determinar que clase de partícula podría ser la materia oscura se divide en tres tipos, dependiendo de su masa e interacciones: fría, tibia o caliente. La materia oscura caliente se supone ultra-relativista, con una masa muy pequeña, el candidato evidente es el neutrino. Sin embargo, la formación de estructura del Universo a pequeña escala no se puede explicar con materia oscura caliente como única componente. Por otro lado la materia oscura fría es pesada y no-relativista y las predicciones que se hacen para la formación de estructura del Universo concuerdan en general con las observaciones astronómicas. La materia oscura tibia tiene propiedades que son una mezcla entre las de la fría y la tibia. Se pueden considerar también modelos mixtos de materia oscura fría y caliente. En estos casos la cantidad de materia oscura caliente puede ser sólo un pequeño porcentaje del total.

La hipótesis más favorecida por las observaciones actuales es que la materia oscura es fría y consiste de partículas masivas débilmente interactuantes (WIMPs por sus siglas en inglés). Sin embargo, ninguna de las partículas del ME puede ser candidato a materia oscura fría, de manera que tendría que ser una nueva o nuevas partículas hasta ahora no descubiertas.

Por otro lado existen propuestas de que la materia oscura como partícula no existe, sino que la teoría de la gravedad Newtoniana debe ser modificada para escalas muy grandes. A estas teorías se les conoce como teorías MOND (Modified Newtonian Dyna-

mics) [23]. Sin embargo, las teorías MOND no pueden ser reconciliadas con las observaciones del cúmulo Bala. En el cúmulo Bala, la materia visible se ve en rayos X y la materia oscura se infiere a partir de lentes gravitacionales. Los efectos de las lentes son más fuertes en dos regiones separadas cerca de las galaxias visibles, de acuerdo con la hipótesis de que la mayor parte de la masa se encuentra en forma de un halo de materia oscura alrededor de la galaxia. En teorías de gravedad modificada el efecto de las lentes estaría concentrado en la parte visible de la galaxia, lo cual no se observa.

La materia oscura constituye el 23 % de la masa total del Universo, la materia visible (galaxias y gas intergaláctico) constituye el 4.6 % y el resto de contenido de energía del Universo se encuentra en la llamada “energía oscura” [24]. La hipótesis de energía oscura surgió de la observación de que nuestro Universo se está expandiendo aceleradamente. Hasta ahora no se sabe con certeza que es lo que produce esta expansión. Entre las propuestas mejor aceptadas están las siguientes: que existe un término de constante cosmológica Λ , la cual es una densidad de energía constante intrínseca al espacio y constante en el tiempo, o los modelos de campos escalares y quintaesencia, que pueden variar de intensidad en el tiempo. Aunque la hipótesis de constante cosmológica es la más favorecida y constituye parte de lo que se conoce como el modelo cosmológico Λ CDM, la diferencia entre el valor esperado de las medidas cosmológicas y el calculado a partir de modelos de partículas elementales es inmensa. El valor esperado a partir de cálculos de la energía del vacío en el ME es aproximadamente 120 ordenes de magnitud mayor que el necesario para explicar la expansión del Universo [25, 26].

4. Misterios sin resolver

El ME tiene 19 parámetros cuyo valor no se puede inferir de la teoría, sino que se determina a través del experimento. Estos parámetros incluyen a las masas de las partículas (sin contar las masas de los neutrinos), los acoplamientos de norma y de Yukawa, los elementos independientes de la matriz CKM, la fase que viola CP y el valor esperado del vacío del Higgs. El valor de estos parámetros varía con la energía, pero a una energía específica su valor es el mismo. Es decir, son un conjunto de parámetros constantes a una energía dada.

¿Qué nos dicen el problema de la jerarquía y la multitud de parámetros arriba mencionados del ME? ¿Que es incorrecto? Después de todo el ME ha sido probado a una precisión impresionante, en toda una serie de medidas que se llaman justamente “medidas de precisión” y se ha encontrado un bosón compatible con el bosón de Higgs del ME. En el ME los neutrinos no tienen masa, el hecho de que se haya encontrado una masa, aunque sea pequeña, ya es una desviación del ME. Además, el mecanismo más natural que se tiene para dar masa a los neutrinos implica la existencia de neutrinos derechos. Pero quizás la evidencia más contundente de que hay física más allá del ME es la existencia de la materia oscura.

A lo que apuntan el problema de la jerarquía y los problemas abiertos del ME es que éste es una teoría efectiva, válida en cierto rango de energías, y que existe una teoría más fundamental que subyace al ME. Un punto a recalcar es que el concepto de naturalidad es un criterio estético y puede no ser la mejor guía para construir teorías o modelos exitosos, como lo prueba el ME. Una mucho mejor estrategia es concentrarse en la consistencia experimental y matemática, así como en la refutabilidad o falsabilidad de la teoría. Que sea falsable no significa que sea falsa, sino que se puede comprobar si es verdadera o falsa mediante la experimentación.

Una teoría fundamental debería explicar el origen y los valores de las masas de las partículas elementales, la naturaleza de la transición de fase electrodébil, el origen de la asimetría entre la materia y anti-materia en el Universo, la naturaleza de la materia oscura, el por qué hay sólo tres generaciones de materia, entre otras. El camino a esta teoría fundamental puede no ser directo, podría ser que vayamos encontrando diferentes teorías efectivas entre la escala electrodébil y la de Planck, como diferentes capas de una cebolla, que vayan dando luz a algunos de los misterios de la física de partículas. Podría ser que realmente no hubiera otra teoría diferente del ME entre la escala electrodébil y la escala de Planck, pero este punto de vista parece estar muy poco motivado por el problema del ajuste fino que se tiene que hacer a la masa del bosón de Higgs a la escala electrodébil. Este nos dice que el rango de validez del ME es alrededor de unos pocos TeVs y se esperaría que aproximadamente a esas energías deberíamos empezar a ver evidencias de la teoría que está más allá del ME, o de la siguiente capa de la cebolla.

5. Más Allá del Modelo Estándar

¿Cómo vamos a una teoría más fundamental? Nos encontramos en la frontera de lo desconocido. El camino que ha sido fructífero en el pasado ha sido considerar la adición de simetrías. Las simetrías relacionan distintos parámetros entre sí y fenómenos que parecían distintos se hacen manifiestos como aspectos distintos de un mismo fenómeno. Un ejemplo de esto es la electricidad y el magnetismo, que son dos aspectos de la fuerza electromagnética. El ME fue construido mediante un relación estrecha entre la consistencia matemática y los datos experimentales, a través de simetrías. Es por esto que la adición de simetrías parece un camino natural a seguir para buscar posibles teorías más allá del Modelo Estándar [27–31].

Más simetría

Una pregunta natural es si la simetría electrodébil y la fuerte podrían estar unificadas, las dos se describen por teorías de norma renormalizables [32–35]. Sabemos cómo se comportan estas teorías conforme cambia la energía gracias al grupo de renormalización, podemos tomar los datos experimentales de los acoplamientos de norma y extrapolarlos a altas energías. Si el valor de las constantes de acoplamiento se vuelven el mismo en

algún punto podremos describir a las interacciones electrodébil y la fuerte como una sola interacción fundamental. Los valores de los acoplamientos de norma son muy diferentes a la escala electrodébil (~ 100 GeV) y varían con la energía logarítmicamente, de manera que al dejar “correr” las constantes de acoplamiento con el grupo de renormalización éstas coinciden a una escala de energía del orden de 10^{16} GeV, es decir un poco abajo de la escala de Planck. La interacción electrodébil y la fuerte estarían unificadas, es decir sólo habría una interacción fundamental a esa escala de energía (aparte de la gravedad). Entre los grupos de unificación más pequeños, que incluyen a todas las partículas del ME y a sus grupos de norma, son los grupos $SU(5)$ y $SO(10)$.

En las teorías de Gran Unificación (GUT) se supone que la simetría de unificación es exacta a muy altas energías, abajo de cierto umbral (la escala GUT) sufren una transición de fase, de una manera similar a la transición de fase electrodébil, lo cual genera un rompimiento espontáneo de la simetría unificada (similar al rompimiento electrodébil) y lo que queda es el grupo de norma del ME, $SU(3) \times S(2) \times U(1)$. Las consecuencias de postular una teoría unificada es que ahora tenemos una relación entre distintos parámetros a través de la simetría. Esto podría explicar la cuantización de la carga eléctrica y su valor, en múltiplos de una carga fundamental de $1/3$, así como los valores para algunos cocientes de las masas. Estas teorías predicen además el decaimiento del protón, que hasta ahora no se ha observado. En el caso de los modelos $SU(5)$ el protón decae mediante unos nuevos bosones exóticos que acoplan a los quarks y leptones permitiéndolos interactuar, llamados leptokuarks. Por otro lado, el grupo $SO(10)$ unifica también a todas las interacciones, y además incluye a los neutrinos derechos, de manera que puede generar términos de masa para los neutrinos izquierdos observados, mediante el mecanismo del subibaja. Para llegar al grupo de simetría del ME hay que pasar por dos etapas de rompimiento espontáneo de la simetría $SO(10)$. Un camino es llevarlo a $SU(5) \times U(1)$ y de allí al ME, y otro es pasar por un modelo de Pati-Salam $SU(4) \times SU(2)_L \times SU(2)_R$. Cada uno de estos rompimientos implica la introducción de un parámetro nuevo, que es la escala de rompimiento asociada al vev de algún campo escalar.

Estos dos son los grupos de unificación más populares, si no se toma en cuenta a la gravedad. Existen también modelos de unificación que no tienen un grupo de norma único, sino un producto de grupos semi-simples (como el de Pati-Salam) o el de trinificación $SU(3)^3$. Es posible también concentrarse en el problema de la quiralidad e introducir en el producto de los grupos uno que sea derecho, para así tener una simetría explícita derecha-izquierda. Esto resulta natural en el modelo de Pati-Salam y en el de trinificación. La simetría derecha se encontraría rota a bajas energías, y lo que quedaría sería el modelo estándar.

Las teorías de Gran Unificación han sido estudiadas extensamente desde los años 80 del siglo pasado. Aunque proveen un marco matemático muy elegante para explicar algunas de las interrogantes del ME, es claro que no pueden dar explicación a todas ellas. En los primeros intentos unificadores, se supuso que había un “desierto” entre el ME y las teorías de Gran Unificación.

Supersimetría

A la par que se desarrollaron estas teorías surgió otra interrogante: ¿Es posible unificar la materia y las interacciones fundamentales? Esto va al meollo de las diferencias entre la descripción de ambas, una se representa con fermiones y la otra con bosones. A la simetría que relaciona a los bosones con los fermiones se le conoce como supersimetría. Es una extensión del grupo de Poincaré (traslaciones y transformaciones de Lorentz) que permite asociar bosones y fermiones mediante una transformación de simetría [36] y en un principio se propuso como una posible unificación de la materia y las interacciones. Sin embargo, al construir una teoría del campo supersimétrica resultó evidente que se necesitaban más partículas que las que hay en el ME para que la teoría fuese matemáticamente consistente. Estas partículas no se observan a la escala de energía electrodébil por lo que se supone que, si existe la supersimetría, debe ser una simetría rota, que se restablece a energías más altas.

Basado en el ME se puede construir la extensión más sencilla supersimétrica del mismo, el Modelo Estándar Supersimétrico Mínimo (MSSM, por sus siglas en inglés) [37, 38]. El ME sería el límite de bajas energías del MSSM, de manera que después del rompimiento de la supersimetría, lo que nos queda es el ME que ya conocemos. La parte Mínimo del nombre del MSSM se refiere a que hay sólo una transformación de supersimetría entre los bosones y los fermiones, y se dice que es una teoría con supersimetría $N = 1$. Una teoría supersimétrica puede tener más de una transformación entre bosones y fermiones, puede tener dos, cuatro u ocho. Se dice entonces que la teoría tiene supersimetría $N = 2, 4$ u 8 respectivamente. Las teorías con supersimetría $N = 8$ contienen al gravitón. En el MSSM a cada bosón del ME le corresponde un fermión supersimétrico y a cada fermión del ME le corresponde un bosón supersimétrico. A las partículas supersimétricas asociadas a las conocidas del ME se les llama supercompañeros. Además, el MSSM tiene dos campos de Higgs que son dobletes electrodébiles, un requerimiento necesario para evitar las anomalías de norma [18, 20, 39]. Uno de los aspectos que hizo inmediatamente popular al MSSM fue que provee una solución al problema de la jerarquía, ya que las correcciones radiativas a la masa del bosón de Higgs se cancelan exactamente por su contraparte supersimétrica. Entonces, el rompimiento de la supersimetría estaría directamente relacionado con la masa del Higgs. Después del rompimiento de la supersimetría y de la simetría electrodébil, quedan cinco bosones de Higgs con masa: dos neutros, uno ligero y uno pesado, dos cargados pesados y un bosón pseudoescalar. El neutro ligero se identifica con el Higgs del ME. En el MSSM no hay que hacer un ajuste fino para estabilizar la teoría, la masa del Higgs resulta del orden de la masa electrodébil. Otro aspecto teórico interesante es que se puede relacionar el rompimiento de la supersimetría con el de la simetría electrodébil.

Un dato que ha recibido mucha atención es el hecho de que la combinación del MSSM y teorías de Gran Unificación (SUSY GUTs) está en mejor acuerdo con los datos experimentales, que las teorías GUT sin supersimetría. Otro punto a su favor es que el MSSM provee naturalmente de candidatos a ser materia oscura, el más popular es el neutralino,

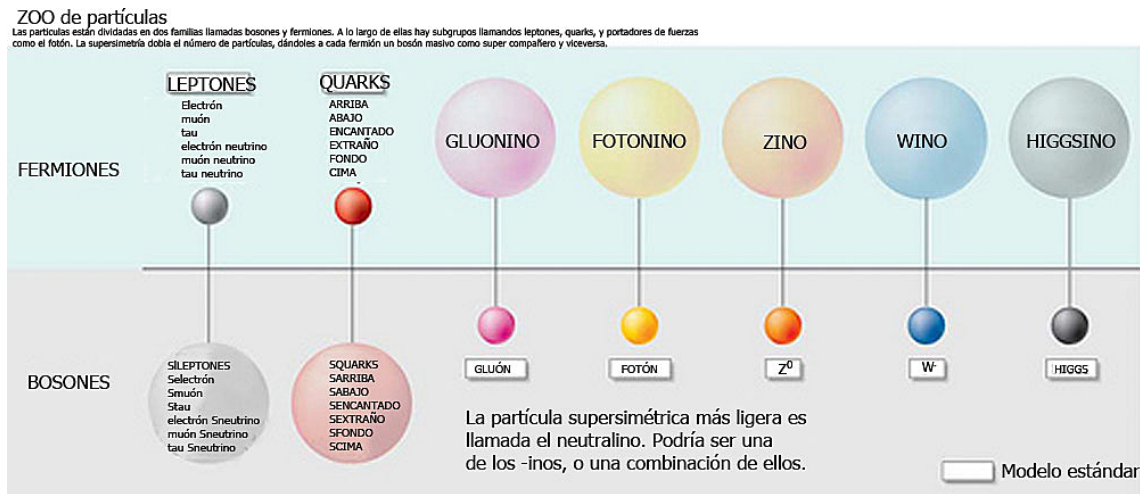


Figura 9: Las partículas del ME y sus compañeros supersimétricos.

que en muchas versiones del MSSM es la partícula supersimétrica más ligera [40]. También puede haber otros candidatos, como el gravitino, el sneutrino, el axino, que son los compañeros supersimétricos del gravitón, el neutrino y el axiÓN respectivamente. Todos estos aspectos interesantes se descubrieron después de que se construyó el MSSM, es decir, no se fabricó la teoría para explicarlos, sino que al estudiarla surgieron como ventajas extras de la simetría entre bosones y fermiones, lo cual sin duda constituye un punto a su favor. Sin embargo, falta el elemento más importante para que una teoría sea realmente exitosa: la confirmación experimental.

No se conoce un mecanismo dinámico del rompimiento de la supersimetría, se tienen ejemplos de mecanismos espontáneos, pero cuyas consecuencias contradicen a los datos experimentales. Por esto se supone que la supersimetría se rompe en el MSSM mediante términos de rompimiento llamados “suaves”, que son términos renormalizables que rompen explícitamente la simetría. Aunque el MSSM tiene aspectos que son teóricamente muy interesantes, la introducción de los términos de rompimiento suaves aumenta considerablemente el número de parámetros libres. Estos se constriñen mediante los datos experimentales y consideraciones teóricas. Primero se descartan todos los que pueden llevar a cambios de sabor (llamados términos de corrientes neutras de cambio del sabor), después se supone que el MSSM es consistente con una hipótesis de unificación, y que a esta escala de GUT muchos de los parámetros deben ser del mismo orden de magnitud, o incluso iguales (“universalidad”). De esta manera se constriñen los parámetros de alrededor de 120 a cinco. A este nuevo modelo se le conoce como el MSSM constreñido o CMSSM. Este es una de las extensiones del ME que se está probando experimentalmente en el LHC, o para ser precisos, regiones del espacio de parámetros de este modelo. Hasta ahora se han descartado las regiones del espacio de parámetros que dan partícu-

las supersimétricas relativamente ligeras. De los resultados experimentales es claro que si el CMSSM se descartase experimentalmente, no podríamos descartar a la supersimetría en sí como extensión del ME, pero sí se impondrían cotas fuertes a otros modelos supersimétricos. Si estos se empiezan a volver demasiado rebuscados, o si las soluciones a problemas abiertos del ME ya no se pueden realizar, estas teorías se irían descartando. De la combinación de ventajas teóricas (que expliquen algunos de los misterios del ME) y los datos experimentales debería deducirse si alguno de los modelos SUSY describe mejor la naturaleza a energías por arriba de los TeVs.

Por supuesto, otra posibilidad es que no exista una simetría entre bosones y fermiones, o que la supersimetría se manifieste a escalas mucho más grandes que ~ 1 TeV y que haya otro mecanismo que estabilice la masa del bosón de Higgs. Una suposición razonable es que los elementos de la teoría más fundamental no sean sólo supersimetría y Gran Unificación, sino que además haya alguna otra simetría o proceso físico desconocido. Después de todo, incluso con la adición estas dos simetrías tan poderosas, todavía quedan cabos sueltos por atar.

Otras simetrías, partículas e interacciones

Una suposición que parece natural es que los quarks no son fundamentales, sino que están a su vez compuestos de otras partículas. A estas teorías se les conoce como teorías tecnicolor [41, 42]. Estas teorías predicen nuevas interacciones de norma cuya dinámica genera la masa de los bosones W^\pm y Z , así como la de los quarks y leptones, sin necesidad de un bosón de Higgs. Sin embargo, estas teorías están fuertemente desfavorecidas por los resultados experimentales de las corrientes neutras que cambian el sabor, así como por las medidas de precisión del ME. El reciente descubrimiento del bosón de Higgs también resta relevancia a estas teorías, aunque en principio lo pueden incorporar.

Entre las adiciones de simetría que no corresponden a simetrías de norma o supersimetría se encuentran las simetrías del sabor [43, 44]. Estas relacionan a los diferentes elementos de nuestra tabla periódica de las partículas a través de una simetría que puede ser continua o discreta. Las representaciones irreducibles de los grupos del sabor se asocian también a las partículas elementales, de manera que estas se transforman tanto bajo el grupo de norma como el grupo de sabor. Esto da relaciones complementarias entre los parámetros, que, en algunos casos, han sido exitosas en describir las razones de las masas de quarks y leptones, es decir en dar soluciones al problema pequeño de la jerarquía de masas. Aunque todavía no se tiene una teoría completa del sabor, los últimos años han visto un adelanto en el uso de los grupos discretos para resolver este problema. En el caso de los grupos continuos, el rompimiento de la simetría implica la aparición de nuevas partículas, llamadas saborones o familiones (flavons o familions), cuya existencia podría indicar la presencia de una simetría continua rota. La no observación de estos estados pone una cota a la masa de los mismos, que depende de las características de cada modelo.

Otra posibilidad muy atractiva es que haya más bosones de Higgs que en el Modelo Estándar [18, 45], con o sin supersimetría. Estos bosones de Higgs extra se introducen generalmente como dobletes de la simetría electrodébil, aunque también se pueden considerar singletes. Una vez que la simetría electrodébil se rompe, las diferentes componentes de los campos de Higgs (cuatro para un doblete electrodébil, que corresponden a dos campos complejos), que están acoplados a los campos vectoriales, dan masa a los bosones vectoriales W^\pm y Z y las restantes quedan como estados físicos. Los modelos de dos dobletes de Higgs, sin supersimetría, han sido estudiados también extensivamente como una posible extensión del ME en sí, o como una extensión intermedia entre el ME y el MSSM. Todos los modelos de dos dobletes de Higgs tienen como estados físicos, después del rompimiento de la simetría electrodébil, un bosón neutro, generalmente ligero que se asocia al bosón de Higgs del ME, uno neutro más pesado, dos pesados cargados y un bosón pseudoescalar (es decir no conserva la simetría de carga paridad CP). Las propiedades de estos bosones de Higgs dependen de las características de cada modelo. El descubrimiento de un bosón escalar extra, además del Higgs del ME, indicaría la presencia de nueva física, con posibilidades de que fuera supersimétrica, pero no exclusivamente.

Estos modelos abren la posibilidad de asociar alguno de estos bosones de Higgs extra con materia oscura o con un campo de inflación. Dado que esta clase de modelos ya tienen bosones extra se puede aprovechar esta propiedad para explorar si resuelven además alguno de los problemas del ME, sin necesidad de introducir aún más partículas.

Otro camino a seguir es introducir otra simetría de norma, es decir otra interacción. Por ejemplo, una interacción que tuviera otro bosón tipo electrodébil Z' . Esto implicaría otra interacción de norma con grupo de simetría $U(1)'$. Aunque esto parece ir en la dirección opuesta a la de la unificación de las interacciones de norma, está justificado en los modelos de unificación donde no se tiene un sólo grupo de unificación, sino un producto de grupos semi-simples. Esto puede suceder naturalmente si se tiene un grupo de unificación muy grande, como en las compactificaciones de supercuerdas. En estas teorías el grupo de norma E_8 se rompe a un grupo más pequeño, que típicamente contiene más de un grupo $U(1)$.

Podemos, por otro lado, añadir dimensiones espaciales. En 1921 T. Kaluza propuso una unificación de la gravedad y el electromagnetismo en cinco dimensiones espacio-temporales. Unos años después, en 1926, O. Klein propuso que esta dimensión extra es compacta, es decir, esta enrollada en sí misma, como un círculo. La idea consiste en escribir la relatividad general en cinco dimensiones espacio-temporales, al compactificar una nos quedan las ecuaciones de Einstein por un lado y las ecuaciones del electromagnetismo por otro. El hecho de que tengamos una dimensión compacta implica, al momento de cuantizar la teoría, que el momento en esta dimensión está cuantizado. Esto se observaría como una torre infinita de campos escalares con masas proporcionales a n/R , donde n es un entero y R el radio de compactificación de la dimensión extra. La explicación de por qué no veríamos esta dimensión extra es que el radio de compactificación es muy pequeño, el campo escalar (estado de Kaluza-Klein o radión en algunas versiones más

modernas) sería muy pesado. La propuesta de Kaluza y Klein se basa en argumentos geométricos, donde la teoría subyacente es una extensión mínima de la gravedad. La física que observamos dependería sólo de las cuatro dimensiones en las que vivimos.

Una posible unificación de las cuatro interacciones fundamentales la ofrece la teoría de supercuerdas, de la cual hay un artículo de revisión en este libro, y que implica también la existencia de dimensiones extra compactificadas.

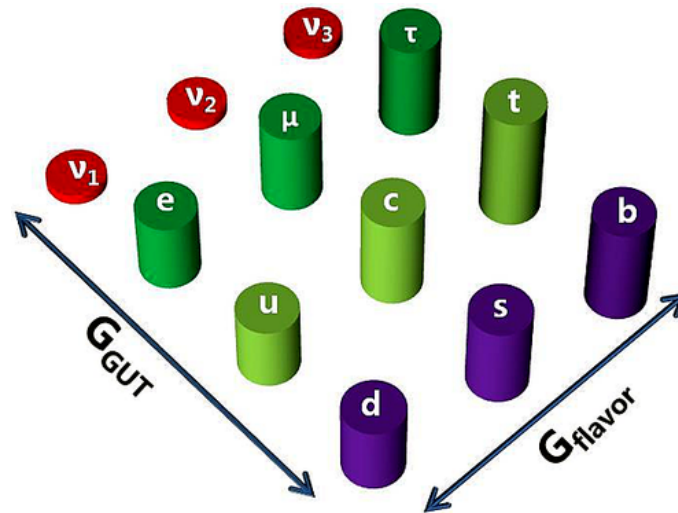


Figura 10: Simetría horizontal del sabor y simetría de Gran Unificación combinadas. Fuente: Grupo de física teórica de partículas elementales, KTH Royal Institute of Technology, Suecia.

En todos los casos el añadir simetrías, entre bosones y fermiones, entre los diferentes sabores, entre las interacciones, etc, tiene consecuencias, predicciones que se pueden probar contra el experimento. Cada uno de estos caminos tiene ventajas y desventajas, y por supuesto, se pueden combinar muchos de estos principios, por ejemplo se puede hacer una teoría supersimétrica GUT con una simetría extra del sabor. Lo que va guiando la imaginación de los teóricos es la belleza de las matemáticas y los resultados experimentales. Es decir, la consistencia de la teoría con el experimento y la consistencia matemática. Teorías que en algún momento pueden parecer muy atractivas pueden ser totalmente descartadas con un dato experimental. Este es el camino que se siguió para construir el ME, que ha sido muy exitoso.

Sin embargo, es necesario hacer una jerarquía de condiciones o constricciones para cualquier teoría que vaya más allá del ME. Primero están la concordancia con los datos experimentales y la consistencia matemática. Después vienen nuestros prejuicios teóricos de cómo debe verse una teoría fundamental. Si el experimento contradice nuestras expectativas, la última palabra es del experimento. La teoría matemática debe describir los fenómenos experimentales de la manera más simple y elegante posible, ¡pero debe

describirlos!

6. Fronteras de la física de altas energías

Es claro que los problemas abiertos en la física de Altas Energías conciernen tanto a lo más grande como a lo más pequeño. Para buscar las teorías más allá del Modelo Estándar hay tres fronteras que hay que explorar, tanto desde el punto de vista teórico como experimental: la frontera de la energía, la frontera de la intensidad y la frontera del cosmos.



Figura 11: Fronteras de la física de altas energías. Fuente: Fermilab.

Frontera de la Energía

En la frontera de la energía se encuentran todos los problemas que tienen que ver con el origen de las masas, la asimetría materia-antimateria o bariogénesis, la materia oscura, la unificación de las interacciones fundamentales y el origen de nuestro Universo, entre otros. Los experimentos en la frontera de la energía se basan en aceleradores poderosos donde se pueden alcanzar energías muy altas, que ocurrieron en la naturaleza al inicio de nuestro Universo. Los aceleradores activos en esta clase de experimentos son el LHC en CERN y hasta hace poco, el Tevatrón en Fermilab. Algunos de los experimentos en

esta frontera son ALICE, que estudia el plasma de quark y gluones, LHCb que estudia la asimetría materia-antimateria, ATLAS y CMS, que estudian varios procesos como la búsqueda y caracterización del Higgs, la existencia de dimensiones extra y la búsqueda de nuevas partículas como las supersimétricas o de materia oscura, Higgses exóticos, bosones vectoriales nuevos, todos ellos en CERN. Estos dos experimentos, aunque estudian procesos físicos similares, lo hacen con diferentes técnicas analíticas y experimentales. Se planean construir más aceleradores en el futuro para continuar la exploración de esta frontera, como el CLIC (Compact Linear Collider) o el ILC (International Linear Collider), que serían colisionadores de electrones-positrones para llegar a energías en el rango multi-TeV.

Frontera de la Intensidad

En la frontera de la intensidad se encuentran los experimentos en donde se utilizan haces muy intensos de partículas que se hacen colisionar para tener una probabilidad de ver eventos extremadamente raros. Los experimentos de esta frontera son típicamente los experimentos de neutrinos, ya que una determinación precisa de su masa y naturaleza es crucial también para entender el origen y evolución del Universo. Están también directamente relacionados con el problema de la violación de CP y, por lo tanto, la bariogénesis. Se encuentran aquí también los experimentos de decaimiento del protón. En el ME el protón es estable, pero muchas teorías de Gran Unificación predicen el decaimiento del protón, si se observa sería otra indicación de física más allá del ME. Esta frontera es estudiada en Fermilab por los experimentos ArgoNeuT, MiniBooNE, MINOS y en el futuro NOVA y LBNE. Estos experimentos están dedicados a estudiar diferentes propiedades de la física de neutrinos. Se encuentran también estudiando esta frontera los experimento T2K en Japón y Daya Bay en China, entre otros.

Frontera del Cosmos

La frontera del cosmos es donde se encuentran los experimentos y observaciones astrofísicas de eventos en donde la naturaleza de las partículas elementales es fundamental para entender estos procesos. Estos son, por ejemplo, la física de las supernovas, las observaciones de las lentes gravitacionales y de la expansión acelerada del Universo, los observatorios de rayos cósmicos y los de rayos gamma. Estas observaciones y experimentos complementan la información que se obtiene de los experimentos en los aceleradores y son cruciales para entender fenómenos como la materia y energía oscura o la bariogénesis, el origen y evolución del Universo, así como para la búsqueda de partículas exóticas. En esta frontera se encuentran los experimentos de rayos cósmicos, como el Pierre Auger (Argentina) o KASCADE (Alemania), los de rayos gamma como HAWC (México), VERITAS (USA), MAGIC (Islas Canarias), HESS (Namibia), así como los experimentos de detección directa de materia oscura, como XENON (Italia) y ZEPLIN (UK) y los dedi-

cados al estudio de la energía oscura como el Dark Energy Survey (Chile) y el BigBOSS (USA), entre otros.

Es claro que, aunque hemos avanzado mucho en nuestro entendimiento de los bloques e interacciones fundamentales de la materia, aún quedan muchas preguntas abiertas por responder. La interacción y el intercambio de información entre estas tres fronteras es lo que nos llevará a la formulación de una teoría más fundamental, donde se puedan explicar algunos de los misterios del ME. Los próximos años serán muy emocionantes para la física de Altas Energías, ya que gracias a la conjunción de los laboratorios terrestres y las observaciones astrofísicas se verá un avance considerable en nuestro entendimiento de la naturaleza de las interacciones fundamentales y su conexión con el origen y evolución del Universo.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por DGAPA-UNAM por medio del proyecto PAPIIT IN113412.

7. Referencias

- [1] C. Llewellyn Smith, "The use of basic science, <http://public.web.cern.ch/public/en/about/basicscience1-en.html>," 2008.
- [2] M. Veltman, *Facts and mysteries in elementary particle physics*. World Scientific Publishing Co., 2003.
- [3] R. Oerter, *The theory of almost everything: The standard model, the unsung triumph of modern physics*. Pearson Education LTD, 2006.
- [4] W. Cottingham and D. Greenwood, *An introduction to the standard model of particle physics*. Cambridge University Press, 2007.
- [5] M. J. Veltman, "Very elementary particle physics," *Lect.Notes Phys.*, vol. 746, pp. 371–392, 2008.
- [6] P. Langacker, "Introduction to the standard model and electroweak physics," *arXiv*, pp. 3–48, 2009, 0901.0241.
- [7] G. Aad *et al.*, "Observation of a new particle in the search for the standard model higgs boson with the atlas detector at the lhc," *Phys.Lett.B*, 2012, 1207.7214.
- [8] S. Chatrchyan *et al.*, "Observation of a new boson at a mass of 125 gev with the cms experiment at the lhc," *Phys.Lett.B*, 2012, 1207.7235.

- [9] T. Cheng and L. Li, *Gauge Theory of Elementary Particle Physics*. Oxford University Press, 1985.
- [10] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory*. Westview Press, 1995.
- [11] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*. Princeton University Press, 2003.
- [12] I. Aitchison and A. Hey, *Gauge theories in particle physics: A practical introduction. Vol. 1: From relativistic quantum mechanics to QED*. Graduate student series in physics, Institute of Physics, 2003.
- [13] I. Aitchison and A. Hey, *Gauge theories in particle physics: A practical introduction. Vol. 2: Non-Abelian gauge theories: QCD and the electroweak theory*. Graduate student series in physics, Institute of Physics, 2004.
- [14] K. Wilson and J. B. Kogut, "The renormalization group and the epsilon expansion," *Phys.Rept.*, vol. 12, pp. 75–200, 1974.
- [15] W. McComb, *Renormalization methods: A guide for beginners*. Oxford University Press, 2004.
- [16] S. Haywood, *Symmetries and conservation laws in particle physics: An introduction to group theory in particle physics*. Imperial College Press, 2011.
- [17] W. J. Marciano and H. Pagels, "Quantum chromodynamics: A review," *Phys.Rept.*, vol. 36, p. 137, 1978.
- [18] J. F. Gunion, H. E. Haber, G. L. Kane, and S. Dawson, "The higgs hunter's guide," *Front.Phys.*, vol. 80, pp. 1–448, 2000.
- [19] A. Djouadi, "The anatomy of electro-weak symmetry breaking. i: The higgs boson in the standard model," *Phys.Rept.*, vol. 457, pp. 1–216, 2008, hep-ph/0503172.
- [20] M. Gomez-Bock, M. Mondragon, M. Muhlleitner, M. Spira, and P. Zerwas, "Concepts of electroweak symmetry breaking and higgs physics," *arXiv*, pp. 177–238, 2007, 0712.2419.
- [21] J. Erler, "Weighing in on the higgs," *arXiv*, 2012, 1201.0695.
- [22] G. Bertone, D. Hooper, and J. Silk, "Particle dark matter: Evidence, candidates and constraints," *Phys.Rept.*, vol. 405, pp. 279–390, 2005, hep-ph/0404175.
- [23] R. H. Sanders and S. S. McGaugh, "Modified newtonian dynamics as an alternative to dark matter," *Ann.Rev.Astron.Astrophys.*, vol. 40, pp. 263–317, 2002, astro-ph/0204521.

- [24] E. J. Copeland, M. Sami, and S. Tsujikawa, "Dynamics of dark energy," *Int.J.Mod.Phys.*, vol. D15, pp. 1753–1936, 2006, hep-th/0603057.
- [25] S. Weinberg, "The cosmological constant problem," *Rev.Mod.Phys.*, vol. 61, pp. 1–23, 1989.
- [26] P. Peebles and B. Ratra, "The cosmological constant and dark energy," *Rev.Mod.Phys.*, vol. 75, pp. 559–606, 2003, astro-ph/0207347.
- [27] J. R. Ellis, "Beyond the standard model with the lhc," *Nature*, vol. 448, pp. 297–301, 2007.
- [28] P. Langacker, *The standard model and beyond*. Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation, Taylor and Francis, 2010.
- [29] J. Ellis, "Outstanding questions: Physics beyond the standard model," *Phil.Trans.Roy.Soc.Lond.*, vol. A370, pp. 818–830, 2012.
- [30] J. D. Wells, "Effective field theories and the role of consistency in theory choice," *arXiv*, 2012, 1211.0634.
- [31] A. Pomarol, "Beyond the standard model," *arXiv*, 2012, 1202.1391.
- [32] H. P. Nilles, "Supersymmetry, supergravity and particle physics," *Phys.Rept.*, vol. 110, pp. 1–162, 1984.
- [33] H. P. Nilles, "Minimal supersymmetric standard model and grand unification," *arXiv*, pp. 291–346, 1993. In Boulder 1993, Proceedings, The building blocks of creation.
- [34] S. Raby, "Grand unified theories," *arXiv*, 2006, hep-ph/0608183.
- [35] P. Nath, "Sugra grand unification, lhc and dark matter," *arXiv*, 2012, 1207.5501.
- [36] M. Sohnius, "Introducing supersymmetry," *Phys.Rept.*, vol. 128, pp. 39–204, 1985.
- [37] H. E. Haber and G. L. Kane, "The search for supersymmetry: Probing physics beyond the standard model," *Phys.Rept.*, vol. 117, pp. 75–263, 1985.
- [38] S. P. Martin, "A supersymmetry primer," *arXiv*, 1997, hep-ph/9709356.
- [39] A. Djouadi, "The anatomy of electro-weak symmetry breaking. ii. the higgs bosons in the minimal supersymmetric model," *Phys.Rept.*, vol. 459, pp. 1–241, 2008, hep-ph/0503173.
- [40] G. Jungman, M. Kamionkowski, and K. Griest, "Supersymmetric dark matter," *Phys.Rept.*, vol. 267, pp. 195–373, 1996, hep-ph/9506380.

- [41] K. D. Lane, "An introduction to technicolor," *arXiv*, 1993, hep-ph/9401324.
- [42] F. Sannino, "Technicolor and beyond: Unification in theory space," *J.Phys.Conf.Ser.*, vol. 259, p. 012003, 2010, 1010.3461.
- [43] H. Ishimori, T. Kobayashi, H. Ohki, Y. Shimizu, H. Okada, *et al.*, "Non-abelian discrete symmetries in particle physics," *Prog.Theor.Phys.Suppl.*, vol. 183, pp. 1–163, 2010, 1003.3552.
- [44] A. Mondragon, "Models of flavour with discrete symmetries," *AIP Conf.Proc.*, vol. 857B, pp. 266–282, 2006, hep-ph/0609243.
- [45] G. Branco, P. Ferreira, L. Lavoura, M. Rebelo, M. Sher, *et al.*, "Theory and phenomenology of two-higgs-doublet models," *Phys.Rept.*, vol. 516, pp. 1–102, 2012, 1106.0034.

Agujeros Negros

Miguel Alcubierre, Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM, México

1. Introducción

Los agujeros negros son, sin duda, unos de los objetos astrofísicos más interesantes y exóticos de la física moderna. Resultan fascinantes tanto para el público en general como para el investigador que busca descubrir sus propiedades.

El primer antecedente del concepto de agujero negro proviene del siglo XVIII, y en particular de las especulaciones de John Michell, en el Reino Unido, y Pierre Simón de Laplace, en Francia. De manera independiente, ambos se preguntaron de qué tamaño tendría que ser una estrella de una masa dada para que su velocidad de escape fuera tan alta que no pudiera escapar de ella ni siquiera la luz, que se propaga a una velocidad altísima (de cerca de 300,000 kilómetros por segundo). Semejante estrella no emitiría luz y podría llamarse “estrella oscura”. Michell y Laplace encontraron independientemente una ecuación para el radio que tendría que tener la estrella para no dejar escapar la luz, valor que hoy se conoce como el “radio gravitacional”, y que está dado por:

$$R = 2GM/c^2, \tag{1}$$

donde M es la masa de la estrella, G la constante gravitacional de Newton, y c la velocidad de la luz. El radio gravitacional es distinto para cada cuerpo y depende sólo de su masa. Para objetos celestes comunes el radio gravitacional es siempre mucho más pequeño que su tamaño real. Por ejemplo, para convertir a la Tierra en una estrella oscura sería necesario comprimir toda su masa en una esfera de aproximadamente un centímetro de radio. En el caso del Sol, sería necesario concentrar su masa en una esfera con un radio de unos tres kilómetros. Si se compara esto con los radios reales de la Tierra y el Sol, de aproximadamente 6,000 y 700,000 kilómetros respectivamente, podemos ver que para una masa dada las estrellas oscuras tendrían radios casi un millón de veces menores que los objetos astrofísicos usuales.

Las estrellas oscuras se consideraron sólo como una curiosidad matemática que no correspondía a ningún objeto real hasta que, a fines de 1915, Albert Einstein publicó la teoría general de la relatividad, una teoría moderna de la gravitación que reemplazó a la

gravitación universal de Newton. Pocas semanas después de que Einstein postulara su teoría, Karl Schwarzschild la utilizó para calcular el campo gravitacional que produce un objeto esférico y estático. Con el cálculo relativista de Schwarzschild se puede deducir una nueva fórmula para el radio gravitacional, pero ahora desde el punto de vista de la teoría de Einstein. Resulta que la expresión matemática que se obtiene con la teoría de Einstein es exactamente igual a la que se obtiene con la de Newton dada por la ecuación (1) arriba. Pero ahí termina el parecido entre ambas teorías.

En la teoría de Newton, la luz que sale de la superficie de una estrella oscura subirá hasta cierta altura y luego volvería a caer, igual que una piedra. Pero en la teoría de Einstein la luz simplemente se queda atrapada en el radio gravitacional y no sale nunca. Esto tiene consecuencias sorprendentes. En la teoría de la relatividad la velocidad de la luz es la máxima posible en el Universo: nada puede viajar más rápido. Si la luz se queda atrapada en el radio gravitacional entonces la materia no sólo no puede salir, sino que tiene por fuerza que moverse hacia abajo, hacia el centro de la estrella oscura. Esto implica, en particular, que la estrella oscura no puede tener una superficie material. En la vieja teoría de Newton, en cambio, nada impide que la estrella, por más comprimida que esté, tenga una superficie material.

En la teoría general de la relatividad el radio gravitacional marca la frontera de una región sin retorno: si te encuentras afuera, siempre puedes escapar con una nave lo suficientemente potente. Pero si estás adentro, escapar es imposible y caerás inevitablemente hacia el centro. Un objeto con estas propiedades no es ya la relativamente inofensiva estrella oscura de Michell y Laplace, sino una especie de agujero en el espacio, del que, una vez dentro, resulta imposible salir. En la década de los 60 el físico estadounidense John A. Wheeler bautizó a estos extraños objetos como “agujeros negros”.

2. Gravitación y geometría

La teoría de la relatividad general, postulada por Einstein a fines de 1915 [1, 2], es la teoría moderna de la gravitación. De acuerdo a esta teoría, la gravedad no es una fuerza como se le consideraba en la física newtoniana, sino que mas bien es una manifestación de la “curvatura” del espacio-tiempo. Un objeto masivo produce una distorsión en la geometría del espacio-tiempo en su vecindad, y a su vez dicha distorsión afecta el movimiento de los objetos cercanos.

Cuando Einstein introdujo su teoría de la relatividad especial en 1905 resultó claro que la teoría de la gravitación de Newton tenía que modificarse. La principal razón para ello era que en la teoría de Newton la interacción gravitacional entre dos objetos se transmite de manera instantánea, lo que contradice uno de los resultados fundamentales de la relatividad especial: ninguna interacción física puede propagarse más rápido que la luz. Las ideas básicas que guiaron a Einstein en su búsqueda de una nueva teoría de la gravedad fueron el llamado “principio de covariancia general”, que dice que las leyes de la física de-

ben tener la misma forma en todo sistema de referencia, y el “principio de equivalencia”, que dice que todos los objetos caen con la misma aceleración en un campo gravitacional o, dicho de otra forma, que las leyes de la física en caída libre son equivalentes a las de la relatividad especial cuando no hay gravedad. El principio de covariancia general implica que las leyes de la física se deben expresar en el lenguaje de tensores, mientras que el principio de equivalencia implica que la gravedad debe identificarse con la geometría del espacio-tiempo.

3. Relatividad especial

Einstein desarrolló la relatividad especial en 1905 [3, 4] con el objetivo de reconciliar la electrodinámica de Maxwell con el “principio de relatividad” de Galileo que implica que las leyes de la física deben ser las mismas en todo sistema inercial. La relatividad especial se basa en dos postulados fundamentales, el primero de los cuales es el principio de relatividad mismo, y el segundo el hecho empírico de que la velocidad de la luz es la misma en todo sistema inercial, independientemente de la velocidad de la fuente que emite la luz o del observador que la recibe. La existencia de sistemas inerciales juega un papel fundamental en la relatividad especial, de hecho, es esto lo que le da el nombre de “especial”. Uno de los resultados más conocidos de la relatividad especial es la ley de transformación de coordenadas entre dos sistemas inerciales conocidas como las “transformaciones de Lorentz”.

La relatividad especial fue reescrita en términos geométricos por Minkowski en 1908. Minkowski mostró que el contenido del segundo postulado de Einstein sobre la invariancia de la velocidad de la luz podía reinterpretarse en términos geométricos si se definía el “intervalo” ds^2 entre dos eventos como:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2)$$

El segundo postulado de Einstein implica que dicho intervalo es “absoluto” en el sentido de que toma el mismo valor en todo sistema inercial. Es decir, podemos definir un concepto de distancia invariante en el espacio-tiempo. Es importante mencionar que la distancia euclidiana $dx^2 + dy^2 + dz^2$ no es invariante frente a transformaciones de Lorentz, ni tampoco el intervalo de tiempo dt^2 . Solo el intervalo de Minkowski resulta ser invariante. Este es el motivo por el que en relatividad se habla de espacio-tiempo, y no de espacio y tiempo por separado.

Una propiedad fundamental del intervalo es el hecho de que, debido al signo menos que aparece en el primer término, dicho intervalo no es positivo definido. Esto, lejos de representar un problema, tiene una importante interpretación física. En particular, nos

permite clasificar la separación entre dos eventos de acuerdo al signo de ds^2 :

$$ds^2 > 0 \quad \text{separación espacialoide,} \quad (3)$$

$$ds^2 < 0 \quad \text{separación temporaloide,} \quad (4)$$

$$ds^2 = 0 \quad \text{separación nula.} \quad (5)$$

El intervalo espacialoide corresponde a eventos separados de tal forma que sería necesario moverse más rápido que la luz para llegar de uno a otro, la separación temporaloide a eventos tales que se puede llegar de uno a otro viajando más lento que la luz, y la separación nula a eventos que pueden conectarse por un haz de luz. Una consecuencia de las transformaciones de Lorentz es que el orden en el tiempo de dos eventos solo resulta ser absoluto si su separación es temporaloide o nula. Para separaciones espacialoides el orden temporal es relativo y depende del observador. Esto nos permite definir una noción de causalidad de manera invariante: solo aquellos eventos separados de manera temporaloide o nula pueden tener una relación causal entre sí. Esto implica, en particular, que no pueden existir interacciones físicas que se propaguen más rápido que la luz.¹

Las trayectorias nulas también definen el llamado “cono de luz”, que es una representación gráfica de las relaciones causales entre eventos (ver Figura 1).

Definamos ahora el “tiempo propio” entre dos eventos como el tiempo medido por un reloj ideal que ve ambos eventos ocurrir en el mismo lugar. Si denotamos al tiempo propio por $d\tau$ es posible demostrar que $d\tau = \sqrt{-ds^2}$. Claramente el tiempo propio solo se puede definir para intervalos temporaloides o nulos. A partir de la definición del tiempo propio, es posible mostrar que el intervalo de tiempo entre dos eventos en un sistema inercial está dado por:

$$dt = \gamma d\tau \geq d\tau, \quad (6)$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ es el llamado “factor de Lorentz”. Este efecto se conoce como la “dilatación del tiempo”, e implica que en un sistema inercial todos los relojes en movimiento se atrasan.

La existencia del intervalo nos permite pensar en la longitud de curvas en el espacio-tiempo. En particular, para curvas de tipo temporaloide (aquellas tales que su tangente es siempre un intervalo temporaloide), la longitud de la curva resulta ser igual al tiempo propio medido por un reloj ideal cuya trayectoria en el espacio-tiempo está dada precisamente por dicha curva. La dilatación del tiempo implica que las líneas rectas temporaloides tienen longitud máxima (lo opuesto a lo que ocurre en la geometría euclidiana). En todo caso, las líneas rectas resultan trayectorias extremas en el espacio-tiempo, también conocidas como “geodésicas”. Esto nos permite reescribir la primera ley de Newton en

¹En el caso de la mecánica cuántica existen algunos procesos físicos no locales relacionados con el llamado “colapso de la función de onda” y el “enredamiento cuántico” que aparentemente requieren de interacciones físicas que viajen más rápido que la luz (a velocidad infinita). Sin embargo, se ha demostrado rigurosamente que es imposible utilizar este tipo de fenómenos para enviar señales súper-lumínicas. Las implicaciones filosóficas de este tipo de fenómenos aún son motivo de debate en nuestros días.

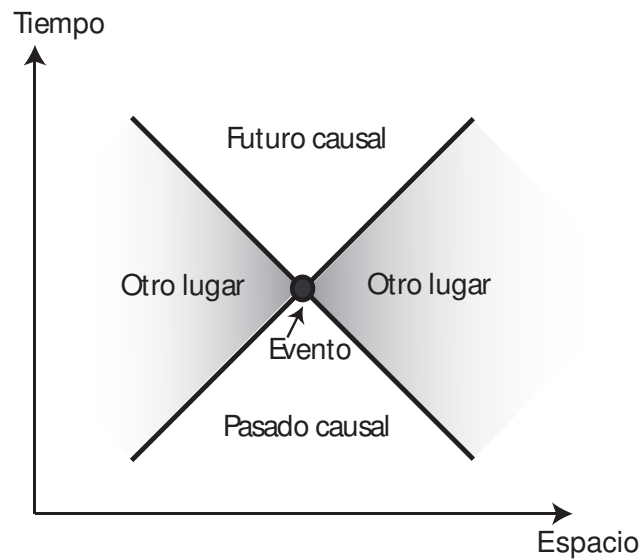


Figura 1: El cono de luz de un evento define su relación causal con los demás, y separa al espacio-tiempo en tres regiones: el pasado causal, el futuro causal, y el “resto” (aquellos eventos con los que no se tiene ninguna relación causal).

lenguaje geométrico: objetos libres de fuerzas externas se mueven a lo largo de geodésicas temporaloides del espacio-tiempo. Este simple enunciado captura el hecho de que dichas trayectorias son rectas en el espacio tridimensional, a velocidad constante, y que dicha velocidad es menor que la de la luz. La ley puede extenderse a la luz de la siguiente manera: los rayos de luz (fotones) en el vacío se mueven en geodésicas nulas del espacio-tiempo. En relatividad la trayectoria de un objeto en el espacio-tiempo se conoce como su “línea universo”, por lo que vemos que una partícula libre se mueve de tal manera que su línea universo es una geodésica.

La relatividad especial tiene varias consecuencias físicas que resultan anti-intuitivas. Además de la dilatación del tiempo ya mencionada, resulta que la longitud de los objetos tampoco es absoluta. Un objeto que se mueve en un sistema inercial se contrae en la dirección de movimiento. Este fenómeno se conoce como la “contracción de Lorentz”. Pero quizá una de las consecuencias más conocidas de la relatividad especial es la equivalencia entre la masa y la energía. La inercia de un objeto aumenta con su velocidad y se vuelve infinita si el objeto alcanza la velocidad de la luz. Por otro lado, la energía E de un objeto resulta estar dada en términos de su masa por:

$$E = m\gamma c^2, \quad (7)$$

donde m es la masa del objeto medida en reposo y γ es el factor de Lorentz introducido

anteriormente. En particular, un objeto en reposo tiene una energía dada por la famosa ecuación $E = mc^2$.

4. Relatividad general

Como mencionamos anteriormente, el principio de equivalencia llevó a Einstein a la idea de que la gravitación debería identificarse con la geometría del espacio-tiempo. Este principio dice que todos los objetos caen con la misma aceleración en presencia de un campo gravitacional, algo que en el caso de la física newtoniana implica que la masa inercial y la masa gravitacional de los objetos son siempre iguales. La observación fundamental de Einstein fue el hecho de que el principio de equivalencia implica que en un sistema de referencia en caída libre la fuerza de gravedad efectivamente desaparece, por lo que las leyes de la física toman la misma forma que en la relatividad especial. En otras palabras, el principio de equivalencia implica que en presencia de un campo gravitacional siempre existen sistemas inerciales locales, y que estos son precisamente aquellos en caída libre. Cuando el campo gravitacional es no uniforme, sin embargo, dichos sistemas localmente inerciales no pueden unirse en un sistema inercial global debido a que los sistemas en caída libre en lugares distintos tienen aceleraciones que difieren en magnitud y dirección.

El hecho de que existen sistemas inerciales locales puede describirse diciendo que localmente el espacio-tiempo tiene la misma forma que el de Minkowski, mientras que el hecho de que no existe un sistema globalmente inercial implica que la geometría de Minkowski no puede extenderse de manera global. Este hecho tiene una clara interpretación geométrica. La geometría de Minkowski corresponde a un espacio-tiempo plano, sin curvatura. Un espacio (o espacio-tiempo) curvo siempre puede verse localmente plano en un sistema de coordenadas particular. En el caso del espacio-tiempo este sistema de coordenadas localmente plano corresponde precisamente al que está en caída libre, y el que no pueda extenderse de manera global implica que un campo gravitacional no uniforme corresponde a un espacio-tiempo curvo.

La relatividad general entonces generaliza a la relatividad especial al considerar la posibilidad de tener un espacio-tiempo curvo, y asocia a la gravitación precisamente con dicha curvatura. Es muy importante notar que en relatividad general, el campo gravitacional no corresponde a la fuerza gravitacional newtoniana, pues dicha fuerza desaparece en caída libre. Es decir, la fuerza de gravedad de Newton es en realidad solamente una "fuerza inercial", análoga a la fuerza centrífuga en un sistema de referencia en rotación. Lo que no desaparece, ni siquiera en caída libre, son las llamadas "fuerzas de marea" debidas a que el campo gravitacional no es uniforme. Son dichas fuerzas de marea las que representan al verdadero campo gravitacional, y las que corresponden a la curvatura del espacio-tiempo.

Una primera aplicación del principio de equivalencia corresponde al movimiento de una partícula libre en un campo gravitacional. Dado que en caída libre el movimiento de

una partícula es equivalente al que tiene en relatividad especial, es decir una línea recta, en un espacio-tiempo curvo la trayectoria debe ser localmente recta, es decir, debe ser una geodésica. Esto significa que en relatividad general la primera ley de Newton toma la siguiente forma: Una partícula en caída libre sigue una geodésica temporal del espacio-tiempo, y un rayo de luz sigue una geodésica nula.

Otra aplicación sencilla del principio de equivalencia está relacionada con la frecuencia de los rayos de luz que salen de un pozo gravitacional. Debido a que en un sistema en caída libre la frecuencia debe permanecer fija como lo hace en ausencia de gravedad, en un sistema en reposo la frecuencia debe disminuir al salir del pozo gravitacional, es decir, la frecuencia se corre al rojo. A esto se le conoce como el efecto Doppler gravitacional, y ha sido observado experimentalmente con alto grado de precisión. Dicho de otro modo, al igual que otras partículas, los fotones pierden energía al salir de un campo gravitacional (se corren al rojo), y la ganan al caer (se corren al azul), aun cuando su velocidad local es siempre la velocidad de la luz.

El efecto Doppler gravitacional tiene un fenómeno asociado mucho más sorprendente: los relojes dentro de un pozo gravitacional avanzan más lento que se los que se encuentran afuera. Esta “dilatación gravitacional del tiempo” es muy pequeña en el campo gravitacional terrestre, aproximadamente de una parte en 10^9 , lo que significa que un reloj ideal en la superficie terrestre pierde un segundo cada 30 años cuando se le compara con un reloj idéntico en el espacio exterior (en el Sol el efecto es mil veces mayor). Aún cuando puede parecer muy pequeño, este efecto es fundamental para mantener en funcionamiento el Sistema de Posicionamiento Global, GPS por sus siglas en inglés, que depende de manera crucial de mantener sincronizados relojes en órbita y relojes terrestres con alto grado de precisión. Hoy en día los relojes atómicos son tan precisos, que es posible medir la diferencia en el ritmo de dos relojes separados por una altura de menos de 1 metro.

5. Curvatura y las ecuaciones de campo de Einstein

Las matemáticas asociadas a los espacios curvos fueron desarrolladas en el siglo XIX por matemáticos de la talla de Gauss, Riemann, y muchos otros, y se expresan en el lenguaje de los “tensores”. Aquí no vamos a entrar en muchos detalles sobre el formalismo de tensores, dichos detalles pueden encontrarse en cualquier libro introductorio sobre relatividad general. Sin embargo, para poder entender algunas de las propiedades de un espacio-tiempo curvo, y en particular de los agujeros negros, es muy importante mencionar algunos puntos básicos.

Comencemos con un poco de notación. Las coordenadas del espacio-tiempo se denotan en general como x^μ , donde el índice griego μ puede tomar valores de 0 a 3. En general, x^0 corresponde a la coordenada temporal, $x^0 = t$, mientras que x^i con $i = 1, 2, 3$ representa las coordenadas espaciales que pueden ser cartesianas con ($x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z$), esféricas con ($x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = \varphi$), o las que resulten más convenientes en un caso

dado.

La geometría del espacio-tiempo se expresa siempre en términos del intervalo invariante ds^2 . En el caso del espacio-tiempo de Minkowski de la relatividad especial, dicho intervalo se puede escribir de manera compacta como:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (8)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la llamada “métrica de Minkowski” dada por:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Como hemos mencionado, en presencia de un campo gravitacional el espacio-tiempo es curvo, por lo que la geometría ya no corresponde a la de Minkowski. Sin embargo, la geometría sigue estando expresada en términos del intervalo ds^2 , con la diferencia de que en este caso la métrica ya no corresponde a la de Minkowski, y se denota en general por $g_{\mu\nu}$ en lugar de $\eta_{\mu\nu}$. De manera que el intervalo queda dado por:

$$ds^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (10)$$

El campo gravitacional está codificado en la forma de la métrica $g_{\mu\nu}$. A cada métrica corresponderá una geometría específica asociada a un campo gravitacional específico. La tarea principal en relatividad general es precisamente encontrar la geometría asociada al campo gravitacional producido por una distribución de materia y energía, es decir, encontrar la métrica $g_{\mu\nu}$.

El principio de equivalencia implica que en caída libre siempre es posible reducir el intervalo a la forma que tiene en relatividad especial, pero sólo localmente, es decir en una región cercana al evento que estamos considerando. En términos matemáticos esto significa que siempre es posible encontrar coordenadas tales que, en la vecindad de un evento dado $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, y tal que las primeras derivadas de $g_{\mu\nu}$ se anulan en ese punto, pero sus segundas derivadas son en general distintas de cero. Son precisamente estas segundas derivadas las que corresponden a las fuerzas de marea gravitacionales, y las que codifican la curvatura del espacio-tiempo en ese punto.

En este momento resulta importante detenernos a pensar en algunas de las ideas que hemos desarrollado y en como se comparan con el caso de la teoría de la gravitación universal de Newton. En primer lugar, en la teoría de Newton el campo gravitacional

está representado por una sola función llamada el “potencial gravitacional” ϕ . Las ecuaciones de campo que nos permiten encontrar el potencial gravitacional generado por una cierta distribución de materia toman la forma:

$$\nabla^2\phi = -4\pi G\rho, \quad (11)$$

donde ρ es la densidad de masa. Es decir tenemos una sola ecuación de campo de segundo orden en ϕ cuya fuente es la densidad de masa. En el caso de la relatividad general podemos notar inmediatamente varias cosas. En primer lugar, el campo gravitacional ahora está representado por las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$. Dado que la métrica es siempre una matriz 4×4 simétrica, tendremos en general 10 potenciales gravitacionales. Por otro lado, la equivalencia entre masa y energía implican que la fuente del campo gravitacional será en general la densidad de energía, lo que implica que todo sistema físico con energía será fuente de la gravedad (como por ejemplo un campo electromagnético).

Sin embargo, se puede demostrar que la densidad de energía no es invariante, y ante cambios de coordenadas se mezcla con la densidad de momento y con el flujo de momento (los esfuerzos, tensiones y presiones). La fuente del campo gravitacional resulta ser entonces todo el conjunto formado por la densidad de energía, la densidad de momento y el flujo de momento, lo que se representa en general por una matriz simétrica 4×4 denominada el “tensor de energía-momento” y denotada por $T^{\mu\nu}$. Es decir, tenemos 10 fuentes y diez potenciales.

Aunque las ideas básicas del principio de equivalencia y la curvatura del espacio-tiempo fueron propuestas por Einstein a través de varios años entre 1907 y 1915, las ecuaciones de campo que permiten encontrar la métrica a partir de una cierta distribución de energía y momento tuvieron que esperar hasta noviembre de 1915. Einstein fue guiado por diversas consideraciones para encontrar dichas ecuaciones de campo, y el camino lo llevó por algunos callejones sin salida y propuestas fallidas. Los principios físicos que guiaron a Einstein fueron los siguientes: las ecuaciones deberían relacionar a la distribución de energía y momento con la curvatura del espacio-tiempo, deberían ser ecuaciones covariantes (tensoriales) válidas en cualquier sistema de coordenadas, deberían reducirse a las ecuaciones de Newton para campos gravitacionales débiles y velocidades bajas, y deberían satisfacer la ley de conservación de energía y momento. Sin describir los distintos términos en detalle, presentamos a continuación la forma final de dichas ecuaciones de campo:

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu}, \quad (12)$$

donde $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento asociado a la distribución de materia, G es la constante de Newton, c la velocidad de la luz, y $G^{\mu\nu}$ es el llamado “tensor de curvatura de Einstein” que representa la curvatura del espacio-tiempo y que está definido como una combinación complicada de segundas derivadas de la métrica $g_{\mu\nu}$. Es importante señalar que estas mismas ecuaciones de campo fueron propuestas de manera totalmente independiente por David Hilbert. De hecho, Hilbert las encontró un par de semanas antes

que Einstein. Mientras que el camino seguido por Einstein fue un camino largo basado en intuición física, el camino seguido por Hilbert fue mucho más directo y formal. Hilbert utilizó un formalismo Lagrangiano y derivó las ecuaciones de campo utilizando un principio variacional. Debido a esto, a las ecuaciones de campo se les llama frecuentemente ecuaciones de Einstein-Hilbert.

Las ecuaciones de campo escritas arriba forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales, de segundo orden, para encontrar las componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$. Pese a su forma aparentemente simple y elegante, son en realidad ecuaciones altamente complejas: están acopladas, son no lineales, y al expandirlas completamente en un sistema de coordenadas general resultan tener miles de términos.

6. La solución de Schwarzschild y los agujeros negros

Las ecuaciones de campo de la relatividad general postuladas por Einstein y Hilbert a fines de 1915 son ecuaciones altamente complejas. Aún así, la primera solución exacta de dichas ecuaciones fue encontrada unos meses después por Karl Schwarzschild en 1916 [5]. Schwarzschild consideró el campo gravitacional externo a un objeto esférico y estático. Dado que se buscaba el campo externo al objeto, la solución de Schwarzschild corresponde a una solución de vacío, lo que simplifica considerablemente el problema. La suposición de simetría esférica, así como el buscar una solución estática, lo simplifican aún más.

La solución final encontrada por Schwarzschild corresponde a un espacio-tiempo cuyo intervalo invariante, escrito en coordenadas esféricas (r, θ, φ) , toma la forma simple:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (13)$$

donde M es la masa del objeto central, y donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ es el llamado “elemento de ángulo sólido”, que mide distancias sobre la superficie de una esfera (y que tiene exactamente la misma forma en un espacio plano). Esta forma del intervalo encontrada por Schwarzschild representa el campo gravitacional externo a cualquier objeto esférico y estático, y como tal es una excelente aproximación al campo gravitacional de la Tierra, el Sol, o las estrellas.

Hay varias cosas que se pueden notar en la solución de Schwarzschild. En primer lugar, cuando r tiende a infinito, la solución se reduce a:

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (14)$$

que no es otra cosa que el intervalo de Minkowski escrito en coordenadas esféricas. Es decir, lejos de la fuente la geometría es la de Minkowski, lo que es de esperarse pues el campo gravitacional se hace muy débil. Por otro lado, el intervalo se vuelve singular en

$r = 0$ y en $r = 2GM/c^2$. El radio $R_S \equiv 2GM/c^2$ se conoce como “radio de Schwarzschild” o “radio gravitacional”, y para objetos astrofísicos ordinarios (planetas, estrellas, etc.) es en general mucho menor que el tamaño real del objeto. Dado que la solución de Schwarzschild es solo válida en el exterior del objeto, las singularidades en $r = 0$ y $r = 2GM/c^2$ no tienen importancia en esos casos pues la solución en el interior es distinta y resulta ser regular.

Si, por otro lado, queremos considerar a la solución de Schwarzschild como asociada a una partícula puntual, entonces sí debemos preocuparnos por las singularidades en $r = 0$ y $r = R_S$. El caso de $r = 0$ es menos problemático. De hecho, incluso en la teoría de Newton el campo gravitacional de una partícula puntual se vuelve infinito en $r = 0$. En el caso de la relatividad general, en $r = 0$ la curvatura del espacio-tiempo, que representa las fuerzas de marea, se vuelve infinita. Debido a ello al punto $r = 0$ se le conoce simplemente como “la singularidad”.

La singularidad en $r = R_S$, por otro lado, es mucho más interesante pues no tiene análogo newtoniano. Cuando se analiza con cuidado lo que ocurre en $r = R_S$, resulta que la curvatura del espacio-tiempo es perfectamente regular en ese punto. Esto significa que la singularidad en el intervalo no es una singularidad de la geometría, sino que simplemente indica que las coordenadas no se comportan bien en ese punto.

Hay otra propiedad sorprendente de la solución de Schwarzschild. Para $r < R_S$ las coordenadas de espacio y tiempo intercambian papeles: el coeficiente de dr^2 se hace negativo indicando que ahora es una coordenada temporal, mientras que el coeficiente de dt^2 se hace positivo, indicando que es una coordenada espacial. Este hecho tiene una consecuencia física muy importante, implica que si un objeto se acerca a una distancia menor que R_S , entonces el flujo del tiempo se vuelve equivalente a una disminución de r , es decir, el objeto debe acercarse más y más al centro por la misma razón que el tiempo fluye al futuro. Como nada puede detener el flujo del tiempo, entonces ninguna fuerza es capaz de evitar que el objeto caiga a $r = 0$, donde encontrará fuerzas de marea infinitas que lo despedazarán. El radio de Schwarzschild representa entonces una superficie de no retorno: para radios mayores siempre es posible escapar del campo gravitacional si se cuenta con un cohete lo suficientemente poderoso, pero si se cruza $r = R_S$ la caída hasta la singularidad central es físicamente inevitable.

Al radio de Schwarzschild se le conoce también como el “horizonte de eventos”. Esto se debe a que es posible demostrar que para radios mayores siempre existen trayectorias nulas, es decir asociadas a rayos de luz, que pueden escapar hasta el infinito. Pero para radios menores todas las trayectorias nulas caen hacia el centro. En otras palabras, para $r < R_S$ todo rayo de luz, incluso si se dirige “hacia afuera”, se propaga hacia radios aún menores. Como ninguna interacción física puede propagarse más rápido que la luz, ningún evento que ocurra en la región $r < R_S$ puede afectar el exterior. Los objetos que caen dentro del radio de Schwarzschild se desconectan causalmente del resto del Universo. Es en este sentido en el que el radio de Schwarzschild se comporta como un horizonte.

Dado que las coordenadas utilizadas en la solución original de Schwarzschild se com-

portan mal en el horizonte, la física asociada a dicha solución se puede apreciar de mejor manera en un sistema de coordenadas diferente. Las llamadas coordenadas de Eddington–Finkelstein se obtienen definiendo una nueva coordenada temporal \tilde{t} de la siguiente manera:

$$\tilde{t} = t + 2M \ln(r/2M - 1), \quad (15)$$

donde para simplificar la expresión hemos adoptado la convención usual en relatividad general de tomar la velocidad de la luz y la constante de Newton iguales a la unidad, $G = c = 1$ (seguiremos utilizando esta convención de aquí en adelante). Haciendo el cambio de coordenadas, el intervalo toma la nueva forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} d\tilde{t}dr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (16)$$

Es importante recalcar que esta nueva forma del intervalo representa la misma solución de Schwarzschild, es decir la misma geometría y el mismo sistema físico, pero escrita en un sistema de coordenadas distinto. En estas coordenadas las trayectorias nulas “entrantes” se mueven a velocidad constante $dr/d\tilde{t} = -1$, es decir a la velocidad de la luz. Por otro lado, las trayectorias nulas “salientes” tienen velocidad $dr/d\tilde{t} = (1 - 2M/r)/(1 + 2M/r)$. Esto implica que la velocidad es menor que 1 para $r > R_S$, igual a cero para $r = R_S$, y negativa para $r < R_S$, es decir, dentro del horizonte los rayos de luz “salientes” en realidad también caen. Estas propiedades de la solución de Schwarzschild se pueden observar mejor en la Figura 2.

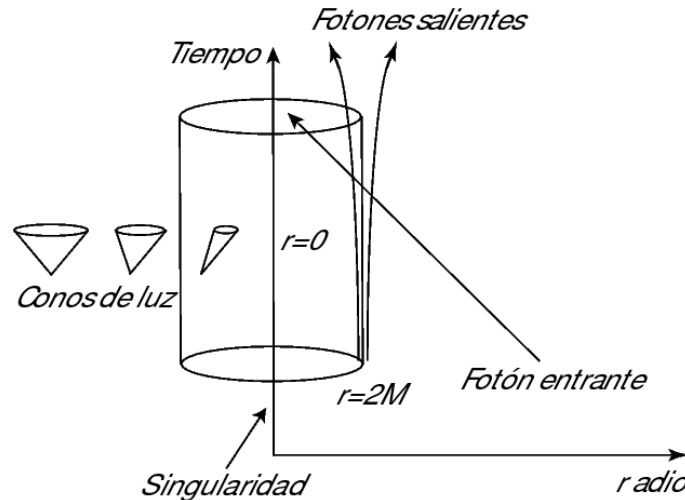


Figura 2: Espacio-tiempo de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein.

A la región $r < R_S$ se le conoce como el “agujero negro” debido a que nada, ni siquiera la luz, puede escapar de ella. Un agujero negro es el análogo relativista de las estrellas

oscuras de Michell y Laplace en el caso newtoniano. Sin embargo hay diferencias cruciales. En primer lugar, en el caso relativista es fácil ver que $r = R_S$ es precisamente una trayectoria nula, por lo que un rayo de luz que se dirija hacia afuera en ese punto se queda congelado. Por otro lado, la solución relativista es una solución de vacío: el agujero negro no tiene superficie y toda la masa está concentrada en la singularidad $r = 0$. El horizonte marca la frontera de la región de no retorno, y aunque usualmente se le asocia con el tamaño del agujero negro, no marca en realidad el radio de un objeto físico, sino la distancia más allá de la cuál la caída al centro es inevitable.

El hecho de que los rayos de luz “salientes” no se muevan siempre a la velocidad de la luz puede parecer que contradice el postulado de Einstein sobre la invariancia de la velocidad de la luz. Esto no es correcto. Debemos recordar que lo que hemos calculado es en realidad $dr/d\tilde{t}$, lo que representa únicamente la llamada “velocidad coordenada”, es decir, qué tanto se desplaza el rayo de luz en la coordenada r en un intervalo de la coordenada t . Esto no es lo mismo que la velocidad física local, que corresponde a qué tanta distancia radial, medida con reglas, recorre el rayo de luz en un tiempo propio dado, medido con un reloj en ese punto. Esta velocidad física local medida por un observador en ese punto siempre resulta ser igual a la velocidad de la luz c . Se puede mostrar que incluso para un observador que cae al interior del agujero, la velocidad de la luz que él mide localmente es siempre la misma.

Quizá este sea un buen momento para desmentir un mito muy común asociado a los agujeros negros. En la literatura de ficción se suele ver a los agujeros negros como una especie de aspiradora cósmica. Esto no es correcto, un agujero negro no es peligroso a menos que uno se acerque mucho a ellos, a distancias comparables con el tamaño del horizonte. En particular, dado que la solución de Schwarzschild es precisamente la que describe el campo externo a un objeto esférico, si por ejemplo sustituimos al Sol por un agujero negro de la misma masa, las órbitas de los planetas del Sistema Solar no se verían afectadas en absoluto. Los agujeros negros tampoco representan túneles hacia otras regiones del espacio, cuando un objeto cae al interior del agujero, su destino final es la singularidad central, donde las fuerzas de marea son infinitas y el objeto queda despedazado y concentrado en un solo punto.

Una última propiedad del agujero negro de Schwarzschild que vale la pena mencionar es la relacionada con la dilatación gravitacional del tiempo. En el caso de la Tierra mencionamos que el efecto es de una parte en 10^9 , mientras que en el caso del Sol es de una parte en 10^6 . En un agujero negro, el efecto de dilatación del tiempo en el horizonte resulta ser infinito. Un observador externo que ve a un objeto caer al agujero de hecho nunca lo ve entrar, el objeto se ve en cámara lenta, y se acerca asintóticamente al horizonte hasta quedarse congelado ahí. En realidad, el objeto deja de ser visible rápidamente pues la luz que emite se corre al rojo, y en el horizonte dicho corrimiento es también infinito. Por el contrario, un observador que cae al agujero no siente nada especial, para él el tiempo transcurre de manera normal y son los objetos exteriores los que se ven en cámara rápida. Mientras se acerca al horizonte el tiempo en el exterior se acelera, de manera que cuan-

do finalmente cruza el horizonte todo el futuro del Universo transcurre en un instante. Después de eso, continúa su caída hacia la singularidad.

7. Agujeros negros generales

El agujero negro asociado a la solución de Schwarzschild corresponde al caso de simetría esférica, y como tal no es la solución que uno espera encontrar en la naturaleza. Los objetos astrofísicos reales siempre tienen al menos un poco de momento angular, por lo que no serán completamente esféricos.

Históricamente, la primera solución para un agujero negro más general que el de Schwarzschild fue la asociada a un agujero negro esférico pero con carga eléctrica, encontrada poco después que la de Schwarzschild, y conocida como la solución de Reissner–Nordstrom [6, 7]. La solución para la geometría del espacio-tiempo asociada a un agujero negro en rotación tuvo que esperar hasta 1963, cuando fue descubierta por Kerr [8]. Finalmente, en 1965, se encontró la solución más general posible que incluye todos los casos anteriores. A esta solución se le conoce como la solución de Kerr–Newman y corresponde al siguiente intervalo invariante (tomando otra vez $G = c = 1$):

$$ds^2 = - \left(\frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) dt^2 - \frac{2a \sin^2 \theta (r^2 + a^2 - \Delta)}{\rho^2} dt d\phi + \left(\frac{(r^2 + a^2)^2 - \Delta a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (17)$$

donde

$$\Delta = r^2 + a^2 + Q^2 - 2Mr, \quad \rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (18)$$

Esta solución tiene tres parámetros libres asociados a las propiedades del agujero negro: M es la masa del agujero, Q su carga eléctrica, y a el “parámetro de rotación” que está relacionado con el momento angular J del agujero negro de la forma $a = J/M$. Dado que la materia a gran escala es neutra, en la naturaleza no se espera encontrar agujeros negros con carga, por lo que la solución astrofísicamente relevante corresponde al caso $Q = 0$, es decir, a la solución de Kerr de 1963.

La solución de Kerr resulta considerablemente más compleja que la de Schwarzschild, y tiene algunas propiedades muy interesantes. En particular, para $a > M$ el horizonte de eventos desaparece y la solución corresponde a lo que se conoce como una “singularidad desnuda”, es decir, una singularidad que no está protegida por un horizonte de eventos. Debido a los problemas predictivos que una situación así genera (la singularidad puede hacer cualquier cosa), en general se supone que las singularidades desnudas no pueden existir en la naturaleza. A esto se le conoce como la “conjetura de la censura cósmica”, y en el caso particular de los agujeros negros de Kerr implica que el parámetro de rotación a debe ser menor que la masa M .

Por otro lado, de la métrica de Kerr también es posible observar que existe una región externa al horizonte de eventos de donde aún es posible escapar, pero donde no está permitido permanecer en reposo. Todo objeto dentro de esta región está obligado a rotar en la misma dirección en la que rota el agujero. A este efecto se le conoce como el “arrastre de sistemas inerciales”: la rotación del agujero produce un efecto tan violento en su vecindad que arrastra en su rotación a todos los objetos que se encuentren ahí, inclusive a la luz. Esta región de arrastre se encuentra fuera del horizonte en todos lados excepto en los polos, donde coincide con el horizonte. A dicha región se le conoce como la “ergósfera”, debido a que dentro de ella es posible extraer energía rotacional del agujero mediante un efecto conocido como el “proceso de Penrose”.

8. Agujeros negros astrofísicos y colapso gravitacional

La solución de Schwarzschild se conoce desde 1916 y, aunque sus propiedades no se entendieron del todo hasta la década de 1960, ya era claro desde un principio que en la región cercana al radio gravitacional R_S ocurrían fenómenos muy extraños. Sin embargo, como ya hemos mencionado, para los objetos astrofísicos conocidos en esa época, el radio gravitacional era mucho menor que el tamaño físico de los objetos, por lo que la solución de Schwarzschild no era válida en el interior y el problema de $r = R_S$ podía ignorarse. La idea común era que la naturaleza no permitiría tener objetos así de compactos, por lo que no había por qué preocuparse.

Esta visión comenzó a cambiar a fines de la década de 1920, cuando el físico hindú Subrahmanyan Chandrasekhar estudió que ocurriría al final de la vida de una estrella masiva, cuando se agotara el combustible nuclear que la mantiene estable. Una estrella normal es un objeto que se mantiene en equilibrio por el balance de dos fuerzas, la gravedad que busca comprimirla, y la presión debida a las altas temperaturas que busca expandirla. Mientras hay combustible para mantenerla caliente, la estrella puede mantenerse estable por miles de millones de años. Pero eventualmente el combustible se agota y la estrella se enfría. Este proceso puede ser muy violento, pasando por la explosión de una supernova, pero el resultado final es un objeto masivo que se enfría y se contrae. Chandrasekhar se hizo la pregunta de que tanto era posible comprimir dicho objeto. Las estrellas como el Sol al final de su vida se convierten en enanas blancas: estrellas con la masa del Sol y un radio similar al tamaño de la Tierra. En estas estrellas el gas aún se encuentra ionizado, y la gravedad se compensa por la presión del gas de electrones. El gas de electrones está relativamente frío, y la presión que domina es un efecto cuántico llamado “presión de degeneración” que tiene su origen en el principio de exclusión de Pauli: dos electrones no pueden ocupar el mismo estado cuántico. Pero la presión de degeneración de electrones es finita, y Chandrasekhar calculó que masa debería tener una estrella como para que la gravedad no pudiera ya ser compensada por dicha presión. El resultado fue una masa de aproximadamente 1.4 masas solares, conocido como el límite de Chandrasekhar. Mas

allá de esta masa la gravedad gana y la estrella colapsa debido a la gravedad.

El resultado de Chandrasekhar fue recibido inicialmente con gran escepticismo, pues parecía mostrar que para masas mayores a 1.4 veces la masa del Sol, las estrellas colapsarían hasta un punto. Hoy sabemos que hay una etapa intermedia. Cuando una enana blanca colapsa, los protones y electrones se fusionan para formar neutrones. La presión de degeneración de los neutrones es mucho mayor que la de los electrones, y el colapso se puede detener de nuevo dando como resultado una estrella de neutrones: una estrella con entre 1.5 y 5 veces la masa del Sol, comprimida en una esfera de unas docenas de kilómetros de diámetro. Pero aún así, la presión de degeneración de neutrones es finita, y si la masa es mayor que un cierto límite el colapso gravitacional continúa. El límite máximo exacto para la masa de una estrella de neutrones no se conoce del todo debido a que no tenemos mucha información sobre la ecuación de estado de los neutrones a esas densidades, pero se estima que no puede ser mayor de unas 5 o 6 masas solares. Para masas mayores la conclusión de Chandrasekhar es válida, y la estrella colapsa inevitablemente hasta convertirse en un agujero negro.

Pero, ¿cómo saber cuando una estrella se ha convertido en un agujero negro? Los agujeros negros no emiten luz, por lo que por definición son invisibles. Sin embargo, los agujeros negros frecuentemente están asociados a otros objetos. Por ejemplo, pueden formar sistemas binarios con otras estrellas. Si las órbitas son lo suficientemente cercanas como para que el agujero negro le robe gas a la otra estrella, dicho gas entra en órbita alrededor del agujero negro antes de caer en él, formando lo que se conoce como un disco de acreción. La fricción en el disco de acreción es tan grande que el gas puede calentarse a millones de grados y emitir rayos X, que sí son directamente observables. Emisiones intensas de rayos X provenientes de regiones cercanas a objetos muy masivos pueden ser candidatos para agujeros negros. En la década de 1970 y 1980 se descubrieron varios posibles candidatos de este tipo.

Sin embargo, aún más recientemente se han descubierto posibles agujeros negros gigantes, con masas de hasta miles de millones de veces la masa del Sol, en el centro de prácticamente todas las galaxias que se han podido observar con algún detalle. De nuevo, estos agujeros negros se detectan de manera indirecta observando la dinámica de gas o de estrellas cercanas al centro de las galaxias, de donde puede deducirse la masa y tamaño del objeto central alrededor del cuál se mueven. Incluso en nuestra galaxia, al observar el movimiento de las estrellas más cercanas al centro, se ha descubierto que existe un objeto compacto e invisible con una masa de cerca de 4 millones de veces la masa del Sol, y toda la evidencia indica que se trata de un agujero negro supermasivo (aunque relativamente pequeño comparado con los que habitan el centro de otras galaxias).

Los agujeros negros supermasivos en el centro de las galaxias nos han permitido tener un modelo universal del origen de la enorme emisión de energía en las llamadas galaxias activas, y en particular los cuasares. En el centro de esos objetos debe existir un agujero negro con miles de millones de veces la masa del Sol, rodeado de un disco de acreción gigantesco que al calentarse emite grandes cantidades de energía, y que incluso puede

formar poderosos jets de materia que escapan de la galaxia a grandes velocidades. Este modelo de los núcleos activos aún no es muy preciso, y en particular el proceso de formación de los jets no se entiende del todo, pero nos ha permitido por lo menos entender de manera muy general la emisión de energía en estas galaxias.

Hoy en día resulta claro que al final de la vida de las estrellas muy masivas se forma un agujero negro de masas estelares, y que en el centro de las galaxias habitan agujeros negros supermasivos. Los agujeros negros han pasado de ser objetos exóticos predichos por la relatividad general, a ser objetos astrofísicos reales que se estudian todos los días.

9. Como ver lo invisible: las ondas gravitacionales

Hasta el día de hoy, toda la evidencia de la existencia de agujeros negros astrofísicos es indirecta: el agujero negro no puede verse, pero sus efectos sobre la materia cercana a ellos sí son visibles. Como se mencionó anteriormente, la evidencia de la existencia de agujeros negros astrofísicos es en algunos casos muy fuerte, en particular en el caso de los agujeros negros supermasivos que aparentemente existen en el centro de prácticamente todas las galaxias.

Sin embargo, tener pruebas indirectas de que existen los agujeros negros no es lo mismo que observarlos directamente. Pero, ¿cómo ver un objeto que, como su nombre lo indica, no emite ningún tipo de luz? Sorprendentemente, existe un método directo para detectar agujeros negros que podría dar fruto en un futuro cercano. Este método está basado en la existencia de otro fenómeno asociado a la relatividad general de Einstein, las ondas gravitacionales. Las ondas gravitacionales son a la teoría de la relatividad general lo que la luz y las ondas de radio son a la teoría electromagnética de Maxwell. Consisten en perturbaciones del campo gravitacional que se propagan justamente a la velocidad de la luz. Las ondas gravitacionales se producen cuando grandes concentraciones de masa y energía interactúan entre sí y producen cambios violentos en el campo gravitacional. En nuestro Universo, dichas ondas están asociadas a los fenómenos astrofísicos más violentos: las explosiones de supernovas, las colisiones entre estrellas de neutrones, y los agujeros negros.

Un agujero negro estático no produce ondas gravitacionales por la misma razón que no emite luz. Pero los agujeros negros frecuentemente están asociados a otros objetos de manera que están perturbados, y un agujero negro perturbado sí emite ondas gravitacionales mientras regresa a una situación de reposo. Dichas ondas gravitacionales no salen del interior del agujero, sino que se producen por la dinámica del campo gravitacional en la vecindad del horizonte. Al perturbar a un agujero negro, su campo gravitacional empieza a oscilar, y el agujero negro emite ondas gravitacionales hasta alcanzar nuevamente el reposo. Es algo así como golpear una campana con un martillo y oírla vibrar hasta que se detiene. Al igual que la campana, el agujero negro tiene un “sonido” característico, pero en vez de estar formado de ondas sonoras, este sonido está hecho de ondas gravitaciona-

les. En otras palabras, las ondas gravitacionales que produce un agujero negro perturbado tienen un espectro de frecuencias específico que no comparte con ningún otro sistema físico. Analizando las ondas gravitacionales igual que analizamos la luz de una estrella para saber de qué está hecha, podríamos identificar con toda certeza al emisor. De modo que si se perturba a un agujero negro y observamos las ondas gravitacionales que éste emite, podemos estar seguros de que se trata de un agujero negro y no de otra cosa.

Hasta la fecha aún no se han observado las ondas gravitacionales de manera directa, debido principalmente a que sus efectos sobre la materia son muy débiles. Cuando una onda gravitacional interacciona con un objeto extendido produce una fuerza que tiende a estirar y contraer al objeto de manera alternada en las direcciones perpendiculares a la de propagación de la onda. Pero este efecto es muy pequeño. No es difícil calcular que si un evento astrofísico violento, como la colisión de dos estrellas de neutrones por ejemplo, ocurre en algún lugar de nuestra galaxia, el efecto esperado sobre un objeto en la Tierra es de una parte en 10^{21} . Es decir, un círculo de partículas libres de un metro de diámetro se estiraría y comprimiría por el paso de una onda gravitacional una distancia de 10^{-21} metros, el equivalente a una millonésima parte del radio de un protón. Medir un efecto así de pequeño es algo claramente muy difícil.

Pese a las dificultades, a la fecha se han considerado y construido dos tipos diferentes de detectores de ondas gravitacionales. El primer tipo de detector son grandes barras cilíndricas de aluminio de varias toneladas de peso, cuyos modos longitudinales de vibración corresponden a las frecuencias de las ondas gravitacionales esperadas (típicamente algunos cientos de Hertz). Se espera que al pasar una onda gravitacional se excitarían dichos modos de oscilación, y las barras entrarían en resonancia. Los primeros detectores de este tipo fueron construidos por Joseph Weber en la década de 1960, y a la fecha aún existen versiones más modernas de dichos detectores que trabajan a temperaturas criogénicas para disminuir el ruido térmico. El segundo tipo de detectores son los interferómetros láser, que miden la separación entre masas suspendidas libremente. Los primeros prototipos de estos interferómetros, con brazos de pocas decenas de metros, fueron construidos en la década de 1980. Hoy en día existen varios detectores en funcionamiento con escalas de kilómetros: el proyecto LIGO en los Estados Unidos con 2 detectores de 4 kilómetros de brazo, el proyecto VIRGO en Italia con un detector de 3 kilómetros, y el proyecto GEO 600 en Alemania con un detector de 600 metros.

Al día de hoy no se tiene ninguna detección confirmada de ondas gravitacionales, aunque se espera que la primera detección ocurra antes del final de ésta década, y posiblemente tan pronto como el 2016 (esta estimación está basada en la sensibilidad de los detectores y en la estadística de las posibles fuentes de ondas gravitacionales astrofísicas).

Uno de los sistemas más prometedores para la primera detección de ondas gravitacionales, debido a la amplitud de las ondas emitidas, es precisamente la colisión de dos objetos compactos, ya sean estrellas de neutrones o agujeros negros. Puede parecer extraño pensar en la colisión de dos agujeros negros, pero el fenómeno no es tan poco común como podría suponerse. Basta recordar que dos terceras partes de las estrellas se encuen-

tran en sistemas binarios. Si dichas estrellas son lo suficientemente masivas, al final de sus días se convertirán en agujeros negros. Las explosiones de supernova que acompañan a la formación de dichos agujeros causarán una enorme fricción dinámica que finalmente dará lugar a una binaria muy compacta de dos agujeros negros. Una vez que los dos agujeros negros están lo suficientemente cerca, la emisión de ondas gravitacionales y la consecuente pérdida de energía debida al movimiento orbital causará que se acerquen más y más en una trayectoria espiral, hasta que finalmente colisionarán en una violenta fusión en la que hasta un 5% de la masa total del sistema se convierte en energía que escapa en forma de un destello de ondas gravitacionales.

La detección de ondas gravitacionales es sólo el primer paso. Una vez que se haya dado una primera detección confirmada, lo que seguramente llevará a un premio Nobel para las personas involucradas, se entrará en la era de la astronomía de ondas gravitacionales. Vivimos realmente en un momento muy emocionante, cuando por primera vez podremos observar al Universo con gravedad, lo que seguramente nos permitirá hacer descubrimientos que aún no podemos imaginarnos.

10. ¿Agujeros negros en Suiza?

En septiembre de 2008 entró en operación el “Gran Colisionador de Hadrones” en el laboratorio CERN en Ginebra, Suiza. El Gran Colisionador, o LHC por sus siglas en inglés, es el mayor acelerador de partículas jamás construido. Fue construido para estudiar las propiedades de las partículas elementales en gran detalle, y existe la expectativa de que nos permita descubrir no sólo nuevas partículas, sino nuevas leyes de la naturaleza. Hace unos meses se anunció el posible hallazgo de la partícula de Higgs en el LHC, el último eslabón que permitiría cerrar el Modelo Estándar de la partículas y campos.

Pero quizá la especulación más sorprendente alrededor del LHC, y lo que causó incluso que se hicieran demandas judiciales para evitar que entrara en funcionamiento, es la posibilidad de crear mini agujeros negros con tamaños microscópicos. Poder crear mini agujeros negros depende de teorías físicas especulativas según las cuales el espacio tiene más dimensiones que las tres que conocemos. La teoría de cuerdas, por ejemplo, sólo es matemáticamente consistente si uno asume que además de las tres dimensiones que conocemos el espacio tiene otras 6 dimensiones extra que no vemos. ¿Por qué no las vemos? La respuesta es que no las vemos porque están “enrolladas” en tamaños extremadamente pequeños. Cuando se consideran distancias del tamaño de esas dimensiones extra, la fuerza de gravedad se vuelve mucho más intensa, y resulta mucho más fácil crear agujeros negros de ese tamaño.

La teoría de cuerdas estándar dice que las dimensiones extra son increíblemente pequeñas, del tamaño de la llamada “longitud de Planck” $L_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \simeq 1.6 \times 10^{-35} \text{m}$, por lo que estarán siempre fuera de nuestro alcance. Pero algunas versiones aún más especulativas afirman que las dimensiones extra son pequeñas pero no tanto, de manera

que el LHC podría estar en condiciones de producir mini agujeros negros. Nótese que para crear estos mini agujeros negros primero se necesita que las dimensiones extra existan, y luego que no sean demasiado pequeñas, lo que en conjunto resulta muy poco probable. Si el espacio sólo tiene las tres dimensiones conocidas, producir mini agujeros negros en el LHC resulta imposible. Aún así, si toda esta cadena de especulaciones fuese correcta, ¿podrían estos mini agujeros tragarse a la Tierra como en su momento afirmaron algunos medios de comunicación? La respuesta, afortunadamente, es no, y la razón es que la Tierra está siendo bombardeada constantemente por rayos cósmicos que tienen energías miles de millones de veces mayores que las del LHC. Si esto resultara peligroso, hace mucho que la Tierra ya no estaría aquí. Sin embargo, la posibilidad de crear agujeros negros microscópicos en el laboratorio resulta tan emocionante que no debemos dejar de buscar.

11. Referencias

- [1] A. Einstein, "Die feldgleichungen der gravitation," pp. 844–847, 1915.
- [2] —, "Zur allgemeinen relativitätstheorie," pp. 778–786, 1915.
- [3] —, "Ist die trägheit eines körpers von seinem energieinhalt abhängig?" *Annalen der Physik*, vol. 323, no. 13, pp. 639–641, 1905.
- [4] —, "Zur elektrodynamik bewegter körper," *Annalen der physik*, vol. 322, no. 10, pp. 891–921, 1905.
- [5] K. Schwarzschild, "Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinischen theorie," pp. 189–196, 1915.
- [6] H. Reissner, "Über die eigengravitation des elektrischen felde nach der einsteinschen theorie," *Annalen der Physik*, vol. 355, no. 9, pp. 106–120, 1916. [Online]: <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/andp.19163550905/abstract>
- [7] G. Nordström, "On the energy of the gravitational field in einstein's theory," pp. 1238–1245, 1918.
- [8] R. P. Kerr, "Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics," *Physical Review Letters*, vol. 11, no. 5, pp. 237–238, 1963. [Online]: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>

El universo de las supercuerdas

Saúl Ramos-Sánchez, Instituto de Física, UNAM, México

1. Gestación de revoluciones científicas

A finales del siglo XIX, la física parecía completa. Casi todos los fenómenos físicos eran descritos por la gravitación Newtoniana, el electromagnetismo y la termodinámica. En la descripción del universo, sólo un par de “detallitos” rompían la perfección de la física: el efecto fotoeléctrico, la longevidad del sol y lo escurridizo del éter, entre otros. Fueron precisamente esas preguntas abiertas las que condujeron finalmente a la violenta irrupción de la relatividad de Einstein y de la mecánica cuántica, teorías que rompieron con todos los esquemas conocidos y establecieron las reglas de una nueva forma de ver y entender lo que nos rodea en términos de geometría y probabilidad.

Tras poco más de cien años, la historia hoy parece condenada a repetirse: podemos entender casi por completo la estructura fundamental de todo lo conocido mediante el modelo cosmológico de la Gran Explosión (o *Big Bang*) y el Modelo Estándar de partículas elementales. El modelo de la Gran Explosión proporciona herramientas para entender la evolución del universo macroscópico desde hace casi 14 mil millones de años hasta la época actual y propone que el inicio de los tiempos pudo haber sido una explosión de enorme intensidad¹.

Por otra parte, el Modelo Estándar² nos permite entender la estructura de la materia en términos de diminutas manifestaciones puntuales de energía llamadas quarks y leptones, y las fuerzas entre ellos (la fuerza electromagnética, la fuerza nuclear fuerte responsable de la cohesión del núcleo atómico, y la fuerza nuclear débil responsable del decaimiento radiactivo) en términos de simetrías de la teoría, que exigen, por ejemplo, que los fotones sean los encargados de mediar las interacciones electromagnéticas y que los gluones medien las interacciones nucleares fuertes. Estos quarks y leptones se mezclan para construir todo lo que nos rodea, desde un virus hasta las galaxias. Pese al enorme éxito de estas teorías, aún nos faltan herramientas para comprender algunos de los misterios de la naturaleza. Por ejemplo, la observación de que nuestro universo se expande cada vez más

¹Véase el capítulo de Vladimir Avila “Un universo en evolución”, en este mismo libro.

²Véase el capítulo de Myriam Mondragón “Física de altas energías”, en este mismo libro.

rápido³, el dominio de la materia sobre la antimateria, y el origen de la estructura del Modelo Estándar, son algunas de las cuestiones que tienden a emular hoy las interrogantes que dieron origen al nacimiento de la mecánica cuántica.

Como hace un siglo, para responder las anteriores y otras preguntas se han propuesto complicados eventos en la historia del universo y nuevas “sustancias” que se antojan casi tan escurridizas como el éter. Entre las propuestas, se encuentra el campo de Higgs concebido en 1964 para explicar la masa de las partículas elementales, y la materia y la energía oscuras⁴. Aunque gracias a los recientes resultados experimentales⁵ existe amplio consenso en la comunidad científica de que el campo de Higgs existe, la materia y energía oscuras siguen escapando a todas las pruebas experimentales y podrían mostrarse más complicadas de lo que creemos.

Otro reto muy importante para la física contemporánea es comprender cómo funciona la fuerza de gravedad, descrita por la teoría de la relatividad, en el reino de lo pequeño, en donde gobierna la mecánica cuántica. Se conjetura que la unión de estas dos magnificentes teorías describiría el universo temprano por completo, incluyendo la historia temprana del cosmos, el nacimiento de las partículas elementales que conocemos y de las fuerzas fundamentales de la naturaleza. Hay un problema: lograr esta hazaña sugiere la necesidad de un tipo de física completamente diferente a la contenida en las teorías existentes, necesita una transformación abrupta de los conceptos físicos, tal vez de las dimensiones del cambio gestado por los padres de la relatividad y la mecánica cuántica. Algunos opinan que tal transformación ya existe y que lleva por nombre *la teoría de supercuerdas*.

2. El despertar de las supercuerdas

La teoría de supercuerdas (o sencillamente teoría de cuerdas) es *per se* una revolución conceptual cuyo origen es precisamente uno de los misterios de la física subatómica. En los 1960s se desconocía el origen de las interacciones fuertes entre los hadrones, partículas compuestas de quarks (tales como protones y neutrones). En esos años, los trabajos de G. Veneziano, Y. Nambu, H. Nielsen y L. Susskind indicaban que los hadrones se comportaban como manifestaciones de minúsculos filamentos vibrantes. Si las cuerdas fueran lo suficientemente pequeñas, podrían aparecer como partículas puntuales en los experimentos. Hoy sabemos que la teoría que describe perfectamente la física de los hadrones es la cromodinámica cuántica⁶, pero la formulación de la física de partículas en términos

³S. Perlmutter, A. Riess y B. P. Schmidt recibieron el premio Nobel de Física 2011 por esta observación.

⁴Se les llama *oscuras* porque no interactúan con la radiación electromagnética, es decir, no emiten, ni absorben, ni reflejan luz.

⁵El 4 de julio del 2012, científicos del CERN (siglas históricas de la hoy llamada *Organización Europea para la Investigación Nuclear*) reportaron haber detectado una partícula muy similar a la partícula de Higgs. Aún se debe verificar el espín y otras propiedades de la partícula antes de afirmar que se trata del bosón de Higgs predicho por el Modelo Estándar o de alguna otra partícula con propiedades parecidas.

⁶Véase el capítulo de Genaro Toledo “La materia y sus nuevas estructuras”, en este mismo libro.

de cuerditas vibrantes preparaba una sorpresa.

La hipótesis esencial de la teoría de cuerdas es que, así como distintos tonos surgen de las vibraciones de una cuerda de guitarra, distintas vibraciones de minúsculas cuerdas idénticas se manifiestan a escalas mayores que el tamaño de las cuerdas como distintas partículas elementales, como se sugiere en la figura 1. Aceptando esta idea, todas las propiedades de las partículas, tales como masa, carga y espín, resultan determinadas por las vibraciones de las cuerdas. Las partículas son pues los tonos en la sinfonía de las cuerdas.

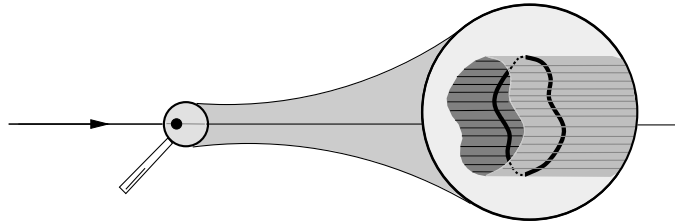


Figura 1: Partículas contra cuerdas. A escalas muy pequeñas, la visión clásica de partícula puntual podría ser reemplazada por la de una cuerda. La línea que describe la trayectoria de la partícula es reemplazada por una superficie (cilíndrica, en la figura) para la cuerda.

Hacia 1974 J. Scherk y J.H. Schwarz [1] demostraron que en el formalismo cuántico de la teoría de cuerdas uno de los modos de vibración produce un *gravitón*, la partícula conjeturada como posible mensajero cuántico de las interacciones gravitacionales, es decir, la partícula responsable de que dos cuerpos con masa se atraigan. Un gravitón es una partícula sin masa y con espín dos, que se rige bajo las reglas de la relatividad general contenidas en la llamada acción de Einstein-Hilbert. Lo que demostraron Scherk y Schwarz fue que las vibraciones de las cuerdas producen una partícula con todas las propiedades mencionadas. En otras palabras, de la teoría de cuerdas surge naturalmente una forma cuántica de la gravedad de Einstein.

De acuerdo a M. Planck, el padre de la mecánica cuántica, la escala a la que los efectos cuánticos de la gravedad deberían ser perceptibles es la escala de Planck $\ell_P = \sqrt{\hbar G/c^3} \approx 10^{-35}$ m (\hbar es la constante reducida de Planck, G es la constante de gravitación universal, y c es la velocidad de la luz en el vacío). Consecuentemente, las cuerdas deben tener ese tamaño, suficientemente pequeñas como para semejar puntos desde la perspectiva de cualquiera de nuestros aparatos de medición.⁷

Muy pronto se encontró que, para que todas las componentes cuánticas de la teoría de cuerdas fueran congruentes⁸, se necesitan dos ingredientes adicionales: *supersimetría*

⁷La escala de Planck como escala de las interacciones gravitacionales es válida sólo en un espacio tres dimensional, como el que percibimos cotidianamente. Esta escala puede ser aumentada considerablemente si existen dimensiones adicionales y éstas son grandes.

⁸Un problema habitual al cuantizar las teorías de campos es que las simetrías (locales) clásicas de la teoría son violadas por efectos cuánticos. Esta *anomalía*, como se le llama en las teorías cuánticas, representa

y seis dimensiones espaciales adicionales [2, 3].

La supersimetría es una simetría que exige que cada bosón (partícula con espín entero) esté acompañado de un fermión (partícula con espín semientero) que, salvo por el espín, compartan propiedades idénticas⁹. Curiosamente, distintas vibraciones de una sola cuerda pueden interpretarse como una partícula con espín s y otra con espín $s - 1/2$ y con la misma masa y carga. Por ejemplo, de una misma cuerda vibrante aparecen el gravitón con espín dos y el gravitino con espín $3/2$; los llamados bosones de norma o mediadores de interacciones de norma de espín uno están acompañados de los norminos con espín $1/2$. La supersimetría ha sido ampliamente explorada [4] y ha mostrado ser útil en la física de partículas para resolver varios problemas, entre ellos, el llamado *problema de jerarquía*. Es decir, es capaz de explicar por qué la masa de la partícula de Higgs es cercana a la masa de todas las otras partículas fundamentales, y no gigantesca, como podría ser. Por otra parte, las dimensiones adicionales pueden ser concebidas como dimensiones parecidas a las que nos son familiares, pero que escapan a nuestras percepciones tal vez de la forma en la que una tercera dimensión escaparía a la percepción de seres confinados a vivir en una hoja de papel bidimensional, como en la novela *Planilandia* [5]. De la predicción de estas dimensiones extra se debe destacar que la teoría de cuerdas es el único formalismo conocido capaz de predecir la dimensionalidad de nuestro espacio-tiempo.¹⁰

Fue en los 1980s cuando finalmente todos los ingredientes mencionados fueron organizados en lo que hoy llamamos la teoría de cuerdas. La sorpresa final fue que, incidentalmente, las cuerdas cuánticas se rigen naturalmente por ciertas simetrías de norma, en las que pueden fácilmente encontrar su origen las simetrías de norma atadas a las tres fuerzas fundamentales que afectan a las partículas elementales en el Modelo Estándar. Este resultado catapultó a la teoría de cuerdas como la única posibilidad conocida de entender todas las fuerzas fundamentales de la naturaleza (la gravedad y las fuerzas del Modelo Estándar) desde un único esquema cuántico; la teoría de cuerdas se convirtió en candidata a ser *la* teoría de unificación que muchos científicos, incluyendo a Einstein, buscaron. Tal vez por este motivo y por el hecho de que el movimiento de las cuerdas está completamente caracterizado por un solo parámetro (la tensión de la cuerda), los más ambiciosos le dieron el apodo de *la teoría de todo*.

Tal vez el aspecto más relevante de las supercuerdas es un tanto técnico: debido a su naturaleza extendida, no presentan las típicas complicaciones de las partículas puntuales cuando se considera la gravedad. En particular, se sabe que el cálculo de la magnitud de las interacciones puntuales entre gravitones y otras partículas elementales siempre conduce a cantidades infinitas (conocidas como *divergencias ultravioleta*) inmensurables y, por tanto, inadmisibles en una teoría física. Las interacciones entre cuerdas son diferentes.

una inconsistencia inadmisibile.

⁹Véase el capítulo de Myriam Mondragón "Física de altas energías", en este mismo libro.

¹⁰Esta predicción puede interpretarse también como un defecto, pues el número de dimensiones predichas es diez (nueve espaciales y una temporal) y no cuatro (tres espaciales y una temporal), o sea, no coincide con el observado.

Como son objetos extendidos, la interacción de las cuerdas no ocurre en un solo punto del espacio-tiempo. La única variable que interviene en estas interacciones es la *constante de acoplamiento* g_s que es finita y, como la carga eléctrica en las interacciones electromagnéticas, determina la fuerza con la que las cuerdas pueden abrazarse. Como consecuencia de la interacción no puntual, la magnitud de las interacciones resulta ser una cantidad perfectamente finita y medible.

Los más críticos de la teoría de cuerdas de inmediato notaron que el apodo de “teoría de todo” no era apropiado, pues para poder aspirar a ser una teoría física *de algo* tiene al menos un reto importante que vencer. La teoría de cuerdas debe explicar la evidente discrepancia entre las cuatro dimensiones espacio-temporales que nos son familiares y las diez dimensiones de la teoría de cuerdas.

T. Kaluza y O. Klein concibieron en los 1920s un mecanismo para resolver el problema: la *compactificación* de las dimensiones adicionales [6, 7]. Compactificar consiste en dos pasos: considerar *i)* que las dimensiones a compactificar no se extienden hasta el infinito (como las que nos son familiares), sino que forman un espacio *compacto*¹¹, tal como una esfera o un toro; y *ii)* que el espacio compacto es suficientemente pequeño como para evadir a los instrumentos de medición actuales. En la figura 2 se ilustra este proceso. Una de las dimensiones de un espacio bidimensional, como una hoja de papel, es compactificada en una circunferencia S^1 . En un paso posterior, el radio R de la circunferencia es reducido hasta que el espacio bidimensional aparenta ser unidimensional. Pese a su apariencia, el espacio sigue siendo bidimensional, pero, debido al tamaño de la segunda dimensión, las mediciones físicas darían resultados unidimensionales si fueran realizadas con instrumentos que no pueden apreciar longitudes tan pequeñas como el radio de la dimensión compactificada.

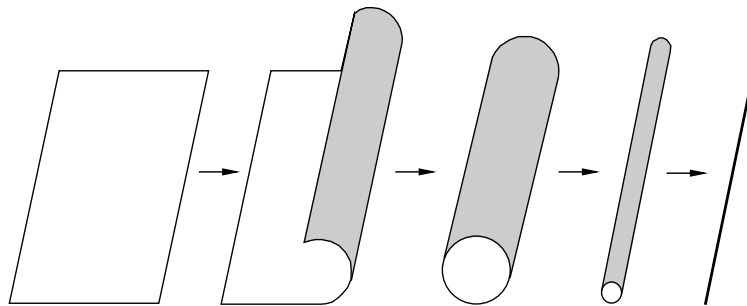


Figura 2: Compactificación de una dimensión en un universo bidimensional. La dimensión horizontal envuelve una circunferencia cuyo radio es reducido a un tamaño imperceptible. El resultado es un universo unidimensional

¹¹Un espacio compacto se puede entender como un espacio (topológico) compuesto de un número finito de “pedacitos” o “parches” del espacio. Se recomienda [8] como una introducción a topología.

El método de compactificación de Kaluza y Klein predice una forma de demostrar que existe una dimensión compactificada. Una vez compactificada alguna dimensión, cada partícula del universo resultante está acompañada de una infinidad de réplicas de ésta, cuya diferencia es sólo que las masas de las réplicas son diferentes múltiplos enteros de $m_{KK} = \hbar/Rc$. Es decir, de acuerdo a Kaluza y Klein, la masa de las copias pesadas crece a medida que el tamaño R de la dimensión compacta disminuye. De hecho, si el tamaño fuera del orden de la escala de Planck, $R \approx \ell_P$, la masa de los “gemelos” pesados de las partículas elementales sería un múltiplo de $m_P \approx 10^{19} \text{ GeV}/c^2 \approx 22 \mu\text{g}$, i.e. 10^{17} veces más grande que la masa de la partícula elemental más pesada que conocemos, el quark top. Una forma de entender la aparición de estas partículas masivas es reconociendo que, en un universo con más dimensiones todas las partículas también pueden moverse en esas dimensiones. Sin embargo, desde nuestra perspectiva cuatro-dimensional la energía cinética debida al movimiento extra-dimensional se traduce en una energía intrínseca cuatro-dimensional mayor. En otras palabras, como nosotros no podemos apreciar el movimiento de las partículas en dimensiones compactas, la energía de las partículas almacenada en esas dimensiones se traduce en masa cuatro-dimensional. Búsquedas actuales de estas partículas en el LHC no han encontrado indicios de estas partículas con masas por debajo de algunos TeV/c^2 [9].

A pesar de sus propiedades prometedoras, en la formulación original de la teoría de cuerdas, los distintos tipos de cuerdas posibles destruyen una característica esencial de una teoría fundamental: su capacidad de proveer una explicación unificada de todos los fenómenos físicos observados. Algunas cuerdas son abiertas, otras, cerradas; algunas tienen una orientación definida, otras no; algunas tienen una sola supersimetría, otras tienen dos. Y todas estas cuerdas no pueden convivir armoniosamente en una sola teoría. Se concluyó que la teoría de cuerdas debe dividirse en cinco variedades distintas. Las versiones resultantes de la teoría de cuerdas (cada una con sus propias ecuaciones de movimiento) recibieron el nombre de teorías I, IIA, IIB, heterótica O y heterótica E. Esta aparente decepción fue tomada con optimismo por muchos, pues, después de todo, la teoría de cuerdas sólo tiene cinco manifestaciones mientras que es posible formular una infinidad de teorías cuánticas de campos o de soluciones a las ecuaciones de Einstein, entre las que *sólo una* corresponde a la descripción de nuestro universo. En la teoría de cuerdas, la búsqueda de soluciones parecía mucho más restringida. La tarea consistía aparentemente en descubrir cuál de las cinco versiones de la teoría podría describir la naturaleza. Pero la teoría de cuerdas guardaba (y quizá guarda) aún varios secretos: como veremos más tarde, el descubrimiento en 1995 de que la teoría de cuerdas admite otros objetos además de cuerdas y, sobre todo, de que las cinco versiones de la teoría de cuerdas son distintos rostros de una teoría más fundamental revivió la idea de la teoría de cuerdas como una teoría madre de toda la física y proveyó nuevas herramientas para describir nuestro universo.

3. Más que sólo cuerdas

Un problema serio de la teoría de cuerdas original, con sus cinco distintas versiones, es que la dinámica de las cuerdas en las diez dimensiones espacio-temporales sólo se puede describir en el límite de *acoplamiento débil*, es decir, cuando la constante que determina la probabilidad de interacción entre las cuerdas, g_s , es mucho menor que la unidad. Ilustremos el origen de este conflicto empleando la serie de Taylor de una función $f = f(g_s)$. Cuando $g_s \ll 1$, la aproximación $f(g_s) \approx f(0) + g_s f'(0)$ es suficiente para tener una buena idea del valor de f . A medida que el valor de g_s crece, esta aproximación se vuelve menos precisa hasta que, para $g_s \gg 1$, $f(g_s) \approx f(0) + g_s f'(0)$ arroja un resultado inútil. De hecho, para valores suficientemente grandes de g_s , sólo la serie de Taylor completa puede proporcionar un resultado confiable y, por lo tanto, el uso de la expansión es inválido.

Al calcular la magnitud de las interacciones entre las cuerdas, se emplea justamente una expansión (funcional) sobre la constante de acoplamiento¹². Generalmente, el cálculo de cada uno de los términos de la expansión es tan complejo, que sólo se conocen los términos de menor orden. Cuando el acoplamiento es débil, es decir, cuando las cuerdas casi no interactúan, estos primeros términos determinan con suficiente precisión la magnitud de las interacciones. Sin embargo, en el límite de *acoplamiento fuerte* $g_s \gtrsim 1$, cuando las cuerdas interactúan mucho, el resultado carece de significado. Este problema (la pérdida de calculabilidad en el límite de acoplamiento fuerte) existe también, por ejemplo, en la cromodinámica cuántica, en donde aún no ha sido resuelto del todo, aunque sofisticados cálculos numéricos producen resultados medianamente precisos.¹³ En la teoría de cuerdas, este obstáculo motivó una gran revolución.

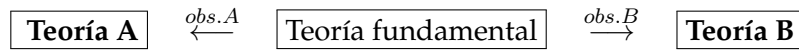
La revolución nació de un concepto que no había sido explotado en la teoría de cuerdas: *dualidad* o equivalencia entre dos teorías aparentemente diferentes. Para ilustrar este concepto, imaginemos que dos personas observan independientemente el mismo objeto y que una indica que se trata de un círculo mientras que la otra ve un rectángulo. Esta paradoja se resuelve cuando ambos descubren que el objeto de estudio es un cilindro y que sus observaciones corresponden a distintas apreciaciones de éste. Este ejemplo hace evidente que dos fenómenos aparentemente muy diferentes pueden ser aspectos de un único fenómeno. Otra ilustración útil y que refleja el trabajo científico inherente al descubrimiento de las dualidades es imaginar que alguien encuentra dos libros en lugares distantes escritos en distintos idiomas antiguos y desconocidos. No obstante, al comenzar a descifrarlos, se descubre que es posible establecer un diccionario entre ambos idiomas y que, pese a las diferencias aparentes de ambos libros, se trata de versiones en idiomas distintos de un mismo relato. En este segundo caso, es preciso resaltar la naturaleza abs-

¹²La misma técnica se emplea para determinar la magnitud de las interacciones entre partículas en una teoría cuántica de campos.

¹³La técnica numérica empleada es QCD en la red (*lattice QCD*). Sin embargo, hay indicios de que la teoría de cuerdas, mediante la *dualidad holográfica* que discutiremos más tarde, podrá resolver este conflicto.

tracta del origen común de dos objetos de estudio aparentemente diferentes, y cómo el establecer el “diccionario” entre ellos ayuda a comprender dicho origen.

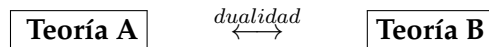
En los ejemplos anteriores, notamos que existe una entidad *fundamental*, el cilindro o el relato, que origina dos versiones bastante distintas de ella. Esta idea puede llevarse al ámbito de las teorías. Supongamos que existen dos teorías aparentemente muy diferentes, llamémoslas A y B. Es concebible que ambas teorías sean el resultado de aplicar diferentes operaciones, a las que llamaremos *observaciones*, sobre una teoría “madre” más fundamental:



En este escenario, las teorías A y B son duales entre sí y duales también a la teoría fundamental.

Las observaciones de algunos contemporáneos de Newton y de los padres del electromagnetismo y de la mecánica cuántica establecieron el ejemplo quizá más conocido de este concepto: la dualidad onda-partícula. Esta dualidad no sólo resolvió la paradoja que existía entre las descripciones ondulatoria y corpuscular de la luz, sino que reveló que todas las partículas que conocemos manifiestan dos características diferentes dependiendo de nuestra perspectiva, como el cilindro del párrafo anterior. Aún más, que estas dos manifestaciones de la luz (y de todas las partículas conocidas) sean duales muestra que tienen un origen fundamental común, el cual se entendió poco más tarde y al que se le llama hoy *campo cuántico*.

Existe otro tipo más elegante de dualidad en el que dos teorías están vinculadas de manera directa, a pesar de ser muy distintas a primera vista:



Para ilustrarla, podemos usar nuevamente la analogía con un libro escrito en dos idiomas muy diferentes, conectados a través de un diccionario adecuado. Hay casos (como este) en el que la existencia de una dualidad sugiere la existencia de una entidad fundamental que origina la dualidad, pero no siempre sucede. Por ejemplo, la *dualidad holográfica* que discutiremos más tarde vincula dos teorías completamente diferentes sin que (hasta ahora) se haya descubierto una tercera teoría que permita entender el origen de la dualidad.

En la teoría de cuerdas, se encontró que hay dos dualidades capaces de vincular las cinco distintas versiones de la teoría de cuerdas: las llamadas dualidad T y dualidad S. La dualidad T [10] relaciona dos versiones de la teoría de cuerdas cuando el resultado en una de ellas de compactificar una dimensión en un círculo de radio R coincide con el de hacer lo mismo en un círculo de radio $1/R$ en la segunda de ellas. Por otra parte, la dualidad S [11] relaciona dos teorías, en las que la física es la misma cuando en una de ellas la constante de acoplamiento entre las cuerdas es g_s y en la otra $1/g_s$. La dualidad S permite conocer el límite de acoplamiento fuerte $g_s \gg 1$ de una teoría mediante el

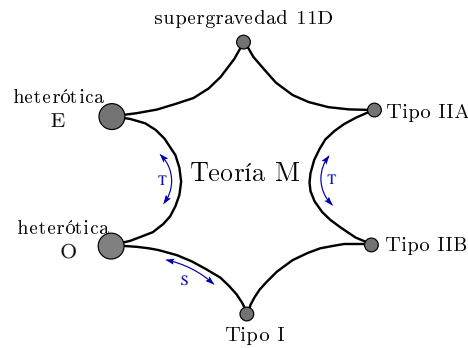


Figura 3: Las teorías de supercuerdas y sus conexiones. Las dualidades S y T relacionan algunos de los tipos de cuerdas, pero sólo la teoría M captura la esencia de todas las versiones de la teoría de cuerdas.

límite de acoplamiento débil $g_s \ll 1$ de la otra, proveyendo una solución al problema de incalculabilidad de las cuerdas en su límite de acoplamiento fuerte.

Como se ilustra en la figura 3, usando las dualidades resulta que las cuerdas heteróticas son T-duales al igual que las cuerdas tipo II. Además, la cuerda heterótica O es S-dual a la cuerda tipo I. Esto reduce el número de tipos de cuerdas independientes a dos. Lo más inesperado y sorprendente fue que estas dos categorías de cuerdas (la izquierda y la derecha, en la figura) pudieran ser relacionadas mediante la compactificación de una de las dimensiones de una teoría 11-dimensional cuyo límite de bajas energías es descrito por la teoría conocida como supergravedad, como E. Witten anunció en 1995 [12, 13]. En su trabajo, Witten mostró que, al hacer crecer el acoplamiento g_s en la teoría de cuerdas IIA en diez dimensiones (nueve espaciales y una temporal), las cuerdas se transforman en membranas incrustadas en un espacio 11-dimensional. De forma similar, las cuerdas 10-dimensionales de la teoría heterótica E “crecen” para convertirse en superficies en 11-dimensiones a medida que g_s aumenta. Pese a lo inverosímil de estas afirmaciones, los cálculos presentados en 1995 convencieron a toda la comunidad científica.

Para Witten, ese descubrimiento fue sólo la punta del iceberg. Él mostró que las cinco versiones de la teoría de cuerdas son distintas manifestaciones de una nueva teoría 11-dimensional más fundamental, a la que llamó *teoría M* (quizá por **m**isterio, **m**adre, **m**embrana, **m**atriz o alguna otra idea). Cada uno de los tipos de cuerdas captura una parte distinta de la teoría M. En nuestra ilustración del concepto de dualidad a través del cilindro, la teoría M se podría comparar con un objeto amorfo y las teorías de cuerdas con las descripciones parciales o proyecciones de cada una de las caras del objeto. Así, encontramos que todas las versiones de la teoría de cuerdas son duales entre ellas y duales a la teoría M. Una comprensión completa de la teoría M permitiría, entre otras cosas, entender la naturaleza desde un punto de vista unificado, en caso de comprobarse que describe correctamente nuestro universo. Desafortunadamente, esta posibilidad es frenada actual-

mente por el limitado conocimiento que se tiene de la teoría M, pero en el que se avanza continuamente.

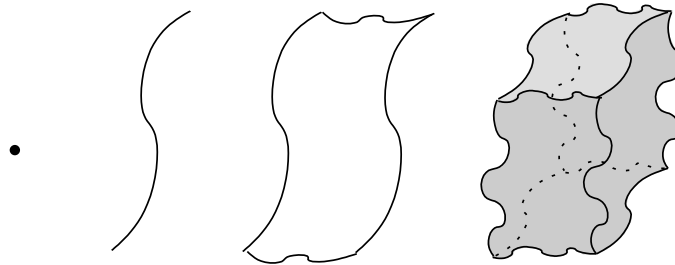


Figura 4: Cuatro Dp -branas. Una brana cero dimensional ($p = 0$) semeja a una partícula puntual; una D1-brana parece una cuerda abierta; una D2-brana es una membrana; y una D3-brana es un subespacio con volumen.

También por esos años, J. Polchinski demostró que, bajo la dualidad T, algunas cuerdas prefieren vivir confinadas en objetos extendidos que rellenan p dimensiones espaciales y que fueron bautizados Dp -branas como generalización de la idea de una membrana bidimensional [14, 15]. Esto indicó que la comprensión entonces dominante de la teoría de cuerdas era incompleta. Además de las cuerdas unidimensionales, la teoría de cuerdas admite estas otras estructuras dinámicas que pueden cubrir las nueve dimensiones espaciales de la teoría de cuerdas o sólo un subespacio. Como se muestra en la figura 4, las D0-branas son objetos puntuales, es decir, partículas, mientras que las D1-branas pueden interpretarse como cuerdas y las D3-branas son “cajas” con volumen. Ante este descubrimiento, se notó que una posibilidad viable es que el universo que conocemos sea una D3-brana que vive en un espacio más grande en donde otras D3-branas como la nuestra también podrían existir, o bien, que se trata de la intersección tridimensional de dos o más Dp -branas con $p > 3$. Esta representa una alternativa a las compactificaciones tradicionales, en las que todas las dimensiones extra son diminutas (probablemente del tamaño de la escala de Planck $\ell_P \approx 10^{-35}$ m). En un escenario con Dp -branas, el espacio adicional puede ser tan grande como 0.1mm.

Un resultado que apoya esta propuesta es que la simple presencia de las Dp -branas dota al subespacio p -dimensional de nuevas simetrías de norma. Los bosones de norma (parecidos a los fotones) resultan ser las distintas vibraciones de las cuerdas que están confinadas al subespacio de las Dp -branas, y las partículas que componen la materia observada podrían surgir de las cuerdas que viven en intersecciones de varias branas. Estas observaciones condujeron a la conclusión de que alguna compactificación de una variedad de la teoría de cuerdas con un arreglo de branas podría reproducir el Modelo Estándar de partículas elementales y la cosmología moderna. Una vez identificado el modelo de cuerdas adecuado, no sería tan complicado desvelar los mecanismos de la gran teoría madre, la teoría M, que conducen a la física conocida y sus secretos.

4. Nuestro universo hecho de cuerdas

En la opinión de muchos expertos, la teoría M y su hija, la teoría de cuerdas (y branas), representan el camino más prometedor para explicar el origen de toda la física conocida. De ser correcta esta postura, nuestro universo debería entenderse mediante una combinación adecuada de las herramientas disponibles: cuerdas, branas, gravedad cuántica, dimensiones adicionales, supersimetría, simetrías de norma, dualidades y compactificaciones. El problema es que existe un número grande (aunque no infinito) de espacios sobre los que se puede compactificar la teoría de cuerdas y de arreglos de branas que permiten llegar a modelos que describen algún universo 4-dimensional con cierto parecido con el nuestro¹⁴. En la cuerda tipo IIB, se ha estimado el número de posibles modelos en 10^{500} . Esto conduce al famoso problema del paisaje (o *landscape*): ¿cómo encontrar *nuestro* universo entre todos esos posibles universos descritos por la teoría de cuerdas? Aunque se trata de un problema complejo, la situación es un tanto mejor que en otras teorías, como la teoría cuántica de campos. En esa teoría, existe un número infinito de posibles modelos, pero (al nivel actual de precisión experimental) sólo el Modelo Estándar de partículas corresponde a la naturaleza; en la teoría de cuerdas, el número de posibilidades está acotado. Es importante anotar que, en este contexto, al referirnos a *la* teoría de cuerdas o *la* teoría cuántica de campos, las consideramos como lenguajes genéricos, cuyos elementos pueden ser combinados para concebir modelos que describen un cierto tipo de física, así como los elementos de un idioma (palabras, gramática, etc.) pueden combinarse para crear una novela.

El propósito de muchos “cuerderos” es identificar alguna combinación precisa de los elementos de la teoría que reproduzca las características de nuestro universo y que dé solución a los problemas de la física moderna. Esta área de estudio es conocida como *fenomenología de cuerdas* (para un revisión exhaustiva y moderna de esta área, se recomienda ref. [16]).

Para llegar a modelos que puedan ser verificados experimentalmente, la fenomenología de cuerdas debe primero resolver las diferencias entre las cuerdas y la física conocida ilustradas en la tabla 1. Del lado izquierdo se muestran algunas propiedades de la teoría de cuerdas: espacio-tiempo 10-dimensional, supersimetría, un sólo tipo de interacción (interacción de cuerdas) dotado con muchos bosones de norma, una constante de acoplamiento, cuerdas como elementos fundamentales en lugar de partículas, y gravedad cuántica. A la derecha, a manera de comparación, se enumeran algunos aspectos de la física conocida: espacio-tiempo 4-dimensional sin supersimetría o, en el mejor de los casos, con supersimetría rota, simetrías de norma para las tres interacciones fundamentales del Modelo Estándar de partículas, cada una con su constante de acoplamiento que determina la probabilidad de interacción entre partículas, los objetos elementales son campos cuyas perturbaciones son partículas, incluye la materia observable (quarks, leptones y bosones

¹⁴Típicamente, este último requerimiento se traduce en que el modelo contenga supersimetría a energías como las alcanzadas por el LHC.

Teoría de cuerdas	+	Fenomenología	=	Nuestro universo
10 dimensiones		compactificación de 6 dim.		4 dimensiones
supersimetría		ruptura de supersimetría		sin supersimetría
muchos ($\gg 12$) bosones de norma		ruptura de simetrías de norma		12 bosones de norma
1 fuerza fundamental				3 fuerzas fundamentales
cuerdas				campos de norma +quarks +leptones
gravedad cuántica				gravedad de Einstein
		campos adicionales		universo con inflación
		producto de compactificación		+materia oscura+...

Tabla 1: La fenomenología de cuerdas pretende vincular la física conocida a bajas energías con la teoría de cuerdas. La física de bajas energías se considera un límite *efectivo* de una teoría más *fundamental*, así como el electromagnetismo clásico es considerado el límite macroscópico (de más bajas energías) de la electrodinámica cuántica.

de norma), pero ignora efectos cuánticos gravitacionales. En esta transición, se considera que la física de nuestro universo emerge como límite de menor energía o de “grandes” tamaños de la teoría de cuerdas. Este límite es llamado *teoría efectiva*.

En la segunda columna de la tabla 1 planteamos los métodos que sigue la fenomenología de cuerdas para conciliar ambas teorías. Primero, como hemos descrito antes, se acepta que las seis dimensiones adicionales son compactas y suficientemente pequeñas. Como las teorías de cuerdas son supersimétricas de manera intrínseca, deshacerse consistentemente de la supersimetría mientras se resuelve el mencionado problema de jerarquía requiere que los modelos de cuerdas sean capaces de romper la supersimetría (en esencia, basta con que puedan establecer una pequeña diferencia entre las masas de los bosones y los fermiones de la teoría). Dado que la teoría de cuerdas da origen a grupos de norma muy grandes, la tarea es concebir una compactificación con elementos tales que permitan que, a partir de estas simetrías grandes, surjan las tres simetrías de norma (más pequeñas) del Modelo Estándar, con sus respectivos bosones de norma (un fotón, tres mediadores de las interacciones débiles y ocho mediadores de interacciones fuertes). Estos elementos requieren la inclusión de Dp -branas en algunos casos o la imposición de espacios compactos con ciertas simetrías geométricas que restrinjan a los campos permitidos tras la compactificación.

Al compactificar las teorías de cuerdas, se llega a una teoría (efectiva) de campos en la que las distintas perturbaciones de las cuerdas 10-dimensionales aparecen como diferentes partículas 4-dimensionales. Entre estas, se encuentran algunos elementos exóticos: las partículas masivas de Kaluza-Klein y los campos llamados *módulos*, que determinan el tamaño y forma de las dimensiones adicionales. Mientras que las primeras podrían ser

detectadas pronto en el LHC, los segundos dan lugar a partículas que podrían ser responsables de la inflación cosmológica y de la materia oscura, y, por tanto, interactuar muy poco con la materia que conocemos, haciendo su detección muy complicada. Sin embargo, algunas de las partículas que emergen de los módulos podrían ser problemáticas, pues su masa podría ser tan pequeña que conduciría a efectos que contradicen las observaciones cosmológicas. Entonces, una de las tareas de la fenomenología de cuerdas es concebir espacios muy particulares para compactificar y arreglos de branas que estén libres de este tipo de problemas.

Como decíamos antes, el número de compactificaciones con o sin branas que conducen a universos parecidos al nuestro es grande, entonces un paso esencial en la fenomenología de cuerdas consiste en identificar principios que guíen la búsqueda del modelo adecuado. Frecuentemente los problemas de las teorías experimentalmente validadas son una guía muy útil para identificar los elementos que describen la naturaleza. Un ejemplo histórico de esto es cómo la *catástrofe ultravioleta* y lo extraño del efecto fotoeléctrico dieron lugar a la concepción de la mecánica cuántica. En el Modelo Estándar de partículas, el problema de jerarquía mencionado antes, la ausencia de una explicación de la estructura que parecen formar las masas de las partículas del Modelo Estándar, así como otros conflictos más técnicos, son ejemplos de los problemas que la teoría de cuerdas usa como guía. La guía ha sido exitosa, pero aún quedan varios retos importantes antes de que la fenomenología de cuerdas sea capaz de hacer que la teoría de cuerdas sea una teoría experimentalmente verificable.

5. Dualidad holográfica

El ambicioso propósito de la teoría de cuerdas de describir toda la física observada tiene aún muchos obstáculos y nadie sabe con toda certeza si será posible alcanzarlo. Pero ¿qué pasaría si un día llegamos a entender que todos los esfuerzos en esta dirección están condenados al fracaso? Como veremos a continuación, aún ante este escenario, el estudio de la teoría de cuerdas nos ha conducido a observaciones y resultados que justifican los años invertidos en él.

En una visión quizá más moderna de la teoría de cuerdas, se exploran otras alternativas tal vez menos ambiciosas que la de encontrar una teoría de todo. En esta visión, las cuerdas se emplean como una fuente de herramientas matemáticas que ayuden a resolver problemas de la física actual. El máximo exponente de esta visión es posiblemente la *dualidad holográfica* o correspondencia norma/gravedad o AdS/CFT, o dualidad de Maldacena [17]. Esta dualidad ha conseguido proveer estimaciones de la entropía, viscosidad y conductividad del *plasma de quarks y gluones* que se sabe debió haber formado parte del universo temprano (instantes después de la gran explosión) y que puede ser observado en laboratorios internacionales como el LHC o RHIC. Además, la dualidad holográfica ha mostrado que puede tener muchas aplicaciones en materia condensada, ofreciendo algo

<p>Teoría de campos con interacciones fuertes</p> <p>Partículas Sin gravedad Espacio-tiempo plano Con interacciones fuertes (débiles) 4 dimensiones</p>	<p>= [Maldacena]</p>	<p>Teoría de cuerdas compactificada</p> <p>Cuerdas Con gravedad Espacio-tiempo curvo Con interacciones débiles (fuertes) 10 dimensiones</p>
--	--------------------------	--

Tabla 2: Un resumen [19] de la equivalencia propuesta por Maldacena. A pesar de lo absurdamente distintas de las teorías, la correspondencia ha sido confirmada en miles de trabajos científicos.

de intuición con respecto a e.g. superconductividad, superfluidez, metales extraños y fluidez de Hall [18]. Se recomienda [19] como una discusión introductoria y [20] como una revisión más detallada para entender esta dualidad.

La dualidad holográfica, sugerida en 1997 por J. Maldacena [17], muestra que existe una equivalencia entre dos teorías muy diferentes: una teoría de cuerdas con gravedad cuántica definida en un espacio 10-dimensional y una teoría de campos 4-dimensional. La cualidad *holográfica* de la dualidad proviene justamente de que la información de la teoría de cuerdas es capturada en una teoría con menos dimensiones, como sucede en los hologramas bidimensionales. Representa así un éxito del principio holográfico, propuesto por G. 't Hooft y refinado por L. Susskind [21], que establece que, en una teoría de gravedad, la descripción de la física contenida en el volumen de un cierto espacio está codificada en una teoría no gravitacional definida en la frontera de ese espacio. La tabla 2 permite apreciar lo casi inverosímil de la propuesta de Maldacena: las características de las teorías relacionadas por la dualidad holográfica son tan distintas, que difícilmente uno se puede imaginar descripciones más opuestas. Y, sin embargo, son equivalentes.

Entendamos mejor las teorías relacionadas por esta dualidad mediante un ejemplo particular. En su modelo original, Maldacena propuso que la física contenida en la frontera al infinito de la compactificación de la teoría de cuerdas tipo IIB en un espacio con geometría $AdS^5 \times S^5$ corresponde a la misma que encontramos en una teoría conforme supersimétrica 4-dimensional super Yang-Mills con el máximo de supersimetría posible (abreviado *MSYM*). El espacio-tiempo de anti-De Sitter AdS^5 y la esfera S^5 son las variedades 5-dimensionales más simples después del espacio plano o de Minkowski. Mientras que la curvatura de AdS^5 es negativa (como la de la silla de montar), en S^5 es positiva. La teoría de cuerdas IIB así compactificada conduce a cuerdas dinámicas cuyas vibraciones son interpretadas como los gravitones (fluctuaciones cuánticas de la métrica) en el espacio tiempo de anti-De Sitter. La teoría de *MSYM* corresponde a una teoría de norma conforme (es decir, que no cambia al aplicarle transformaciones de escala) dotada sólo de bosones de norma y de sus compañeros supersimétricos. Si se elige la simetría de norma como $SU(N)$, la teoría resultante de *MSYM* semeja en algunos aspectos (y para ciertos

propósitos) a la cromodinámica cuántica sin quarks (sólo con gluones). Lo fascinante de la dualidad holográfica es que los cálculos demuestran que el régimen de acoplamiento débil en la teoría gravitacional (cuerdas IIB) equivale al régimen de interacciones fuertes en la teoría de norma (MSYM), y viceversa. De esta forma, cálculos entre partículas que interactúan fuertemente (cuando no tenemos control de la teoría) como en la cromodinámica cuántica se pueden realizar fácilmente en la teoría de cuerdas en el límite de acoplamiento débil, ¡que es el único sobre el que tenemos control! Igualmente, podríamos conocer el comportamiento de la teoría de cuerdas cuando las cuerdas interactúan fuertemente (por encontrarse en un espacio altamente curvado), mediante cálculos en la teoría de campos con interacciones débiles.

Claramente, la propuesta de Maldacena no consideraba nuestro universo, pues, por una parte, la cromodinámica cuántica difiere de MSYM en que contiene quarks y no tiene supersimetría, y por otra parte, nosotros no habitamos un espacio 5-dimensional tipo anti-De Sitter. Sin embargo, ambos escenarios son un buen inicio. Tras la propuesta de Maldacena, muchos científicos han encontrado los mecanismos para e.g. añadir los quarks y las interacciones adecuadas de la cromodinámica cuántica, y suprimir la supersimetría en la teoría de campos. Los resultados han probado ser bastante exitosos cuando la mezcla de quarks y gluones es tan densa que sólo se percibe un fluido de ellos, el famoso plasma de quarks y gluones. Es difícil medir las propiedades de este fluido, pero las pocas mediciones obtenidas han sido sorprendentemente cercanas a los resultados predichos mediante la aplicación de la dualidad.

La dualidad holográfica es considerada aún una conjetura, pues no existe prueba matemática rigurosa que demuestre la equivalencia planteada. Pero el hecho de que haya sido sometida a miles de intentos de mostrarla incorrecta y en todos ellos haya salido victoriosa, y que haya aportado resultados que no difieren mucho de su contraparte experimental, permite afirmar sin duda que estamos ante el despertar de una nueva forma de apreciar y hacer la física.

La dualidad holográfica es una revolución en sí misma, quizá incluso mayor que el descubrimiento de las dualidades que condujeron a la teoría M, por su cercanía con la física observable. La propuesta de Maldacena nos indica que las teorías de norma están íntimamente vinculadas con teorías de gravedad; y nos sugiere que es posible vincular marcos teóricos sin gravedad con otros que sí la incluyan, de tal forma que la existencia o inexistencia de ésta depende del lenguaje adoptado en cada marco. Más relevante para nuestra discusión es que la dualidad revela que la teoría de cuerdas, si bien podría resultar ser una teoría menos ambiciosa de lo que se sospechaba, no está desconectada de la física que describe lo que nos rodea.

6. Las supercuerdas en México y su futuro

El gran reto de la teoría de cuerdas es establecerse como una teoría experimentalmente verificable. Como hemos visto, la teoría de cuerdas ofrece al menos dos mecanismos para lograr este objetivo: *i*) la fenomenología de cuerdas, y *ii*) la dualidad holográfica. Ambos han logrado un progreso importante en los últimos años.

Del lado de la fenomenología, recientemente hemos encontrado cientos de modelos a partir de diferentes variedades de la teoría de cuerdas [22–24], capaces de reproducir muchos aspectos de la física observable, tales como las simetrías y la materia descrita en el Modelo Estándar de partículas, incluyendo sectores responsables de la existencia de la materia oscura e inflación, y propuestas de solución a algunos problemas técnicos de la física moderna, tal como el problema de jerarquía. Pese a este éxito, los retos a enfrentar ahora no son pequeños. Llevar los modelos obtenidos de su estatus actual al estatus de teorías verificables requiere analizar con sumo detalle cada una de las mediciones en física de partículas elementales y contrastarla con los resultados de los modelos obtenidos.

Estos retos son enfrentados en México por el grupo de Oscar Loaiza-Brito, del campus León de la Universidad de Guanajuato, y por mi grupo en el Instituto de Física de la UNAM. En estos grupos se busca primeramente desarrollar las técnicas matemáticas y numéricas para el cálculo de cantidades medibles, tales como las masas de las partículas elementales, incluyendo las recientes mediciones de la masa del que podría ser el bosón de Higgs. En estos cálculos, el tamaño y forma de las dimensiones compactas, que no son fijados *a priori* por la teoría de cuerdas, juegan un papel irremplazable, por lo que una de las tareas iniciales es identificar los mecanismos que la teoría ofrece para fijar estos parámetros de la teoría. Una vez identificados los mecanismos y las técnicas que permiten calcular cantidades medibles en modelos prometedores, el siguiente paso es contrastar los resultados con los datos obtenidos sobre e.g. la masa del Higgs, el momento magnético del muón, la posible existencia de fuerzas y partículas adicionales en la naturaleza, y la posibilidad de un perfil no Gaussiano de las fluctuaciones de la radiación cósmica de fondo, entre otros fenómenos.

Es preciso mencionar que, a pesar de contar con muchos modelos prometedores, no es obvio que el modelo que se busca desde hace décadas se encuentre entre los modelos identificados. Por esta razón y porque sabemos que la teoría de cuerdas y la teoría M se encuentran aún en desarrollo, es imprescindible que, simultáneamente con esta búsqueda, los grupos se dediquen a la investigación de otros aspectos de la teoría de cuerdas que permitan una comprensión más profunda de los mecanismos que estas teorías ofrecen para llegar a modelos fenomenológicamente exitosos.

En el caso más pesimista, la teoría de cuerdas no podrá jamás proporcionar un modelo capaz de convertirse en la teoría fundamental tan anhelada por muchos. Incluso en este escenario catastrófico, los hallazgos actuales indican que la teoría de cuerdas puede proporcionar herramientas útiles para describir la física de nuestro universo. Esta es la postura en algunos escenarios conjeturados en los que e.g. la existencia de dimensiones

adicionales puede explicar distintos aspectos de la física observable [25].

Por otra parte, el descubrimiento la dualidad holográfica es considerada por muchos como la mayor contribución de la teoría de cuerdas a la física, pues ha tendido puentes en áreas de esta ciencia que se consideraban completamente desconectadas. En México hay un equipo de trabajo muy sólido que ha contribuido de manera sobresaliente durante la última década a este éxito. Este equipo está compuesto por Alberto Güijosa y Antonio García, del Instituto de Ciencias Nucleares de la UNAM, Elena Cáceres, de la Universidad de Colima, Mariano Chernicoff, actualmente en una estancia en la Universidad de Cambridge, y Leonardo Patiño, de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Para ellos, el propósito esencial de sus trabajos parece remontarse al origen de las dualidades en la teoría de cuerdas y de la teoría misma: la descripción integral de sistemas cuánticos con acoplamiento fuerte. En la búsqueda de esta comprensión, se han explorado diversas propiedades de versiones idealizadas de plasmas de quarks y gluones, tales como la pérdida de energía, el apantallamiento y la emisión de fotones, así como la radiación y efectos térmicos en el vacío.

Por otra parte, ante lo sorprendente de la dualidad holográfica, resulta imprescindible dotarla de solidez no sólo “empírica” o circunstancial, sino dilucidar su origen para poder lograr establecer su infalibilidad teórica. Una de las aplicaciones de una comprensión completa de la dualidad sería, en el sentido inverso al habitual, proporcionar información que nos ayude a comprender mejor de qué están hechas las cuerdas y cómo funciona la gravedad cuántica, a través de cálculos realizados en teorías de campos (sin gravedad). Esta línea de investigación no cuenta actualmente con tantos triunfos como su contraparte (generalmente, los cálculos se realizan en la teoría de cuerdas con la finalidad de entender mejor las teorías de campos). Sin embargo, los grupos mexicanos muestran creciente interés en esta dirección y es previsible cierto progreso en esta área a mediano plazo.

En México, la investigación de la teoría de cuerdas es joven, pero avanza con un ritmo creciente por la incursión de cada vez más científicos entusiastas y muy activos. Los recientes avances en fenomenología de cuerdas y en diversos aspectos de la dualidad holográfica hacen suponer un crecimiento de la actividad en estas dos áreas en México que contribuirá a la resolución de las ambiciosas preguntas que se plantean estas disciplinas. Estamos convencidos de que la teoría de cuerdas aún guarda muchos secretos más allá de las preguntas y problemas aquí expuestos y estamos convencidos también de que estamos preparados para allanar el camino de la teoría de cuerdas hacia una teoría capaz de arrojar resultados en acuerdo con los datos experimentales.

Como hemos visto, la teoría de cuerdas ha mostrado ser una revolución conceptual desde sus orígenes y podría ya estar mostrando signos de ser un ingrediente de la física observable. En este escenario, nuestro país no puede ceder a la tentación de abstenerse de participar en lo que podría ser el inicio de una nueva era para la física. No podemos ser sólo observadores de la primera revolución científica de nuestro siglo.

Agradecimientos

Es un placer agradecer a Alberto Güijosa por múltiples discusiones. Este trabajo ha sido parcialmente apoyado por el proyecto CONACyT 151234 y el proyecto DGAPA-PAPIIT IB101012.

7. Referencias

- [1] J. Scherk and J. H. Schwarz, "Dual Models for Nonhadrons," *Nucl. Phys.*, vol. B81, pp. 118–144, 1974.
- [2] F. Gliozzi, J. Scherk, and D. I. Olive, "Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model," *Nucl. Phys.*, vol. B122, pp. 253–290, 1977.
- [3] L. Brink, J. H. Schwarz, and J. Scherk, "Supersymmetric Yang-Mills Theories," *Nucl. Phys.*, vol. B121, p. 77, 1977.
- [4] S. Weinberg, *The quantum theory of fields. Vol. 3: Supersymmetry*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] E. Abbott Abbott, *Flatland: A Romance of Many Dimensions*. Seely & Co., 1884.
- [6] T. Kaluza, "On the problem of unity in physics," *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin*, vol. K1, p. 966, 1921.
- [7] O. Klein, "Quantum theory and five dimensional theory of relativity," *Z. Phys.*, vol. 37, p. 895, 1926.
- [8] J. Dugundji, *Topology*. Boston: Allyn and Bacon, 1966.
- [9] S. Rappoccio, "CMS collaboration. Measurement of the top pair invariant mass distribution at 7 TeV and search for new physics," *arXiv:1110.1055, hep-ex*, 2011.
- [10] E. Witten, "Reflections on the fate of space-time," *Phys. Today*, vol. 49N4, pp. 24–30, 1996.
- [11] A. Font, L. E. Ibáñez, D. Lüst, and F. Quevedo, "Strong - weak coupling duality and nonperturbative effects in string theory," *Phys.Lett.*, vol. B249, pp. 35–43, 1990.
- [12] J. H. Schwarz, "The power of M theory," *Phys.Lett.*, vol. B367, pp. 97–103, 1996.
- [13] P. Townsend, "Four lectures on M theory," 1996.
- [14] J. Polchinski, "Dirichlet Branes and Ramond-Ramond charges," *Phys.Rev.Lett.*, vol. 75, pp. 4724–4727, 1995. [Online]: <http://arxiv.org/abs/hep-th/9510017>

- [15] —, “Tasi lectures on D-branes,” *arXiv:9611050, hep-th*, 1996.
- [16] L. E. Ibáñez and A. M. Uranga, *String theory and particle physics: An introduction to string phenomenology*. Cambridge University Press, 2012.
- [17] J. M. Maldacena, “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity,” *Adv.Theor.Math.Phys.*, vol. 2, pp. 231–252, 1998.
- [18] S. A. Hartnoll, “Lectures on holographic methods for condensed matter physics,” *Class.Quant.Grav.*, vol. 26, p. 224002, 2009.
- [19] A. Güijosa, “La correspondencia holográfica: una aplicación útil de la teoría de cuerdas,” *Boletín de la SMF*, vol. 26, pp. 85–99, 2012.
- [20] O. Aharony, S. S. Gubser, J. M. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz, “Large N field theories, string theory and gravity,” *Phys.Rept.*, vol. 323, pp. 183–386, 2000.
- [21] L. Susskind, “The World as a hologram,” *J.Math.Phys.*, vol. 36, pp. 6377–6396, 1995.
- [22] S. Ramos-Sánchez, “Towards Low Energy Physics from the Heterotic String,” *Fortsch.Phys.*, vol. 10, pp. 907–1036, 2009.
- [23] L. B. Anderson, J. Gray, A. Lukas, and E. Palti, “Two Hundred Heterotic Standard Models on Smooth Calabi-Yau Threefolds,” *Phys.Rev.*, vol. D84, p. 106005, 2011.
- [24] F. Gmeiner and G. Honecker, “Millions of Standard Models on Z-prime(6)?” *JHEP*, vol. 0807, p. 052, 2008.
- [25] L. Randall and R. Sundrum, “A Large mass hierarchy from a small extra dimension,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 83, pp. 3370–3373, 1999.

El Mundo de lo Pequeño

Fuerzas de Casimir

Carlos Villarreal, Instituto de Física, UNAM, México

Según las ideas actuales, el vacío físico en su acepción de carencia de todo, no existe. Al contrario, sabemos que cualquier región del Universo, aún en ausencia de materia (átomos, moléculas, electrones, neutrinos, etc.), de luz, o cualquier otra forma de energía radiante, se encuentra permeada por las fluctuaciones de campos cuánticos, con amplitudes y fases que varían al azar. A esta nueva concepción de vacío la denominamos vacío cuántico. Si bien este concepto parece rebuscado y alejado de nuestra realidad cotidiana, el vacío cuántico proporciona una clave para acceder a una comprensión plena de las fuerzas de la Naturaleza. Este se manifiesta en fenómenos tales como las fuerzas intermoleculares de Van der Waals que dan origen a los estados de agregación de la materia (sólido, líquido, gaseoso), al fenómeno de emisión atómica espontánea (como en la luz solar), a la anchura fundamental de los niveles atómicos y, posiblemente, a la energía oscura del Universo.

El origen formal del vacío cuántico podemos encontrarlo en el hecho de que cualquier modo de un campo cuántico oscilatorio tiene un espectro de energía correspondiente a un oscilador armónico, $E_n = (n + 1/2)\hbar\omega$, de manera que aún en el estado de cero cuantos, con $n = 0$, el modo tiene una energía finita $E_0 = \hbar\omega/2$. Por otro lado, el número de modos de cualquier campo oscilatorio (óptico, acústico, electrónico, etc.) por unidad de frecuencia y unidad de volumen en un sistema isotrópico y homogéneo tiene la forma $n(\omega) = \omega^2/2\pi^2c^3$ y por tanto la densidad espectral de energía está determinado por el producto de $n(\omega)E_0$:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{2\pi^2c^3}, \quad (1)$$

en donde \hbar es la constante de Planck (dividida por 2π) y c es la velocidad de la luz. Puede demostrarse que esta expresión es invariante relativista, de modo que las fluctuaciones de vacío no dan lugar a sistemas de referencia privilegiados y son entonces indetectables por observadores en un estado de movimiento inercial. Sin embargo, un observador en un sistema de referencia privilegiado (no inercial) puede detectar efectos asociados a las fluctuaciones cuánticas. En otras palabras, si la invariancia de Lorentz de un sistema se

rompe por la presencia de fronteras materiales, campos externos, o movimientos acelerados, por ejemplo, entonces la densidad espectral de energía ya no corresponderá a la del sistema isotrópico y homogéneo, dado por (1).

La alteración en la densidad espectral (1) se materializa en los fenómenos mencionados en el párrafo anterior y muchos más. El concepto de energía de punto cero del estado fundamental de un sistema electromagnético puede extenderse a una variedad de sistemas físicos de distinta índole. El comportamiento de sistemas colectivos constituídos por una gran cantidad de partículas cargadas en interacción mutua y con campos externos puede entenderse en términos de las oscilaciones de diferentes modos normales que permiten el transporte de energía, momento lineal y momento angular a través del sistema. A nivel cuántico, dichas oscilaciones pueden ser descritas mediante conjuntos de osciladores armónicos cuyos niveles energéticos de estados excitados pueden asociarse a cuasipartículas cuánticas tales como los fonones (modos vibratorios en una estructura cristalina), plasmones (excitaciones coherentes de un plasma electrónico), excitones (excitaciones de un electrón y un agujero de carga), magnones (excitaciones coherentes de espín), etc. El modo fundamental de cada uno de estos sistemas, asociado a cero cuantos, determina el estado de vacío cuántico correspondiente. En la actualidad, se han podido medir, por ejemplo, las fuerzas tipo Casimir inducidas por el campo de punto cero de fonones en sistemas acústicos. Asimismo, se han calculado las fuerzas tipo Casimir asociadas a fluctuaciones cuánticas de electrones de un material, aunque no se han desarrollado experimentos para verificar estas predicciones.

1. Origen de las fuerzas de Casimir

Una de las manifestaciones físicas más simples del vacío cuántico, que ha permitido estudiar su estructura con mayor profundidad, es la de las fuerzas de Casimir [1]. En 1947, los físicos H. B. G. Casimir y D. Polder trabajaban en los laboratorios Philips en Holanda investigando las fuerzas de atracción de Van der Waals que existen entre las partículas suspendidas en un coloide. Encontraron que, para las separaciones entre las partículas (r) relativamente grandes, el potencial de interacción entre ellas decaía como $V(r) \sim -1/r^7$, lo que difería del resultado proveniente de la teoría cuántica para las interacciones intermoleculares (comúnmente denominadas fuerzas dispersivas) $V(r) \sim -1/r^6$. Casimir y Polder elaboraron una teoría para las interacciones intermoleculares en la que incluyeron el efecto del retardo asociado al tiempo de propagación de la interacción entre las dos moléculas. Como resultado obtuvieron que para dos moléculas con polarizabilidad eléctrica α_1 y α_2

$$V(r) = \frac{-23\alpha_1\alpha_2\hbar c}{4\pi r^7}. \quad (2)$$

La simplicidad de la expresión llamó la atención de Casimir, quien se lo comentó a Niels Bohr durante una caminata. Según narra Casimir, Bohr masculó algo sobre que el

fenómeno debería estar asociado a las fluctuaciones del vacío. Eso fue todo, y a raíz de esta conversación Casimir decidió estudiar los efectos producidos por las fluctuaciones del campo electromagnético de vacío confinado por dos placas paralelas perfectamente conductoras y separadas por una distancia d . Su investigación lo condujo a la conclusión de que debería aparecer una fuerza atractiva entre las placas con una magnitud

$$\frac{F}{A} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240d^4}, \quad (3)$$

en donde A es el área de las placas.

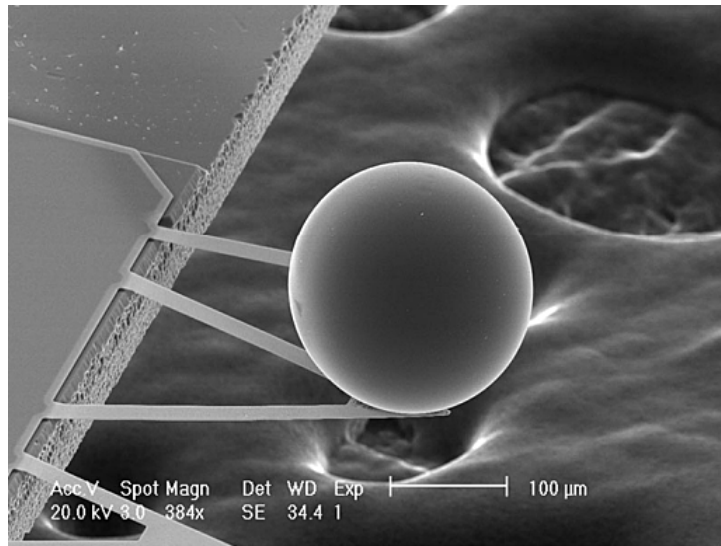


Figura 1: Empleo de técnicas de microscopía de fuerza atómica para la medición de las fuerzas de Casimir entre una esfera micrométrica y una placa conductora. Adaptado de [2].

Esta fuerza es muy pequeña a escalas macroscópicas y sólo es relevante a escalas del orden o menores que micras (10^{-6} m). Como consecuencia, sólo fue hasta años recientes en que los estudios experimentales de las fuerzas de Casimir alcanzaron la precisión necesaria para verificar con detalle las predicciones teóricas. Cabe mencionar que las primeras mediciones efectuadas por Derjaguin en 1951, si bien eran consistentes con la teoría, involucraban errores relativos cercanos al 100%. Fue en 1997 cuando Lamoreux, mediante el empleo de un sistema micromecánico basado en una balanza de torsión, logró verificar la teoría de Casimir con una precisión del 5%. Posteriormente, Mohideen logró una precisión del 1% utilizando técnicas de microscopía de fuerza atómica. Una imagen del dispositivo empleado se muestra en la Figura 1. Otros experimentos fueron desarrollados por

Chan y sus colaboradores empleando sistemas micromecánicos. Todo esto ha impulsado fuertemente las investigaciones experimentales de las fuerzas de Casimir, en las cuales las propiedades detalladas de las placas tales como su capacidad de absorción y disipación de energía, rugosidad, temperatura, etc., han sido tomadas en cuenta.

A continuación presentaremos una derivación simple de las fuerzas de Casimir entre placas paralelas perfectamente conductoras. Después describiremos sistemas más generales, tomando en cuenta otras geometrías o la contribución de fluctuaciones térmicas. Posteriormente abordaremos el problema del pistón cuántico. También discutiremos un formalismo que permite considerar propiedades dispersivas arbitrarias de los medios que confinan a las fluctuaciones del vacío. Después presentaremos brevemente los análogos de fuerzas de Casimir en sistemas electrónicos y acústicos. Finalmente, haremos un bosquejo de los efectos tipo Casimir que surgen del campo de vacío en sistemas no inerciales o gravitacionales, como en el caso de la radiación de hoyos negros de Hawking.

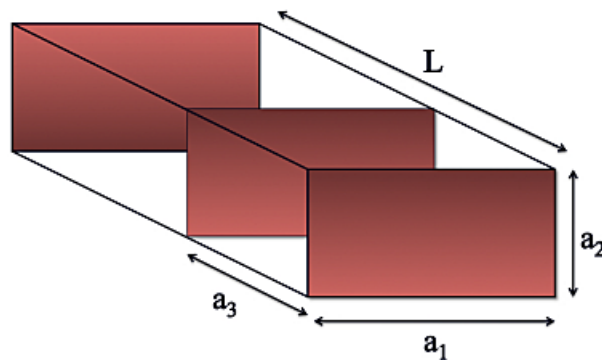


Figura 2: Cavidad rectangular con paredes perfectamente conductoras. La configuración de placas paralelas se recupera si $a_1 = a_2 \equiv a \gg d \equiv a_3$

2. Fuerza de Casimir entre placas conductoras ideales

A continuación, desarrollaremos una teoría muy simple [3], cercana a la propuesta por Casimir, para determinar el efecto del confinamiento en las fluctuaciones cuánticas. Consideremos dos placas paralelas perfectamente conductoras sujetas a la acción del campo electromagnético del vacío. Por conveniencia en los cálculos, supondremos que las placas están en una cavidad de sección cuadrada a^2 y longitud L , y que una de las placas coincide con una de las paredes del fondo de la caja, mientras que la otra placa está a una distancia $a_3 = d$ de ésta, tal y como se muestra en la figura 2. La energía total dentro de la cavidad es $E = E_1 + E_2$ y depende de la posición de la placa intermedia, dado que un cambio en ésta altera los modos del campo electromagnético permitidos dentro de las cavidades.

Si ahora movemos la placa intermedia a una nueva posición $d' = \alpha L$, con $0 \leq \alpha \leq 1$, y su distancia a la pared del fondo será $(1 - \alpha)L$, dando lugar a una nueva distribución de modos del vacío con una energía $E_3 + E_4$. En consecuencia, la diferencia de energía entre las dos configuraciones es una función de la distancia d :

$$\Delta E = E_1(d) + E_2(L - d) - E_3(\alpha L) - E_4(L(1 - \alpha)), \quad (4)$$

en donde los términos de la suma están dados por

$$E_i(x) = (2) \sum_{\mathbf{n}} \frac{1}{2} \hbar c k_{\mathbf{n}}(x), \quad (5)$$

con $k_{\mathbf{n}}(x) = \omega_{\mathbf{n}}(x)/c$ y donde las condiciones a la frontera implican

$$k_{\mathbf{n}}(x) = \sqrt{\left(\frac{n_1\pi}{x}\right)^2 + \left(\frac{n_2\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n_3\pi}{L}\right)^2}. \quad (6)$$

El término (2) antes de la sumatoria proviene de que existen dos polarizaciones independientes del campo electromagnético. Notamos que cada una de las contribuciones es infinita, por lo que es conveniente introducir un término de corte para frecuencias altas de la forma $\exp(-\eta k_{\mathbf{n}}/\pi)$ en cada suma y tomar posteriormente el límite $\eta \rightarrow \infty$. Este corte refleja el hecho de que cualquier material conductor se vuelve transparente a frecuencias suficientemente altas. Consideraremos ahora que la sección transversal de la caja es muy grande, de modo que $a \gg d$; en ese caso, las sumatorias sobre n_2 y n_3 pueden reemplazarse por integrales, lo que nos conduce al resultado:

$$E = -\frac{\pi^2 \hbar c a^2}{720} \left(\frac{1}{d^3} + \frac{1}{(L-d)^3} - \frac{1}{(\alpha L)^3} - \frac{1}{(1-\alpha)^3 L^3} \right). \quad (7)$$

Finalmente, si tomamos el límite $L \rightarrow \infty$ concluimos que la energía está dada por

$$E = -\frac{\pi^2 \hbar c A}{720 d^3}, \quad (8)$$

donde $A = a^2$ es el área de las placas. El signo negativo implica que la energía disminuye al acercar las placas, lo que se traduce en una atracción entre éstas. Este fenómeno es el efecto Casimir. La derivación anterior implica que la energía es negativa comparada con la energía asociada a la configuración cuando las placas están alejadas una distancia infinita; en este contexto, no tiene sentido hablar de una energía negativa *per se*. De la ecuación (11) podemos calcular la fuerza entre las placas mediante la relación $F = -\partial E/\partial d$, de modo que la fuerza por unidad de área resulta

$$P = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240 d^4}. \quad (9)$$

Si introducimos la energía por unidad de volumen $\mathcal{E} = E/V$, vemos que $P = 3\mathcal{E} < 0$, resultado que discutiremos más adelante.

Al sustituir en las expresiones para la energía y la presión los valores de las constantes fundamentales, resulta que la presión de Casimir es extremadamente pequeña para distancias mayores que una micra (10^{-6} metros), de manera que sólo es apreciable a distancias de unos cientos de nanómetros ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$). A estas distancias la presión es alrededor de una atmósfera. Los experimentos actuales muestran que las predicciones de Casimir fueron esencialmente correctas. Por supuesto, es necesario tomar en cuenta una serie de correcciones que no fueron tomadas en cuenta en el modelo original idealizado.

3. Fuerzas de Casimir en cavidades conductoras.

Las ideas de Casimir pueden generalizarse para considerar geometrías más complicadas, como las asociadas a cavidades rectangulares, cilíndricas o esféricas. Un resultado sorprendente es que las fuerzas de Casimir pueden perder su carácter atractivo y tornarse repulsivas en determinadas configuraciones. La existencia de fuerzas de Casimir repulsivas derivadas de la geometría es controversial y a la fecha existen debates sobre su realidad física.

Consideremos una cavidad rectangular con paredes perfectamente conductoras como aquella que aparece en el lado derecho de la figura 2. En este problema es conveniente introducir el formalismo denominado de suma sobre los modos permitidos del campo de vacío. Este método toma en cuenta que la presencia de paredes conductoras da lugar a una redistribución de los modos del campo, los cuales en ausencia de las mismas tienen una distribución $\rho(\omega) \propto \omega^3$. Para esta configuración, la densidad de estados del campo de vacío determinada por las condiciones de contorno electromagnéticas, tiene la siguiente estructura:

$$\rho(\omega) = \frac{(2)}{8} \sum'_{n_i} \delta(\omega - \omega_{\mathbf{n}}) (1 - \delta_{n_1 0} \delta_{n_2 0} - \delta_{n_2 0} \delta_{n_3 0} - \delta_{n_3 0} \delta_{n_1 0}), \quad (10)$$

en donde la prima en las sumatoria indica que el término con los tres índices $n_i = 0$ debe excluirse. De nuevo, el factor (2) está asociado a los dos grados de polarización independientes del campo electromagnético. Esta forma particular de $\rho(\omega)$ refleja el hecho de que cada modo aparece con igual peso, y que los modos permitidos son aquellos en que la componente paralela (normal) del campo eléctrico (magnético) es nula sobre las paredes de la cavidad. La densidad de energía de Casimir puede derivarse entonces de la expresión

$$\mathcal{E} = \int d\omega \rho(\omega) \hbar\omega/2 \quad (11)$$

lo que (después de una gran cantidad de cálculos) conduce al resultado

$$\mathcal{E} = -\frac{\hbar c}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{1}{u_{n_1, n_2, n_3}^4} + \frac{\hbar c}{4\pi V} \sum_{i=1}^3 a_i \sum_{n_i} \frac{1}{[(2a_i n_i)^2]}, \quad (12)$$

en donde $u_{n_1, n_2, n_3}^2 \equiv (2a_1 n_1)^2 + (2a_2 n_2)^2 + (2a_3 n_3)^2$. Asimismo, la presión del vacío que actúa sobre una de las paredes con en la dirección normal a_i está dada por:

$$P_i(\sigma) = -\frac{\hbar c}{\pi^2} \sum_{n_1, n_2, n_3} \frac{4(2a_i)^2 - u_{n_1, n_2, n_3}^2}{[u_{n_1, n_2, n_3}^2]^3} + \frac{\hbar c}{4\pi V} \sum_n \frac{a_i}{[(2a_i n)^2]}. \quad (13)$$

Notamos que tanto la expresión para la densidad de energía, como la asociada a las presiones, involucra términos con signos diferentes, de modo que alterando las longitudes relativas de las aristas que definen a la cavidad pudieran construirse configuraciones en que las presión de Casimir que se ejerce sobre algunos de los pares de placas se vuelva positiva, es decir, dé lugar a fuerzas de Casimir repulsivas.

La dependencia de la densidad de energía y presiones de Casimir con las dimensiones relativas del sistema es consistente con la conservación del tensor de energía-momento del campo electromagnético. El teorema muestra que la densidad de energía está relacionada con la presión ejercida por el campo en las direcciones x, y, z mediante la expresión

$$\mathcal{E} = P_x + P_y + P_z. \quad (14)$$

Para un sistema isotrópico, en que ninguna dirección es preferente $P_x = P_y = P_z \equiv P$, obtenemos $P = (1/3)\mathcal{E} > 0$, que es un resultado conocido en la teoría electromagnética y se cumple, por ejemplo, para la radiación de cuerpo negro en una cavidad macroscópica. Por otro lado, en nuestro problema existen direcciones preferenciales que, en el caso usual de las placas paralelas, es la perpendicular a dichas placas, digamos la dirección z . Esto puede apreciarse en la figura 3, donde se grafican la densidad de energía y las presiones de Casimir para una cavidad conductora con sección transversal cuadrangular $a_1 = a_2 = a$ y longitud $a_3 = d$. Tal como lo mostramos con anterioridad, en el caso en que $L \ll a$, equivalente a la configuración de placas paralelas estándar, tanto \mathcal{E} como P_z son fuertemente negativas, con $P_z \simeq 3\mathcal{E}$, mientras que $P_x = P_y \simeq -\mathcal{E}$ son positivas. A medida que se alteran las dimensiones de la cavidad, de modo que $a \sim d$, tanto \mathcal{E} , como P_z se vuelven menos negativas, hasta que al alcanzarse una configuración cúbica $P_x = P_y = P_z = \mathcal{E}/3 > 0$, es decir, las fuerzas de Casimir en las tres direcciones se vuelven repulsivas. Si seguimos alargando la cavidad, de modo que $d \gg a$ (como en una fibra), se cumplirá ahora que $P_z = -\mathcal{E} > 0$, mientras que $P_x = P_y = \mathcal{E} < 0$. En este caso, tenemos una fuerzas repulsiva entre las placas que determinan los extremos de la fibra y fuerzas atractivas entre las placas que conforman su cuerpo.

Los resultados derivados para las presiones y densidad de energía de Casimir en una cavidad rectangular, se mantienen en forma cualitativa para geometría similares. Al igual

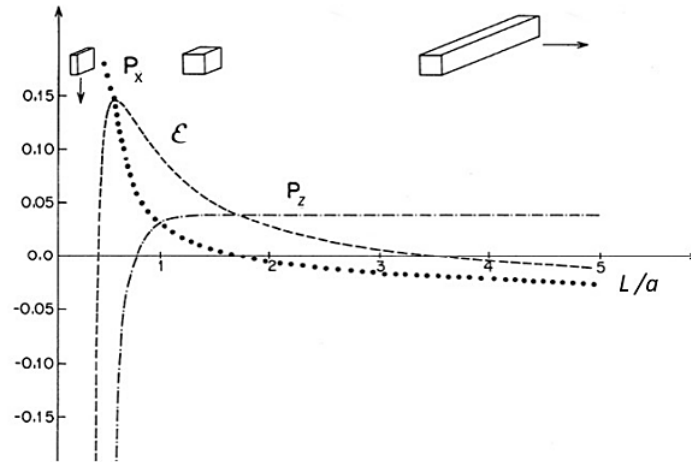


Figura 3: Variación de la densidad de energía \mathcal{E} y las presiones $P_x = P_y$ y P_z en una cavidad con paredes perfectamente conductoras de longitud d y con sección transversal de área a^2 , como función de la geometría determinada por el parámetro d/a . Para $d/a \ll 1$, se recuperan los resultados equivalentes a placas paralelas. Cuando $d/a = 1$ se tiene una cavidad cúbica, mientras que para $d/a \gg 1$, se tiene una fibra.

que en el caso de una cavidad cúbica, la presión radial de Casimir es repulsiva para una cavidad esférica, mientras que para una cavidad cilíndrica alargada, las presiones se comportan como en la fibra cuadrangular. Sin embargo, los cálculos involucrados en estas geometrías son mucho más complicados. Resulta interesante mencionar que el comportamiento de la presión para caso de la cavidad esférica dio al traste con un modelo del electrón propuesto por Casimir en 1953. En este modelo, se suponía que el electrón era un cascarón esférico de carga en que la fuerza coulombiana repulsiva era balanceada por la presión radial atractiva asociada a las fluctuaciones del vacío.

El estudio de las fluctuaciones del vacío confinadas en diferentes configuraciones a $T = 0$, puede extenderse para considerar las fuerzas de Casimir asociadas a fluctuaciones térmicas, es decir, a los efectos de frontera en la radiación de cuerpo negro. Un enfoque directo consiste en evaluar las cantidades termodinámicas relevantes tales como la densidad de energía interna \mathcal{E} , de entropía \mathcal{S} , de energía libre $\mathcal{F} = E - TS$ empleando la densidad de modos derivada en el caso de temperatura nula $\rho(\omega)$, la cual es independiente de la temperatura. En el caso de la cavidad conductora rectangular la densidad de energía libre de Helmholtz del sistema está dada por

$$\mathcal{F} = \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\hbar\omega}{2} - k_B T \ln(1 + e^{-\hbar\omega/k_B T}) \right) \rho(\omega), \quad (15)$$

en donde k_B es la constante de Boltzmann. Las expresiones resultantes son complicadas

y dan lugar a cantidades infinitas difíciles de interpretar y de manejar. Sin embargo, una configuración que estudiaremos a continuación permite cancelar las divergencias y conduce a resultados finitos con una interpretación física clara.

4. Pistón de Casimir

El pistón de Casimir consiste de una cavidad rectangular de paredes conductoras con una placa conductora intermedia, como en la figura 2. Es claro que esta configuración es equivalente al problema de dos cavidades conductoras adyacentes como las discutidas en los párrafos anteriores, de manera que podemos utilizar las mismas expresiones en el cálculo. Sin embargo, en este caso podemos determinar la diferencia de presiones de Casimir ejercidas sobre ambas caras de la placa intermedia, lo cual permite cancelar las contribuciones divergentes mencionadas arriba. Para un pistón de longitud total L , con la placa situada a una distancia a_3 de una de las paredes del fondo, la diferencia de presiones es $\Delta P = P(a_3) - P(L - a_3)$.

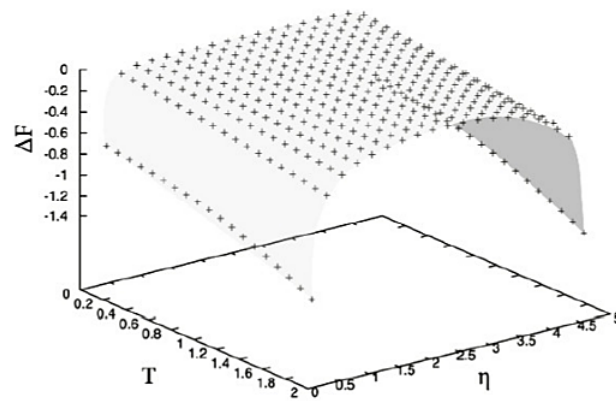


Figura 4: Diferencia de energías libres en un pistón de longitud $L = 5\mu\text{m}$, con sección transversal cuadrangular de $a^2 = 1\mu\text{m}^2$ en función de la temperatura T en unidades de $1/k_B a$ y de la posición relativa de la interfaz $\eta = a_3/a$. Adaptado de [4].

A su vez, ésta puede obtenerse derivando la diferencia en las densidades de energía de ambos lados de la placa $\Delta P = \partial\Delta\mathcal{E}/\partial a_3$. Es conveniente determinar $\Delta\mathcal{E}$ respecto de una configuración de referencia en el que la placa se encuentra en medio de la cavidad: $\Delta\mathcal{F} = \mathcal{F}(a_3) + \mathcal{F}(L - a_3) - 2\mathcal{F}(L/2)$ de manera que las cantidades termodinámicas resultantes sean nulas cuando la placa se encuentra en el punto medio. Con este procedimiento, las variables termodinámicas calculadas son finitas y continuas, como podemos apreciar en las figuras 4 y 5 para el caso de las diferencias de la densidad de energía libre de Helmholtz y de la presión. En este último caso, podemos apreciar que la diferencia de presión

es negativa cuando el pistón se encuentra muy cercano a una de las paredes del fondo, digamos el lado izquierdo de la cavidad, como en el caso del efecto Casimir entre placas.

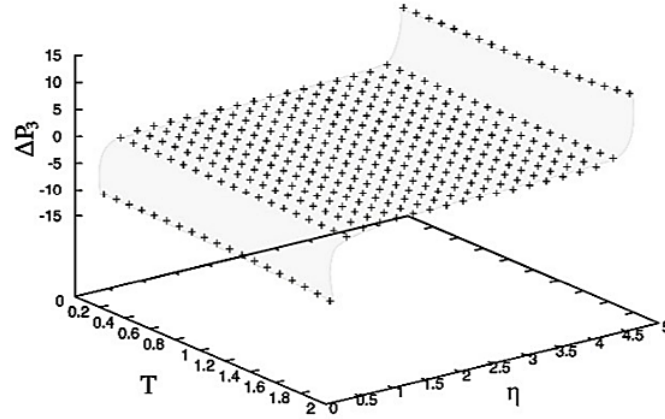


Figura 5: Diferencia de presiones en un pistón de longitud $L = 5\mu\text{m}$, con sección transversal cuadrangular de $a^2 = 1\mu\text{m}^2$ en función de la temperatura T en unidades de $1/k_B a$ y de la posición relativa de la interfaz $\eta = a_3/a$. Adaptado de [4].

A medida que el pistón se aleja, la diferencia de presiones disminuye hasta volverse nula cuando el pistón se encuentra justo en medio de la cavidad. Posteriormente, al desplazarse más a la derecha, la presión se vuelve positiva, es decir, la fuerza de Casimir asociada es repulsiva. Sin embargo, esto también puede interpretarse como que la fuerza es atractiva respecto de la pared del lado derecho. Aunque parezca sorprendente, este tipo de resultados ha generado controversias respecto de la existencia de fuerzas repulsivas de Casimir asociadas a la geometría de un sistema. A la fecha, la controversia no está resuelta y no se han medido aún fuerzas de Casimir repulsivas en este tipo de sistemas.

5. Fuerzas de Casimir en materiales dispersivos.

Como se mencionó en la introducción, las fuerzas de Casimir han sido medidas con gran precisión y concuerdan en forma semi-cuantitativa con las predicciones de Casimir para placas conductoras perfectas. Sin embargo, es necesario tomar en cuenta de manera realista las correcciones inducidas por la conductividad finita de las placas, la rugosidad, la falta de paralelismo entre ellas a distancias nanométricas, los efectos de temperatura finita, etc. En 1956, Lifshitz propuso una teoría macroscópica para dos placas dieléctricas semiinfinitas caracterizadas por una función dieléctrica dependiente de la frecuencia $\epsilon(\omega)$ y separadas por una distancia L . La derivación propuesta por Lifshitz es extremadamente complicada, por lo que es difícil de generalizar a situaciones más generales, por

ejemplo, aquellas en que existen efectos no locales en la respuesta dieléctrica, capas delgadas, materiales nanoestructurados, o a regiones del espectro en que la noción de función dieléctrica tiene dificultades de interpretación. Un cierto número de derivaciones alternativas a la de Lifshitz han sido propuestas empleando diversas aproximaciones. Una de éstas consiste en calcular la presión como la diferencia en el flujo de momento del campo electromagnético que incide sobre las superficies externa e interna de las paredes de la cavidad confinante.

Para calcular el flujo de momento del campo conviene determinar la densidad de estados de momento lineal ρ_k derivada las reflexiones múltiples que sufriría un modo k (con $k = \omega/c$) del campo electromagnético del vacío confinado entre las dos placas. Consideremos dos placas $a = 1, 2$ en el vacío, paralelas al plano xy y separadas por una distancia L con fronteras interiores situadas en $z_1 = 0$ y $z_2 = 0$. Las placas pueden ser opacas o transparentes, disipativas, inhomogéneas en la dirección z , etc., es decir, tienen una respuesta arbitraria ante la acción de un campo electromagnético. Supongamos que un modo k del campo de vacío incide sobre una de las placas en polarización s , con el vector eléctrico paralelo a la superficie de la placa, o en polarización p , con el vector eléctrico sobre el plano de incidencia normal a la placa, y con un vector de onda $\mathbf{q} = (\mathbf{Q}, \pm k)$. El vector \mathbf{Q} es la componente del vector de onda paralela a la superficie, mientras que $\pm k$ denota sus componentes normales.

La respuesta del material a la acción del campo está caracterizada por las amplitudes de reflexión del campo r_a^s, r_a^p . La presión que ejercen las fluctuaciones del vacío sobre cualquiera de las placas está determinada por la diferencia del flujo de momento asociado a dichas fluctuaciones entre el lado derecho e izquierdo de la placa. Para ello podemos considerar que un fotón del vacío caracterizado por k, \vec{Q} y en polarización α , tiene un momento lineal $\pm \hbar k$ y se mueve con una velocidad con proyección en la dirección z dada por $\pm c \cos \theta = \pm ck/q$, de modo que su contribución al flujo de momento es $\hbar ck^2/q$. El flujo total de momento se obtiene multiplicando esta contribución por la densidad de estados del vacío correspondientes ρ_k y por el número de ocupación de fotones en el estado k a una temperatura T

$$n(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar ck} - 1}, \quad (16)$$

(con $\beta = 1/k_B T$) y sumando sobre k, \vec{Q} y sobre ambas polarizaciones. La densidad de estados del vacío ρ_{k^2} puede obtenerse calculando las funciones de Green, soluciones de la ecuación de Helmholtz inhomogénea que satisface cada una de las componentes del campo,

$$\nabla^2 G_\alpha^{E,B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_\alpha^{E,B}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \quad (17)$$

mediante la relación

$$\rho_{k^2}^\alpha = \frac{1}{2\pi} \text{Im} (G_\alpha^E(\mathbf{r}, \mathbf{r}) + G_\alpha^B(\mathbf{r}, \mathbf{r})), \quad (18)$$

en donde las funciones de Green eléctrica G^E y magnética G^B cumplen con las condiciones de frontera electromagnéticas, es decir, la componente tangencial a la superficie del campo eléctrico (E_{\parallel}) debe anularse, así como la componente normal del campo magnético (B_{\perp}).

La forma explícita de las funciones de Green proviene de una suma de reflexiones múltiples de los fotones del vacío sobre las placas paralelas, lo que da lugar a una expresión con una estructura de serie geométrica. Para la polarización s se tiene

$$\rho_{k^2}^s = \frac{1}{2\pi} \text{Re} \left[\frac{1 + r_1^s r_2^s e^{2ikL}}{k(1 - r_1^s r_2^s e^{2ikL})} \right], \quad (19)$$

independientemente de z . La densidad $\rho_{k^2}^p$ correspondiente a la polarización p , puede derivarse en forma similar; su expresión puede obtenerse reemplazando en (19) los superíndices $s \rightarrow p$. La densidad total de estados está dada entonces por $\rho_{k^2} = \rho_{k^2}^s + \rho_{k^2}^p$.

La combinación de los elementos anteriores nos permite escribir la expresión para la fuerza por unidad de área P que ejerce el campo de vacío sobre la superficie de cualquiera de las placas. Para determinar la presión sobre la superficie externa, basta considerar que $r_s = r_p = 0$. La presión resultante sobre las placas es entonces la diferencia entre las presión externa e interna dada por

$$P = \frac{\hbar c}{2\pi^2} \int_0^\infty dQ Q \int_{q \geq 0} dk \frac{k^3}{q} \text{Re} \frac{1}{k} \left[\frac{1}{1 - r_1^s r_2^s e^{2ikL}} + \frac{1}{1 - r_1^p r_2^p e^{2ikL}} \right]. \quad (20)$$

La fórmula derivada por Lifshitz se recupera introduciendo en (20) las amplitudes de Fresnel en términos de las funciones dieléctricas locales $\epsilon(\omega)$:

$$r_a^s = \frac{k - k_a}{k + k_a} \quad r_a^p = \frac{k_a - \epsilon_a(\omega)k}{k_a + \epsilon(\omega)k}, \quad (21)$$

mientras que para el caso de metales perfectamente reflectores la sustitución $r_a^\alpha = \pm 1$ conduce a la fórmula de Casimir.

En resumen, si se conocen expresiones teóricas o derivadas del experimento para los coeficientes de reflexión, la expresión (20) permite calcular las fuerzas de Casimir en una gran diversidad de sistemas, como aquellos formados por heteroestructuras, torcas de Casimir, esferas dispersivas colocadas sobre superficies planas, estructuras fotónicas, configuraciones con propiedades dispersivas no locales, etc. Las predicciones derivadas de esta teoría son las que realmente se comparan con el experimento. Cabe hacer notar que, en este caso, las predicciones teóricas para el comportamiento de las fuerzas a distancias de unos cientos de nanómetros concuerdan con el experimento con una precisión de alrededor del 1%. Sin embargo, a distancias del orden de una micra, existen discrepancias que

hasta ahora no han sido explicadas. Por otro lado, correcciones a las fórmulas de Lifshitz para distancias muy cortas fueron discutidas hace casi cuatro décadas por Barrera y Gerlach, con el interesante resultado de que éstas son finitas a separación nula. Es claro que se requiere más de mayor investigación para acercarnos más a una descripción realista de las fuerzas de Casimir.

6. Fuerzas de Casimir electrónicas y acústicas.

El formalismo anterior, con algunas modificaciones, ha sido empleado para el cálculo de otras manifestaciones asociadas a fluctuaciones de campos confinados, como son las fuerzas de Casimir derivadas de fluctuaciones electrónicas en un medio conductor, o aquellas provenientes de fluctuaciones del campo de sonido en un líquido. En el caso electrónico, podemos una configuración formada por dos materiales conductores separados por una ranura delgada, de manera que puede ocurrir tunelamiento electrónico entre ambos materiales. La fuerza resultante se deriva calculando el flujo de momento proveniente del traslape de los campos electrónicos evanescentes, cuya función de onda es solución de la ecuación de Schrödinger del sistema. Esta solución está determinada por los coeficientes de reflexión r_1, r_2 asociados a las interfaces entre las zonas conductoras y la región aislante. La fuerza por unidad de área para un campo electrónico de masa m es:

$$\frac{F(L)}{A} = \frac{1}{\pi^2} \text{Re} \int dk \left(E_F - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) k^2 \frac{1}{1 - r_1 r_2 e^{2ikL}}, \quad (22)$$

donde k_F es la energía de Fermi. La fuerza resultante es de carácter atractivo, pero extremadamente pequeña, dado que la masa finita de los electrones restringe considerablemente el alcance de las interacciones. La existencia de este tipo de fuerzas aún no ha sido confirmada experimentalmente.

Un sistema relacionado es el del vacío de Dirac para electrones relativistas en un campo magnético externo constante B . Es bien conocido que en este sistema los electrones ocupan niveles de Landau de energía $E_n^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4 + 2neB$, donde p es la magnitud de su momento, e la carga, y m su masa. Si denotamos por $\Delta E = \sum_n (E_n - E_0)$, donde E_0 corresponde a la situación en ausencia del campo magnético, resulta que el vacío de Dirac desarrolla tensión paralelas y perpendiculares al campo de la forma

$$P_{\parallel} = -\Delta E + \left(\frac{eb}{12\pi^2 m} \right)^2 \quad P_{\perp} = 2\Delta E - \left(\frac{eb}{90\pi^2 m} \right)^2. \quad (23)$$

Otro sistema que puede ser tratado de manera similar es el de las fuerzas derivadas de fluctuaciones acústicas, las cuales son de carácter macroscópico y han sido plenamente verificadas. El dispositivo experimental utilizado es un tanque de agua conectado a bocinas que producen ruido de gran intensidad. En el tanque se colocan placas paralelas reflectoras del ruido, de manera que efectivamente se crea una fuerza entre las placas

proveniente de las restricciones que estas placas imponen sobre los modos acústicos del sistema.

7. Efecto Casimir en sistemas no inerciales.

Existen efectos tipo Casimir que asociados a la distorsión de la densidad espectral de la energía del vacío libre $\rho_E(\omega) \sim \omega^3$, ya no por fronteras físicas, sino por la acción de campos externos, o aún por la deformación del espacio tiempo asociada a sistemas no inerciales. Uno de los casos más simples corresponde al vacío cuántico confinado entre dos placas que se aproximan o alejan entre si con una velocidad constante v . Si ésta es pequeña comparada con la velocidad c de la luz, de modo que la razón $\zeta_0 \equiv v/c \ll 1$, la densidad de energía de Casimir del sistema cuando las placas están separadas por una distancia L_t al tiempo t , tiene la forma

$$\mathcal{E}(L_t) \approx -\frac{\hbar c \pi^2}{720 L_t^4} + \frac{\hbar c \zeta_0^2}{18 L_t^4}, \quad (24)$$

en donde el primer término representa la contribución usual, mientras que el segundo es una corrección de segundo orden que tiende a disminuir la densidad de energía de Casimir del sistema, independientemente de si las placas se separan o aproximan. Esto puede interpretarse como una ausencia de energía asociada a modos cuya frecuencia $\omega \sim c/L_t$ no les ha permitido alcanzar su configuración de estado estacionario. Por tanto, es necesario considerar la existencia de dos vacíos diferentes, $|0\rangle$ y $|0_t\rangle$, asociados a espacios de Fock estático y dinámico, en donde el primero corresponde al estado estacionario de las placas separadas por una distancia L , y el segundo a la configuración instantánea de las placas separadas por una distancia L_t . Los operadores de creación y aniquilación correspondientes, $\{a_k^\dagger, a_k\}$ y $\{b_k^\dagger, b_k\}$, satisfacen las relaciones $\hat{n}_k = a_k^\dagger a_k$, con $a_k|0\rangle = 0$ y similarmente, $\hat{n}_{k,t} = b_k^\dagger b_k$, con $b_k|0_t\rangle = 0$. Un punto crucial es que los modos de frecuencia positiva del vacío dinámico pueden expresarse como una suma de modos de frecuencia positiva y negativa del vacío estático, de modo que lo que corresponde a partículas de energía positiva en un sistema se expresa como una superposición de partículas y antipartículas en el sistema dinámico o, en el caso de los fotones, a una superposición de fotones emitidos y absorbidos. Una consecuencia es que la corrección a la energía por unidad de volumen asociada al movimiento entre las placas está dada por:

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{\hbar c}{2\pi^2 L_t^4} \sum_n \int d^2k \langle 0_t | a_k^\dagger a_k | 0_t \rangle \hbar\omega_{n,\mathbf{k}} = \frac{\hbar c \zeta_0^2}{18 L_t^4}, \quad (25)$$

lo que es consistente con (24).

En general, la ruptura la invariancia de Lorentz del estado de vacío cuántico por movimientos acelerados da lugar a densidades de energía y presiones de Casimir. Si considera-

mos un observador sujeto a una aceleración uniforme a en el vacío cuántico, la densidad de energía por modo tiene la forma

$$\mathcal{E}(\omega) = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/a} - 1} \right). \quad (26)$$

Notamos que la densidad espectral del vacío libre se ve alterada por una distribución de tipo planckiano, similar a la observada para la radiación electromagnética de un cuerpo negro negro con una temperatura equivalente $k_B T = a/2\pi$. Sin embargo, no existe un reservorio de calor a temperatura constante en este sistema. Puede demostrarse que este efecto proviene de la distorsión de la densidad espectral libre por el corrimiento Doppler de las frecuencias observado en un sistema de referencia uniformemente acelerado.

Un fenómeno similar ocurre para las fluctuaciones del vacío en espacio-tiempos curvos. Según el Principio de Equivalencia de la Teoría de la Relatividad General, dado que los sistemas acelerados son localmente equivalentes a la existencia de campos gravitacionales, lo mismo ocurrirá para el campo de vacío sujeto a la curvatura del espacio-tiempo en la vecindad de un cuerpo gravitante. Un caso particular es el conocido fenómeno de la radiación de hoyos negros de Hawking: Si consideramos las fluctuaciones de vacío de un campo cuántico escalar y sin masa alrededor un hoyo negro de Schwarzschild bidimensional de masa M , el valor esperado de la energía por unidad de volumen y por modo es

$$\mathcal{E}(\omega) = 2 \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)^{1/2} \frac{\hbar\omega}{\pi c} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{2\pi\omega/A} - 1} \right), \quad (27)$$

en donde r_0 es la distancia al hoyo negro de un observador en reposo y el parámetro $A = 1/8\pi MG$, con G la constante de gravitación universal (la frecuencia aparece únicamente a la primera potencia porque la métrica considerada reduce en dos la dimensionalidad del espacio-tiempo). De nuevo aparece un distribución planckiana, como si el hoyo negro calentara el vacío a su alrededor. Sin embargo, este fenómeno podría ser una consecuencia del corrimiento Doppler gravitacional de la frecuencias involucradas en la densidad espectral del vacío libre y no necesariamente debido a una evaporación de energía, como normalmente se interpreta la radiación de Hawking.

Un fenómeno que ha cobrado relevancia por hallazgos actuales, es el de las fluctuaciones cuánticas del campo de Higgs en espacio-tiempos con dimensiones espaciales compactas. Si el grado de compactificación es suficiente, las fluctuaciones del campo pueden dar lugar a una tensión que tiende a colapsar dichas dimensiones. Este colapso puede ser evitado por la energía potencial promedio del campo de Higgs, dando lugar a un estado de equilibrio en que ciertas dimensiones pueden alcanzar una dimensión finita. Quizás resultaría pertinente seguir investigando este esquema de compactificación del espacio-tiempo.

8. Perspectivas.

El estudio de las fluctuaciones de energía reviste perspectivas futuras de todos los órdenes. Existen especulaciones de que el campo de punto cero podría representar una componente fundamental o la totalidad de la energía oscura del Universo. También podría jugar un papel como mecanismo de compactificación de dimensiones extra en las teorías de gran unificación. Otra interrogante es si la mecánica cuántica representaría una teoría efectiva, cuyos estados y valores propios serían consecuencia de las interacciones de las partículas con el campo de punto cero. A otro nivel, se requieren investigaciones para tratar de entender cómo influyen las fluctuaciones del vacío cuántico en el diseño y funcionamiento de micro y nanoestructuras. También nos preguntamos si existen fuerzas de Casimir repulsivas derivadas de la geometría. Por lo demás, las predicciones teóricas de las fuerzas de Casimir a temperatura finita, no concuerdan con los resultados experimentales. Algunas de estas perspectivas posiblemente serán desarrolladas teóricamente o verificadas en experimentos desarrollados por la eventual lectora o lector de este capítulo.

9. Algunas lecturas recomendadas

A continuación sigue una lista de publicaciones, recomendadas por el autor, para profundizar en este tema.

1. P. W. Milonni, *The quantum vacuum: an introduction to quantum electrodynamics*. Academic Press Incorporated, New York, 1994.
2. K. A. Milton, *The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy*. World Scientific Publishing Company Incorporated, Singapore, 2001.
3. W. L. Mochán, C. Villarreal, and R. Esquivel-Sirvent, "On Casimir forces for media with an arbitrary dielectric properties," *Revista Mexicana de Física*, vol. 48, no. 4, pp. 339–342, 2002.

10. Referencias

- [1] H. B. G. Casimir, "On the attraction between two perfectly conducting plates," *Proc. K. Ned. Akad. Wet.*, vol. 51, no. 7, p. 793, 1948.
- [2] U. Mohideen and A. Roy, "Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 μm ," *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 21, pp. 4549–4552, 1998.

- [3] L. de la Peña, "Stochastic electrodynamics: Its development, present situation, and perspectives," in *Stochastic Processes Applied to Physics and other Related Fields*, B. Gómez, S. M. Moore, A. M. Rodríguez-Vargas, and A. Reuda, Eds. World Scientific Publishing Co. Pty. Ltd, 1983, pp. 428–581.
- [4] M. Lomnitz and C. Villarreal, "Thermal fluctuations in casimir pistons," in *International Journal of Modern Physics: Conference Series*, vol. 14, no. 01. World Scientific, 2012, pp. 425–434.

La luz sobre el micromundo: Un laboratorio en un chip

Karen Volke, Instituto de Física, UNAM, México

Todo lo que un hombre pueda imaginar, otros podrán hacerlo realidad.
Julio Verne

El término *micro*, inicialmente se refería a aquellos objetos que por su tamaño escapan a la resolución de nuestro ojo desnudo, pero hoy en día la frontera de lo que podemos llegar a *ver* ha sido extendida hasta límites en otros tiempos inimaginables, incluso con la posibilidad de observar procesos dinámicos con resolución temporal. En este vertiginoso avance hacia la exploración de lo *pequeño*, la óptica ha jugado un papel crucial. Esta área de la física, que es de las más antiguas, actualmente vuelve a ocupar un lugar privilegiado entre los temas más efervescentes, con enorme actividad tanto en investigación básica como aplicada. De hecho, las aplicaciones de la óptica trascienden ampliamente las fronteras de la física; pocas áreas científicas han tenido tanto impacto en el desarrollo tecnológico, desde dispositivos de uso cotidiano hasta herramientas fundamentales para otras disciplinas científicas. En este sentido, la labor de un físico especializado en óptica tiene grandes posibilidades de ser multidisciplinaria. Este capítulo está dedicado a describir algunas de las tecnologías ópticas modernas para manipular y observar objetos microscópicos, así como el camino hacia el desarrollo de sistemas *fotónicos* integrados. Tanto los principios físicos como las aplicaciones resultan fascinantes y es, indudablemente, parte importante de la física de frontera en el nuevo siglo.

1. De la miniaturización tecnológica al Lab-en-un-Chip

Las nuevas generaciones de jóvenes no han conocido, mas que si acaso como pieza en algún museo, los antiguos y voluminosos televisores y los primeros teléfonos celulares, o las primeras computadoras que podían ocupar habitaciones completas. Los aparatosos circuitos con alambre y resistencias, los bulbos, los cañones de electrones, todo eso quedó atrás ante los circuitos integrados. Mas aún, la hoy compacta electrónica basada en

silicio pronto quedará obsoleta ante la electrónica con base en grafeno, que promete ser aún más compacta, y la electrónica en sí, será eventualmente reemplazada por la fotónica.

El desarrollo de los circuitos integrados (CI) inició durante la década de los 50 (Jack Kilby compartió el premio Nobel en el 2000 por la invención del primer CI, que data de 1958), aunque salieron al mercado hasta 1961 [1]. Este invento fue una de las innovaciones más revolucionarias en la historia de la humanidad desde el punto de vista tecnológico, y con mayores repercusiones a nivel económico y comercial. De hecho, la evolución de la electrónica hacia la integración y la miniaturización ha sido también un ejemplo a seguir para otras áreas científicas y tecnológicas, sirviendo no sólo de inspiración, sino empujando hacia nuevas técnicas y materiales para los procesos de micromaquinado, que han sido la base para micro-dispositivos modernos. Por ejemplo, un proceso de fabricación típico para circuitos integrados y que resulta extremadamente costeable es la fotolitografía, que involucra varios pasos. Primero, sobre un sustrato u *oblea* de material semiconductor previamente tratado para eliminar cualquier contaminante, se deposita y se fija por calentamiento una película de resina fotosensible, que posteriormente se expone de manera selectiva a la luz mediante la proyección de una mascarilla opaca con la forma o patrón deseado. La frecuencia de la luz que ilumina la mascarilla es tal (generalmente UV) que cambia las propiedades químicas del material expuesto, lo que permite remover por ataque químico, ya sea el material expuesto (fotoresistente positivo) o el que no recibió luz (fotoresistente negativo) para *revelar* así el patrón impreso sobre el sustrato, y que también se fija por calentamiento. De hecho, se puede distinguir entre el micromaquinado de volumen y el de superficie. Mientras que en el primero se usa todo el espesor del sustrato semiconductor y se remueve el material que no se usará, en el segundo se usan capas de material depositado sobre el sustrato en lugar del sustrato en si. Cada capa se puede moldear por separado de manera sucesiva, lo que permite realizar estructuras monolíticas en tres dimensiones. En cualquier caso, lo más caro del micromaquinado es el requerimiento de un *cuarto limpio*, con niveles extremos de pureza del aire, ya que en la impresión de circuitos con dimensiones características de micrómetros o incluso de nanómetros, la presencia de la más nimia partícula de polvo puede arruinar el patrón resultante. Sin embargo, al aplicar la fabricación en serie de grandes volúmenes, el costo de esa facilidad se diluye.

Con estas bases bien establecidas, en los 80 se comenzaron a desarrollar los MEMS, acrónimo en inglés de *sistemas micro-electro-mecánicos*, también conocidos como *micro-máquinas* (en Japón) o *Tecnología de Micro-Sistemas* (en Europa). Estos son dispositivos en miniatura, entre 10 y 1000 micras de tamaño total, con componentes cuyos tamaños van de 1 a 100 micras, que se integran para formar un sistema más complejo, capaz de realizar una función específica. Generalmente se usan como sensores y/o actuadores, incorporados en sistemas de mayor tamaño que realizan funciones de más alto nivel. Han permeado en diversos ámbitos, especialmente en el automotriz, médico, industrial y aeroespacial. Por ejemplo, los sensores de presión e inerciales y los acelerómetros se han incorporado

en los mecanismos que detonan las bolsas de aire en los automóviles [2].

Si bien los MEMS constituyen una tecnología revolucionaria que ya forma parte de nuestra vida cotidiana, aun no han alcanzado el impacto económico proyectado durante su época auge en los 90. Esto es debido a una falta de estandarización, ya que hay componentes de muy diversos tipos para diferentes aplicaciones y los volúmenes de fabricación en serie no resultan en general suficientemente altos como para diluir el costo de producción [2]. Esto conduce, una vez más, a empujar el progreso de los métodos de fabricación y el uso de nuevos materiales. Así, los MEMS que se fabrican con polímeros por medio de procesos como el moldeado por inyección o, más recientemente, la polimerización por absorción de dos fotones [3], pueden resultar más baratos que aquellos que se hacen con estereolitografía (aplicación sucesiva de fotolitografía por capas), o que los fabricados con materiales cerámicos, cuyas propiedades los hacen aptos para ciertas aplicaciones. Pero a fin de cuentas, la incorporación de MEMS en un dispositivo se justifica no sólo con base en la reducción de costos de fabricación, sino también cuando éstos realizan una función novedosa, o cuando la reducción de tamaño es en sí lo que hace útil a un dispositivo. Incluso hoy en día ya se habla de NEMS (sistemas nano-electro-mecánicos) y de nanofotónica. Los NEMS se han materializado desde principios de este siglo, principalmente en forma de *cantilevers*¹.

Otro producto de la miniaturización es la micro-óptica. En este caso, el objetivo fue reducir el tamaño de componentes ópticos, desde lentes, espejos, polarizadores, prismas y divisores de haz, hasta fuentes de luz láser y detectores, ya fuera para formar parte de sistemas de transmisión y procesamiento de información, o para sistemas de imagen y detección capaces de acceder a espacios limitados. Es común encontrar arreglos de microlentes o microespejos, a manera de matriz, que se integran a dispositivos macro, como en el caso de los sistemas de microespejos que se encuentran en algunos proyectores comerciales. En este contexto, el desarrollo de los cristales fotónicos también ha sido importante. éstos son estructuras periódicas, con periodos en el orden de nanómetros, fabricadas a imitación de los cristales semiconductores naturales, pero que en lugar de bandas electrónicas de energías prohibidas y permitidas, tienen *bandas fotónicas*, es decir, rangos de frecuencia de la luz que puede o no propagarse dentro del material. Al introducir *defectos* en un cristal fotónico en forma de cavidades o en forma de líneas, se pueden generar microresonadores o guías de onda a manera de circuitos, respectivamente, que *atrapan* la luz imposibilitada para viajar en el resto del material. La integración de circuitos fotónicos es un área joven, aún en etapa de investigación, pero ya hay dispositivos comerciales como las fibras fotónicas.

¹Un cantilever es una pequeña palanca fija por uno de sus extremos y con una punta muy fina en el otro, perpendicular al brazo de la palanca. Se usa en microscopios de fuerza atómica por ejemplo; la fuerza ejercida por los átomos de la superficie explorada sobre la punta hace que la palanca se deflece y un haz de luz reflejado en su superficie cuantifica la deflexión.

La convergencia entre micro-óptica y MEMS, dio lugar a los primeros MOEMS (acrónimo en inglés de sistemas micro-opto-electro-mecánicos). Muestras de estos dispositivos son los proyectores y pantallas digitales, toda una familia de conmutadores ópticos para telecomunicaciones, filtros sintonizables para sistemas de multiplexado en frecuencia y micro-escáneres, entre otros.

Con la misma filosofía de reescalamiento y con el interés de aplicar el principio al análisis químico, biológico, médico, bioquímico, y biotecnológico, un nuevo protagonista de las miniaturas apareció hacia finales de los 90: los sistemas LOC, acrónimo en inglés de lab-on-a-chip, o en español, *lab-en-un-chip*. Como su nombre lo indica, la idea es llevar la investigación que se realiza en un laboratorio a un dispositivo del tamaño de un chip, capaz de realizar múltiples funciones. Herramientas como la micromanipulación óptica y una diversidad de técnicas modernas de microscopía, que se discutirán con mayor detalle en las próximas secciones, junto con otras técnicas como espectroscopía Raman y micro-fluídica, son bloques constitutivos de los sistemas LOC.

Sin embargo, es importante mencionar que hay muchos retos asociados al micro- y nano-escalamiento, algunos de los cuales fueron señalados desde 1959 por Richard Feynmann, en su célebre, visionaria e inspiradora conferencia "There's plenty of room at the bottom" (Hay mucho lugar al fondo). Ahí Feynmann evocó un divertimento que le fue compartido por Albert Hibbs sobre la posibilidad de *tragarse al cirujano*, es decir, un sistema médico de control remoto que pudiera tratar una enfermedad desde el interior del paciente, y se preguntó por los problemas de construir máquinas en miniatura. Mientras los efectos físicos de gran escala, como la inercia y el peso, pueden resultar insignificantes, los efectos de superficie dominan sobre los efectos de volumen a pequeña escala, como la tensión superficial y la cohesión. Previó también problemas asociados a la estructura *granular* de un medio a escala atómica², y con el escalamiento de materiales magnéticos, que funcionan con base en dominios. Así mismo, reconoció que al trabajar con unos pocos átomos, los efectos cuánticos serán predominantes, por lo que habrá que aplicar las leyes cuánticas en lugar de las clásicas. Todas estas consideraciones son hoy en día muy familiares entre los científicos dedicados a la nanotecnología³. De hecho, la mayoría de los pronósticos de Feynman se han hecho realidad al paso de los años.

²En este punto reconoció que el vidrio y plástico, por ser amorfos, serían mucho mejores candidatos para construir máquinas en miniatura.

³Ver el capítulo "Física a la escala nanométrica" de este libro.

2. La micromanipulación con luz

Tanto desde el punto de vista de la teoría electromagnética, como desde la perspectiva de la mecánica cuántica, se concluye que la luz porta energía y momento lineal, cantidades ambas que se conservan en cualquier proceso de interacción entre radiación y materia. La transferencia de momento lineal se traduce en que la luz es capaz de ejercer presión sobre la materia, aunque es tan débil⁴, que resulta insignificante al actuar sobre objetos macroscópicos. Sin embargo, la presión que ejerce la luz de un láser puede llegar a ser muy importante al actuar sobre objetos suficientemente pequeños. A diferencia de la radiación policromática, como la que recibimos del sol, la luz emitida por un láser es cuasi-monocromática, *coherente*⁵ y altamente direccional, además de ser muy intensa (gran potencia por unidad de área). En óptica nos referimos a este tipo de propagación como un haz de luz. Como ejemplo, en un haz de luz láser de 1 Watt de potencia enfocado a un punto de unas 10 micras de diámetro, la cantidad de fotones que atraviesan esa área por unidad de tiempo es más de nueve millones de veces superior a la cantidad de fotones provenientes del sol que atraviesan un área del mismo tamaño localizada justo en el exterior de la atmósfera terrestre.

Con base en este tipo de argumentos, en 1970 un científico estadounidense llamado Arthur Ashkin diseñó un experimento para medir la presión de radiación ejercida por un láser continuo. Para minimizar efectos de absorción utilizó esferas transparentes de látex suspendidas en agua, con diámetros que iban desde fracciones de micra hasta unas pocas micras. Entonces ocurrió una serendipia (descubrimiento fortuito); no sólo encontró que la presión de radiación propulsaba a las partículas en la dirección de propagación del láser (en ese caso horizontal), como esperaba, sino que también observó que éstas eran atraídas hacia las regiones de mayor intensidad de la luz. Es decir, en lugar de que las partículas fueran cayendo mientras eran empujadas por la luz, permanecían siempre centradas con respecto al eje del haz. Con base en este sorpresivo y excitante hallazgo, Ashkin tuvo la idea de atrapar una partícula utilizando dos haces de luz propagándose en direcciones opuestas, de modo que la presión ejercida por cada uno de ellos se equilibrara entre sí en algún punto [4]. Así nació lo que hoy es una de las áreas de mayor impacto en la ciencia y la tecnología: la manipulación de materia con luz.

En la década de los 70 y principios de los 80, la atención de los científicos que exploraban esta nueva área se enfocó en comprender mejor los fundamentos físicos del fenómeno y en el desarrollo de técnicas para capturar partículas de diferentes materiales, formas y

⁴Por ejemplo, la presión de la radiación solar en la superficie terrestre es aproximadamente 10^{-11} veces menor que la presión atmosférica.

⁵La coherencia es una propiedad de la luz de la que no nos ocuparemos aquí, pero *a grosso modo*, la podemos identificar como una medida de su capacidad para generar interferencia.

propiedades ópticas, no solo en agua sino en aire y en vacío⁶. También comenzó a analizarse la posibilidad de atrapar átomos, aunque eso es en sí mismo, otro tema de la física contemporánea⁷. Sin embargo, uno de los avances más importantes ocurrió en 1986, nuevamente debido a Ashkin y colaboradores (entre ellos Steven Chu, que fue premio Nobel de Física 1997 por sus contribuciones en el enfriamiento y captura de átomos con luz). Esta vez desarrollaron una trampa óptica muy estable, que permitía atrapar a una partícula en las tres dimensiones espaciales con un sólo haz de luz fuertemente enfocado [4]. Mas aún, el año siguiente sucedió a este equipo de trabajo otra serendipia. Al realizar un experimento para manipular cierto tipo de virus, observaron que algunos especímenes caían en la trampa óptica, se agitaban frenéticamente por unos momentos y luego quedaban inmóviles. Un análisis directo ante un microscopio confirmó sus sospechas: la muestra se había contaminado con bacterias que, al ser atrapadas, morían rápidamente a causa de la radiación absorbida⁸. Reemplazaron entonces el láser de luz verde que habían usado (0.514 micras de longitud de onda) por un láser infrarrojo (longitud de onda de 1.064 micras), cuya radiación no causa daño a la materia biológica debido a su baja absorción. Los resultados fueron extraordinarios; consiguieron atrapar organismos vivos como bacterias, levaduras y células de diversos tipos, pero además, las pudieron mantener en la trampa el tiempo suficiente como para observar reproducción celular sin sufrir daño aparente. Por otra parte, combinaron el sistema de enfocamiento del láser y el sistema de observación, hasta entonces independientes⁹, mediante un sólo objetivo de microscopio que cumplía ambas funciones simultáneamente, lo cual simplificó mucho el arreglo experimental [4]. Una vez atrapada, la partícula puede desplazarse con respecto a su entorno, ya sea moviendo el haz de luz o la muestra como un todo; en este caso se habla de *pinzas ópticas*. Una configuración experimental típica de pinzas ópticas se muestra en la figura 1a. Hoy en día se utilizan muchas configuraciones diferentes dependiendo de la aplicación, incluso se puede introducir el láser directamente a un microscopio óptico, lo cual es muy frecuente en aplicaciones biológicas.

¿Pero qué es lo que hace posible que una partícula sea atrapada con luz? El ingrediente clave que permite la captura óptica es que existan gradientes en la intensidad de la luz. Si bien la fuerza óptica sobre una partícula tiene dos contribuciones, una de ellas, llamada fuerza de esparcimiento, solo empuja a las partículas en la dirección de propagación de la luz. La que hace posible atrapar es una componente conservativa, conocida como fuerza dipolar o de gradiente. Para entender esto, hay que notar que la luz en la sección transversal de un láser se distribuye de manera que la intensidad es máxima en el centro y decae rápidamente hacia las orillas, lo que se conoce como haz *Gaussiano*. Si

⁶Resulta mucho más difícil atrapar micropartículas a bajas presiones, ya que el medio juega un papel estabilizador.

⁷Ver el capítulo "Materia ultrafría" de este libro.

⁸A esta muerte provocada por luz le llamaron *optocución*, en analogía con la electrocución.

⁹Las partículas se observaban lateralmente por la luz que esparcían.

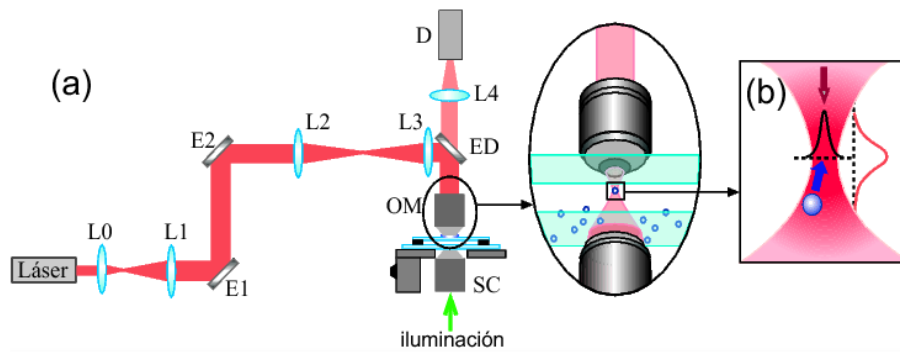


Figura 1: (a) Una posible configuración experimental de pinzas ópticas. El láser es dirigido con los espejos E1-E2 hasta un espejo dichroico ED, que sólo refleja la luz del láser. La muestra está en una base de traslación XYZ. El objetivo de microscopio OM enfoca el láser al mismo tiempo que forma la imagen de la muestra en el detector D (cámara), con ayuda del lente ocular L4. El sistema condensador SC provee la iluminación de fondo necesaria para ver las partículas. Las lentes L0-L1 expanden el haz láser si es necesario, mientras las lentes L2-L3 (opcionales) se usan para crear planos conjugados entre E2 y la abertura posterior del objetivo de microscopio, de modo que se puede mover el haz de luz sobre la muestra controlándolo mediante el espejo. (b) Esquema mostrando los gradientes de intensidad en un haz gaussiano enfocado y la dirección de la fuerza de gradiente (flecha azul).

este haz se enfoca fuertemente, se genera además un gradiente de intensidad en la dirección de propagación, con un máximo en el plano focal (ver figura 1b). Esto provoca que la magnitud de la fuerza óptica dependa de la posición del objeto con respecto a la distribución de luz. Aunque las fuerzas ópticas se pueden entender con base en el intercambio de momento lineal entre luz y materia, el origen fundamental de la interacción es eléctrico. Una partícula dieléctrica neutra en presencia de un campo eléctrico se polariza, ya que los centros de carga positiva y negativa se desplazan entre sí, induciendo un dipolo o campo eléctrico en el interior de la partícula, opuesto al campo externo. Si el campo externo no es uniforme, la partícula tenderá a ubicarse en una posición que minimice el campo total (externo más interno), pues así la energía de interacción del sistema también es mínima. Esta posición corresponde a un punto de equilibrio estable y depende de la polarizabilidad de la partícula en el medio, o en términos ópticos, de su índice de refracción con respecto al del medio. Lo anterior queda resumido en una expresión bastante simple para la fuerza de gradiente [4]:

$$\vec{F} = \frac{3Vn_m}{2c} \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \right) \nabla I(\vec{r}), \quad (1)$$

donde V representa el volumen de la partícula, c la velocidad de la luz en vacío, $I(\vec{r})$ la intensidad como función de la posición y $n = n_p/n_m$ el índice de refracción relativo,

siendo n_m el índice del medio y n_p el de la partícula. Si $n_p > n_m$, como en el caso de una esfera de latex en agua, la fuerza gradiente conducirá a la partícula hacia las regiones de máxima intensidad. Por eso en las pinzas ópticas las partículas se atrapan en la región focal. La magnitud de la fuerza de gradiente es suficiente para equilibrar el peso de la partícula y la fuerza de esparcimiento. Por el contrario, si $n_p < n_m$, como sería el caso de una burbuja de aire en agua, la fuerza de gradiente se invierte en dirección, dando como resultado que la partícula trate de escapar de las regiones de máxima intensidad. Este tipo de objetos se pueden atrapar con distribuciones de luz en las que se alternen regiones de máxima intensidad con regiones oscuras. De hecho, el reto de atrapar partículas con diferentes propiedades ópticas (metálicas, absorbentes, birrefringentes, etcétera), así como la posibilidad de atrapar varias partículas simultáneamente, estimularon el uso de diferentes distribuciones de luz. Aunque los procesos físicos involucrados y su descripción depende de las propiedades del objeto, un resultado general es que las fuerzas ópticas son directamente proporcionales a la potencia total del haz de luz sobre la muestra. Si bien la potencia mínima necesaria para atrapar una partícula depende de su tamaño¹⁰, de sus propiedades y de las demás fuerzas involucradas en el sistema (como el peso y el arrastre hidrodinámico), generalmente unos cuantos miliwatts son suficientes. Las fuerzas generadas por la luz son del orden de piconewtons.

La posibilidad de generar diferentes configuraciones en la distribución espacial de la luz ha permitido desarrollar una gran versatilidad en las trampas ópticas modernas, dando un nuevo y magnífico potencial de aplicaciones [5]. Por ejemplo, por medio de interferencia es posible obtener distribuciones extendidas de franjas o patrones de luz con periodicidad en dos o tres dimensiones. Estas distribuciones periódicas son conocidas como *redes ópticas*, y permiten atrapar un gran número de partículas simultáneamente e incluso manipularlas controlando la fase de las ondas que interfieren. Las partículas se pueden atrapar ya sea en los máximos o en los mínimos de intensidad, dependiendo de su índice de refracción y de su tamaño relativo con respecto al periodo. Así se han desarrollado técnicas que ofrecen importantes aplicaciones prácticas, tales como la separación y organización de partículas dentro de una mezcla polidispersa [6].

Otra forma de moldear un haz de luz es utilizando hologramas generados por computadora (HGC). Los hologramas son básicamente rejillas de difracción que codifican la información necesaria para que la luz que las atraviesa (hologramas de transmisión) o que se refleja en ellas (hologramas de reflexión) sea modulada en amplitud y/o en fase y se redistribuya de acuerdo a una configuración deseada. Mas aún, en la actualidad existen unos dispositivos llamados moduladores espaciales de luz (MEL), que son pequeñas

¹⁰Para objetos de mayor tamaño la descripción teórica de la fuerza óptica es más compleja; ésta ya no resulta proporcional al volumen sino a la superficie de la partícula, lo que implica que para equilibrar el peso se necesitarían potencias cada vez más altas, y esto constituye un límite al tamaño de objetos que se pueden atrapar.

pantallas de cristal líquido (también las hay de transmisión y reflexión) que se controlan mediante una computadora y en las cuales se pueden desplegar los HGC, pero con la gran ventaja de que pueden reconfigurarse de manera interactiva. Esto se conoce como holografía dinámica, y cuando se usa para redistribuir la luz que llega a una trampa óptica, se habla de pinzas ópticas holográficas o micromanipulación dinámica [5, 7]. En la fila superior de la figura 2 se muestran simulaciones numéricas de algunas distribuciones de intensidad que se han utilizado para manipulación, mientras que en los cuadros inferiores se muestran imágenes de partículas atrapadas en tales distribuciones.

Finalmente, otra técnica de micromanipulación dinámica es mediante las llamadas *trampas de haz compartido* (beam sharing) [4, 5]. En este caso se utilizan moduladores acusto-ópticos, o bien espejos controlados por galvanómetros, que pueden desviar el haz de luz incidente y recorrer diferentes posiciones en una secuencia determinada que se repiten con frecuencias hasta del orden de decenas de kHz. En esta forma, el haz de luz *visita* una cierta posición varias veces por segundo y una partícula puede ser atrapada ahí (siempre que su tiempo de difusión sea mayor que el tiempo entre cada visita del haz). Así, varias partículas se atrapan de manera simultánea compartiendo el mismo haz de luz. Aunque las desviaciones angulares son pequeñas, la precisión y rapidez que se obtienen con este método lo convierten en la mejor opción para aplicaciones en biología donde se requiere más de una trampa, como en algunos estudios de motores moleculares [5].

Cuando se atrapan varias partículas simultáneamente hay un efecto de interacción entre ellas, mediada por la luz, que se ha llamado ‘enlace óptico’ [8], al margen de otros tipos de interacciones que puedan ocurrir por efectos térmicos e hidrodinámicos, cargas superficiales, interacción con la superficie, etcétera. Si el haz de luz utilizado en las pinzas ópticas tiene un diámetro de varias veces el tamaño de una partícula, es posible atrapar varias partículas al mismo tiempo en la sección transversal del haz, que en el caso de microesferas se distribuyen en una red hexagonal [8]. Por otra parte, más recientemente se observó que en una trampa de haces contra-propagantes (que no interfieren entre sí), se llegan a formar cadenas de partículas atrapadas a lo largo del eje común de propagación [5]. Éstas tienen su origen en las modificaciones de la distribución de luz incidente sobre cada partícula debido a la presencia de sus vecinas. Es decir, una partícula puede actuar como micro-lente y enfocar la luz que incide sobre ella, lo que sirve como trampa para una segunda partícula y viceversa. Incluso con un solo haz de luz en dirección vertical se ha observado también el apilamiento de partículas a lo largo del eje de propagación. Así, es posible distinguir entre el enlace óptico axial y transversal, pero ambos se deben a la interacción mutua entre partículas y con el campo luminoso. Aunque conceptualmente y de manera cualitativa el enlace óptico está entendido, su estudio cuantitativo es todavía un problema abierto en el que varios grupos se encuentran trabajando [5].

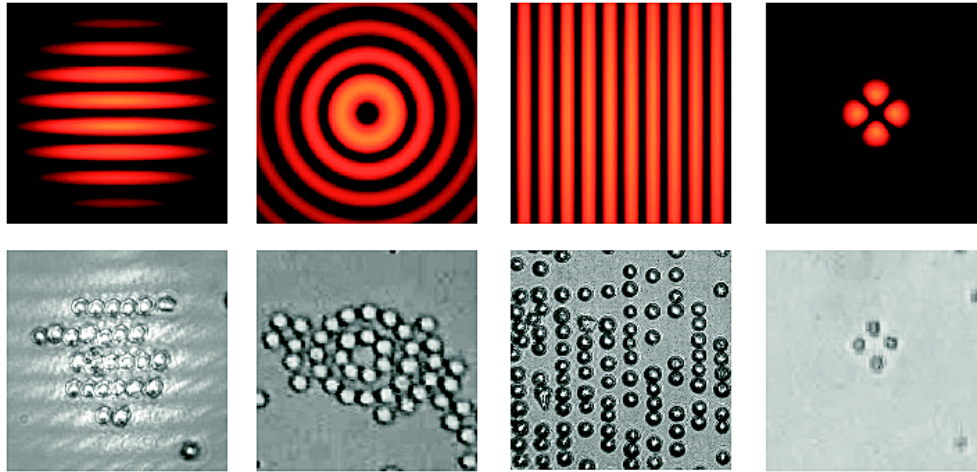


Figura 2: En la fila superior se muestran simulaciones de algunas distribuciones transversales de intensidad generadas con diferentes técnicas ópticas y en la fila inferior fotografías experimentales de su correspondiente aplicación en la captura óptica de micro-partículas. Las partículas se acomodan de acuerdo con la distribución de intensidad de cada haz.

Las técnicas de micromanipulación se pueden usar también como herramientas para investigaciones en otra áreas de la física. Por ejemplo, en física estadística las trampas ópticas han permitido hacer modelos experimentales de sistemas mecánicos estocásticos en condiciones controladas, que logran tanto confirmar predicciones teóricas como investigar nuevos fenómenos. Por mencionar algunos, en 2010 se logró medir la velocidad *instantánea* de una partícula browniana, lo que posibilita estudiar su movimiento en un régimen balístico y fuera de equilibrio, antes de alcanzar el régimen difusivo [9]. Para esto se usó una trampa de haces contra-propagantes en a una cámara con vacío parcial para atrapar una partícula en condiciones de baja presión. Al desviarse de su posición de equilibrio, la partícula defleca los haces de luz, de modo que su posición puede determinarse midiendo la deflección de uno de los haces como función del tiempo. Además, para medir directamente la velocidad, esta señal se dividió en dos, de tal forma que una mitad llega con un pequeño retraso respecto a la otra. Así, se pudo verificar que la distribución de velocidades instantáneas de la partícula satisface la estadística de Maxwell-Boltzmann. Mas aún, estos resultados constituyeron una verificación experimental del teorema de equipartición de la energía para una partícula Browniana.

Otro ejemplo es el estudio del escape inducido por ruido térmico de una partícula Browniana que se encuentra en un pozo de potencial, conocido como el problema de Kramers. Este tipo de estudios es importante por su relación con diferentes fenómenos físicos que involucran el escape de estados metaestables (como difusión en sólidos, doblamiento

de proteínas, la dinámica de una reacción química en presencia de un solvente) superando una barrera de potencial. La teoría de Kramers establece que la tasa de escape depende de la energía potencial y del coeficiente de difusión de la partícula, relacionando la probabilidad de que ocurra el escape con algunos parámetros experimentales. Para modelar esto, se usó un sistema de dos trampas ópticas contiguas que actuaban como pozos de potencial separados por una barrera. Aplicando la teoría de Kramers se logró obtener un mapa tridimensional de energía potencial de la doble trampa óptica, midiendo el tiempo de permanencia de la partícula en cada posición. Por otro lado, el mismo tipo de trampa biestable sirvió también para estudiar experimentalmente el fenómeno conocido como resonancia estocástica [4].

La micromanipulación óptica también se ha usado para la verificación experimental de modelos teóricos. Tal es el caso del modelo de rueda dentada (en inglés: ratchet), en la misma línea de investigación de sistemas de dinámica compleja, que permite dilucidar el mecanismo mediante el cual las proteínas motoras transportan vesículas en el interior de las células eucariontes, además de que ha encontrado también aplicaciones en el estudio del transporte y segregación en medios fluidos y granulados [10]. Éste consiste en estudiar la dinámica de un objeto inmerso en una región espacial con variaciones periódicas de energía potencial, que a su vez son moduladas en el tiempo por otra función periódica, pero alguno de los dos, ya sea el potencial espacial o la función de modulación temporal, exhibe algún tipo de asimetría (de ahí el nombre de rueda dentada). La fuerza neta aplicada al sistema tiene promedio temporal cero, y sin embargo, debido a la asimetría, bajo ciertas condiciones es posible activar un movimiento del objeto en una dirección preferencial. Las condiciones necesarias para activar este transporte dependen de varios factores: las características del potencial espacial, la función de modulación temporal, las propiedades del objeto que se estudia y su interacción con el medio en el que se encuentra (si el objeto se encuentra o no en un régimen sobre-amortiguado, o bien, si el sistema es estocástico o determinista). Las posibilidades que ofrecen las trampas ópticas para estudiar diferentes variantes del modelo de rueda dentada son extremadamente versátiles [4, 11].

Por otra parte, dentro de la propia óptica, la micromanipulación ha permitido explorar las propiedades dinámicas de ciertos tipos de haces de luz, como aquellos que son portadores de momento angular, además del momento lineal, y por tanto son capaces de provocar torcas sobre la materia [5, 7, 12]. Un caso relativamente conocido es el de la luz circularmente polarizada, que puede provocar una torca sobre objetos birrefringentes¹¹, atribuida a la transferencia de espín de los fotones. Pero también hay haces de luz que tienen una fase rotante y frentes de onda helicoidales (como sacacorchos); son portadores de *momento angular orbital*. Su intensidad es nula en el eje de rotación y generalmente tienen

¹¹Esto fue demostrado por primera vez por Richard A. Beth en 1936 en un experimento extraordinario a escala macroscópica.

una distribución de intensidad transversal formada por uno o varios anillos concéntricos (ver figura 2). Entre éstos están los llamados haces Laguerre-Gaussianos y haces Bessel; ambos pueden provocar la rotación de micro-partículas orbitando con respecto al centro del haz, en contraste con la rotación provocada por luz con polarización circular, que siempre es con respecto a un eje interno de la partícula. Estos efectos, junto con otros mecanismos de rotación controlada basados en la rotación de distribuciones de intensidad por interferencia, holografía dinámica o trampas de haz compartido, son candidatos viables para manejar elementos de micro-máquinas [7, 12]. Incluso hay ya micro-rotores que operan con base en presión de radiación asimétrica (como en un molino) o por transferencia de espín, y se han usado como bombas en sistemas LOC (lab en un chip) y para hacer estudios de microreología [7].

Otra área donde las pinzas de luz también tienen una incidencia muy importante es en la física de coloides y materia blanda. Por ejemplo, para estudiar interacciones hidrodinámicas, o electrostáticas en el caso de coloides cargados, procesos de cristalización y transiciones de fase, crecimiento de monocapas, etcétera [5]. En fin, así como los anteriores, existen innumerables ejemplos de sistemas físicos que se han podido investigar gracias a la micromanipulación óptica. De hecho, algunas de sus aplicaciones más excitantes están relacionadas con el estudio de sistemas biológicos [4, 13], como se discutirá en la sección 4. La intención aquí ha sido únicamente dar una idea de la riqueza de esta herramienta y las posibilidades que ofrece.

Para finalizar esta sección, no se puede dejar de mencionar una nueva herramienta de micromanipulación que se desarrolló durante la primera década del nuevo siglo: las pinzas plasmónicas, basadas en la generación de plasmones de superficie [14]. Los plasmones de superficie son ondas que se generan en medios cargados eléctricamente (plasma); la oscilación colectiva de las cargas se propaga como lo hace una onda en la superficie del agua. En el caso de los plasmones, la fuente que excita la perturbación es un campo óptico *evanescente*, es decir, ondas de luz que se propagan a lo largo de una superficie en la que ha ocurrido reflexión total interna (RTI), *confinadas* muy cerca de ésta, ya que su amplitud decrece exponencialmente al alejarse de ella. Si la superficie en la que ocurre RTI está recubierta por una fina capa de metal, el campo eléctrico de la onda evanescente provocará la oscilación de los electrones de conducción en la superficie o, en otras palabras, excitará plasmones de superficie, lo que resulta en una amplificación del campo. Esto sólo ocurre si el campo eléctrico incidente tiene una componente paralela a la dirección de propagación de la onda evanescente, lo que corresponde a una polarización tipo p (campo eléctrico paralelo al plano de incidencia), también denotada como TM (transversal magnética).

Así, el campo evanescente (en el caso de que no exista recubrimiento metálico) o el campo generado por los plasmones, pueden atraer partículas neutras hacia la superficie,

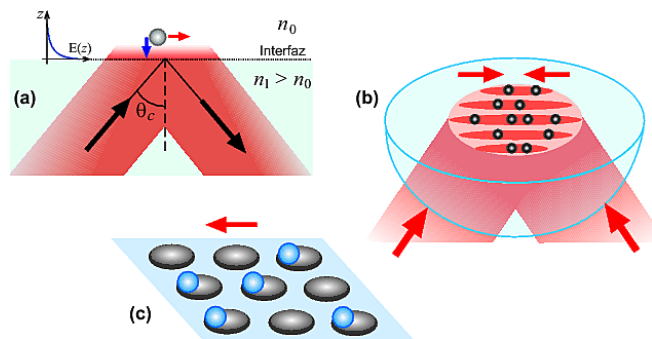


Figura 3: (a) La flecha azul indica la dirección de la fuerza de gradiente sobre la partícula mientras que la roja indica la dirección de la fuerza de esparcimiento (presión de radiación) ejercidas por la onda evanescente en la superficie. La curva en el lado izquierdo ilustra el gradiente de intensidad de la onda evanescente. (b) Configuración de luz incidente estructurada y haces contra-propagantes en una trampa con ondas evanescentes. (c) Ejemplo de confinamiento tridimensional usando parches metálicos en una superficie para generar plasmones localizados.

donde la intensidad es mayor, y empujarlas en la dirección de propagación de la onda superficial (figura 3a). El confinamiento con plasmones es mucho mayor que el que se puede obtener con ondas evanescentes por la amplificación del campo eléctrico. De este modo las partículas pueden ser guiadas a lo largo de la superficie, pero no están confinadas. Para lograr atraparlas, se pueden usar ondas evanescentes contra-propagantes con una estructura de franjas de interferencia en la dirección perpendicular a la propagación de las ondas superficiales [6], como se ilustra en la figura 3b, o bien con otro tipo de distribución de intensidad que facilite el confinamiento. Pero con los plasmones se puede llegar aun más lejos, al generar *plasmones localizados*. Esto es, si en lugar de una capa metálica homogénea se imprimen en la superficie algunos *parches* de metal con formas determinadas, el campo eléctrico de los plasmones quedará confinado en las tres dimensiones espaciales, muy cerca del parche, y así se obtiene la captura tridimensional de partículas [14] (figura 3c). Cabe mencionar que la geometría *planar* del confinamiento por onda evanescente o por plasmones, tiene la ventaja de que se puede incorporar más fácilmente a sistemas integrados del tipo LOC, y el haz de luz que se utiliza en estos casos no necesita estar focalizado. Inicialmente se pensó que este mecanismo permitiría atrapar partículas nanométricas, por el hecho de que el gradiente de intensidad se localiza en una región mucho más pequeña que la que se puede generar enfocando una onda de luz propagante. Sin embargo, se encontró que los efectos térmicos debidos al calentamiento del medio causado por los plasmones afectan mucho más a los objetos nanométricos, impidiendo su captura, pero condujeron exitosamente a una nueva área: la termoplasmónica. Aún así, estas investigaciones continúan su curso como un tema de frontera; recientemente por fin se han logrado atrapar objetos nanométricos con nanoantenas plasmónicas, que se forman

con la combinación adecuada de dos o más elementos metálicos [14].

3. Retos y avances en las técnicas de detección

Retomemos por un momento la conferencia “There’s plenty of room at the bottom”. Feynman señaló la necesidad de mejorar el microscopio electrónico, que en ese momento era la mejor herramienta disponible para *ver* a escalas microscópicas. El mensaje más importante es que no basta con *hacer* objetos pequeños, ni siquiera con poder *manipularlos*; para que esto tenga sentido también es necesario *observarlos* con suficiente detalle. La buena noticia es que este llamado fue atendido, no únicamente para el microscopio electrónico, que tiene algunas limitaciones respecto al tipo y preparación de las muestras a observar, sino para una miríada de técnicas de microscopía que pueden aplicarse casi a cualquier tipo de objeto, y en particular a muestras biológicas. Aquí concentraremos la atención en algunas de las técnicas ópticas, que han evolucionado dramáticamente en las últimas décadas.

Si bien hoy contamos con herramientas de imagen con una resolución que permite incluso detectar átomos individuales, cerca del 80 % de la investigación en el área de ciencias biológicas se sigue realizando con técnicas de microscopía óptica, debido a que las células son relativamente transparentes en la región óptica del espectro [15] (luz visible e infrarrojo (IR) cercano). De hecho, hay técnicas ópticas muy bien establecidas para visualizar objetos transparentes, que no trataremos aquí, como la microscopía de contraste de fase o la interferometría de contraste diferencial, también conocida como microscopía de Nomarski. Pero lo que hace tan valiosos los métodos ópticos de imagen en el campo de la biología es que resultan *no-invasivos*, en el sentido de que causan daños mínimos o nulos a las muestras estudiadas, permitiendo incluso el estudio de muestras *in vivo*. Sin embargo, una de las limitaciones históricas de la microscopía óptica había sido el llamado *límite de difracción*, es decir, la imposibilidad de discernir dos puntos que se encuentren más próximos entre sí que aproximadamente la mitad de la longitud de onda de la luz utilizada, lo cual fue señalado por Ernst Abbe desde 1873. De hecho, el diámetro FWHM¹² del mínimo *spot* al que se puede focalizar una onda de luz propagante, de acuerdo con la condición de Abbe, es [16] $\Delta r \sim \lambda / (2n \sin \alpha)$ en el plano focal y $\Delta z \sim \lambda / (n \sin^2 \alpha)$ a lo largo del eje óptico, donde λ , α y n denotan, respectivamente, la longitud de onda, el ángulo de apertura de la lente y el índice de refracción del medio en que se encuentra la muestra. Estas resoluciones no son suficientes para acceder a los constituyentes celulares, como organelos, proteínas, lípidos o ácidos nucleicos, cuya estructura y/o función son las interrogantes que desea contestar la biología moderna.

¹²Acrónimo de Full Width Half Maximum, que indica un criterio para considerar el ancho de una función que exhibe un máximo principal

El reto de la microscopía óptica es, de alguna forma, vencer el límite de difracción en términos de resolución espacial. Nos avocaremos entonces a los avances que se han hecho en esta dirección en las últimas décadas. Se trata de técnicas de *superresolución* y básicamente se pueden separar en dos tipos, que pueden utilizarse de manera combinada [17]. El primero es conocido como microscopía óptica de barrido en campo cercano (NSOM o SNOM por sus siglas en inglés: near-field scanning optical microscopy), y el segundo, por contraste, es conocido como microscopía de superresolución en campo lejano.

La NSOM forma parte de un grupo de técnicas orientadas al análisis de superficies: la microscopía de pruebas por barrido (SPM, scanning probe microscopy). A este grupo pertenecen, por ejemplo, el microscopio de barrido y tunelamiento (STM), el microscopio de fuerza atómica (AFM), el de fuerza magnética (MFM), el de fuerza química (CFM), entre otros [18]. Sin embargo, a diferencia de éstos, que permiten principalmente obtener detalles topográficos, la NSOM presenta algunas ventajas asociadas con la información que se puede obtener por medios ópticos, como datos espectroscópicos, datos con resolución temporal, alto contraste, características relacionadas con la polarización, imágenes de fluorescencia, etcétera. Por otra parte, aunque la NSOM no alcanza una resolución espacial tan elevada como otros instrumentos de la familia de SPM, supera por un orden de magnitud el límite de difracción de las imágenes ópticas convencionales, y se puede utilizar en condiciones menos demandantes en cuanto a la preparación de la muestra.

La idea de vencer el límite de difracción utilizando la luz en campo cercano se le ocurrió a Edward Synge en 1928, pero en ese entonces no había la tecnología para llevarla a la práctica. El principio físico es muy simple. El campo óptico inmediatamente posterior a una pequeña abertura en una pantalla opaca está constituido por ondas propagantes y evanescentes, pero el campo evanescente decae exponencialmente con la distancia, y por lo tanto, la luz transmitida aun a distancias del orden de la longitud de onda, ya es sólo propagante y será muy afectada por la difracción. Específicamente, considerando una abertura circular de radio $a < \lambda$, la luz en campo cercano permanece prácticamente colimada dentro de una distancia d tal que $(d/a) \ll 1$. Así, al iluminar una muestra con esta abertura, la resolución en campo cercano estará únicamente limitada por el tamaño de la abertura, y no por la longitud de onda de la luz [19]. El contraste en la imagen se obtiene, por ejemplo, por variaciones en índice de refracción, estructura química, estrés local, absorción, fluorescencia, etcétera. Por supuesto, para examinar una muestra con este principio es necesario, además de una abertura de semejantes dimensiones, poder recorrer la muestra para ir formando una imagen bidimensional extendida. Fue hasta 1984 cuando un grupo dirigido por Dieter Phol logró aplicar estos principios en la región óptica del espectro, aunque los primeros instrumentos funcionales aparecieron después de 1992, cuando la tecnología de barrido ya se había desarrollado (trasladores piezoeléctricos y mecanismos de retroalimentación para mantener la punta a una distancia fija de la superficie). El mayor reto tecnológico en el NSOM sigue siendo la abertura, que en la mayoría de los instrumentos actuales consiste en una fibra óptica monomodo que termina en

una punta con forma de cono truncado. Alrededor de la abertura se deposita un recubrimiento metálico, que hace las veces de la pantalla opaca. Recientemente se han utilizado también puntas muy finas de metal, que incluyen las llamadas nano-antenas, y hay grupos investigando la posibilidad de aumentar el confinamiento y la intensidad de la señal colectada excitando plasmones de superficie.

Hay diferentes configuraciones de NSOM. En el modo de iluminación la punta se usa para iluminar mientras que la luz transmitida a través de la muestra se colecta en campo lejano mediante un objetivo de microscopio de alta apertura numérica. Otra posibilidad es iluminar con condiciones de campo lejano y usar la punta para colectar la luz transmitida (modo colección). Si la muestra es opaca se puede usar la misma punta para iluminar y colectar la señal reflejada (modo de abertura compartida). Finalmente, en algunos arreglos se usa la punta para colectar una onda propagante como resultado de frustrar una onda evanescente producida en la muestra por RTI, pero este instrumento es conocido mas bien como microscopio de tunelamiento fotónico. La NSOM se ha usado para realizar estudios biológicos de detección de una sola molécula, incluyendo experimentos de difusión en una interfaz que revelan aspectos novedosos de la dinámica celular, así como para investigar la membrana de células y proteínas. Para esto se puede combinar la NSOM con espectroscopía Raman o microscopía de fluorescencia. Aunque la NSOM *per se* no requiere características especiales de la muestra a analizar, su desventaja principal es que sólo puede utilizarse para la inspección de superficies. Cabe mencionar que en la última década se están desarrollando estrategias de superresolución en campo cercano basadas en el uso de *super-lentes* con base en la *refracción negativa*, pero esto aún está lejos de convertirse en instrumentos prácticos [19].

En cuanto a las técnicas de superresolución de campo lejano, aplicadas para obtener imágenes de volumen, hay dos objetivos: incrementar la resolución axial (disminuir Δz) y la resolución transversal o lateral (disminuir Δr); y la consecución de cada uno de ellos es independiente del otro. Hasta la década de los 90, las estrategias ópticas que habían logrado mejorar la resolución en z eran la microscopía confocal y la de fluorescencia multifotónica. La primera se basa en usar fuentes puntuales tanto para la iluminación como para la detección (utilizando *pinholes*), lo cual permite capturar únicamente la luz proveniente del plano focal y reduce así Δz en un factor de aproximadamente $\sqrt{2}$. En la segunda, se utilizan dos (o más) fotones que se absorben simultáneamente para excitar un fluoróforo unido al espécimen de interés; al ser un efecto no-lineal, esto ocurre sólo en la región de máxima intensidad, es decir en el plano focal. Sin embargo, los dos fotones tienen una frecuencia de la mitad de la necesaria para excitar al fluoróforo, se trata de luz IR, y por tanto, no produce una mejora sustancial en la resolución en términos de λ .

Un avance más significativo se hizo a mediados de los 90 por el grupo de Stefan Hell, con el microscopio 4π (o simplemente 4Pi) [16, 20]. La idea es generar un frente de onda lo más cercano posible a una esfera o, en otras palabras, aumentar la recolección de las frecuencias espaciales más altas en el espectro de Fourier de la imagen, que contienen la información de los detalles más finos del objeto. Para esto Hell propuso aumentar

la apertura numérica del sistema usando dos objetivos yuxtapuestos a ambos lados del espécimen, para expandir la abertura del ángulo sólido (el nombre 4Pi viene del ángulo sólido de una esfera completa). No hay distinción entre iluminación y colección de luz en esta configuración, de hecho, se utiliza luz láser y los frentes de onda producidos se suman de manera coherente en un punto focal común, cuya dimensión en eje es $\Delta z \sim \lambda/3n$, incluso menor que Δr . Pero aún en las versiones más recientes de estos instrumentos se logra como máximo un ángulo de apertura de $\alpha \approx 74^\circ$, que todavía dista bastante del ideal de 90° , y el precio a pagar por esto es que el spot focal exhibe dos lóbulos, arriba y abajo del plano focal, que deterioran la imagen. Para minimizar este efecto, una alternativa es utilizar además excitación de dos fotones o una configuración confocal, y las contribuciones remanentes de los lóbulos (si las hay) se remueven al procesar la imagen. Con el microscopio 4Pi se han obtenido imágenes tridimensionales de células con resolución axial de entre 80 y 150nm.

Otras técnicas similares, que se usan con iluminación de campo extendido, son las de imágenes por interferencia (denotadas genéricamente como $I^n M$), que también consisten en el acoplamiento de dos objetivos opuestos para producir interferencia de la iluminación coherente [20]. En los sistemas $I^2 M$ se obtiene una señal de fluorescencia a través de los dos objetivos y, cuidando que ambas señales hayan recorrido trayectorias ópticas idénticas, se recombinan en el detector. La interferencia de las señales produce un patrón característico del que se extrae información con alta resolución axial. El plano focal se va moviendo para obtener una serie de imágenes a lo largo de z . En la técnica $I^3 M$ se genera un patrón de ondas estacionarias en z , y se obtiene directamente una serie de imágenes en distintos planos z , correspondientes a los antinodos. Por utilizar iluminación de campo extendido, éstas son más rápidas que la de 4Pi, pero esta última requiere menor procesamiento de los datos extraídos, además de que la onda estacionaria se degrada en la interacción con tejido grueso. En cualquier caso, ninguna de las anteriores representó mejoría en cuanto a la resolución lateral.

Por otro lado, los dispositivos de superresolución de campo lejano que han logrado incrementar la resolución lateral se pueden clasificar en dos grupos, ambos basados en el uso de marcadores fluorescentes, por lo que se conocen también como técnicas de superresolución funcional [17, 20]. Mas aún, un requisito fundamental para todas ellas es que las transiciones fluorescentes sean *reversibles*, ya que se recurre a una modulación temporal de la transición entre dos estados moleculares de un fluoróforo. Aunque hay muchas variantes, para no extender innecesariamente la discusión, sólo detallaremos en un ejemplo de cada grupo.

Dentro del primer grupo tomaremos como ejemplo el método de ‘Desactivación por Emisión Estimulada’ (STED: stimulated emission depletion) [16]. El común denominador de estas técnicas es que, además de modular temporalmente las transiciones fluorescentes, se modulan espacialmente usando iluminación estructurada. El principio de STED, también introducido por Stefan Hell, consiste en iluminar la muestra con un spot (limitado por difracción) que provoca la transición a un estado excitado B (‘brillante’) de todos

los marcadores fluorescentes dentro del área en que la intensidad de la luz de excitación supera un valor umbral. Inmediatamente después, se ilumina la muestra con un haz en forma de dona (como un Laguerre-Gaussiano), con un nodo de intensidad en el centro. Éste provoca el decaimiento por emisión estimulada (desactivación) de los marcadores de la periferia al estado A ('oscuro'), dejando en el estado B solo aquellos que se encuentran muy próximos al nodo central. Así se consigue un spot brillante con resolución lateral muy por debajo del límite de difracción (figura 4). Para inducir las transiciones se usan dos láseres pulsados sincronizados, con duración de pulsos entre 10 y 300 ps, siendo menor la duración del pulso de excitación. El láser de desactivación se conoce como haz STED y su longitud de onda está ligeramente desplazada hacia el rojo. La formación de la imagen se obtiene realizando un barrido sobre la muestra, repitiendo el procedimiento, por eso es importante que las transiciones sean reversibles. Pero para que este mecanismo sea posible, es necesario tener en cuenta los tiempos de vida de las moléculas fluorescentes en los estados A y B, así como la intensidad necesaria para inducir las transiciones.

Cuando una molécula fluorescente es iluminada para fotoactivar su transición de un estado A a uno B, la probabilidad de que permanezca en A decrece exponencialmente al incrementar la intensidad de la luz de excitación. La *intensidad de saturación*, I_s , es el umbral mínimo para inducir la transición en un número suficiente de moléculas (por ejemplo, cuando al menos el 50 % pasan de A a B). A medida que la intensidad incidente incrementa por sobre el valor de I_s , también lo hace la probabilidad de que una mayor cantidad de moléculas efectúen la transición. Por supuesto, lo mismo aplica para la transición inversa de B a A. Entonces, ambos láseres deben tener intensidades superiores a I_s , siendo más crucial la intensidad del láser de STED, puesto que ésta determina el tamaño de la región final iluminada mediante la siguiente relación [16]:

$$\Delta r = \frac{\lambda}{2n \sin \alpha \sqrt{1 + (I_{max}/I_s)}}, \quad (2)$$

donde I_{max} denota el máximo de la distribución de intensidad del laser de STED. Nótese que, en principio, el tamaño del spot se puede reducir tanto como se desee aumentando el valor de I_{max} ; si $I_{max} = 0$ la Ec. 2 corresponde al límite de difracción de Abbe. La longitud de onda y duración del pulso STED se escogen de acuerdo al máximo de emisión y la I_s del fluoróforo utilizado. A las intensidades del láser STED (a menudo mayores que $250 MW/cm^2$), los fluoróforos son desactivados de manera prácticamente instantánea y la emisión de fluorescencia se registra con un fotomultiplicador [20].

Las técnicas que comparten principios similares al STED han sido generalizadas bajo el acrónimo de RESOLFT (reversible saturable (or switchable) optical fluorescence transitions) [16, 17, 20]. Las diferencias entre ellas recaen en las estructuras específicas de la iluminación, en el uso de diferentes tipos de fluoróforos¹³ y en algunos aspectos prácticos

¹³Hay fluoróforos con intensidades de saturación considerablemente menores que otros.

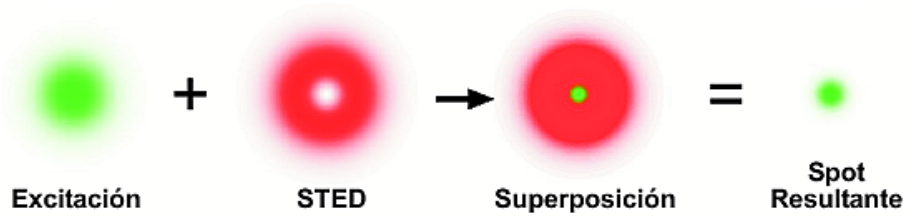


Figura 4: Modulación espacial de la iluminación en el proceso de STED. El láser de excitación (verde) induce la transición de los fluoróforos a un estado excitado, y posteriormente el láser STED (rojo) desactiva la transición alrededor del nodo central. Aunque ambos láseres están limitados en difracción, se obtienen resoluciones laterales de hasta 20nm (spot final). Es decir, se logran señales con superresolución manipulando la fase (en el haz de STED), el ancho de pulso y la intensidad de ambos lasers.

como la necesidad de escanear la muestra o no. Por ejemplo, se pueden usar distribuciones de luz con múltiples nodos y un detector extendido, siempre y cuando los nodos estén espaciados entre sí una distancia mayor que el límite de difracción, lo que permite un proceso de captura en paralelo en distintos puntos. Otros sistemas RESOLFT son el iso-STED, que es una versión 3D del STED acoplada a un sistema 4Pi; el GSD (ground state depletion), que requiere intensidades considerablemente menores que el STED; el SPEM (saturated pattern excitation microscopy) y el SSIM (saturated structured-illumination microscopy). Las dos últimas tienen el esquema inverso, es decir, se desactiva el estado oscuro mediante una excitación saturada y se obtienen imágenes de puntos negros sobre un fondo brillante.

El segundo grupo de técnicas de superresolución funcionales se basa en la detección de moléculas individuales mediante un proceso estocástico de activación y desactivación sucesiva del estado fluorescente [16, 17, 20]. En un instante dado, se activa el estado fluorescente en una serie de moléculas individuales distribuidas en una muestra y separadas entre sí por distancias mayores que los límites de resolución de Abbe, posteriormente estas moléculas vuelven al estado oscuro y se activa una nueva serie. Las posiciones de las moléculas son aleatorias, y para cada serie las moléculas activadas se pueden localizar con gran precisión ubicando el centroide de la señal luminosa. Así, en dos instantes diferentes pueden haberse activado moléculas que están separadas por una distancia mucho menor que el límite de Abbe, pero la diferente coordenada temporal permitirá localizar a cada una de ellas por separado. La localización de cada molécula fluorescente con precisión a escala nanométrica se hace mediante un conteo de fotones de fluorescencia con detectores de alta sensibilidad. Para lograr la activación de tan sólo unos cuantos marcadores en cada serie se usa un láser de muy baja potencia. Después de obtener la imagen de una serie los marcadores se desactivan por saturación, o bien, se destruyen por efecto fotoquímico

mediante sobreexposición, y entonces se activa una nueva serie. Entre estas técnicas se encuentran los esquemas de PALM y F-PALM (fluorescence photoactivation localization microscopy), STORM (stochastic optical reconstruction microscopy), PAINT (point accumulation for imaging in nanoscale topography), GSDIM (ground state depletion followed by individual molecule return), entre otros. Todos ellos han sido recientemente agrupados bajo el acrónimo de SMACM (single-molecule active control microscopy) [17]. Aunque la resolución lateral se incrementa notablemente en los sistemas SMACM, la resolución axial sigue siendo un reto. Recientemente se han ideado métodos basados en el uso de elementos astigmáticos para introducir una deformación en la imagen que depende del plano axial, también hay otros basados en imágenes generadas por interferencia (iPALM), en configuraciones tipo $I^n M$ [20].

En resumen, es claro que hay una gran cantidad y diversidad de técnicas de detección e imagen, y este campo continúa creciendo y evolucionando, no sólo con el perfeccionamiento de los instrumentos, sino con el desarrollo de nuevas ideas. Sin embargo, pese a los avances y retos en materia de superresolución, no hay que desestimar las técnicas tradicionales, como la microscopía de campo brillante, cuyas imágenes actualmente se pueden mejorar mucho con la ayuda de software y que siguen siendo las de mayor rapidez de adquisición. Además, éstas ofrecen un campo de visión extendido que es muy útil para la identificación de rasgos generales de una muestra. Asimismo, los sistemas tradicionales de microscopía de fluorescencia, absorción multifotónica, contraste de fase, etcétera, siguen manteniendo su lugar privilegiado mientras las nuevas técnicas se desarrollan y se convierten en instrumentos prácticos. De hecho, para seleccionar una técnica de imagen en biología, hay varios aspectos a considerar, que dependen siempre del tipo de muestra y proceso a investigar. Por ejemplo, para aplicaciones con células vivas y procesos dinámicos, los aspectos principales a tener en cuenta son: la resolución, la sensibilidad de detección, la rapidez de adquisición y la viabilidad del espécimen. Esta última se refiere a mantener la muestra en condiciones adecuadas para garantizar su *salud*, así como a limitar el daño que le pueda ocurrir debido al proceso de imagen. En la mayoría de los casos, no basta con un solo tipo de microscopio, y es necesario combinar más de una técnica, evaluando los pros y contras de las diferentes opciones [15].

Aquí nos avocamos únicamente a la superresolución, pero cabe mencionar que las técnicas de imagen médica y biológica también han evolucionado en escalas macroscópicas, como la tomografía de coherencia óptica (OCT, optical coherence tomography). En la figura 5 se muestra un resumen de algunas técnicas y su escala de resolución. En la red existe una gran riqueza de recursos para ver ejemplos de imágenes obtenidas con diferentes métodos [20–22].

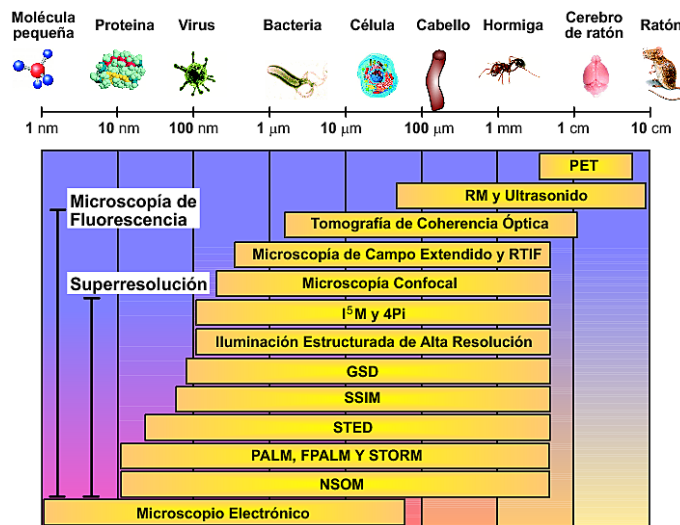


Figura 5: Esquema de la escala en la que se utilizan algunas técnicas de imagen (tomada de la referencia [20]). PET y MRI indican tomografía por emisión de positrones y resonancia magnética nuclear, respectivamente, para las demás abreviaturas referirse al texto.

4. Investigación multidisciplinaria y sistemas integrados

En las secciones anteriores se construyó una visión general de los tres aspectos principales involucrados en la miniaturización: fabricación, manipulación y detección a escalas micro y nanométricas, ahora veremos como se pueden integrar en un contexto multidisciplinario. Aunque aquí nos enfocamos en técnicas que hacen uso de la luz como su principal herramienta, no hay que olvidar que hay otras herramientas igualmente importantes, como el uso de campos acústicos, eléctricos, magnéticos, efectos termodinámicos e hidrodinámicos, etcétera.

Cuando se demostró la micromanipulación de muestras biológicas *in vivo* con un láser IR, se abrieron nuevas y excitantes oportunidades de investigación en disciplinas como biología celular y molecular, biotecnología, biofísica, bioquímica e incluso en medicina. Por ejemplo, la captura óptica ha permitido caracterizar propiedades mecánicas de sistemas biológicos, como la elasticidad de células, componentes celulares y biomoléculas aisladas, como el ARN y el ADN, y entender su influencia en los aspectos funcionales.

Hasta hace un par de décadas, los estudios de biología molecular se basaban en análisis de volumen, es decir, en los datos obtenidos a partir de una colección de un enorme número de moléculas. Esto daba valores promedio para los parámetros estudiados, que realmente no permitían poner a prueba los modelos teóricos. En cambio, los estudios de una sola molécula han revolucionado esta área [4, 23]. Como prueba de ello, la manipulación directa y estiramiento de moléculas de ADN ha contribuido a entender sus inter-

acciones mecánicas con proteínas y enzimas, además de que permiten probar modelos teóricos que sirven también para otro tipo de materiales poliméricos. Los experimentos con micromanipulación óptica también han revelado la existencia de formas helicoidales adicionales del ADN estabilizadas por fuerzas y torcas, y han permitido entender las bases mecánicas de las interacciones entre el ADN y la maquinaria molecular involucrada en la transcripción, replicación y recombinación [23]. Adicionalmente, los ingenieros han tomado lecciones de la naturaleza; el entender el funcionamiento de la maquinaria biológica a nivel molecular ha servido de inspiración para impulsar el diseño y desarrollo de sofisticadas nanomáquinas utilizando los mismos principios.

Una manera de estirar el ADN es adherir uno de los extremos de la molécula (previamente marcada con un fluoróforo) a una microesfera de látex que es atrapada con pinzas ópticas. Posteriormente se utiliza la fuerza hidrodinámica de un fluido para estirar la molécula [13]. Otra posibilidad es adherir los dos extremos de la molécula a microesferas que son confinadas en trampas contiguas; una de ellas permanece fija mientras la otra se mueve de manera controlada.

Otro ejemplo impresionante es el estudio de los procesos de transporte por motores moleculares, como la cinesina o la miosina, que utilizan la energía liberada en algunas reacciones químicas en el interior de la célula (como la hidrólisis del ATP) para realizar trabajo mecánico. La molécula de cinesina, encargada del transporte de cromosomas a través del citoplasma, se compone de dos cadenas pesadas entrelazadas, lo que le da una forma alargada, y uno de sus extremos funciona como un par de “piernas” con las que recorre su camino a lo largo de filamentos proteicos llamados microtúbulos. Para estudiar su dinámica, un extremo de la cinesina se adhiere a una esfera transparente atrapada con luz, y conforme se empieza a desplazar a lo largo del microtúbulo, arrastra consigo a la esfera. Midiendo el desplazamiento de la esfera respecto a su posición de equilibrio en la trampa óptica se logra caracterizar el movimiento de la cinesina [13].

A nivel celular, se han estirado glóbulos rojos, cuyas propiedades de elasticidad no solo están relacionadas con su estado de maduración, sino también con la presencia de algunos padecimientos. Si bien estas investigaciones se pueden realizar utilizando micropipetas, la micromanipulación óptica ofrece la ventaja de poderse combinar fácilmente con otras técnicas, como espectroscopía Raman¹⁴, que permite monitorear los cambios químicos a medida que la célula se somete a un esfuerzo externo o durante el proceso de administración de una droga. También se ha combinado el uso de las pinzas ópticas con lo que se conoce como bisturí o escalpelo óptico, que consiste básicamente en enviar un pulso corto y controlado de luz láser de muy alta energía, usualmente de longitud de onda ultravioleta. Así se ha realizado fertilización *in vitro*, *taladrando* un agujero en la zona pelúcida de un óvulo con gran precisión, para facilitar la llegada del espermatozoide, el cual a su vez es llevado hasta el óvulo utilizando pinzas ópticas [13].

Para realizar mediciones de elasticidad, las pinzas ópticas deben ser adaptadas como

¹⁴Esta combinación ya ha recibido incluso un nombre propio: las pinzas Raman.

micro-transductores mediante un cuidadoso procedimiento de calibración. Cerca de la posición de equilibrio de la trampa, la fuerza óptica de gradiente se puede modelar por la ley de Hooke, $F = -Kx$, de modo que para calibrarla hay que determinar la constante de restitución de la trampa K midiendo el desplazamiento x de una partícula atrapada cuando se somete a una fuerza conocida (por ejemplo, la fuerza de arrastre ejercida por un flujo constante). Para medir desplazamientos generalmente se utiliza un láser auxiliar, aunque también se puede utilizar el mismo de la pinza. Cualquier desviación de la partícula de su posición de equilibrio provocará una desviación correspondiente de la luz difractada, que se colecta en un fotodiodo de cuadrante. Estos dispositivos tienen un arreglo de cuatro detectores en forma de cuadrantes; cada uno de ellos integra la luz que le llega produciendo una señal eléctrica. La magnitud relativa de las cuatro señales está en correlación directa con el cambio de posición de la partícula, que puede caracterizarse con precisión de nanómetros.

Sin embargo, estas configuraciones experimentales de las pinzas ópticas no son compatibles con la geometría planar de un chip o de un dispositivo compacto en general. Por esta razón, con el propósito de integrar las pinzas a sistemas LOC se han ideado otras configuraciones que sí satisfacen tales requisitos. Quizás la más simple es una trampa de haces contra-propagantes, pero introduciendo la luz a través de fibras ópticas. Por otro lado, las trampas ópticas también se pueden introducir como mecanismos de control en circuitos microfluídicos. Éstos son microcanales integrados sobre un sustrato, a manera de chip, por los que circulan volúmenes muy pequeños de fluido, del orden de microlitros a femtolitros. Estos dispositivos son ideales para el desarrollo de la tecnología LOC, ya que permiten tareas como el transporte ordenado, análisis en paralelo, clasificación y separación de componentes biológicos como células, bacterias y proteínas. Aquí las trampas ópticas pueden usarse para controlar elementos integrados a los chips como microbombas, microválvulas, microtamices, etcétera. [6]. De hecho, la combinación de la óptica con la microfluídica ha sido tan exitosa que dio lugar a lo que hoy se llama optofluídica. La termoplasmónica también se puede integrar en estos dispositivos para elevar localmente la temperatura del fluido o de las partículas que circulan en él, como parte de un análisis o tratamiento.

Un objetivo general en el desarrollo de sistemas LOC es conseguir dispositivos que permitan un análisis rápido y poco invasivo de fluidos biológicos complejos con el propósito de realizar diagnósticos y monitorear terapias *in situ* [24]. Pese a que ya hay muchas piezas del rompecabezas, aún es mucho lo que falta por hacer, especialmente en materia de integrar todos los elementos necesarios en dispositivos compactos y portátiles. Esta es un área de investigación abierta, que ofrece enormes posibilidades y es inminentemente multidisciplinaria.

Hay gran cantidad de retos abiertos, que no solo involucra a físicos, químicos y biólogos, sino a especialistas en diversas áreas, como desarrollo de software y algoritmos matemáticos y/o numéricos para el procesamiento de datos, investigación de materiales, instrumentación y diseño, etcétera. Esto hace necesario contar con personas capaces de

entender diferentes *lenguajes científicos* y jugar el importantísimo papel de traductores, así como también aportar su conocimiento más integral para ubicar problemas relevantes que se pueden abordar desde una perspectiva multidisciplinaria. Mientras en otros países hace ya varias décadas que se incluyen carreras con un perfil multidisciplinario, México ha dado los primeros pasos en esa dirección hace relativamente poco tiempo, pero ya con algunos ejemplos exitosos. De hecho, resulta muy alentador atestiguar que, cada vez más, las nuevas generaciones tienen interés por el enfoque multidisciplinario de la ciencia.

5. Referencias

- [1] http://inventors.about.com/od/istartinventions/a/intergrated_circuit.htm.
- [2] N. Maluf and K. Williams, *Introduction to microelectromechanical systems engineering*. Artech house publishers, 2004.
- [3] A. Ostendorf and B. Chinkov, "Two-photon polymerization: A new approach to micromachining-femtosecond lasers enable microfabrication with resolution beyond the diffraction limit." *Photonics spectra*, vol. 40, no. 10, pp. 72–81, 2006.
- [4] A. Ashkin, *Optical trapping and manipulation of neutral particles using lasers: a reprint volume with commentaries*. World Scientific, 2006.
- [5] K. Dholakia and T. Čižmár, "Shaping the future of manipulation," *Nature Photonics*, vol. 5, no. 6, pp. 335–342, 2011.
- [6] A. Jonáš and P. Zemánek, "Light at work: the use of optical forces for particle manipulation, sorting, and analysis," *Electrophoresis*, vol. 29, no. 24, pp. 4813–4851, 2009.
- [7] M. Padgett and R. Bowman, "Tweezers with a twist," *Nature Photonics*, vol. 5, no. 6, pp. 343–348, 2011.
- [8] M. Burns, J. Fournier, J. Golovchenko *et al.*, "Optical matter: crystallization and binding in intense optical fields." *Science (New York, NY)*, vol. 249, no. 4970, p. 749, 1990.
- [9] T. Li, S. Kheifets, D. Medellin, and M. Raizen, "Measurement of the instantaneous velocity of a brownian particle," *Science*, vol. 328, no. 5986, pp. 1673–1675, 2010.
- [10] P. Reimann, "Brownian motors: noisy transport far from equilibrium," *Physics Reports*, vol. 361, no. 2, pp. 57–265, 2002.
- [11] A. Arzola, K. Volke-Sepúlveda, and J. Mateos, "Experimental control of transport and current reversals in a deterministic optical rocking ratchet," *Physical review letters*, vol. 106, no. 16, p. 168104, 2011.

- [12] H. Rubinsztein-Dunlop and M. Freise, "Light-driven micromachines," *Optics and Photonics News*, vol. 13, no. 4, pp. 22–26, 2002.
- [13] P. Prasad, *Introduction to biophotonics*. Wiley-Interscience, 2003.
- [14] M. Juan, M. Righini, and R. Quidant, "Plasmon nano-optical tweezers," *Nature Photonics*, vol. 5, no. 6, pp. 349–356, 2011.
- [15] D. Stephens and V. Allan, "Light microscopy techniques for live cell imaging," *Science Signalling*, vol. 300, no. 5616, p. 82, 2003.
- [16] S. Hell, "Far-field optical nanoscopy," *Science*, vol. 316, pp. 1153–1158, 2007.
- [17] R. Won, "Interview to W. E. Moerner: Eyes on super-resolution," *Nature Photonics*, vol. 3, pp. 368–369, 2009.
- [18] [Http://www.uksaf.org/tech/spm.html](http://www.uksaf.org/tech/spm.html).
- [19] R. Dunn, "Near-field scanning optical microscopy," *Chemical reviews*, vol. 99, pp. 2891–2928, 1999.
- [20] <http://zeiss-campus.magnet.fsu.edu/articles/suprerresolution/index.html>.
- [21] <http://www.microscopyu.com>.
- [22] <http://www.olympusmicro.com/primer/>.
- [23] C. Bustamante, Z. Bryant, S. Smith *et al.*, "Ten years of tension: single-molecule dna mechanics," *Nature*, pp. 423–426, 2003.
- [24] H. Craighead, "Future lab-on-a-chip technologies for interrogating individual molecules," *Nature*, vol. 442, no. 7101, pp. 387–393, 2006.

Física a la escala nanométrica

Cecilia Noguez, Instituto de Física, UNAM, México

1. Introducción

Uno de los grandes temas de la física del presente siglo se refiere a la nanociencia y la nanotecnología. Como sabemos la palabra *nano* tiene raíces griegas y significa muy, muy pequeño. En ciencia, nano se usa como prefijo y denota la mil millonésima parte de algo. Por ejemplo, un nanosegundo es la mil millonésima parte de un segundo y lo denotamos como 10^{-9} s o 0.000 000 001 s, lo mismo pasa con nanogramo (10^{-9} gr) y por supuesto con el nanómetro que es la mil millonésima parte de un metro o 10^{-9} m, el cual también expresamos como 1 nm. Para darnos una idea de lo que significa fabricar, observar y manipular objetos a escala nanométrica, les propongo el siguiente ejercicio. Supongan que tienen una tira de papel que mide exactamente un metro de largo y lo dividen en diez partes iguales, cada una de estas partes mide entonces un decímetro o 10^{-1} m. Corten con unas tijeras una de estas diez partes y repitan el procedimiento, dividiendo el pedazo que mide un decímetro nuevamente en diez partes iguales. Ahora cada una de estas partes es igual a un centímetro o 10^{-2} m. Repitamos el mismo procedimiento una vez más, obteniendo milímetros o 10^{-3} m. En esta etapa ya nos podemos dar cuenta de que para llegar a la escala nanométrica es necesario repetir el procedimiento exactamente nueve veces, lo cual no parece demasiado. Pero para continuar vemos que ya no es suficiente utilizar una tijera y regla, ahora necesitaremos instrumentos más precisos como un exacto, un lente de aumento, un micrómetro para medir y posiblemente pinzas para sujetar el pedazo de papel. De aquí podemos intuir que para llegar a la escala nanométrica se tienen retos científicos y tecnológicos muy importantes, ya que para continuar con el procedimiento propuesto, sería indispensable obtener las herramientas necesarias para fabricar, medir, observar y manipular los objetos a escalas menores a las macroscópicas. En la actualidad estas herramientas involucran microscopios electrónicos de barrido y de transmisión, de fuerza atómica, que nos permiten observar nanopartículas individuales; además de medidas de la respuesta óptica, magnética, térmica, electrónica, etcétera, de un conjunto de partículas; así como métodos sofisticados para fabricar las nanoestructuras utilizando tanto métodos físicos, como el crecimiento epitaxial o deposición molecular en fase vapor, o

métodos químicos, como los coloidales y de reducción/oxidación, entre otros.

Por esta razón no es de extrañar que, a pesar de que existen muchas estructuras en la naturaleza a escala nanométrica, es hasta hace pocos años que podemos observarlas y manipularlas, y así tener algún control sobre ellas. Por ejemplo, el ADN (ácido desoxirribonucleico) de los seres vivos está compuesto de moléculas tales que forman puentes de tamaño nanométrico. De igual forma se sabe que la mayoría de los virus son de tamaño nanométrico. Por otro lado, desde hace varios siglos el hombre ha fabricado dispositivos compuestos de estructuras a escala nanométrica, por supuesto sin saberlo! Uno de estos ejemplos son los muy coloridos vitrales de las catedrales europeas que se construyeron a finales de la edad media y durante el renacimiento (ver figura 1). Estos vitrales fueron hechos incorporando ciertas sales de oro, plata, y/o cobre, entre otros materiales, durante la fabricación del vidrio. Dependiendo del tipo de sal, su cantidad y tiempo de "cocción" se controlaba el color que presentaba el vidrio al pasar luz a través del mismo. Más adelante veremos a que se debe esta propiedad.

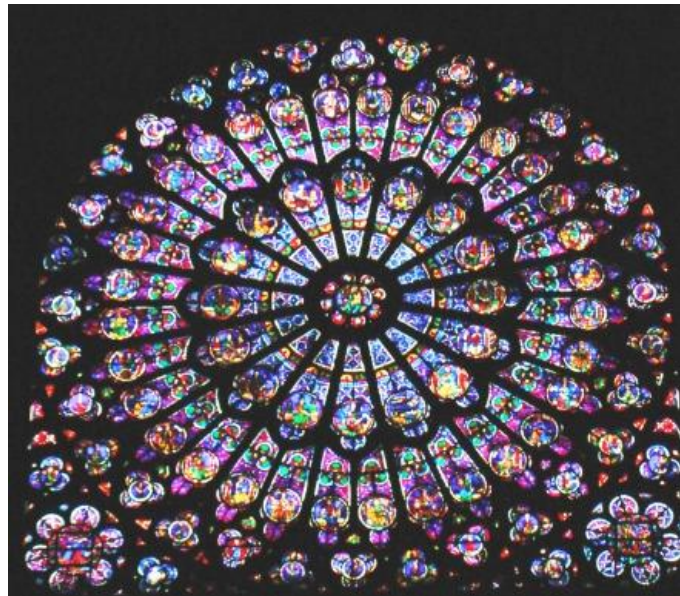


Figura 1: Foto tomada de uno de los vitrales de la catedral de Notre Dame en París, Francia 2008.

Recordemos que el átomo de hidrógeno tiene un tamaño aproximado de 10^{-10} m, por lo que a lo largo de un nanómetro podemos tener una cadena compuesta de alrededor de diez átomos de hidrógeno. En la actualidad, cuando hablamos de estructuras nanométricas nos referimos a partículas con tamaños de entre 1 y 100 nm, y por lo tanto pueden estar compuestas por decenas de átomos e inclusive hasta millones. A estas escalas, la naturaleza cuántica del sistema cobra relevancia. Recordemos que en un centímetro cúbico tenemos del orden del 10^{23} átomos, por lo tanto, las nanoestructuras están compuestas

por muy pocos átomos tan sólo entre 10^1 y 10^6 átomos. Sin embargo, tenemos muchos átomos si nuestra intención es investigar las propiedades físicas del sistema desde un punto de vista analítico o computacional usando la mecánica cuántica, es decir, resolviendo la ecuación de Schrödinger para muchos átomos y sus correspondientes electrones. Además, estos materiales de tamaño nanométrico, que llamamos nanoestructuras o nanopartículas, forman un puente de enlace entre los átomos y moléculas, con la materia a escala macroscópica; entre lo discreto y lo continuo. Su comportamiento es mucho más complejo que el de los átomos, pero por otro lado no se puede describir tan sólo escalando las propiedades macroscópicas que ya conocemos.

Las nanoestructuras no sólo se distinguen por su tamaño y número de átomos que la componen, principalmente se distinguen por sus propiedades físicas y químicas que son muy distintas a las que presentarían los mismos materiales a escalas mayores, como a la micro y macro escalas, o a escalas menores en forma de átomos o pequeñas moléculas. Como ya mencionamos, a esta escala la naturaleza cuántica del sistema domina la respuesta a diferentes estímulos externos. Un ejemplo que tiene que ver precisamente con los colores de los vitrales es el siguiente: mientras que el color de un pedazo grande de un metal como el oro es el mismo si éste se corta en diferentes tamaños y en diferentes formas, como lo puede ser una cuchara, un arete, una esfera, un prisma o un cubo. Por otro lado, el color de las nanopartículas metálicas depende totalmente de su tamaño y su forma, como veremos más adelante. Esto significa que la respuesta de las nanopartículas a diferentes estímulos externos depende al menos de estos dos parámetros, que a su vez, dependen de diferentes variables tales como el proceso de formación de las partículas, la temperatura, el medio que las rodea, etcétera. Otra cualidad importante que sucede a escala nanométrica es que, cuando se reduce el tamaño la relación entre los átomos que conforman la superficie respecto a aquellos en el volumen cambia drásticamente, dominando en algunos casos la superficie sobre el volumen, como sucede con los nanotubos, los fulerenos y nanopartículas de alrededor de 1 nm de diámetro. Este hecho potencia algunas propiedades físicas y químicas, como la catálisis [1] y la actividad bacteriológica de la plata [2], entre otras, ya que la superficie expuesta es mucho mayor. Pero también se observan algunos fenómenos que no se ven a la macro escala o en átomos y moléculas. El estudio y control de estas nuevas propiedades así como el proceso de entender los nuevos fenómenos físicos que suceden en los nanomateriales es una de las tareas más interesantes y retadoras que tiene la Física y en general la Nanociencia en este siglo.

2. ¿Qué es nanociencia? ¿Qué es nanotecnología?

La complejidad de fabricar, observar y manipular nanoestructuras, así como su potencial aplicación, demanda de la colaboración de varias disciplinas. Por lo que la llamada *NANOCIENCIA* se puede definir como el estudio de la materia a escala nanométrica des-

de el punto de vista de la Física, Química, Biología y la Ciencia e Ingeniería de Materiales¹. El proceso de entender los nuevos fenómenos existentes, así como la predicción de propiedades novedosas en sistemas nanométricos constituyen los objetivos principales de la Nanociencia. En particular en estas tareas, así como en la búsqueda de nuevos dispositivos con propiedades novedosas, es donde los físicos juegan un papel importante. Por otro lado, la aplicación de los conocimientos básicos generados por la Nanociencia a la solución de problemas específicos o a la generación de nuevos dispositivos de utilidad diversa es la tarea fundamental de la *NANOTECNOLOGÍA*. Como veremos más adelante, la Nanociencia y la Nanotecnología tienen un gran potencial de aplicación en diversas áreas científicas y tecnológicas, tales como: salud, medio ambiente, energía, nuevos materiales, electrónica, alimentos, etcétera. Por todo esto la Nanociencia y la Nanotecnología son temas de investigación de mayor interés en la actualidad a nivel mundial. Este interés se traduce en políticas de Estado con apoyo financiero prioritario a la investigación en Nanociencia y Nanotecnología por parte de los gobiernos de algunos países y sus consorcios como Estados Unidos, la Unión Europea, Japón, Corea del Sur, China, Singapur, Irán, India y Brasil, principalmente.

En Nanociencia y Nanotecnología, la generación de ideas y de dispositivos contempla al menos cuatro etapas de desarrollo que van aumentando en complejidad y por lo tanto también en potencial de aplicación [3]. La primera etapa considera la fabricación y manipulación de nanoestructuras sencillas o pasivas, como nanopartículas metálicas, de óxidos y semiconductoras, con el fin de construir nuevos polímeros, cerámicas, recubrimientos, catalizadores, entre otros; así como mejorar los ya existentes. Esta etapa también se caracteriza por el uso de nanopartículas poco complejas en aplicaciones simples en medicina, cosmetología, en la industria textil, así como los ya famosos bactericidas a base de nanopartículas de plata (conocido como nanosilver), en donde lo único que se hace es potenciar las muy conocidas propiedades antimicrobianas de la plata que se conocen desde hace miles de años y que impide el crecimiento de los microorganismos. Otra aplicación en medicina es el uso de nanopartículas metálicas las cuales se pueden calentar fácilmente utilizando fuentes electromagnéticas de relativa baja intensidad y baja frecuencia, de manera que al calentar las nanopartículas estas quemar las células de los tejidos en donde previamente se administraron.

La segunda etapa contempla la fabricación de nanoestructuras llamadas “activas”, es decir, nanoestructuras funcionalizadas con moléculas con el fin de realizar tareas específicas como transistores tridimensionales, amplificadores, para administrar medicamentos, en terapias, como marcadores y etiquetadores biológicos, es decir, estructuras adaptadas. En esta etapa las nanopartículas funcionalizadas tienen como objetivo el reconocer otras estructuras y realizar tareas específicas al recibir un estímulo externo. De esta forma, en ciertas nanoestructuras se absorben moléculas que a su vez reconocen otras moléculas y finalmente se puede hacer una imagen al iluminar con luz las nanoestructuras, de tal

¹Véase el capítulo de Gonzalo González sobre los nuevos materiales del siglo XXI, en este mismo volumen

forma que se puede hacer reconocimiento molecular y así identificar tumores, por ejemplo. También se pretende que estas partículas funcionalizadas realicen ciertas reacciones químicas controladas que favorezcan, por ejemplo, la llamada catálisis asimétrica. En esta segunda etapa, también se investigan estructuras de morfologías complejas como nanoestructuras, nanocubos, nanobarras, con tamaños y composición bien definidas, con el fin de potenciar las propiedades observadas en la primera etapa.

La tercera etapa considera el desarrollo de estructuras mucho más complejas que se puedan ensamblar y auto ensamblar utilizando el reconocimiento molecular; creando redes en una, dos y tres dimensiones, así como nuevas arquitecturas jerárquicas. Un proceso de auto ensamblado se describe como un proceso por el cual un sistema de componentes desordenados se organiza en una estructura o patrón debido a interacciones específicas entre los mismos componentes y el medio en donde se encuentran. La idea principal es crear superestructuras basadas en los mismos conceptos que se utilizan para estudiar los cristales en la física del estado sólido, en donde las interacciones entre los enlaces atómicos a lo largo de diferentes direcciones crean estructuras con simetrías únicas, resultando así en diversos cristales con una gran variedad de propiedades. En este caso, en lugar de átomos se utilizan nanopartículas y en lugar de enlaces atómicos se utiliza el concepto de ligandos, es decir, diversas moléculas y macromoléculas unidas a las nanopartículas, cuya interacción entre ellas nos da una función similar a los enlaces atómicos. La direccionalidad en este caso puede estar dada por los mismos ligandos y/o por la anisotropía de las mismas nanopartículas. En este caso, la interacción entre los bloques que se necesitan autoensamblar están dictadas por diferentes factores como son el solvente, el tamaño, forma y propiedades de las nanopartículas, así como el tamaño, forma y propiedades de los ligandos. Nuevamente un concepto importante aquí es el reconocimiento molecular y la funcionalización de las nanopartículas. Entre los ligandos más comunes utilizados hasta ahora se encuentra el ADN, CTAB (bromuro cetiltrimetil amonio) y los tioles, ya que con estos es posible controlar fácilmente la longitud de los ligandos, y por lo tanto su interacción y así la simetría de las superestructuras. Sin embargo, las propiedades e ingeniería de estas superestructuras, así como el entendimiento de las principales interacciones involucradas y las propiedades físicas y químicas de éstas son un reto para la ciencia.

Finalmente, una cuarta etapa contempla el desarrollo de dispositivos moleculares “bajo pedido”, diseñados atómicamente, con funciones emergentes. En la actualidad la investigación y desarrollo en Nanociencia y Nanotecnología se encuentran en la segunda etapa y en los albores de la tercera, por lo que la mayor parte de estas estructuras complejas están por desarrollarse en las próximas décadas, con una muy alta proyección de impacto social y económico.

3. Plasmónica

Existe gran interés de la comunidad científica en el estudio de las propiedades ópticas de nanopartículas, esta propiedad que le da color a los vitrales de la edad media. Esto se debe principalmente a la alta dependencia de esta propiedad con la morfología y tamaño de la nanopartículas, así como con otros parámetros como el medio ambiente que las rodea, es decir, con cualquier medio polarizable como el medio dieléctrico, su interacción con otras partículas y sustratos. La sensibilidad de la respuesta óptica a estos parámetros proporciona una forma fácil, no destructiva y en tiempo real de investigar diferentes muestras. Pero como veremos más adelante, el entendimiento de este fenómeno proporciona una gama de aplicaciones importantes en diferentes áreas. Como podemos ver en la figura 2, el tamaño y la temperatura determinan la morfología de las nanopartículas de oro, mientras que la morfología y el tamaño determinan el color de la nanopartícula. En los vitrales lo que sucedía es que al diluir sales de oro y/o plata en los vidrios al calentarse se comenzaban a aglomerar los átomos metálicos, formando nanopartículas de diferentes tamaños y formas. Por lo tanto, el color se controlaba con la cantidad de sales en el vidrio y cambiando la temperatura de cocción y después enfriarlos repentinamente. Por supuesto, en esa época no se sabía cual era el proceso de fabricación y los colores se obtenían a base de ensayo y error, donde la experiencia del artesano era de suma importancia. Actualmente, la experiencia del científico también resulta muy importante, ya que lo que se busca es establecer procesos para fabricar nanoestructuras de un sólo tamaño y de una sola forma, es decir, fabricar muestras de nanoestructuras monodispersas con propiedades uniformes.

En la actualidad sabemos que la respuesta óptica de nanopartículas metálicas se debe al fuerte acoplamiento de la radiación electromagnética externa que oscila en el tiempo, con los electrones libres de la nanopartícula metálica a través de los llamados plasmones de superficie. Los plasmones de superficie son desplazamientos de los electrones libres del metal que oscilan colectivamente y crean una densidad de carga superficial temporal cerca de la interfase entre el conductor y un medio aislante. Esta densidad de carga genera ondas electromagnéticas evanescentes que se desplazan a lo largo de la interfase, pero su amplitud decae exponencialmente cuando se aleja de la misma. En el caso de superficies metálicas planas que se extienden infinitamente sólo existe un plasmón, es decir, existe una frecuencia característica a la cual oscilan colectivamente los electrones. Esta frecuencia característica o de resonancia depende de una fuerza restauradora debido a la interacción coulombiana que se crea con el desplazamiento de la nube electrónica con respecto a los iones, y que compite con la fuerza debido al campo externo que trata de separar las cargas. Por lo tanto, la distribución de la carga que se genera en la superficie juega un papel importante en determinar la fuerza restitutiva, y ésta a su vez determina la frecuencia de resonancia de los plasmones. Por lo tanto, esta frecuencia de resonancia depende del arreglo de las cargas en la superficie y esta a su vez depende de la morfología y tamaño de las partículas.

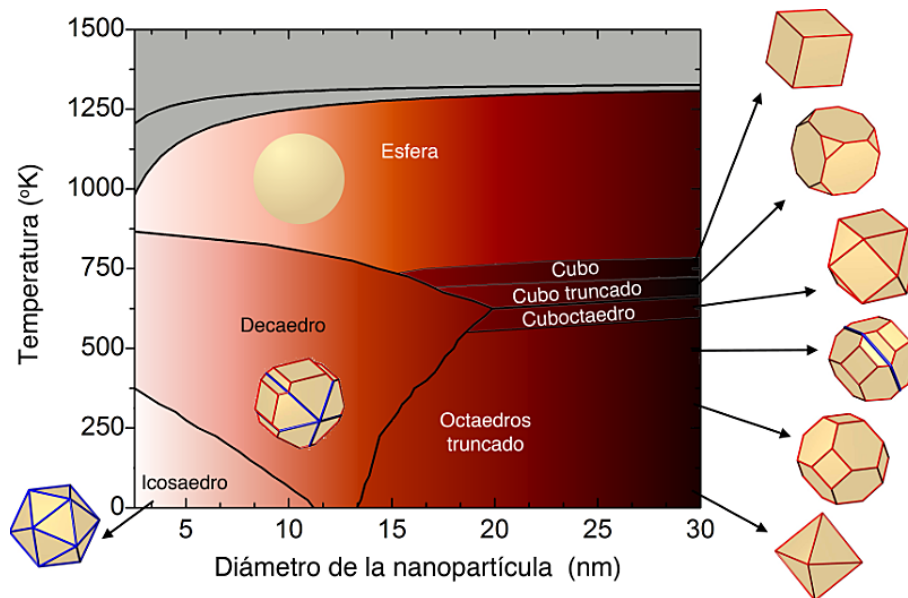


Figura 2: Mapa de fase de la morfología de nanopartículas de oro en función del tamaño y temperatura de la muestra. Los colores se obtienen de suponer una solución en el límite diluido de un coloide conteniendo 0.5×10^{13} partículas por mililitro en aire. Esta figura fue adaptada de la referencia [4].

Al contrario de lo que sucede con la superficie plana infinita, en el caso de nanopartículas puede haber muchas formas de distribuir las cargas en la superficie, lo que depende de la morfología. Por lo tanto, aún en el límite de longitud de onda larga, puede haber más de un modo de oscilación o densidad de carga, cuyas frecuencias, anchos, amplitud de acoplamiento con el campo externo, etcétera, dependen de la morfología y tamaño del sistema, así como de la densidad electrónica del metal, y la respuesta dieléctrica del medio que la rodea. En este último punto, consideremos el desplazamiento de carga en la superficie y supongamos que un medio dieléctrico con índice de refracción mayor a 1 ($n > 1$), rodea la partícula, de tal suerte que las cargas se ven apantalladas y por lo tanto la fuerza restitutiva disminuye y la frecuencia de resonancia se corre al rojo. En la figura 3 se muestra un modelo de la distribución de carga en una esfera metálica de diámetro menor a 40 nm. En este caso particular, la distribución de carga resulta muy homogénea debido a la simetría esférica del sistema, caracterizada por una distribución dipolar de carga. Esto da lugar a un sólo modo de resonancia. Sin embargo, cambiando ligeramente la geometría del sistema uno puede ver diferentes modos de resonancias. En la misma figura 3, se muestra la distribución de carga para partículas elipsoidales. Cuando el campo externo se encuentra a lo largo del semieje mayor, se puede ver que la fuerza restitutiva es menor que cuando el campo externo se encuentra a lo largo del semieje menor. De tal for-

ma que los elipsoides muestran dos cargas dipolares diferentes y por lo tanto su respuesta de resonancia se encuentra a dos frecuencias diferentes, dependiendo de la polarización de campo externo. En esta figura, abajo de los esquemas, también incluimos el coeficiente de absorción de estas partículas.

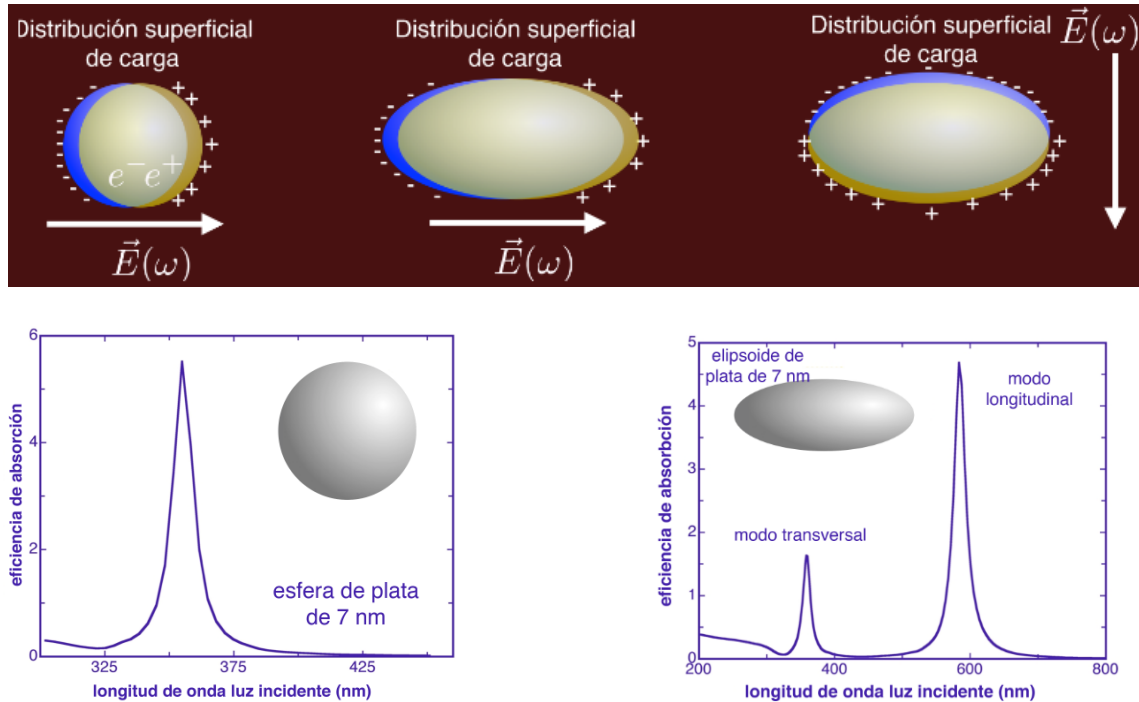


Figura 3: Desplazamiento de las cargas negativas respecto a los iones positivos en una esfera metálica de diámetro menor a 40 nm en presencia de un campo externo $\vec{E}(\omega)$. La fuerza coulumbiana restitutiva debido al desplazamiento de la nube electrónica respecto a los iones positivos, determina la frecuencia de resonancia del llamado plasmón de superficie. También se muestra la distribución de carga para un elipsoide cuando el campo externo apunta a lo largo del eje mayor (respuesta longitudinal) o perpendicular (respuesta transversal) a este. Abajo de los esquemas se muestra el coeficiente de absorción en función de la longitud de onda del campo incidente para una esfera (lado izquierdo) y un esferoide (lado derecho) tomando en cuenta el promedio de sus orientaciones, ambos del mismo tamaño y hechos de plata, ambos se encuentran en vacío.

En presencia de campos electromagnéticos que oscilan en el tiempo, las cargas se desplazan en periodos de tiempo cortos a la superficie de la partícula. A escala nanométrica, el acoplamiento entre electrones y radiación externa produce diferentes modos propios o plasmones de superficie que se identifican con diferentes densidades de carga: dipolar, cuadrupolar, octupolar, etcétera. A cada una de estas distribuciones se le puede asociar un campo electromagnético, de esta forma los plasmones de superficie se encuentran localizados en el espacio, es decir, la amplitud del campo electromagnético evanescente resulta

mucho mayor en algunos puntos en la superficie de la partícula. En ciertas configuraciones particulares, al estar confinada la onda en una cierta región del espacio, la amplitud del campo electromagnético respecto al campo incidente puede aumentar varios órdenes de magnitud. A estas regiones confinadas en el espacio se les llama puntos calientes o hot spots. Esta propiedad presente a escala nanométrica da lugar a la llamada *Plasmónica*. Metales como oro y plata presentan plasmones de superficie en la región de energías del espectro óptico. En la figura 4 se muestra la amplitud del campo electromagnético normalizado por la amplitud del campo incidente cerca de las esquinas de nanocubos de plata, para seis frecuencias diferentes que corresponden a las seis resonancias de plasmón de superficie del nanocubo que también se muestran en la figura. Se puede observar que para algunos modos es posible aumentar hasta 10^6 veces la amplitud del campo electromagnético incidente, sin embargo, este aumento se obtiene en regiones del espacio muy pequeñas o confinadas, lo cual puede tener ventajas, pero también tiene algunas desventajas.

4. Aplicaciones de la plasmónica: Estado actual y perspectivas

Los plasmones de superficie transforman la energía del campo electromagnético incidente en, por ejemplo, energía térmica. Este hecho se ha aprovechado para implementar algunas terapias en el tratamiento de cáncer mediante el siguiente procedimiento. Se inyectan en los tumores soluciones coloidales compuestas por nanopartículas metálicas, principalmente hechas de oro, dispersas en agua. Posteriormente, se somete el tumor con las nanopartículas a una radiación no muy intensa en el rango de frecuencia de los plasmones de superficie, es decir, en la región de frecuencias del espectro óptico, la cual no daña los tejidos de seres vivos o al menos el daño es mucho menor que el que resulta de otro tipo de tratamientos. Con esta radiación electromagnética externa se excitan los plasmones de superficie, los cuales absorben energía y calientan las nanopartículas de manera tal que estas queman y destruyen las células en donde se administraron. Este tipo de dispositivos aún se encuentran en etapa experimental, donde se evalúa su eficiencia y los posibles efectos secundarios que el procedimiento pueda tener. Por lo que todavía no se sabe cuando se comenzarán a usar de manera comercial [5].

Otra aplicación tiene que ver con el hecho de que los plasmones están localizados, es decir, hay regiones en donde la amplitud del campo electromagnético aumenta varios órdenes de magnitud respecto al campo de radiación incidente, y por lo tanto la energía alrededor de los mismos. Una vez localizada la energía se pueden hacer arreglos de nanopartículas los cuales favorecen que los plasmones de superficie viajen a lo largo de una superestructura hecha del arreglo ordenado de nanopartículas. Dependiendo de la geometría del arreglo en una, dos o tres dimensiones se puede pensar que ciertas frecuencias de las ondas electromagnéticas se favorecen y se mueven a través de un arreglo dado, mientras que otras frecuencias pueden estar prohibidas, emulando así los llamados crista-

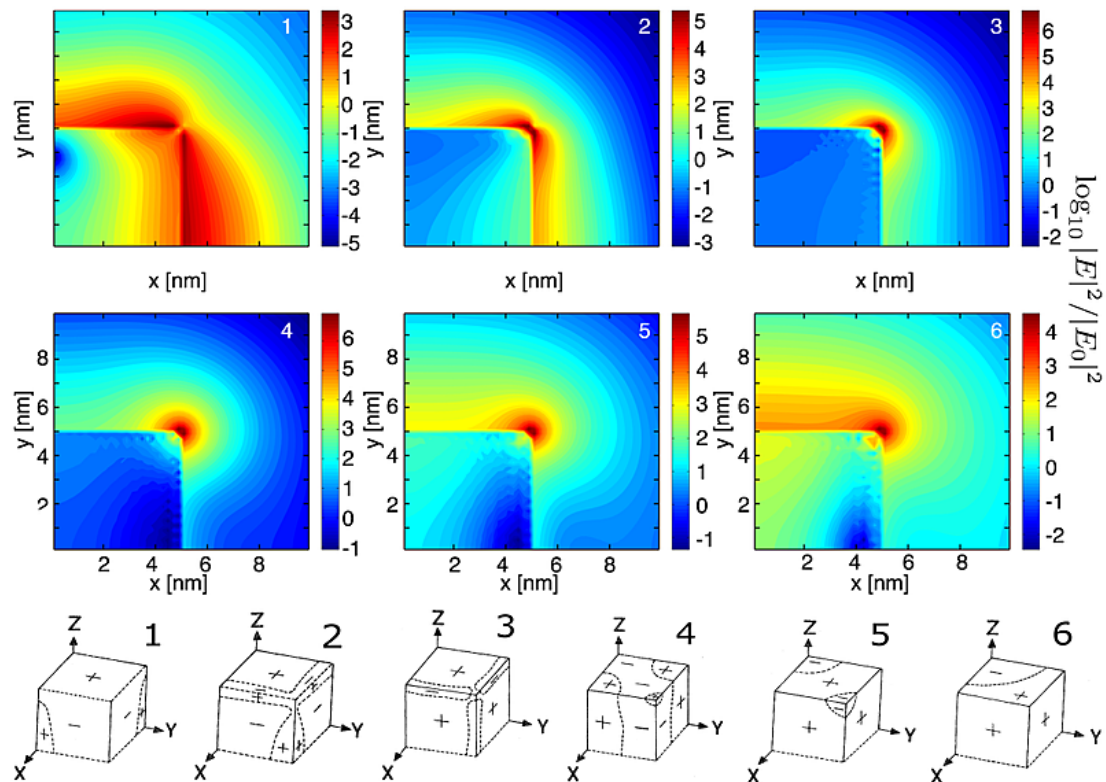


Figura 4: Amplitud del campo electromagnético de nanocubos de plata en aire. Los mapas de color muestran la amplitud respecto al campo incidente en escala logarítmica. En la parte inferior se muestran las distribuciones de carga en un octavo del cubo para los seis modos principales de plasmón de superficie para los cuales se graficó la amplitud del campo electromagnético.

les fotónicos, pero ahora hechos con plasmones, se podría decir, cristales plasmónicos. Un esquema de este mecanismo se encuentra en la figura 5. Estos arreglos cobran relevancia en el desarrollo de diferentes dispositivos, como dispositivos electrónicos, o en el desarrollo de celdas fotovoltaicas. En el primero, la concentración y manipulación de ciertas energías o frecuencias resulta invaluable para el desarrollo de transistores, computadoras de estado sólido, para sistemas fotoelectrónicos, etcétera.

En el segundo caso, se pretende que la absorción de energía se realice de manera más eficiente, además de que se puede transportar. Sin embargo, en este caso, debemos de considerar que los plasmones en las nanoestructuras son excitaciones a ciertas frecuencias, mientras que el espectro solar tiene un continuo de frecuencias desde el infrarrojo hasta el ultravioleta, entonces ¿cómo aprovechar todas las frecuencias que vienen de la radiación solar con el uso de nanoestructuras plasmónicas? Se ha observado que entre menor simetría tiene una partícula, mayor es el número de resonancias, lo cual favorece

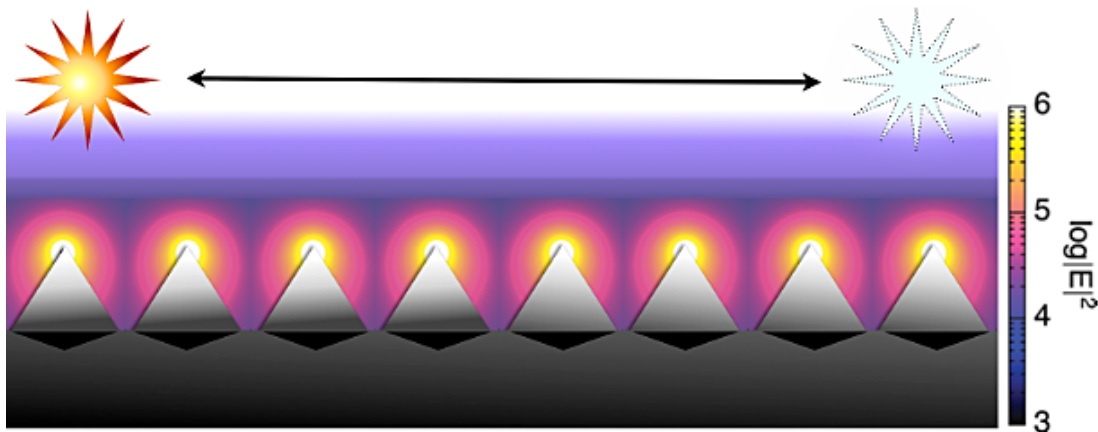


Figura 5: Intensidad del campo electromagnético de cuñas de plata en agua a una frecuencia 450 nm. Las cuñas se muestran en color gris, mientras que la intensidad del campo varía desde 1 hasta 6 órdenes de magnitud, tal como muestra la escala logarítmica a la derecha. Se muestra un esquema de como se mueve energía a lo largo de un arreglo de nanopartículas.

a nanopartículas que tienen estructuras con picos [6]. Además, entre más agudos son los ángulos internos de los picos, se favorecen dos cosas. Por un lado, se incrementa el número de resonancia y el rango de frecuencias en donde se excitan, mientras que por otro lado se favorece la localización y el aumento del campo electromagnético [7], cubriendo así un rango de frecuencias mucho mayor.

Otra aplicación importante de la plasmónica también tiene que ver con la localización y amplificación de las ondas electromagnéticas en nanopartícula metálica y es la de incrementar la sensibilidad de sensores y espectroscopias en ciertas regiones del espectro. Por ejemplo, se ha observado que en la vecindad de una nanopartícula metálica la fluorescencia y la espectroscopia Raman de moléculas se amplifica hasta 10^{12} veces, mejorando así la sensibilidad de estas espectroscopias ópticas de manera significativa. La primera observación de este tipo se hizo a principios de los años 70s, en donde se midió que la radiación Raman de moléculas se veía fuertemente favorecida cuando éstas se encontraban sobre una superficie metálica. Por lo tanto se llamó al fenómeno aumento de la espectroscopia Raman por medio de la superficie o su nombre en inglés Surface Enhanced Raman Spectroscopy, mejor conocido en la actualidad como SERS por sus siglas en inglés. Poco después se vio que este aumento se debía a la presencia de los plasmones de superficie que presentan los metales. Esta propiedad cobró relevancia con la plasmónica ya que, como sabemos, los plasmones de superficie de nanopartículas los podemos diseñar en función del tamaño, forma y el ambiente en donde se encuentran las nanopartículas, además de que los podemos localizar. Nuevamente estas propiedades resultan importantes ya que pensemos en una cierta molécula cuya respuesta Raman se encuentra a una cierta frecuencia, entonces lo que se hace con la plasmónica es diseñar partículas

cuyo plasmón de superficie se encuentre alrededor de dicha frecuencia y cuya amplitud del campo electromagnético se aumente alrededor de ciertos puntos. Es decir, podemos controlar la frecuencia y la amplitud de acoplamiento de los plasmones de superficie con el campo electromagnético externo, y así encontrar la nanoestructura más adecuada para caracterizar una molécula particular, ya sea por espectroscopia Raman, Fluorescencia o alguna otra espectroscopia óptica [8].

En particular en SERS el aumento en la respuesta óptica de la molécula en presencia de nanopartículas metálicas llega a ser hasta de doce órdenes de magnitud más. Esto se debe a que la respuesta Raman es proporcional al cuadrado de la intensidad electromagnética, que como hemos visto, lo podemos localizar y amplificar. Este aumento extraordinario permite pensar en muchas aplicaciones de este fenómeno, como se describe en los siguientes ejemplos. Una aplicación tiene que ver con la caracterización de soluciones a muy bajas concentraciones. Para darnos cuenta de la importancia de esto, tendremos que decir algunas palabras sobre el efecto Raman.

El efecto Raman está relacionado con los estados de vibración del sistema (fonones), los cuales se excitan a través de un campo electromagnético debido a la polarización que sufre la molécula debido al reacomodo de la nube de electrones. Este reacomodo excita ciertos fonones de la molécula, robándole energía al sistema. Esta pequeña diferencia en energía se puede observar en un corrimiento de frecuencias lo que conocemos como dispersión inelástica. La mayoría de los fotones sufre una dispersión elástica, conocida como dispersión Rayleigh, mientras que 1 de cada 100 fotones sufre una dispersión inelástica o Raman. Aunque la especificidad en frecuencia en Raman resulta muy alta, la detección de este fenómeno requiere de muy altas concentraciones, fuentes de luz muy intensas y el conteo de muchos eventos, lo que puede tomar varias horas. Sin embargo, cuando amplificamos la respuesta Raman utilizando estructuras plasmónicas, la caracterización se puede hacer con pocos eventos, bajas intensidades, bajas concentraciones y en algunos minutos. Esto ha llevado a pensar que algún día se podrían caracterizar moléculas individuales. Desde el punto de vista comercial, esto puede tener un gran impacto en diferentes áreas. Por ejemplo, en el análisis clínico de ciertos microorganismos es necesario muchas veces el crecimiento de cultivos para tener pruebas confiables. Sin embargo, este tipo de pruebas toman hasta varios días en donde en realidad se necesitan respuestas casi inmediatas. Con la sensibilidad de SERS, podemos pensar en dispositivos que disminuyan este tiempo a algunos segundos. Para llegar a aumentar la sensibilidad de estas espectroscopias con intensidades del láser bajas, en poco tiempo y con pocos datos, llegando al límite de moléculas individuales, se ha propuesto que es necesario obtener un factor de amplificación de al menos de 10^{14} órdenes de magnitud la respuesta en condiciones normales [9].

Como ya mencionamos, las nanoestructuras con puntas resultan muy interesantes debido a la extraordinaria amplificación que podemos lograr del campo electromagnético. De tal suerte que en años recientes se ha desarrollado una nueva técnica llamada aumento de espectroscopia Raman por punta (TERS). Al contrario que las otras espectroscopias

ópticas, en donde se obtienen promedios estadísticos de la respuesta, TERS permite estudiar moléculas individuales [10]. Sin embargo esta nueva espectroscopia necesita de técnicas más sofisticadas, como contar con un microscopio de efecto de túnel y/o fuerza atómica (STM/AFM), trabajar a ultra alto vacío (UHV) y baja temperatura, todo esto acoplado a un sistema óptico de espectroscopia Raman. Con estos sistemas se pueden obtener condiciones para estudiar moléculas de manera individual y su potencial aplicación como sensores. La combinación de estas técnicas es un área novedosa de investigación.

Por tal motivo, las espectroscopias que pueden aumentar su sensibilidad para poder proponer las bases de nuevos sensores serán principalmente SERS (Surface Enhanced Raman Spectroscopy), TERS (Tip Enhanced Raman Spectroscopy), MEFS (Metal Enhanced Fluorescence Spectroscopy), así como se ha propuesto explorar la posibilidad de aumentar el dicroísmo circular óptico (DC). Mientras que SERS, TERS y MEFS permiten tener una alta precisión en la discriminación, imagen y detección de moléculas, el DC permite además discriminar la quiralidad entre diferentes enantiómeros. Esto último resulta indispensable si el objetivo es el de crear sensores para estudiar aminoácidos, péptidos, azúcares, proteínas, lípidos, ácidos nucleicos, vitaminas, antibióticos, hormonas y muchas sustancias activas en los fármacos, que por naturaleza son quirales. [11]

La quiralidad es una propiedad geométrica existente en cualquier arreglo estructural, sean moléculas, nanoestructuras, cristales o simplemente en un conjunto de puntos. Esta propiedad consiste en que la imagen especular del arreglo, no puede hacerse coincidir de ninguna forma con el arreglo original. El ejemplo más sencillo de un arreglo quiral, resultan ser nuestras manos: la mano derecha es la imagen especular de la mano izquierda, no existiendo manera alguna de hacerlas coincidir. Bajo este esquema, siempre es posible denominar a un arreglo, "izquierdo" y al otro "derecho", llamados enantiómeros. A pesar de lo simple de su definición, la quiralidad es una propiedad fundamental en física, química y biología. Los seres vivos estamos formados por aminoácidos y péptidos que son enantiómeros izquierdos únicamente, y producimos azúcares derechos de manera natural. Además, las sustancias quirales reaccionan de manera diferente a otras sustancias que también son quirales. Es bien sabido que la sustancia activa de un fármaco puede tener efectos contra producentes, y en ocasiones terribles, cuando no se utilizó el enantiómero correcto. Es decir, aunque molecular y estructuralmente un par de enantiómeros son iguales, al ser simplemente uno la imagen especular del otro, químicamente no lo son. Además, en el laboratorio, al sintetizar un compuesto quiral siempre se obtienen ambos enantiómeros, lo que se conoce como muestras racémicas. Sin embargo, la industria farmacéutica para elaborar algún medicamento sólo utiliza uno de ellos, existiendo el enorme problema de la separación de enantiómeros. Cuando los enantiómeros se pueden separar o existe un desbalance en la concentración de derechos versus izquierdos, se puede utilizar al DC para caracterizarlos. El DC consiste en encontrar la diferencia en absorción de luz polarizada circularmente a la derecha y polarizada circularmente a la izquierda. Sólo las estructuras quirales presentan este fenómeno, que al ser la diferencia entre dos cantidades muy parecidas resulta ser muy pequeño. Así que cuando el desba-

lance entre enantiómeros derechos e izquierdo es bajo, el CD resulta ser casi imposible de medir. Por tal motivo, se ha pensado que la plasmónica puede ayudar a aumentar el DC.

Dentro de las estructuras nanométricas que actualmente se fabrican se encuentran las llamadas nanoestructuras quirales. El ejemplo más conocido de estructuras quirales a escala nanométrica es el de los nanotubos (NTs) de carbono. La estructura atómica de los NTs de carbono se asemeja a enrollar una hoja de grafeno, la cual está formada por arreglos hexagonales de átomos de carbono. Esta hoja de grafeno se puede enrollar de diferentes formas, de manera que los NTs que presenten un mismo diámetro tendrán una quiralidad diferente y, por lo tanto, propiedades físicas radicalmente diferentes. Otras nanopartículas quirales que recientemente han alcanzado notoriedad, son las formadas por átomos de metales nobles, como plata y oro. Se ha observado que tales nanopartículas metálicas presentan propiedades extremadamente diferentes dependiendo de su composición, forma y tamaño. Estos sistemas, debido a su reciente descubrimiento, se han estudiado menos y el origen de su quiralidad es aun desconocida [12].

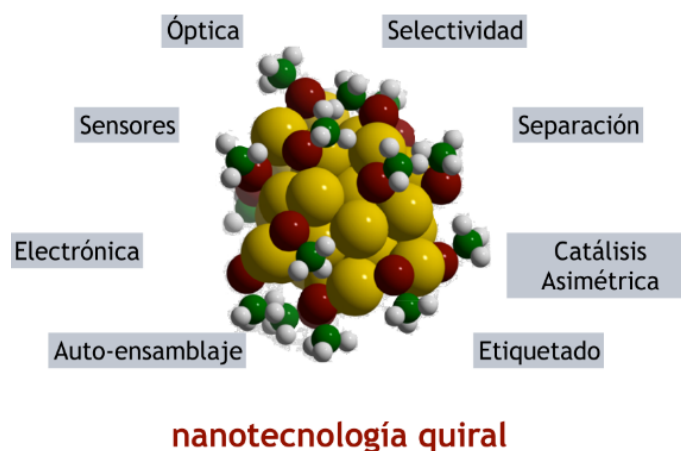


Figura 6: Quiralidad a escala nanométrica y sus posibles áreas de aplicación.

Por esta razón, el estudio de la quiralidad a escala nanométrica tiene un papel fundamental en bioquímica, farmacología, medicina, y está comenzando a ser un campo de investigación de frontera en Nanotecnología. De hecho, estructuras nanométricas como los NTs, fulerenos y nanopartículas metálicas están siendo funcionalizadas como sensores, etiquetadores, o para transportar medicamentos con diferentes moléculas quirales. Además, cada día se utilizan más y más nanoestructuras para separar o sintetizar los componentes izquierdos y derechos de diferentes sustancias quirales en procesos llamados de selectividad enantiomérica. Las diversas nanoestructuras no sólo sirven para separar o sintetizar sustancias quirales, sino también para explotar sus propiedades que son fuertemente selectivas y así poder ensamblarlas, como ya se hace con nanoestructuras funcionalizadas con ADN, o en la llamada catálisis asimétrica. La utilización de nanoes-

estructuras para explotar las propiedades de las sustancias quirales no es algo fortuito, sino se debe al hecho de que las propias nanopartículas presentan el fenómeno de quiralidad, como los NTs y fulerenos, así como algunas NPs metálicas o semiconductoras. Sin embargo, este fenómeno y sobre todo sus implicaciones, ha sido muy poco estudiados a escala nanométrica, a pesar de su impacto en ciencia básica y aplicada. Sin duda, este será un campo de investigación muy importante en Nanociencia conforme vayan avanzando las aplicaciones en biotecnología y medicina.

5. Cuando el futuro de la nanotecnología nos alcance

Mucho se ha hablado, especulado y hasta fantaseado sobre los alcances de la nanociencia y la nanotecnología. Por ejemplo, se ha dicho que el desarrollo y aplicación de la nanociencia puede tener un impacto comparable al de la revolución industrial, lo cual si es muy posible que lo tenga. Por un lado, esta nuestro afán de hacer dispositivos más pequeños y eficientes, con los cuales queremos ahorrar energía por un lado, pero también deseamos hacer más rápido nuestras tareas. Por otro lado, la nanociencia nos permite confrontar ideas y teorías de la mecánica cuántica, como aquellos relacionados con la teoría de muchos cuerpos, en donde ahora es posible tener “sistemas de prueba” realizables bajo condiciones “ideales” en los laboratorios. En particular como físicos, este tipo de sistemas nos pone en aprietos, ya que aun contando con teorías muy sólidas, la realidad es que todavía no sabemos en donde esta la frontera entre lo macroscópico y lo microscópico; como desarrollar métodos que consideren sistemas abiertos, en donde haya intercambios de energía, átomos, moléculas con el exterior; ni tampoco sabemos que leyes rigen el flujo hidrodinámico de estos mismos átomos y moléculas atravesando canales tan pequeños como los propios nanotubos, etcétera. En resumen, todavía hay mucho trabajo por delante para los físicos en este nuevo siglo.

6. Referencias

- [1] M. Turner, V. B. Golovko, O. P. H. Vaughan, P. Abdulkin, A. Berenguer-Murcia, M. S. Tikhov, B. F. G. Johnson, and R. M. Lambert, “Selective oxidation with dioxygen by gold nanoparticle catalysts derived from 55-atom clusters,” *Nature*, vol. 454, pp. 981 – 983, 2008.
- [2] C. Potera, “Understanding the germicidal effects of silver nanoparticles,” *Environmental Health Perspectives*, vol. 120, no. 10, p. A 386, 2012.
- [3] M. C. Roco, “Nanotechnology’s future,” *Scientific American*, vol. 39, p. 295, 2006.
- [4] A. L. Gonzalez, C. Noguez, and A. Barnard, “Map of the structural and optical properties of gold nanoparticles at thermal equilibrium,” *J. Phys. Chem. C*, vol. 116, p. 14170, 2012.

- [5] P. Cherukuri and S. A. Curley, "Use of nanoparticles for targeted, noninvasive thermal destruction of malignant cells," *Methods in Molecular Biology*, vol. 624, pp. 359–373, 2010.
- [6] C. Noguez, "Surface plasmons on metal nanoparticles: The influence of shape and physical environment," *J. Phys. Chem. C*, vol. 111, p. 3806, 2007.
- [7] A. M. Angulo, C. Noguez, and G. Schatz, "Electromagnetic field enhancement for wedge-shaped metal nanostructures," *J. Phys. Chem. Lett.*, vol. 2, p. 1978, 2011.
- [8] G. Peng, M. Hakim, Y. Y. Broza, S. Billan, R. Abdah-Bortnyak, A. Kuten, U. Tisch, and H. Haick, "Detection of lung, breast, colorectal, and prostate cancers from exhaled breath using a single array of nanosensors," *Br J Cancer*, vol. 103, pp. 542 – 551, 2010.
- [9] E. J. Blackie, E. C. Le Ru, M. Meyer, and P. G. Etchegoin, "Surface enhanced Raman scattering enhancement factors: A comprehensive study," *J. Phys. Chem. C*, vol. 111, pp. 13 794–13 803, 2007.
- [10] B. Pettinger, P. Schambach, C. J. Villagomez, and N. Scott, "Tip-Enhanced Raman Spectroscopy: Near-Fields Acting on a Few Molecules," in *ANNUAL REVIEW OF PHYSICAL CHEMISTRY*, ser. Annual Review of Physical Chemistry, Johnson, MA and Martinez, TJ, Ed., 2012, vol. 63, pp. 379–399.
- [11] D. Amabilino, *Chirality at the Nanoscale*. Wiley, 2009. [Online]: <http://books.google.com.mx/books?id=FQItTBxLBsC>
- [12] C. Noguez and I. L. Garzón, "Optically active metal nanoparticles," *Chem. Soc. Rev.*, vol. 38, pp. 757–771, 2009. [Online]: <http://dx.doi.org/10.1039/B800404H>

Materia ultrafría

Rosario Paredes, Instituto de Física, UNAM, México

1. Introducción

Comenzaremos discutiendo la noción de materia ultrafría. Se refiere a un conjunto macroscópico de átomos y/o moléculas en su fase líquida y/o gaseosa, que se rige por las leyes de la Mecánica Cuántica y la Física Estadística. Esto significa que su comportamiento es tal que exhibe las características propias de un fenómeno ondulatorio como los inherentes a la Mecánica Cuántica y que los átomos y/o moléculas, que de aquí en adelante denotaremos también como partículas, se distribuyen siguiendo la estadística de ser fermiones o bosones.

En apego a su capacidad de comportarse como onda, las partículas constituyentes de la materia ultrafría satisfacen el principio de de Broglie, que asocia una longitud de onda a cada partícula con momento p , $\lambda = \frac{h}{p}$. Dado que la manifestación de efectos cuánticos requiere que λ sea comparable con una distancia propia del sistema bajo estudio, es natural usar como referencia a la separación media entre partículas $n^{-1/3}$, así $h/p \geq n^{-1/3}$. Por otro lado el teorema de equipartición de energía establece que $p \approx (mk_B T)^{1/2}$. De aquí se desprende la relación entre temperatura y densidad de los sistemas macroscópicos que exhiben efectos cuánticos

$$k_B T \leq n^{2/3} \hbar^2 / m. \quad (1)$$

En lo concerniente a la Física Estadística las partículas ideales ocupan los estados cuánticos, denotados por p , de acuerdo a las distribuciones de Fermi-Dirac (F) y Bose-Einstein (B)

$$n_p^{F/B} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p - \mu)} \pm 1}, \quad (2)$$

correspondiendo el signo + a los fermiones y el signo - a los bosones. Dichas relaciones funcionales hacen posible que el comportamiento colectivo de fermiones o bosones refleje que cada estado cuántico pueda estar ocupado en forma única o que un número arbitrario de partículas pueda ocupar el mismo estado cuántico respectivamente. La existencia del fenómeno de la condensación de Bose-Einstein es una consecuencia directa de la estadística que rige a las partículas bosónicas: A temperatura diferente de cero, una fracción

macroscópica de estas ocupa el estado base de una partícula. Esta fue la predicción que Albert Einstein hizo en 1925 después de adecuar, para partículas materiales, el trabajo que Satyendra Nath Bose realizó al contabilizar el número de formas de distribuirse que tienen los fotones como función de la energía. 70 años después de la predicción teórica, se consiguió por primera vez en un laboratorio, la obtención de un estado muy parecido al Condensado de Bose-Einstein. Posteriormente, y como resultado de ese primer logro, en 1999 se produjo también un gas degenerado de Fermi. Estos dos sistemas son los protagonistas de la materia ultrafría y actualmente se han convertido en lo que se denomina un laboratorio ideal para la realización de fenómenos de muchos cuerpos con comportamiento cuántico.

2. La Física Estadística de la Condensación de Bose

Como es bien sabido existen dos tipos de átomos en la naturaleza: fermiones y bosones. Los fermiones son aquellos que tienen espín total semi-entero, mientras que los bosones tienen espín total entero. Los primeros obedecen la estadística de Fermi-Dirac, basada en el principio de exclusión Pauli, que prohíbe que más de una partícula ocupe el mismo estado cuántico, en tanto que los segundos se rigen por la estadística de Bose, que no tiene ninguna restricción en la ocupación de un estado cuántico dado. Debido a que los átomos están formados por protones, neutrones y electrones, que son fermiones elementales con espín $s = 1/2$, un átomo resultará ser fermión o bosón si está compuesto por un número impar o par de fermiones elementales respectivamente.

De acuerdo a la Física Estadística, las propiedades termodinámicas de un gas ideal cuántico se determinan trabajando en el ensamble gran canónico a través de la función Gran Potencial

$$\Omega(V, T, \mu) = -k_B T \sum_p \ln \left(e^{(-\epsilon_p + \mu)/k_B T} - 1 \right), \quad (3)$$

donde queda explícita la dependencia con la temperatura T y el potencial químico μ , en tanto que la dependencia en el volumen V permite considerar la geometría y dimensionalidad del sistema particular. En el caso de partículas contenidas en una caja en 3 dimensiones por ejemplo, se encuentra que

$$\frac{N}{V} = \frac{g_{3/2}(\mu/k_B T)}{\lambda^3} \quad (4)$$

siendo $\lambda = h/(2\pi m k_B T)^{1/2}$ y $g_{3/2}$ la función de Bose de 3/2 con argumento $\mu/k_B T$ [1]. Es importante enfatizar aquí que es precisamente el orden de esta función el que toma en cuenta el carácter geométrico y dimensional del potencial de confinamiento de los átomos. En particular, $n = 3/2$ es característico de una caja en tres dimensiones. En general, la transición a la condensación de Bose se hace evidente siguiendo el comportamiento de $g_n(\mu/k_B T)$. El potencial químico, que es siempre negativo para bosones, toma su valor

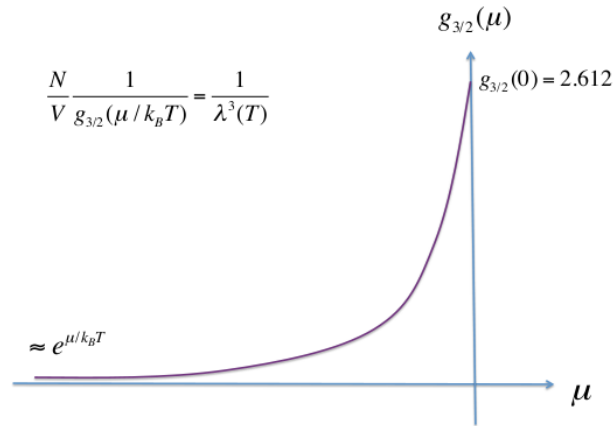


Figura 1: Se ilustra el comportamiento de la función de Bose $g_{3/2}$, como función del potencial químico μ .

máximo en $\mu = 0$ a $T \neq 0$. Particularmente, el caso de átomos confinados en una caja de volumen V permite, a través de la ecuación (4), llegar a la conclusión que la existencia de la condensación de Bose es consecuencia de que la función de Bose toma un valor finito cuando el potencial químico alcanza su valor máximo. En la figura (1) se ilustra la dependencia de $g_{3/2}$ como función de μ a una temperatura dada T . Se desprende de dicha figura la existencia de una temperatura crítica T_c a una densidad fija para la cual $\mu = 0$

$$\lambda^3(T_c) \frac{1}{g_{3/2}(0)} = \frac{N}{V}. \quad (5)$$

Es importante recalcar que la ecuación (4) es válida estrictamente para describir el número de partículas cuando $\mu \leq 0$. Dado que μ no puede tomar valores positivos, un decremento en la temperatura dará lugar a poblar macroscópicamente el estado base de una partícula. Por lo tanto se afirma que potencial químico es la variable que determina la ocurrencia de la transición a la fase condensada.

3. Condensación de Bose-Einstein en un laboratorio

La obtención del condensado de Bose en 1995 es resultado de los avances experimentales en el ámbito del enfriamiento [2, 3]. Dado que la existencia de un condensado ocurre a una densidad y temperatura específicas para un sistema particular, el gran logro consistió en enfriar a temperaturas del orden de 50 nK una muestra de átomos neutros, en su fase gaseosa, a una densidad de 10^{14} cm^{-3} . En particular, fueron el enfriamiento láser y el enfriamiento por evaporación las técnicas experimentales empleadas para obtener dichas condiciones en átomos alcalinos. Estas técnicas están basadas en el intercambio de energía

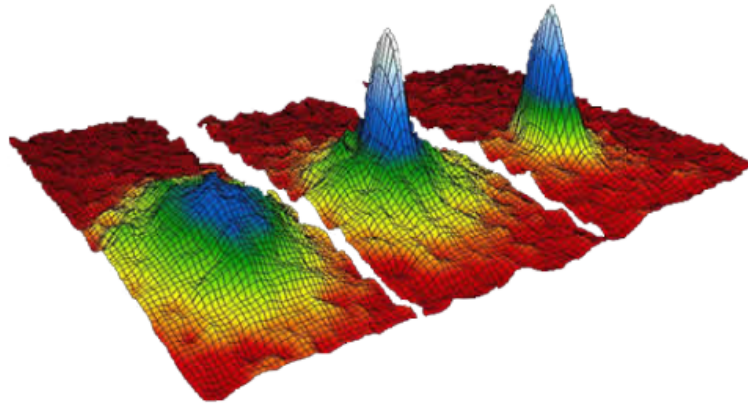


Figura 2: Se observa la distribución de velocidades de un gas de bosones durante la formación de un condensado. La figura izquierda corresponde a un gas a una temperatura mayor que la temperatura de condensación (T_c). La figura central es justo después de la aparición del condensado, y la figura derecha muestra un gas que tiene un menor número de átomos, pero el cual sigue en su fase condensada. La altura de los picos representa el número de átomos como función de la velocidad, siendo el pico más alto el que corresponde a los átomos con energía igual a cero.

debido a la interacción entre la materia y la radiación. Por medio del enfriamiento láser es posible alcanzar temperaturas del orden de $100 \mu\text{K}$, en tanto que el enfriamiento por evaporación permite que el gas llegue a temperaturas del orden de nK. En la siguiente sección se explica en forma concisa en qué consisten estas dos técnicas.

La realización de la condensación de Bose-Einstein en un laboratorio ocurrió por primera vez en 1995 en tres laboratorios en Estados Unidos, en Colorado, en Texas y en Massachusetts. En cada uno de ellos se obtuvieron una serie de imágenes de las nubes atómicas, a partir de las cuales es posible inferir el valor de la energía, la temperatura y el número de partículas en cada una de las etapas durante el proceso de formación del condensado. En la figura 2 se observa la distribución de velocidades de átomos de rubidio para diferentes temperaturas. Estas imágenes se obtuvieron utilizando el método de expansión, el cual consiste en permitir que la nube de gas se expanda libremente y que las posiciones de los átomos sean detectadas por medio de sensores ópticos. Dichas mediciones se traducen en el conocimiento de la densidad local.

Enfriamiento láser

Los átomos que se emplearon para obtener los primeros condensados fueron los alcalinos, debido a que se comportan como átomos hidrogenoides y poseen un momento dipolar magnético grande. Básicamente, el hecho que se comporten como átomos hidrogenoides significa que en su capa más externa tienen un solo electrón y es a través de

procesos de emisión y absorción de dicho electrón junto con su estructura hiperfina, que se consigue reducir la velocidad de los átomos en una distancia de 0.5 m de 570 m/s a 30 m/s. 570 m/s es la velocidad a la cual una nube conteniendo alrededor de 10^{10} átomos es producida en un dispositivo de ultra alto vacío evaporando átomos de una muestra sólida. La reducción en velocidad se consigue haciendo incidir fotones de energía ligeramente menor a la diferencia entre dos niveles hiperfinos del átomo. Estos serán absorbidos y emitidos gracias al efecto Doppler. Para conseguir este propósito es necesario tomar en cuenta el efecto Doppler que da lugar a que, desde el marco de referencia del átomo, éste perciba un corrimiento en la energía de los fotones incidentes sobre el mismo. Es por ello que la energía de los fotones incidentes debe ser adecuada o entonada para permitir que el proceso absorción-emisión tenga lugar. Si este requerimiento no se cumple la luz láser que incide sobre los átomos de la nube será transparente. De manera efectiva, la pérdida de energía o reducción en la velocidad de los átomos, es por absorción, debido a que cada átomo en un estado excitado emitirá instantáneamente un fotón en una dirección arbitraria. Es por esto que, en promedio, la pérdida de energía por emisión es cero, no así por el proceso controlado de absorción. Debido a que por cada fotón absorbido un átomo disminuye su velocidad en 3 cm/s se requieren aproximadamente 2×10^4 procesos de absorción para reducir la velocidad a 30 m/s. En la figura 3 se ilustra en forma esquemática uno de los ciclos completos del proceso de enfriamiento láser.

Enfriamiento por evaporación

Debido a que las temperaturas típicas que se consiguieron por medio del enfriamiento láser no fueron lo suficientemente bajas para llegar a la condensación de Bose, se implementó una técnica nueva en 1995 [2], y haciendo alusión a su fundamento de operación se le denominó enfriamiento por evaporación. Dicha técnica consiste en quitar selectivamente los átomos más energéticos del gas, y permitir que los átomos restantes alcancen el estado de equilibrio a través de colisiones, de tal forma que la temperatura final sea menor que la inicial antes de retirar los átomos más energéticos. En la práctica, la posibilidad de extraer selectivamente del gas los átomos más energéticos, se debe a que los átomos utilizados para producir los condensados de Bose-Einstein son altamente sensibles a la interacción con campos magnéticos por poseer un momento dipolar magnético alto. Los átomos neutros son confinados en un potencial magnético, que matemáticamente se describe a través de un oscilador armónico, quedando de esta forma bajo la influencia de desdoblamiento Zeeman y un potencial armónico dependiente de la posición. Aplicando un pulso de radio frecuencia con una energía igual a la asociada al máximo nivel del potencial armónico, se logra invertir el espín de dichos átomos. Los átomos en estas condiciones en lugar de estar sometidos a un potencial confinante debido al campo magnético quedan fuera de dicha influencia al invertir su espín. En la figura 4 se ilustra en forma esquemática el proceso de operación del enfriamiento por evaporación. En un laboratorio el proceso de enfriamiento por evaporación se lleva a cabo repetidamente, en lo que se

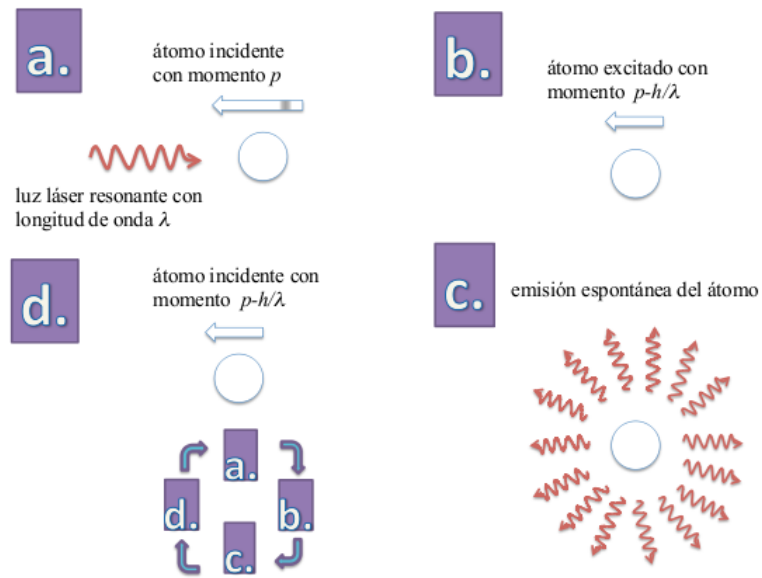


Figura 3: Se ilustra en forma esquemática el proceso de enfriamiento láser. Para hacer posible el enfriamiento tiene lugar un proceso cíclico en el que el átomo después de c puede continuar absorbiendo fotones para seguirse desacelerando. En cada ciclo el átomo pierde en promedio un momento h/λ

conoce como *rampa de enfriamiento*, hasta llegar a la temperatura y densidad para la cual el gas exhibe la transición al estado condensado. Vale la pena enfatizar que la transición al estado condensado requiere tanto de bajas temperaturas como densidades adecuadas

4. Gas degenerado de Fermi en un laboratorio

En lo que se refiere a los sistemas compuestos de fermiones, se tiene que en el laboratorio que las temperaturas necesarias para obtener un gas degenerado de Fermi son comparables a las que dan lugar a la condensación en un gas de Bose, es decir solo algunas millonésimas de Kelvin por encima del cero absoluto. La imposibilidad de los fermiones de ocupar el mismo estado, se traduce en la dificultad para enfriar un gas de Fermi. Como se explicó en la sección anterior, el mecanismo último durante el proceso de enfriamiento de un gas atómico corresponde a la termalización por colisiones entre pares de partículas. Sin embargo, en un gas de Fermi, esta situación no se produce de forma natural debido a que de manera efectiva los fermiones presentan una especie de repulsión entre ellos, como consecuencia del Principio de Exclusión de Pauli, y esto dificulta que las partículas interactúen a través de colisiones. Por tal motivo, el mecanismo que se empleó en el laboratorio para producir por primera vez un gas degenerado de Fermi fue combinar un gas

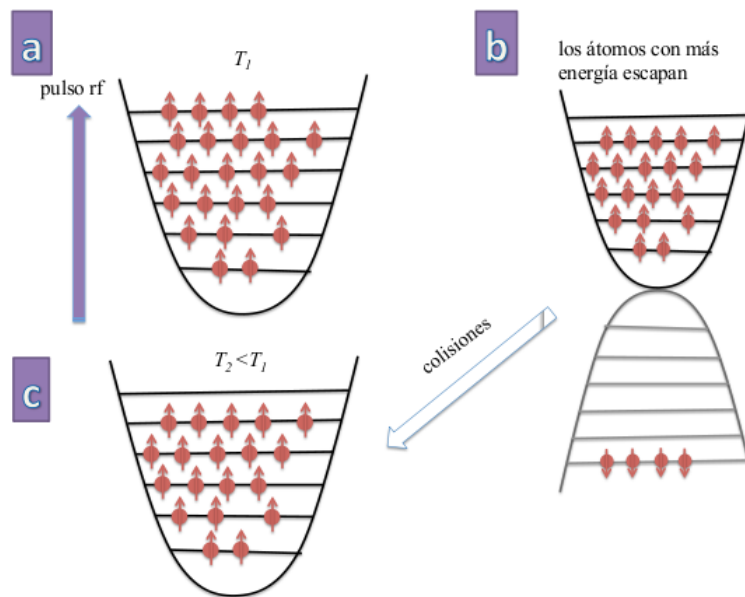


Figura 4: En a los átomos se encuentran en equilibrio, distribuidos en los diferentes niveles de energía del potencial de confinamiento y tienen una temperatura bien definida T_1 . b: Al aplicar un pulso de radio frecuencia con una energía igual a la máxima asociada al nivel del potencial armónico, los átomos más energéticos escapan. c: Los átomos alcanzan el estado de equilibrio por medio de colisiones entre ellos y el gas de bosones reduce su temperatura hasta un valor T_2 .

de Fermi, a la temperatura mínima que se podía alcanzar utilizando las técnicas de enfriamiento óptico explicadas antes, con un gas de bosones a temperatura mas baja, de tal forma que los fermiones pudieran chocar con los bosones menos energéticos, logrando de manera global disminuir la temperatura del gas de Fermi. No fue sino hasta 1999 cuando se produjo un gas degenerado de Fermi utilizando esta técnica que se conoce como enfriamiento asistido.

5. Gases ultrafríos con interacción

La predicción de la existencia del estado condensado en sistemas bosónicos hecha por Albert Einstein en su artículo de 1925 se refiere a sistemas en los que no se consideran las interacciones. En la naturaleza estos sistemas no existen. Como lo establece la ecuación (5), la temperatura a la cual ocurre condensación de Bose está definida en relación a su densidad. Sin embargo, la densidad no puede aumentarse arbitrariamente dado que dicha ecuación es válida para gases ideales. Es por ello que los gases ultrafríos que se producen en el laboratorio tienen densidades muy bajas, 10^5 veces más diluidos que el

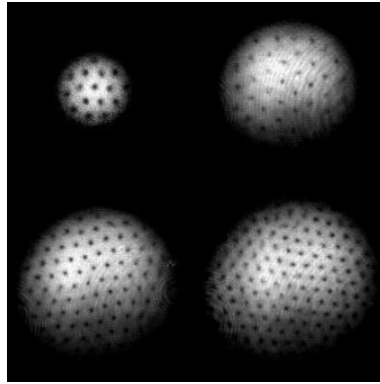


Figura 5: Imágenes de un gas de Bose en su fase condensada. Las fotografías muestran un número variable de vórtices, que se incrementa como función de la velocidad de rotación del condensado. (Tomada de The Magic of Matter Waves physics@MIT, Departmental Newsletter 2001) .

aire que respiramos. Cabe resaltar que aun en ese caso las interacciones están presentes. En principio es imposible desaparecer las interacciones intrínsecas entre los átomos. De hecho, como se menciona antes, la presencia de las interacciones es fundamental en la operación de la técnica de enfriamiento por evaporación, la forma en la que un gas en el que han sido removidas las partículas con mayor energía alcanza el estado de equilibrio es redistribuyendo su energía entre todo el sistema. Dicho proceso ocurre como resultado de las colisiones entre partículas. Por otro lado, la realización experimental de la condensación de Bose mostró que, como se esperaba, las interacciones entre los átomos están presentes aún en el límite de baja dilución. Este hecho fue constatado al hacer rotar el gas en su fase condensada y observar la formación de vórtices. La formación de vórtices ocurre cuando un sistema en su fase superfluida es sometido a rotar, en lugar de que el sistema gire como un todo, se forma un arreglo o red de vórtices como consecuencia del comportamiento cuántico de las partículas que componen al gas; en su movimiento circular, la circunferencia de su órbita tiene que ser un múltiplo entero de la longitud de onda de de Broglie. En la figura 5 se muestran las imágenes obtenidas al hacer rotar el gas en su estado condensado conforme la velocidad de rotación se incrementa.

La descripción completa de las colisiones que ocurren entre los átomos que conforman un gas es muy complicada, de hecho, no se tiene un marco teórico que permita hacer tal descripción en general, los gases ultrafríos tienen dos peculiaridades que nos permiten aproximar de manera precisa y relativamente sencilla cómo ocurren tales colisiones. Estas dos características son, una, el que están muy diluidos y dos que están muy fríos. De la primera podemos considerar que la colisiones sólo ocurren entre parejas de átomos, es decir, suponemos que la probabilidad, de que tres o más átomos se involucren en el mismo choque, es tan baja que la podemos ignorar. Y segundo, el que el gas está muy frío sugiere que las colisiones ocurren entre parejas de átomos que tienen muy baja energía cinética.

En este caso, aunque la descripción debe hacerse desde la perspectiva de la mecánica cuántica, veremos que la descripción de la colisión se reduce a conocer un sólo parámetro, la llamada longitud de dispersión a .

El análisis de una colisión entre dos átomos requiere de conocer el potencial de la fuerza interatómica entre ellos, que denotamos como $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ donde \vec{r}_1 y \vec{r}_2 son las posiciones de los dos átomos en cuestión. Esto es muy complicado ya que depende de cuántos electrones, protones y neutrones tenga cada átomo. Sin embargo, supongamos que conocemos tal potencial. Desde la perspectiva de la mecánica cuántica, una colisión describe cómo se dispersan las ondas que describen el estado de cada átomo al acercarse uno al otro. Resulta ser que la colisión puede considerarse como una suma de diferentes colisiones, cada una correspondiendo a un diferente orden del momento angular de los átomos. Así, la colisión se puede ver como ondas planas que al acercarse, debido a la interacción, se dispersan en muchas ondas en diferentes direcciones dependiendo de su momento angular. Cada contribución de onda tiene su fase alterada o corrida, y son estos corrimientos de fase los que la teoría permite calcular si se conoce con detalle el potencial. Es decir, conocer los corrimientos de fase es equivalente a describir la colisión. Este procedimiento es aún un trabajo formidable y muy difícil de hacer en general. Y es aquí donde el hecho de que el gas está muy frío llega al rescate. Si un gas está muy frío nos indica que la energía cinética de los átomos es muy baja y, por ende, las colisiones ocurren sólo entre átomos a muy baja energía. Cuando esto ocurre, se puede mostrar que de todos los corrimientos de fase sólo uno es importante, el llamado corrimiento de fase de onda s y que es el que corresponde a la contribución de momento angular cero. Desde un punto de vista pictórico, como lo sugiere la figura 6, la onda dispersada por la colisión es una onda esférica que emana desde el punto de la colisión, sin embargo, con su fase corrida por un valor $\delta_0 = ka$ donde k es el vector de onda de la onda incidente y a es la llamada longitud de dispersión. La onda dispersada la podemos escribir así,

$$\psi_{sc}(r) \approx -\frac{a}{r} e^{ik(r-a)}. \quad (6)$$

El vector de onda sólo depende de la energía incidente del átomo, que es muy baja, por medio de la expresión $E = \hbar^2 k^2 / 2m$, mientras que la longitud de dispersión a depende crucialmente del potencial de interacción entre los átomos $U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$. Recalcamos que no es sólo el valor absoluto de a lo que importa sino su signo también. Este valor, incluido su signo, se calcula resolviendo la ecuación de Schrödinger de la colisión en la aproximación en que sólo el momento angular de valor cero contribuye. No es una tarea sencilla, sin embargo, existen toda clase de técnicas numéricas para hacerlo conociendo de antemano el potencial, que a su vez es medido experimentalmente. Es de notarse que algo tan complejo como la colisión cuántica entre dos átomos “fríos” se reduzca a un sólo parámetro, la longitud de dispersión a . Pero no hay que engañarse, aún así, este parámetro, y su signo, ayudan a predecir la gran riqueza de fenómenos que ocurren en estos gases. Regresando al hecho que el gas ahora lo visualizamos como uno de átomos colisionando sólo por pa-

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2 + \frac{1}{a^2}}$$

$$\vec{k}_{sc} = k \hat{r}$$

$$\psi_{inc} = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad \psi_{sc} = -\frac{a}{r} e^{ik(r-a)} \quad r \gg r_0$$

Figura 6: Se ilustra el proceso de dispersión a bajas energías en el sistema de coordenada relativa.

res y que las colisiones sólo son de onda s , se puede argüir que el potencial efectivo que sienten los átomos se aproxima como,

$$U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \approx \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (7)$$

donde $\delta^3(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ es la función delta de Dirac en tres dimensiones. Es decir, en esta aproximación en que dominan las colisiones de onda s , el potencial efectivo que describe adecuadamente el corrimiento de fase solo depende de la longitud de dispersión a .

Para los fenómenos de muchos cuerpos del gas, el signo de a es crucial. Si el signo de a es positivo, se dice que el potencial es netamente repulsivo, si es negativo, el potencial es netamente atractivo. Como resultado de este hecho, si el gas es de bosones, un potencial repulsivo balancea la "atracción" natural de los bosones y hace que el gas sea estable; análogamente, si el gas es de fermiones, el potencial debe ser atractivo para balancear la "repulsión" natural de los fermiones. Cuando esto ocurre, emerge la fase superfluida de los fluidos cuánticos. Hoy en día es posible controlar de forma externa el signo de a por medio de campos magnéticos en sistemas macroscópicos [4]. En los bosones el estado de muchos cuerpos de un gas de débilmente interactuante, queda descrito por la ecuación de Gross-Pitaevskii, mientras que para los fermiones es un gas de pares de Cooper y se describe por el estado de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS). Estos se discutirán brevemente más adelante.

6. Átomos fríos: Un laboratorio cuántico

La realidad actual es que es posible manipular gases atómicos ultrafríos confinados en diversos potenciales inhomogéneos con el fin de controlar en muchos de los casos su

dinámica misma. La capacidad de controlar la geometría, dimensionalidad e interacciones entre los átomos, aunado a las propiedades intrínsecas de los fermiones y los bosones ha dado lugar a que esencialmente todas las predicciones y resultados teóricos y experimentales de la materia condensada, sean susceptibles de ser reproducidos experimentalmente. Por ejemplo puede mencionarse el caso de las llamadas redes ópticas de bosones y/o fermiones, que son el análogo de redes cristalinas en sólidos; la transición a un estado de tipo superfluido en gas de Fermi con interacciones; las juntas de Josephson en un condensado de Bose; el fenómeno de localización de Anderson en fermiones y bosones, la existencia de los cruces prohibidos de energía en el modelo de Landau-Zener, por mencionar algunos. En esta sección revisaremos en forma breve la descripción teórica de dos de estos sistemas.

Condensados de Bose en redes ópticas

Las redes ópticas son un campo de luz estacionario formado como resultado de la interferencia de luz láser propagándose en sentidos contrarios. Este campo de luz puede ser un arreglo periódico en 1, 2 o 3 dimensiones, o en general un potencial óptico con pozos de profundidad variable. Dichos arreglos son el análogo de las redes cristalinas en sólidos en las que el potencial periódico de los iones se crea por medios ópticos. En la figura (7) se muestran algunas de las configuraciones logradas en los laboratorios. Una vez que se ha alcanzado la transición al estado condensado, el gas ultrafrío es transferido al potencial óptico y se le permite evolucionar libremente o modificando *in situ* la configuración del potencial óptico para estudiar su dinámica de tunelaje a través de los pozos de potencial. Se ha encontrado que en el gas de Bose confinado ocurren dos comportamientos extremos: oscilaciones coherentes y autoatrapamiento. Dichos estados son el análogo de los estados superfluido y aislante de Mott característicos de las fases cuánticas. Las descripciones teóricas de condensados de Bose en redes ópticas se hacen a través de dos esquemas diferentes; el semiclásico o campo medio y el cuántico o de Bose-Hubbard. Ambas aproximaciones permiten estudiar la evolución dinámica y los estados estacionarios del gas de Bose. En forma breve se describe a continuación el modo en el que operan así como sus alcances y limitaciones.

En el caso de la aproximación semiclásica el punto de partida es la ecuación de Gross-Pitaevskii. El potencial óptico es tomado en cuenta en la ecuación de Gross-Pitaevskii reemplazando el potencial armónico creado por la trampa magnética por el campo de luz $V_{opt}(r)$:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(r, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi(r, t) + (V_{opt}(r) + U_i |\Psi(r, t)|^2) \Psi(r, t). \quad (8)$$

La presencia del potencial óptico da lugar a considerar la geometría particular de cada potencial confinante. Hasta ahora se ha abordado ampliamente el problema de redes ópticas unidimensionales, siendo menor el terreno explorado en el caso de configuraciones en 2 y 3 dimensiones. En el caso de arreglos en 1 dimensión, el número de pozos que compo-

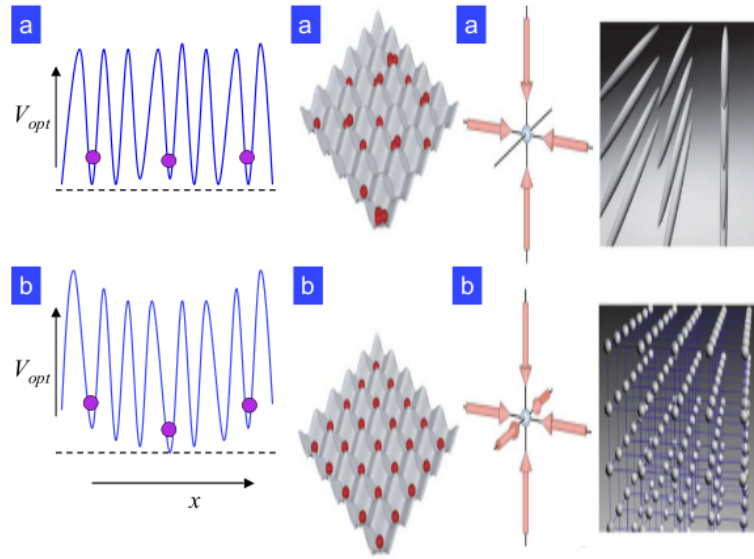


Figura 7: Se ilustran diferentes configuraciones de potenciales de confinamiento para bosones, creados por medios ópticos.

nen el potencial de confinamiento da lugar a un sistema de ecuaciones acopladas igual al número de pozos. Este resultado es consecuencia de trabajar en la aproximación conocida como la de n modos, asociados al número de niveles presentes en la primera banda de energía en un potencial de n pozos. La forma explícita las ecuaciones a resolver es

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i}{\partial t} = (E_i^0 + U_0) \psi_i - \sum_{i,j} K_{ij} \psi_j \quad (9)$$

donde $E_i^0 = \frac{\hbar^2}{2m} \int |\nabla \phi_i|^2 dr + \int |\phi_i|^2 V_{opt}(r) dr$, $U_0 = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m}$ y $K_{ij} = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \nabla \phi_i \nabla \phi_j + \int \phi_i V_{opt} \phi_j$, con ϕ_i $i = 0, \dots, n-1$ las funciones de onda de una de una partícula en el potencial de n pozos. El estudio de la dinámica de tunelaje entre pozos basado en la resolución numérica de las ecuaciones (9) permite predecir la existencia de los estados con oscilaciones coherentes y autoatrapamiento.

La aproximación cuántica o de Bose-Hubbard es un modelo que se deduce directamente de la teoría de segunda cuantización tomando en cuenta la aproximación de n -modos y que las funciones de onda de una partícula están localizadas en cada pozo de potencial que compone a la red en 1 dimensión [5]. Adicionalmente, es posible hacer una consideración que tome en cuenta la geometría particular del potencial confinante. El Hamiltoniano efectivo que describe la dinámica del sistema para un potencial compuesto de

n pozos simétricos con respecto al origen es [5]:

$$\mathcal{H}_{eff} = - \sum_{i,j=1}^n \Delta_{i,j} [b_i^\dagger b_j + b_j^\dagger b_i] + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \sum_{i=1}^n b_i^\dagger b_i^\dagger b_i b_i. \quad (10)$$

b_i^\dagger y b_i son los operadores de creación y aniquilación de partículas en el pozo i , y satisfacen también las reglas usuales de conmutación para bosones. Este Hamiltoniano es válido mientras las siguientes dos suposiciones se cumplan: i) sólo los estado asociados a los n niveles de energía ligados en el potencial de n pozos participan en la dinámica del sistema y ii) se satisface que el traslape de las funciones de onda localizadas en cada pozo es despreciable, las únicas interacciones relevantes son aquellas en las que las partículas están dentro del mismo pozo.

A partir del Hamiltoniano (10) se concluye que la dinámica de un gas de Bose, confinado en un potencial de n pozos, está gobernada por los coeficientes Δ_{ij} y a , es decir por el coeficiente de acoplamiento de tunelaje de partículas entre diferentes pozos y por el coeficiente que modula la interacción entre pares de partículas dentro del mismo pozo [6]. Usando el Hamiltoniano (10) se ha estudiado la dinámica de un gas de bosones confinado en potenciales compuestos de 3 y 4 pozos en una dimensión [7, 8]. En estos trabajos se ha establecido la dependencia de la transición de fase del estado superfluido al estado conocido como aislante de MOTT. En el primero los átomos se desplazan en forma coherente a través de las barreras de potencial, mientras que en el segundo permanecen esencialmente localizados en el pozo en el que inicialmente fueron colocados. La ventaja de estudiar sistemas de Bose confinados en redes ópticas en el contexto del modelo de Bose-Hubbard con respecto a la aproximación de campo medio es que se pueden determinar propiedades no sólo de un cuerpo, sino de un número arbitrario, lo cual es relevante debido a la potencial capacidad de la mediciones experimentales.

Cruce BEC-BCS en un gas de fermiones interactuantes

Después de la realización experimental de un gas degenerado de Fermi a partir de un gas diluído de potasio [9], se descubrió que en un gas de bosones, también a muy bajas densidades y temperaturas, la magnitud de las interacciones entre pares de partículas se hacía notoriamente mayor a medida que un campo magnético externo era variado [4]. Esta capacidad de controlar las interacciones entre pares de partículas, y en particular de conseguir estados ligados, es consecuencia del uso de lo que se conoce como resonancias de Feshbach [10]. En gases diluídos, dichas resonancias dan lugar a la posibilidad de variar en forma continua la longitud de dispersión a que caracteriza cada proceso de colisión. Como se menciona en la sección referente a las interacciones, en el límite de bajas energías, el proceso de dispersión está representado por la longitud de dispersión a que determina el estado final de dos átomos que colisionan, sin importar la forma detallada del potencial de interacción entre ellas. Para valores positivos (negativos) de a los átomos experimentan una interacción efectiva repulsiva (atractiva).

Debido al Principio de Exclusión de Pauli, en un gas degenerado de Fermi no ocurre la dispersión de onda s . Sin embargo, la formación de moléculas y pares de átomos entre átomos con el mismo estado interno es posible a partir de una mezcla de fermiones en dos estados hiperfinos diferentes. A bajas temperaturas, estas moléculas y pares de átomos pueden formar un condensado de Bose-Einstein o un estado superfluido tipo BCS [11]. En años recientes se ha encontrado evidencia experimental de que los gases compuestos por una mezcla de fermiones en dos estados hiperfinos, exhiben también la formación de vórtices cuando son puestos a rotar [12] (ver figura 5).

Como es bien sabido, la teoría microscópica que describe el estado de un gas degenerado de Fermi compuesto de electrones con interacciones atractivas, es la teoría BCS, formulada en 1957 por Bardeen, Cooper y Schrieffer [11]. En dicha teoría los electrones son considerados como partículas libres con un potencial efectivo atractivo. En los experimentos actuales el nuevo estado de la materia formado a partir de los átomos neutros, y cuyas interacciones se pueden modificar externamente, es también un estado superfluido. Sin embargo, es importante enfatizar que la hipótesis esencial de la teoría BCS, que considera que solamente los electrones con energía comparable a la energía de Fermi participan en la formación de pares de Cooper o formación de partículas ligadas [13], debe ser reemplazada para incluir en principio todas las energías. Esta es la esencia del trabajo desarrollado por Eagles y Leggett para describir el fenómeno de superfluidez en gases de ^3He y ^4He en 1980 [14, 15]. Usando esta teoría, que también es conocida como aproximación de campo medio, se ha estudiado la termodinámica de un gas de Fermi compuesto de una mezcla de átomos en dos estados hiperfinos diferentes, como función de la longitud de dispersión a . En el caso de un potencial homogéneo el Hamiltoniano que describe a la mezcla es

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\sum_{i=1}^{N_\uparrow} p_i^2 + \sum_{j=1}^{N_\downarrow} p_j^2 \right) + \sum_{i,j} U_{ij}. \quad (11)$$

donde $U_{i,j}$ es el potencial de interacción. En general se considera un potencial de interacción entre pares de contacto [16].

Tanto la teoría BCS como la desarrollada por Eagles y Leggett, hacen uso de una función de prueba variacional que es la superposición de todas las posibles combinaciones de pares de átomos en estados hiperfinos diferentes ($|\Psi_{BCS}\rangle$), tal que trabajando en el ensamble gran canónico, el valor de expectación del gran potencial es

$$\langle \Psi_{BCS} | \Omega | \Psi_{BCS} \rangle = \sum_k \left[(\epsilon_k - \mu) - \sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2} \right] + \frac{1}{2} \Delta^2 \sum_k \frac{1}{\epsilon_k} - U_0 \frac{m}{4\pi \hbar^2} \Delta^2 \eta, \quad (12)$$

donde $\epsilon_k = \hbar^2 k^2 / 2m$ y el "gap" Δ es una función de (T, μ, η) dada por la ecuación tras-

cendental,

$$\frac{1}{U_0} \sum_k \left[\frac{1}{\sqrt{(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2}} - \frac{1}{\epsilon_k} \right] = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \eta. \quad (13)$$

Estas dos ecuaciones permiten obtener, $\Omega = \Omega(V, \mu, \eta)$. Cabe resaltar que esta forma del gran potencial es obtenida considerando que se introducen explícitamente los contraterminos necesarios para evitar la divergencia ultravioleta que tiene lugar como consecuencia del uso de un potencial de contacto. Aunque estrictamente la aproximación de campo medio es solamente válida en el régimen de interacciones débiles, el cual requiere que $N|a|^3/V \ll 1$, se puede considerar como correcta la expresión para $\langle \Omega \rangle$ para el límite $|\eta| = 1/a \rightarrow \infty$. Con ello se describen las propiedades termodinámicas en el cruce BEC-BCS a temperatura cero.

El efecto de temperatura finita se puede introducir considerando la entropía de un gas de quasipartículas sin interacción

$$S = -k_B \text{Tr} \hat{\rho} \ln \hat{\rho}, \quad (14)$$

donde Tr denota la traza. En esta ecuación, la matriz de densidad está dada por,

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\Xi} \exp\left(\frac{\mu}{k_B T} \hat{N} - \frac{1}{k_B T} \hat{H}\right) \quad (15)$$

donde \hat{N} es el operador de número de partículas y \hat{H} el Hamiltoniano del sistema (el cual depende paraméricamente de la longitud de dispersión a). Así se obtiene una expresión para la gran función de partición Ξ ,

$$\Xi = \text{Tr} \exp\left(\frac{\mu}{k_B T} \hat{N} - \frac{1}{k_B T} \hat{H}\right). \quad (16)$$

Terminando de esta forma con la ecuación para el gran potencial es $\Omega = -kT \ln \Xi$, en función de la temperatura T ,

$$TS = E - \mu N - \Omega. \quad (17)$$

donde $E = \langle \hat{H} \rangle$ es la energía promedio. Con la expresión

$$\Omega(T, V, \mu, \eta) = E - \mu N - TS, \quad (18)$$

se está en posibilidad de determinar todas las propiedades termodinámicas. En particular, entre las propiedades termodinámicas más interesantes en el actual contexto experimental se encuentra la determinación de la variable contacto

$$c = - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right)_{V, T, \mu}. \quad (19)$$

Dicha variable fue recientemente introducida por S. Tan [17] y ha sido determinada en forma experimental. Además su relación con el gap es como sigue:

$$C = U_0 \frac{m}{4\pi\hbar^2} \Delta^2. \quad (20)$$

Vale la pena resaltar que todo el cálculo anterior, es decir la termodinámica completa, puede realizarse de forma numérica exacta si se considera un potencial interatómico arbitrario de corto alcance. Por otro lado, si se trabaja fuera de la aproximación de campo medio es posible tratar sistemas compuestos de cientos de partículas para determinar numéricamente sus propiedades físicas.

7. El reto de una computadora cuántica

Como resultado del control en el comportamiento dinámico de gases ultrafríos de Fermi y Bose confinados por potenciales ópticos periódicos [18–21], i.e. por redes ópticas, y la coherencia existente en estos arreglos [22, 23], se ha especulado en la posibilidad de utilizar dichos sistemas para implementar procesos de información cuántica, tales como el cómputo cuántico¹. Vale la pena recordar que en el cómputo actual la unidad básica es el *bit*, que en general, es un dispositivo electrónico que puede tomar dos valores, 0 o 1. En el contexto de la mecánica cuántica sin embargo, la unidad fundamental, el llamado *q-bit*, que puede ser por ejemplo un átomo, tiene acceso a estar en una superposición de estados, reemplazando los dos únicos posibles estados del *bit* por dos o más estados; la diferencia esencial, además de una mayor cantidad de estados, es que en lugar de estar en 0 o 1, un *q-bit* puede estar simultáneamente en una superposición de estados. La repercusión en la ingeniería del cómputo se traduciría en la capacidad de realizar cálculos en forma masiva. Sin embargo, debido a que los gases ultrafríos confinados en redes ópticas están constituidos de muchos cuerpos y a su naturaleza cuántica intrínseca, la capacidad de manifestar coherencia al medir diferentes cantidades físicas se pierde, en otras palabras, se hace presente el fenómeno de decoherencia. Este último término se usa para designar el desconocimiento del estado cuántico del sistema, producto de la incapacidad de realizar un conjunto completo de medidas. Entre otras consecuencias, la ocurrencia de este hecho, da lugar a la cancelación de fases que definen al estado cuántico por completo, desprendiéndose de aquí el nombre de decoherencia. Dicha cancelación se atribuye en parte a las interacciones presentes en el sistema y en parte a su comportamiento ondulatorio propio. El resultado final al realizar la medida de una cantidad física entre mezcla el aspecto estadístico inherente a los sistemas de muchos cuerpos y el probabilístico asociado a la mecánica cuántica, traduciéndose la medición en una que caracteriza a un estado clásico. Hoy en día es un todo un campo de investigación la determinación y caracterización de la decoherencia en sistemas multicomponentes, es así que aun no es una realidad el cómputo cuántico.

¹ Véase el capítulo “Información cuántica” de Carlos Pineda, en este mismo volumen.

8. Referencias

- [1] F. Reif and F. Reif, *Fundamentals of statistical and thermal physics*. McGraw-Hill New York, 1965, vol. 11.
- [2] M. Anderson, J. Ensher, M. Matthews, C. Wieman, E. Cornell *et al.*, "Observation of Bose-Einstein condensation in a dilute atomic vapor," *science*, vol. 269, no. 5221, pp. 198–201, 1995.
- [3] K. Davis, M. Mewes, M. Andrews, N. Van Druten, D. Durfee, D. Kurn, and W. Ketterle, "Bose-Einstein condensation in a gas of sodium atoms," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 22, pp. 3969–3973, 1995.
- [4] C. Regal and D. Jin, "Experimental realization of the BCS-BEC crossover with a Fermi gas of atoms," *Advances In Atomic, Molecular, and Optical Physics*, vol. 54, pp. 1–79, 2006.
- [5] R. Paredes, "Tunneling of ultracold Bose gases in multiple wells," *Physical Review A*, vol. 73, no. 3, p. 033616, 2006.
- [6] R. Munoz-Rodriguez, R. Paredes, and R. Duarte-Zamorano, "Effective Hamiltonian of an ultracold Bose gas confined in a four-well optical lattice," *Revista mexicana de física*, vol. 53, no. 2, pp. 126–132, 2007.
- [7] S. Sonntag, C. Trichet Paredes, J. Roth, and H. Trebin, "Molecular dynamics simulations of cluster distribution from femtosecond laser ablation in aluminum," *Applied Physics A: Materials Science & Processing*, vol. 104, no. 2, pp. 559–565, 2011.
- [8] R. Paredes and E. Neri, "Quantum dynamics of a Bose gas in finite n-well potentials in one dimension," *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, vol. 42, no. 3, p. 035301, 2009.
- [9] B. DeMarco and D. Jin, "Onset of Fermi degeneracy in a trapped atomic gas," *Science*, vol. 285, no. 5434, pp. 1703–1706, 1999.
- [10] H. Feshbach, "The electron correlation interaction is part of the electron-electron interaction whose partition into different terms may be performed using the projection operator method given by ann," *Phys.(New York)*, vol. 5, p. 537, 1958.
- [11] J. Bardeen, L. Cooper, and J. Schrieffer, "Theory of superconductivity," *Physical Review*, vol. 108, no. 5, p. 1175, 1957.
- [12] M. Zwierlein, J. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C. Schunck, and W. Ketterle, "Vortices and superfluidity in a strongly interacting Fermi gas," *Nature*, vol. 435, no. 7045, pp. 1047–1051, 2005.

- [13] L. Cooper, "Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas," *Physical Review*, vol. 104, no. 4, p. 1189, 1956.
- [14] A. Leggett, "Macroscopic quantum systems and the quantum theory of measurement," *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, vol. 69, pp. 80–100, 1980.
- [15] D. Eagles, "Possible pairing without superconductivity at low carrier concentrations in bulk and thin-film superconducting semiconductors," *Physical Review*, vol. 186, no. 2, p. 456, 1969.
- [16] L. Landau, E. Lifshitz, J. Sykes, J. Bell, and M. Rose, "Quantum mechanics, non-relativistic theory: Vol. 3 of course of theoretical physics," *Physics Today*, vol. 11, p. 56, 1958.
- [17] S. Tan, "Energetics of a strongly correlated Fermi gas," *Annals of Physics*, vol. 323, no. 12, pp. 2952–2970, 2008.
- [18] F. Cataliotti, S. Burger, C. Fort, P. Maddaloni, F. Minardi, A. Trombettoni, A. Smerzi, and M. Inguscio, "Josephson junction arrays with Bose-Einstein condensates," *Science*, vol. 293, no. 5531, pp. 843–846, 2001.
- [19] M. Greiner, O. Mandel, T. Esslinger, T. Hänsch, I. Bloch *et al.*, "Quantum phase transition from a superfluid to a Mott insulator in a gas of ultracold atoms," *Nature*, vol. 415, no. 6867, pp. 39–44, 2002.
- [20] M. Albiez, R. Gati, J. Fölling, S. Hunsmann, M. Cristiani, and M. Oberthaler, "Direct observation of tunneling and nonlinear self-trapping in a single bosonic Josephson junction," *Physical review letters*, vol. 95, no. 1, p. 10402, 2005.
- [21] G. Roati, E. De Mirandes, F. Ferlaino, H. Ott, G. Modugno, and M. Inguscio, "Atom interferometry with trapped Fermi gases," *Physical review letters*, vol. 92, no. 23, p. 230402, 2004.
- [22] J. Cirac, P. Zoller, H. Kimble, and H. Mabuchi, "Quantum state transfer and entanglement distribution among distant nodes in a quantum network," *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 16, pp. 3221–3224, 1997.
- [23] J. García-Ripoll, P. Zoller, and J. Cirac, "Coherent control of trapped ions using off-resonant lasers," *Physical Review A*, vol. 71, no. 6, p. 062309, 2005.

Información cuántica

Carlos Pineda, Instituto de Física, UNAM, México

1. Historia y algunos prerequisites

En este capítulo presentaremos una perspectiva de la situación actual de la información cuántica, tanto para físicos como para estudiantes de disciplinas afines y de ciencia en general. Introduciremos algunos conceptos necesarios para entender el problema a tratar y para poder maravillarse con los obstáculos y las soluciones que se han dado durante el desarrollo de esta área. En la primera parte, daremos una breve introducción a la mecánica cuántica y a algunas de sus más increíbles consecuencias. Así mismo, hablaremos de como entendemos la *información* y a continuación relacionaremos esta idea matemática con el mundo en que vivimos. Posteriormente comentaremos algunos de los desarrollos teóricos y experimentales que se han dado en el área, para proceder a dar una idea de hacia donde se desarrollará esta línea en el futuro cercano.

Mecánica cuántica. La teoría de la mecánica cuántica nació en 1900, cuando Max Planck explicó una contradicción de las teorías físicas establecidas en ese entonces mediante la adición de un pequeño postulado. Dichas teorías predecían que un cuerpo que absorbera toda la luz y energía que incidiera sobre él¹, emitiría una cantidad *infinita* de energía. El fenómeno recibe el nombre de la *catástrofe ultravioleta* y se solucionó asumiendo que la energía no puede tener valores arbitrarios, sino que esta viene por paquetes de determinado tamaño, es decir, que está *cuantizada*. Dicha explicación resulta tan extraña, que a pesar de dar solución al problema, no se reconoció inmediatamente como un aspecto fundamental de la naturaleza y fue necesario que Albert Einstein aclarara la situación (trabajo que le valió el premio Nobel). Más adelante, cuando vino un desarrollo teórico más profundo a cargo de Erwin Schrödinger, Paul Dirac y otros, incluso el mismo Einstein, se resistió a creer algunas de las consecuencias de la mecánica cuántica por considerarlas demasiado exóticas [1].

En el formalismo cuántico, toda la información relevante de un sistema físico se abstrae a un espacio matemático sencillo llamado espacio vectorial, o para ser más precisos,

¹ Un objeto con dichas características es llamado *cuerpo negro* por los especialistas.

un espacio de Hilbert. Esta abstracción es extremadamente cómoda, ya que permite tratar sistemas físicos muy diferentes usando exactamente las mismas herramientas matemáticas. El sistema físico más simple contiene un solo estado, lo cual lo hace poco interesante, puesto que no posee dinámica y entonces no lo podemos modificar. En resumidas cuentas, no podemos jugar con él. El siguiente sistema físico, en cuanto a complejidad, tiene dos estados diferentes. Éste, resulta tan importante que recibe el nombre de *qubit* en analogía con la unidad básica de información clásica: el bit. El qubit encierra ya una gran riqueza, pues aunque el bit solo puede estar en uno de dos estados, el qubit puede estar en una superposición de estos dos estados. Las formas de implementar un qubit son tan abundantes como animales en un zoológico. Algunos ejemplos incluyen, bajo ciertas condiciones, la polarización de un fotón, el espín de un núcleo, la posición de un átomo neutro y la energía de un electrón en un átomo. Todos ellos están descritos por los mismos objetos matemáticos y por consiguiente todas las ideas que se expondrán, pueden ser implementadas en dichos sistemas.

Una de las consecuencias más extrañas de la estructura matemática subyacente de la mecánica cuántica es la posibilidad de tener superposiciones coherentes de soluciones. Esto significa que si para determinado problema físico tenemos dos soluciones, estas pueden coexistir simultáneamente. Por ejemplo, si es posible que en un experimento un gato encerrado en una caja este vivo, pero también es posible que este muerto, otra solución admisible es que se encuentre simultáneamente vivo y muerto. ¡Estos comportamientos “exóticos” ya han sido observados experimentalmente!, ciertamente no con gatos sino con átomos y objetos microscópicos, aunque ya hay propuestas de hacer superposiciones con organismos vivos.

Este par de principios tienen como consecuencia alucinante la posibilidad de realizar teleportación. Para comprender algunas sutilezas de este procedimiento es crucial entender el rol que tiene la información en la naturaleza. En un objeto dado, como una silla, no es importante únicamente la masa que lo compone, sino también la forma en que ésta está organizada. Por ejemplo, moléculas cuyos átomos tienen diferente distribución espacial (isómeros estructurales) tienen propiedades diferentes (como los diferentes tipos de pentano). De igual manera, lo único que diferencia al autor de una vaca (con la misma masa) es la forma en que están organizados los átomos que los constituyen. *De esta forma, lo que se desea teleportar no es la masa, sino la información que alberga dicha masa.* Aclarando este punto, estamos listos para precisar en que consiste la teleportación. Este proceso se realiza entre dos partes, llamadas con frecuencia *Alice* (quien tiene el objeto a teleportar) y *Bob*, quien va a recibir dicho objeto. Inicialmente Alice y Bob deben tener cada uno una partícula (o cualquier sistema físico) en un estado *enlazado*². En general, Alice y Bob pueden estar separados una distancia arbitraria (a 2012 la distancia más larga a la que se ha logrado una teleportación exitosa es de 143 kilómetros y fue hecha en las Islas Canarias).

²Un estado enlazado es aquel, para el cual no es posible dar una descripción individual de cada uno de los sistemas, a pesar de que el estado colectivo está perfectamente definido.

Alice, en el momento en que ella quiera, inicia el protocolo de teleportación realizando operaciones físicas sobre el objeto y su mitad del estado enlazado, incluyendo algunas mediciones. Al realizar dichas operaciones, el estado que tiene Bob se va a ver afectado. Para completar la teleportación es necesario que Alice envíe, usando métodos convencionales como un correo electrónico, los resultados de las mediciones para que Bob realice sobre su sistema algunas operaciones y aparezca “mágicamente” el estado a teleportar en su sistema.

Para el lector curioso, que desee profundizar en la excitante historia de la mecánica cuántica, puede referirse a uno de los textos más aclamados de divulgación científica [2], o simplemente a navegar en la red donde encontrará muchos recursos de los desarrollos más actuales.

Teoría de la información. Para comprender la información cuántica debemos entender un poco de la teoría de la información *clásica*, es decir la que no involucra conceptos cuánticos. La teoría de información (clásica y cuántica) se dedica a catalogar problemas de acuerdo a la dificultad de resolverlos. Una excelente introducción un poco más extensa, pero aún al alcance del público general, se puede encontrar en [3].

En general la dificultad de resolver problemas se puede medir mediante el número de pasos que se requieren para completarlo. En otras ocasiones, el recurso importante no es el número de pasos (tiempo) sino el espacio o la energía requerida. La pregunta relevante es como crece el tiempo (o cualquier recurso) requerido para resolver el problema, cuando el tamaño del problema aumenta. Aclaremos esta confusa situación mediante un ejemplo. Considere sumarle 132 a un número arbitrario x . El tamaño del problema es naturalmente el *tamaño* del número a sumar y será aproximadamente $n \approx \lceil \log_{10} x \rceil$. Supongamos que $x = 5883$, y en este caso $n = 4$. Al querer sumar 132, aplicaríamos el algoritmo que aprendimos en la escuela,

$$\begin{array}{r} 5983 \\ + 132 \\ \hline 6115 \end{array} .$$

Este resultado es obtenido con poco más de 4 operaciones. Si consideramos un número de 30 dígitos, el número de operaciones a realizar será poco más de 30. Es decir, conocemos un algoritmo capaz de resolver un problema de tamaño n en cerca de n operaciones. La multiplicación de dos número de longitud n , se realiza con cerca de n^2 operaciones. Estos dos problemas, se consideran “fáciles” puesto que la solución se puede obtener con un esfuerzo polinomial en el tamaño del problema. Existen varios problemas que no tienen una solución sencilla (polinomial) a simple vista, pero que con algo de ingenio pueden encontrarse métodos de solución eficientes. Un ejemplo es determinar si un número es primo o no³.

³ El descubrimiento de este algoritmo, sólo se produjo hasta el 2004.

Existen algunos problemas para los cuales no se conoce ningún algoritmo “corto” para resolverlos. Por ejemplo, encontrar un itinerario que nos lleve exactamente una vez por cada una de las ciudades, dado un mapa con las ciudades y los caminos con los que se encuentran conectadas. En este caso, el tamaño del problema n es el número de ciudades. Un algoritmo para encontrar la solución puede ser el de probar todos los posibles itinerarios y ver si hay alguno conveniente. El número de itinerarios será aproximadamente $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Éste es un número muy grande: si usamos una computadora que requiera lo que le toma a la luz atravesar un átomo, por revisión de cada itinerario, no podríamos estudiar mapas ni con 35 ciudades aunque tuviéramos todo el tiempo del universo (literalmente). Nótese, sin embargo, que si nos dan una posible solución al problema será fácil evaluar si es una solución correcta⁴.

Del ejemplo anterior podemos ver que existen, *grosso modo*, dos familias de problemas. En una de ellas, al aumentar el tamaño del problema, el esfuerzo requerido para resolverlo aumenta también moderadamente (para ser más precisos, el esfuerzo, o número de operaciones, es polinomial en el tamaño del problema). Este tipo de problemas se conoce como **P**. En el otro caso, el esfuerzo requerido para resolver el problema aumenta *muy* rápidamente con el tamaño del problema, al punto de hacerlo literalmente intratable con todos los recursos que tenemos a la mano (incluso suponiendo que tenemos, por ejemplo, todas las computadoras de la tierra disponibles). El tipo de problemas que requieren una cantidad exponencial (por ejemplo 2^n) de recursos (y por consiguiente es “difícil” de resolver), pero cuya solución es “fácil” (que requiere una cantidad polinomial de recursos) de verificar como correcta, se conocen como **NP**. Dentro de la familia de problemas **NP**, hay una subfamilia muy famosa e importante. Son los problemas **NP-completos**. Su característica es que hallar una solución para uno solo de estos problemas, equivale a solucionar *todos* los problemas **NP**. Ésta es una familia grande, y el lector interesado no tendrá dificultad en encontrar ejemplos de dichos problemas. Sin embargo, hasta donde se sabe, no todos los problemas **NP** son **NP-completos**.

Más allá de las clases **P**, **NP** y **NP-completos** hay todo un zoológico de jerarquías de problemas. Lo que se ha logrado comprobar rigurosamente es una parte ínfima de los límites de este mapa. Incluso, no se ha comprobado que **P** y **NP** son diferentes y esto constituye uno de los grandes problemas de la matemática actual. Para animar al lector a intentar solucionar este interesante problema, sería bueno añadir que aquel que encuentre la prueba de que $\mathbf{P} \neq \mathbf{NP}$ (o $\mathbf{P} = \mathbf{NP}$) se hará acreedor de un millón de dolares por parte del Clay Mathematics Institute [4].

Algunos desarrollos teóricos. La idea fundamental detrás de la información cuántica nació de Richard Feynman, quien en 1982 y 1985 escribió un par de artículos en donde

⁴ Vale la pena anotar que existen algoritmos ingeniosos que han simplificado el problema, sin embargo, éste sigue siendo intratable en el sentido de que aún requiere un tiempo exponencial en el número de ciudades.

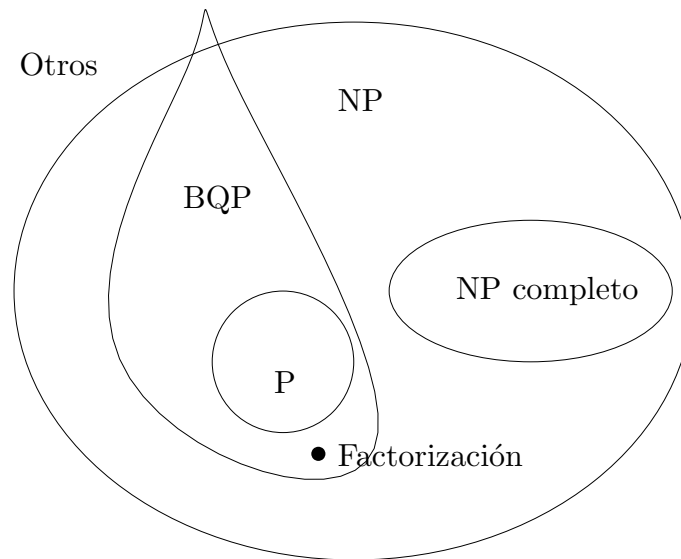


Figura 1: Ilustración de la clasificación de problemas de acuerdo a su complejidad. Los problemas más simples, y que se pueden resolver en un tiempo polinomial con respecto a su tamaño son del tipo **P**, por ejemplo la multiplicación de dos números. Problemas **NP** son los que no se pueden resolver fácilmente, pero una vez que se tiene la solución, verificarla es simple (como encontrar un tour que visite exactamente una vez un pueblo de un mapa con unos caminos predeterminados). Problemas **NP-completos** son aquellos que al resolverlos, podríamos resolver cualquier otro problema **NP**. Un ejemplo de dicho problema “universal” es el Sudoku. Naturalmente existen problemas más difíciles que catalogamos como “otros” y para los cuales no exponemos su estructura acá. Las computadoras cuánticas, se cree, ayudarán a resolver algunos problemas de gran importancia, dentro de la familia de problemas **NP** y quizá ayuden a resolver problemas más difíciles. La factorización es un problema “difícil” para computadoras clásicas, pero “simple” para computadoras cuánticas.

familias de problemas. Ilustramos esta nueva clase en la figura 1. Ésta está compuesta por los problemas que pueden ser resueltos en una computadora cuántica eficientemente (es decir con un número polinomial de pasos, en el tamaño del problema). Un elemento de este conjunto es el problema de factorización, que con el algoritmo de Shor se puede resolver eficientemente en una computadora cuántica. Aún está por probarse que dicho punto está por fuera del área de los problemas tipo **P**.

Nótese sin embargo, que una computadora cuántica, hasta donde se sabe, no puede resolver cualquier problema **NP**; en particular no puede resolver problemas **NP-completos**. Una línea de investigación muy activa se dedica a encontrar problemas que se encuentren fuera de **P** pero dentro de **BQP** y se han encontrado aplicaciones incluso en el ámbito de sistemas complejos, doblamiento de moléculas, etc, para los cuales una computadora

cuántica proveería respuestas que una computadora clásica sería incapaz de obtener en un tiempo razonable.

También debemos mencionar que hay problemas para los cuales la existencia de una computadora cuántica no cambia la clase a la que pertenece el problema, sin embargo sí provee una ventaja real. Dicho es el caso del problema de búsqueda en listas sin estructura. Para ilustrar el problema, imaginemos que nos es dado un directorio telefónico (con n entradas). Dado un nombre, podemos encontrar el correspondiente número fácilmente. Sin embargo si nos es dado un número telefónico y queremos encontrar el correspondiente nombre, no tendremos más alternativa que revisar una a una las entradas del directorio hasta encontrarlo. Este último ejemplo (números telefónicos desorganizados) es un ejemplo de una lista sin estructura, y está claro que nos tocará revisar en promedio $n/2$ entradas para encontrar el elemento deseado en dichas listas. Se descubrió, sin embargo, que con una computadora cuántica se necesitan solo del orden de \sqrt{n} pasos para solucionar el problema. Buscando en listas gigantes (por ejemplo que incluyan los registros médicos de una nación grande) una computadora cuántica sería 1000 veces más rápida que una clásica, y si la lista es más grande, la ganancia sería aún mayor. El algoritmo que realiza la tarea en forma cuántica, de manera efectiva, se llama algoritmo de Grover.

Después del descubrimiento del algoritmo de Shor, se notó que la tarea de construir una computadora cuántica no era nada fácil. El principal enemigo era (y continúa siendo) la decoherencia. Ésta cambia el estado del sistema y es debido a interacciones indeseadas con el ambiente que rodea al sistema físico o entre los constituyentes de la computadora cuántica. Este fenómeno es bastante común en los sistemas experimentales que se desarrollan en el área, y hay un cierto consenso de que, hasta cierto grado, la decoherencia es inevitable. En sistemas clásicos, se puede combatir este fenómeno usando códigos que corrijan el estado de la computadora en el transcurso del cálculo, pero el procedimiento cuántico análogo pareciera en un principio imposible. Para comprender la dificultad de correcciones de errores cuánticos, consideremos una forma de corrección de errores, en un dispositivo clásico. En cierto punto del cómputo, vamos a codificar la información triplicándola. Por ejemplo, para codificar un "0", en vez de tener un solo cero guardado en memoria, se podrían tener tres ceros: "000".

$$0 \rightarrow 000$$

Por ejemplo, si queremos representar la secuencia "0 1 0", en nuestro registro de nueve bits codificaríamos:

estado del bit :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
número del bit :	0	0	0	1	1	1	0	0	0

Así un error de un solo bit se vuelve fácil de detectar. Por ejemplo, si después de hacer algunos cálculos reviso el estado de mi registro y es:

estado del bit :	1	2	3	4	5	6	7	8	9
número del bit :	1	1	1	0	1	0	0	0	0

Entonces, sé que tengo un error en el bit número cinco, y puedo corregirlo cambiando el estado de este bit a "0".

No se puede emplear esta técnica en cómputo cuántico por dos motivos fundamentales. El primer motivo es que no es posible copiar información cuántica. Este divertido resultado, cuyos detalles se encuentran al alcance de estudiantes de física [8], se conoce como el *teorema de no clonación* y tiene muchas consecuencias importantes, incluida la imposibilidad de transmisión de información a una velocidad más rápida que la de la luz. Así, el procedimiento análogo, para triplicar un estado desconocido (denotado por ψ) es imposible:

$$\psi \not\rightarrow \psi\psi\psi.$$

El segundo motivo es que es imposible determinar en qué estado está el sistema sin modificarlo (ver por ejemplo el excelente libro [2]). Estos dos obstáculos supusieron por algún tiempo una dificultad insuperable para el cómputo cuántico. En 1995 y 1996, Peter Shor y Andrew Steane descubrieron métodos totalmente innovadores para proteger la información sobre algunos tipos de errores. La idea es codificar los qubits en espacios de muchas partículas, y realizar mediciones que conserven la estructura de dichos espacios. Una explicación a fondo, requiere algunos elementos de mecánica cuántica, pero sigue siendo accesible al lector interesado, con algunos fundamentos en la materia [9].

Algunos otros desarrollos teóricos que se deben mencionar incluyen la simulación de sistemas cuánticos (quizá la aplicación más popular en el futuro de las computadoras cuánticas). Esto cobra una gran importancia puesto que nos permitirá explorar sistemas físicos inaccesibles, numérica y experimentalmente, y así desarrollar tecnología basada en sistemas cuánticos de muchos cuerpos. También se pueden usar estas computadoras para resolver sistemas gigantes de ecuaciones lineales y otros problemas como el doblamiento de proteínas o comportamientos preferidos en sistemas complejos.

Algunos desarrollos experimentales. La implementación experimental del cómputo cuántico ha sido una parte importante del campo debido a tres motivos. El primero es la necesidad de las agencias patrocinadoras (típicamente gubernamentales) de estar a la vanguardia en cuanto a tecnología de comunicaciones y encriptación. Segundo, el interés de estar a la vanguardia en cuanto a todo el desarrollo que conlleva el control de sistemas cuánticos individuales. Por último se encuentra la curiosidad de los físicos del campo por comprobar experimentalmente las predicciones, con frecuencia en contra del sentido común, de la mecánica cuántica.

Dado que los fundamentos de cómputo cuántico se encuentran formulados en términos de espacios de Hilbert abstractos, los sistemas físicos en los que se pueden implementar son muy diversos. Sin embargo, cada uno de los sistemas debe cumplir con cinco condiciones propuestas por David DiVincenzo en 1996 para poder implementar una computadora cuántica. Éstas son:

- Tener unidades de información cuántica (qubits) bien definidos.

- Poder preparar el estado inicial de la computadora con precisión.
- Tener poca decoherencia (errores por interacciones indeseadas).
- Implementar con precisión compuertas de una y dos partículas.
- Realizar mediciones sobre partículas individuales.

Si bien aún no existe el sistema físico que cumpla cabalmente con todos estos requerimientos, se están explorando varias posibilidades. Listamos a continuación algunas de las propuestas más importantes, bien sea por razones históricas o por el optimismo que se tiene frente a ellas.

Resonancia magnética nuclear y factorización. Uno de los sistemas físicos en donde fueron implementados por primera vez protocolos de información cuántica es el de resonancia magnética nuclear (NMR, por sus siglas en inglés). NMR es un sistema físico que consiste de un conjunto de moléculas inmersas en un líquido. Algunos de los núcleos de dichas moléculas interactúan entre sí, y éstos (los núcleos) son los objetos que se utiliza para procesar la información. El premio Nobel de física fue dado a Isidor Rabi por el desarrollo de esta técnica, que ha sido usada para comprender la composición química y la estructura de moléculas. En los años 90, se comprendió que se podía usar toda la infraestructura no solo para mirar dentro de las moléculas, sino también para manipular los estados de la molécula. Lo anterior hizo que el campo creciera rápidamente y la primera demostración experimental de una factorización usando una computadora cuántica se logró justamente en este sistema en el 2001 por el equipo de Isaac Chuang en los laboratorios de Standford. A pesar de su éxito inicial, se sabe que es muy difícil escalar este tipo de sistemas, es decir agrandar la computadora (lo que equivale a agrandar la molécula) es una tarea demasiado complicada. Más aun, dado que la señal sobre el ruido intrínseco del sistema es muy baja, se tiene poca fe en que al aumentar el tamaño de la molécula siga siendo posible hacer las operaciones con la precisión requerida.

Trampas de iones y teleportación. Otro sistema físico con notables avances tecnológicos respecto al procesamiento de información cuántica es la cadena de iones. Este sistema consiste de un conjunto de iones que se encuentran atrapados en una trampa electromagnética y se auto organizan en una recta. En este sistema se usa la estructura interna de cada átomo para guardar la información. Para ser más precisos, usa dos niveles de energía (escogidos a conveniencia del experimento) como qubit. Aparte de eso, para hacer interactuar los diferentes átomos, se usa el movimiento colectivo de todos los átomos a manera de bus. Desde el planteamiento teórico, varios grupos han logrado avances muy importantes, como la demostración de que es realmente posible hacer operaciones de uno y dos qubits. Quizá el experimento más espectacular, para el público general, fue la realización de teleportación de partículas con masa en forma determinista, en contraste con esquemas previos, en donde la teleportación era exitosa solo una fracción de las veces. Gracias, entre otros, a estas demostraciones, fue dado el premio Nobel 2012 a David Wineland (compartido con Serge Haroche), líder de un grupo de investigación en el National Institute of

Standards and Technology, en Colorado, USA. Así mismo, han logrado demostraciones de muchas de las propuestas teóricas, como la simulación de sistemas cuánticos, la creación de estados de muchas partículas enlazados y la realización de códigos de corrección de errores.

Electrodinámica cuántica en cavidades y decoherencia. Otro sistema cuántico, del que se ha aprendido mucho en el siglo pasado es la luz. La manipulación de fotones individuales ha abierto la posibilidad de realizar experimentos fundamentales de mecánica cuántica (y por ende de información cuántica) con ellos. Una forma de “guardar” un fotón para observar su evolución y hacerlo interactuar con otro sistema es ponerlo entre dos espejos con cierta geometría (la cavidad). Quizá uno de los aspectos más innovadores ha sido la observación de como actúa el mayor enemigo del cómputo cuántico sobre sistemas cuánticos, la decoherencia. Lo que hicieron fue poner un átomo de Rubidio en una superposición cuántica dentro de una cavidad, y al interactuar el átomo y los fotones de la cavidad, se creó una superposición de estados del sistema completo. Al no ser la cavidad perfecta, los fotones comenzaron a escapar, destruyendo esta superposición cuántica. En el experimento, fueron capaces de observar como ocurría dicho proceso y marcó el inicio del estudio experimental de la decoherencia⁶. Otro espectacular avance es el de observar como se lleva a cabo el proceso de medición, uno de los aspectos más intrigantes de la mecánica cuántica.

Otros. Existen muchos otros sistemas en los cuales se han implementado tareas de información cuántica, como fotones libres, fotones en fibras ópticas, circuitos superconductores, centros de nitrógeno en diamantes, solo por mencionar algunos. El lector interesado puede navegar en revistas de divulgación como Scientific American, en donde encontrara recursos para alimentar su curiosidad.

2. Desarrollo actual y perspectivas

La cantidad de dinero que se está invirtiendo en esta área, hace que sea una de las más activas en la actualidad. Se está pasando de los experimentos demostrativos a una etapa más práctica, donde se esta cosechando todo lo que se ha aprendido.

Comunicación cuántica comercial. Una de las aplicaciones de la información cuántica que han visto el mercado recientemente es la comunicación cuántica. Hemos notado que los estados “especiales” de sistemas cuánticos (como las superposiciones, o los estados enlazados) son extremadamente frágiles, dificultando su manipulación. Sin embargo, se puede explotar esta fragilidad. Si enviamos un estado “frágil”, cualquier intento por descubrir este estado, por parte de un tercero, va a ser notado, ya que perturbará fuertemente el sistema. Esto se debe a motivos fundamentales: de acuerdo a uno de los postulados de

⁶El líder del grupo que realizó dicho experimento, Serge Haroche en l’Ecole Normale Supérieure de París, fue uno de los ganadores del premio Nobel en 2012.

la mecánica cuántica, al realizar una medición en general modificaremos el sistema. La comunicación cuántica se basa en dicha propiedad para enviar mensajes secretos entre dos partes. En la práctica, lo que se hace es que se usa la comunicación cuántica para establecer una clave secreta que se usa en esquemas de comunicación clásica. Ya existen empresas que ofrecen la instalación de estos sistemas a nivel comercial⁷ y han impulsado la retroalimentación entre el sector académico y el industrial. Sin embargo, se ha demostrado que a pesar de la leyes de la mecánica cuántica, este tipo de sistemas presentan algunas vulnerabilidades intrínsecas. Resulta en la práctica, sin embargo, desde un punto de vista técnico, una forma de comunicación extremadamente segura, pues las demostraciones de “hacking” solo han sido realizadas en laboratorios y bajo condiciones muy controladas. Estas vulnerabilidades no han detenido el desarrollo teórico y experimental de una nueva área de las telecomunicaciones.

Muchos cuerpos cuánticos. Otra de las áreas donde hay mucho interés es en la simulación de sistemas cuánticos. Hoy en día, algunos de los experimentos más avanzados requieren el uso de semanas de cómputo para analizar los resultados obtenidos. Es decir, ya hoy por hoy en simulación cuántica se comienzan a poder hacer cosas que no son susceptibles de ser simuladas en computadoras clásicas. Más aún, para algunos de estos experimentos hay un entendimiento de la física que lo gobierna, mientras que para algunos otros experimentos no se sabe qué comportamientos esperar. Por ejemplo, ya es posible controlar las interacciones de partículas cuánticas individuales en arreglos de dos dimensiones. Se espera que esta herramienta brinde nueva información de fenómenos como la superconductividad de alta temperatura, de la cual tenemos un pobre entendimiento, y que además se puedan aprovechar las herramientas desarrolladas para crear nuevas tecnologías basadas en la riqueza de los fenómenos cuánticos. Cabe aclarar que la comunicación cuántica, a pesar de involucrar muchas partículas, está basada en fenómenos de una o dos partículas.

Sistemas híbridos. De las décadas anteriores hemos aprendido las bondades y dificultades de algunos sistemas cuánticos. Por ejemplo, al trabajar con fotones, estos son fáciles de llevar de un sitio a otro, sin embargo son muy difíciles de poner a interactuar entre sí. Por otro lado, por ejemplo, en las cadenas de iones se pueden producir interacciones entre las diferentes compuertas con mucha facilidad, pero protegerlos de decoherencia puede resultar difícil. Debido a esto se cree que el camino a seguir para la implementación de una computadora cuántica universal implica la utilización de diversas tecnologías en diferentes pasos del cómputo. Para esto necesitamos que, por ejemplo, un ion en una cadena pueda interactuar eficientemente con fotones individuales, o que sistemas nanomecánicos puedan transferir su información a átomos neutros. Este es precisamente el campo de

⁷Por ejemplo, id Quantique, con página <http://www.idquantique.com/> a Octubre de 2012.

los sistemas híbridos, cuyo mayor reto es lograr una comunicación fiel entre diferentes sistemas físicos, cada uno con sus ventajas y sus desventajas.

Computadoras cuánticas. Uno de los objetivos del cómputo cuántico es solucionar problemas que no sean posibles solucionar en una computadora clásica. Para esto no basta con controlar un par de qubits. Ni diez, ni cien. Los problemas que se pueden solucionar con computadoras cuánticas de este tamaño, también se pueden solucionar con computadoras basadas en tecnología actual. Se calcula que el punto de inflexión ocurrirá cuando se logren controlar del orden de mil qubits. ¿Que tan lejos estamos de este objetivo? Nadie tiene la respuesta a esa pregunta. Algunos pesimistas afirman que nunca llegará ese día mientras que otros están trabajando (con mucho optimismo) para que así sea. Algunos logros como la simulación eficiente de sistemas cuánticos, o incluso la factorización de 15 han servido para dar un impulso a esta línea. Desde el punto de vista del autor, sin embargo, la prueba más contundente a la fecha de la próxima realidad de las computadoras cuánticas es que la empresa privada ya se encuentra vendiendo prototipos de dichas máquinas con algunos cientos de qubits⁸. No solo eso, sino que ya se han vendido varias unidades, principalmente a instituciones dedicadas a la investigación. Incluso ya se han publicado resultados en el campo de biología, donde se analizaron una cantidad gigantesca de patrones de doblamiento de proteínas y se buscaron aquellas favorecidas por la naturaleza, es decir aquellas que minimizaban la energía. Se prevé que en unos 5 años ya se cuente con el control de un número tal de qubits que estas máquinas superen a las clásicas y por consiguiente nos comiencen a dar respuestas inalcanzables de otra manera.

3. Desarrollo a futuro

El futuro inmediato de la información cuántica se centra tanto en implementar físicamente las ideas desarrolladas, como en entender los alcances teóricos de una computadora cuántica. Se sabe muy poco de los límites prácticos que separan cada una de las regiones de la figura 1. El mayor interés desde el punto de vista de ciencias de la computación consiste en encontrar problemas para los cuales una computadora cuántica resulte útil. Esta tarea no es fácil, sin embargo, los pocos problemas que se conocen en la región de interés (dentro de **BQP** y fuera de **P**) tienen un gran número de aplicaciones inmediatas. Cuando se descubran más problemas en dicha región, la aplicabilidad que tendrán las computadoras cuánticas será mayor.

Las perspectivas con respecto a la simulación de sistemas cuánticos también son excitantes. Para resaltar el impacto que tendrá el entendimiento de fenómenos cuánticos

⁸La compañía es D-Wave, y su página de internet es <http://www.dwavesys.com>. Cabe anotar que dichos prototipos no son capaces de solucionar problemas fuera del alcance del cómputo clásico, por lo que el apelativo "computadora cuántica" para dichos dispositivos puede resultar controversial. El paradigma en el que se basan se llama *cómputo cuántico adiabático*, pero su explicación requeriría algunos tecnicismos que están fuera del alcance de este texto.

colectivos en nuestra vida diaria, conviene hacer una retrospectiva de como ha afectado el entendimiento de las leyes de la física en nuestro mundo actual. Una gran cantidad de objetos que usamos no serían posibles sin un entendimiento aceptable de las leyes de la electrodinámica. Las leyes de la termodinámica han jugado un rol profundo en la revolución industrial y el estudio del estado sólido ha propiciado todo el desarrollo de la computación. Por eso, quizá la perspectiva más emocionante para la información y cómputo cuántico esta en la profundización del entendimiento de fenómenos cuánticos colectivos. Este tipo de fenómenos han probado ser de los problemas más difíciles a tratar y el hecho de que no haya un buen entendimiento de superconductividad a altas temperaturas lo demuestra. La exploración de fenómenos colectivos cuánticos sin duda propiciará una avalancha de desarrollos tecnológicos como metrología, litografía de alta resolución y detectores de altísima sensibilidad. La mayoría de las aplicaciones, sin embargo, aún ni siquiera las imaginamos y tendremos que esperar a que futuras generaciones, ocupando las herramientas que hoy estamos creando, desarrollen la tecnología del futuro.

Otro avance que veremos en el futuro es la generalización de la comunicación cuántica. Este avance puede ser aumentando las distancias en las cuales es posible implementarla o aumentando el número de participantes en algún intercambio de información. En cuanto a las distancias, ya están en proceso proyectos para usar satélites para realizar dicha comunicación. Esto abre toda una serie de posibilidades no solo desde el punto de vista tecnológico sino también fundamental: la exploración de la interacción entre mecánica cuántica y gravedad. Excitantes experimentos como hacer superposiciones del campo gravitatorio y por ende explorar los límites de dichas teorías ya se encuentran en los planes de algunos visionarios.

Agradecimientos

Este capítulo se escribió con apoyo de los proyectos CONACyT 57334 y UNAM-PAPIIT IA101713.

4. Referencias

- [1] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?" *Physical Review*, vol. 47, no. 10, pp. 777–780, May 1935. [Online]: http://prola.aps.org/abstract/PR/v47/i10/p777_1
- [2] J. Gribbin, *In Search of Schrodinger's Cat: Quantum Physics And Reality*, ser. A Bantam new age book. Random House Publishing Group, 1984. [Online]: http://books.google.com.mx/books?id=hs72XL_dS-AC
- [3] S. Aaronson, "The Limits of Quantum Computers:," *Scientific American*, p. 62, 2008.

- [4] “The millennium prize problems,” <http://www.claymath.org/millennium/>, accessed: 02/10/2012.
- [5] R. P. Feynman, “Quantum Mechanical Computers,” *Optics News*, vol. 11, no. 2, p. 11, Feb. 1985.
- [6] —, “Simulating physics with computers,” *International Journal of Theoretical Physics*, vol. 21, no. 6-7, pp. 467–488, Jun. 1982.
- [7] Wikipedia, “Observable universe — Wikipedia, the free encyclopedia,” 2004, [Online; accessed 22-Oct-2012]. [Online]: http://en.wikipedia.org/wiki/Observable_universe
- [8] W. K. Wootters and W. H. Zurek, “A single quantum cannot be cloned,” *Nature*, vol. 299, no. 5886, pp. 802–803, October 1982.
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge, U.K.: Cambridge University Press, 2000.

La Materia Compleja

Evolución y materia compleja

Octavio Miramontes, Instituto de Física, UNAM, México

Dada la oportunidad, la materia debe dar lugar a la vida y ésta a la mente. Las condiciones en nuestro planeta proporcionaron esta oportunidad. La opinión prevaleciente entre los cosmólogos es que tales condiciones podría prevalecer en muchos otros sitios del universo.
Christian de Duve, 1996.

1. Introducción

La evolución de la materia es un hecho irrefutable. Es una tendencia generalizada en la naturaleza. Es una propiedad observable y comprobable de la materia desde su origen que no es otro que el del universo mismo¹. La formación en secuencia temporal de las primeras manifestaciones materiales en forma de partículas elementales, átomos y moléculas, inmediatamente después de un evento extremadamente energético que ocurrió hace aproximadamente 13 mil millones de años², revelan una tendencia sumamente dinámica y rica hacia la interacción, la agregación y la evolución universal, que resulta en formas y estructuras micro y macro de creciente complejidad. Tales formas pueden observarse hoy en día en expresiones variopintas, desde la materia inanimada hasta las formas más elaboradas que son la materia compleja viva y pensante, es decir, aquella que se autoreplica y procesa información [2–4].

Es un principio universal de la naturaleza el que en los sistemas fuera del equilibrio termodinámico, ahí donde existen flujos de materia y energía, se tienda a la evolución espontánea de nuevas formas y de nuevos órdenes espacio-temporales [5]. La naturaleza, en pocas palabras, es sumamente creativa y podría agregarse, inevitablemente innovadora. En todo lo que nos rodea podemos ver expresada esa característica, en la forma de estructuras de gran escala como las galaxias, los sistemas solares, los planetas como la Tierra con sus continentes y sus océanos y en un otro extremo el mundo molecular y atómico

¹ Para una visión complementaria, véanse los capítulos que componen la sección “Origen, Evolución y Estructura de la Materia”, en este mismo libro.

² La estimación más exacta, hasta ahora, da una edad de 13.7 ± 0.2 mil millones de años [1].

y el muy peculiar mundo de las partículas elementales subatómicas. ¿Cuál es la historia de esta emergencia continua de formas y estructuras?, ¿Cómo es que pueden surgir aparentemente de la nada?

2. Origen y evolución de la materia

La “nada” es un interesante problema filosófico. Sin embargo, no es estrictamente un problema científico, no lo es al menos para la física, donde el término ni siquiera existe en un sentido técnico. Lo que si existe, es el término *vacío* y se emplea para caracterizar una región del espacio que no contiene materia³. El vacío sin embargo, puede contener campos, por ejemplo electromagnéticos o gravitatorios y en éste último caso, son imposibles de eliminar, de tal manera que entonces el vacío no lo es tanto, ya que tal región aún contendría las fluctuaciones manifiestas y medibles del vacío cuántico. Esta región tendría propiedades muy especiales de acuerdo a la física cuántica. El vacío cuántico no contiene ninguna partícula de materia; pero contiene fluctuaciones que provocan que partículas virtuales se materialicen para enseguida volver a desaparecer, aniquilándose entre si.

Una de las teorías cosmológicas más completa y popular y que intenta explicar el origen del universo es la de la *Gran Explosión* (Big Bang): el universo se originó en las fluctuaciones del vacío cuántico [6–11]. La rápida expansión inicial del universo y su enfriamiento provocó la condensación de la materia en sus primeras manifestaciones, a los pocos microsegundos de creado, el universo se encontraba en una etapa conocida como plasma de quarks y gluones, instantes después, quarks y gluones se condensaron en las partículas subatómicas: principalmente protones y neutrones. Unos minutos más tarde, cuando la densidad y la temperatura del universo primigenio lo permitieron, los protones y neutrones se condensaron en núcleos atómicos de los elementos más ligeros, comenzando por el hidrógeno y terminando antes de la formación significativa de núcleos de carbono. Este proceso se conoce como nucleosíntesis primaria. Otra nucleosíntesis tendría lugar mucho más tarde (algo así como 500 millones de años después de la gran explosión) y aún es posible observarla en los confines del universo. Para eso fue necesario la condensación de la materia inicial en cuerpos masivos que son las estrellas. En el interior de las estrellas y en la explosión de otras (supernovas), ocurriría una segunda etapa de nucleosíntesis que daría lugar a todos los demás átomos que existen en la naturaleza, desde el carbono hasta el plutonio.

Esta etapa en la evolución de la materia es conocida como evolución química [12]. ¿Pero hay algo más que esos extraordinarios átomos nuevos y sus compuestos moleculares? Tomemos la siguiente reflexión discutida originalmente por Brian Goodwin [13]. Las propiedades del oxígeno y del hidrógeno se conocen bien como átomos y como moléculas (O_2 y H_2) en sus estados gaseosos. Entendemos bien sus comportamientos químicos en términos de sus enlaces químicos y de la física cuántica de sus orbitales electrónicos. Pero

³Ver el capítulo “Fuerzas de Casimir” de Carlos Villareal en este mismo volumen

este conocimiento es insuficiente para describir como el agua líquida se comporta cuando, digamos, se va por una cañería o como se forma una ola y revienta en la playa. Es claro que del estudio de los componentes por separado, oxígeno e hidrógeno, no se obtiene ninguna información en este otro caso. Algo está faltando. De la misma manera no es posible explicar la decisión de Harry Truman de lanzar una bomba atómica sobre Hiroshima tan sólo con el estudio de los átomos que formaban parte del cuerpo de este personaje. Algo está faltando.

3. Emergencia e interdisciplina

Es necesario reflexionar un momento sobre la compartimentalización del quehacer científico. En los siglos XVIII y XIX, principalmente, existía un tipo de científico llamado *naturalista*, es decir, aquel que estudiaba *la naturaleza*. Uno de los naturalistas mejor conocidos, de esa época, fue el barón Alexander von Humboldt⁴. El horizonte de conocimiento de von Humboldt y el de otros semejantes a él, abarcaba la geología, la cartografía, la física, la medicina, la historia, la literatura, la química, el estudio de las plantas y animales y aún más. Se trataba claramente de un erudito. Un siglo después, los naturalistas como él habían cedido su lugar a los científicos como los conocemos hoy en día. Clasificados en disciplinas y especialidades: químicos, físicos, astrónomos, biólogos, etcétera. Estas especialidades tienen sus subcategorías: un físico cristalográfico, con sus debidas excepciones, difícilmente sabe algo sobre física no-lineal, o un botánico de líquenes poco sabe de la biología social de primates. La especialización en ciencia facilita grandemente el estudio de ciertas áreas del conocimiento, permitiendo profundizar en los detalles. Sin embargo, la especialización también tiene el hábito de cubrir a no pocos con un manto invisible de ignorancia. Para ciertos temas de la ciencia que requieren del conocimiento traslapado de una o más áreas, existen especialidades como la del fisicoquímico, la del bioquímico, la del biofísico o la del astrobiólogo. Finalmente queda claro que la división en disciplinas es arbitraria y sirve para estudiar fenómenos que pertenecen a ciertas categorías clasificables con fronteras más o menos definidas. Estas fronteras coinciden con los saltos cualitativos en la evolución de la materia.

⁴Uno de los grandes naturalistas mexicanos fue, por cierto, un gran amigo de von Humboldt y se llamó Andrés Manuel del Río. Dedicado principalmente a la química y a la mineralogía, del Río fue víctima de una de las mayores injusticias cometidas en la ciencia. Fue el descubridor del elemento químico Eritrónico; pero el mérito por tal descubrimiento le fue negado y el reconocimiento acabó en las manos de un químico sueco, quién lo redescubriría independientemente más tarde y le daría su nombre actual: Vanadio. El último intento para dar el mérito a del Río fue hecho por el físico mexicano Sandoval Vallarta en los años cuarenta del siglo XX; pero no prosperó. ¿Alguien piensa que Suecia, país que otorga los premios Nobel de química, permitiría ver a un químico sueco ser despojado de su gloria, mismo que inmerecida? Esta historia tiene, por cierto, sus ironías pues fue el mismo von Humboldt quién participó activamente en los equívocos iniciales que definirían esta injusticia. Del Río, al menos, es reconocido como uno de los tres grandes químicos mexicanos de todos los tiempos. El galardón más importante que se otorga a los químicos mexicanos más sobresalientes lleva su nombre.

En un sentido estricto, la física estudia el origen y estructura de la materia, estudia como está constituido, por ejemplo, un átomo de hidrógeno. Ya el químico estudia como el hidrógeno interacciona con el oxígeno y forma una molécula llamada agua; pero también estudia como el hidrógeno, el oxígeno y el carbono se combinan para formar una molécula de azúcar. Ya el biólogo estudia como cierto tipo especial de molécula, formada por miles de moléculas de azúcar, puede autoreplicarse, puede codificar información y puede sintetizar otras moléculas para formar estructuras individuales. La materia viva esta formada de átomos, ciertamente; pero eso no quiere decir que el estudio de la biología o de la vida se puede reducir al estudio de los átomos o al de las moléculas. Este es un error que sin embargo se repite y se repite a lo largo de la historia de la ciencia. Como corriente de pensamiento, el reduccionismo nos dice que la explicación de un objeto se encuentra en sus partes constituyentes, en otras palabras, entender los elementos constitutivos es suficiente para entender el todo. Este enfoque puede ser correcto en algunos casos, pero no lo es siempre.

4. La física de la emergencia

En física, el *principio de superposición* es un enunciado reduccionista que nos dice que un sistema descrito por $f(x)$ tiene las siguientes propiedades:

1. Aditividad: $f(x + y) = f(x) + f(y)$
2. Homogeneidad: $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

La función $f(x)$ es entonces una *función lineal* y sus soluciones son descritas generalmente como *superposición* de otras soluciones de la misma función lineal. Esto hace que las funciones lineales sean fáciles de resolver y el método de *linealizar* un problema sea atractivo en primera aproximación. El principio de superposición es muy útil en ciertos problemas físicos como por ejemplo en el caso de circuitos eléctricos en los que la amplitud de la corriente que los atraviesa es proporcional a la amplitud del voltaje en sus extremos o en problemas de mecánica de sólidos y elasticidad donde la fuerzas aplicadas son proporcionales a las tensiones o deformaciones que producen. Sin embargo, el mundo de lo *proporcional* y de lo *lineal* es muy escaso. La gran mayoría de los fenómenos físicos son *no lineales* y la matemática que los describe es otra muy diferente. En la física no lineal el principio de superposición no funciona y por ello, los componentes de un sistema por separado no explican el todo, siempre falta algo más para explicar el todo. Ese "más" es exactamente a lo que se refiere Brian Goodwin en el ejemplo del agua y sus componentes atómicos. Las olas reventando alegremente en las arenas blancas de Cancún son descritas en otro nivel diferente, son explicadas por la no linealidad del formalismo de Navier-Stokes y no son reducibles al estudio del hidrógeno y el oxígeno por separado.

Las ecuaciones de la mecánica de fluidos tipo Navier-Stokes toman en cuenta propiedades físicas de los fluidos como cohesión, incompresibilidad, fluidez, viscosidad, presión, etcétera; las cuales no tienen sentido en el mundo cuántico de los átomos constituyentes de un fluido en el mundo macroscópico [14].

En la evolución de la materia, cada que se da un salto cualitativo de un nivel jerárquico de complejidad a otro, se tienen fenómenos que no son reducibles al nivel de los constituyentes básicos de un nivel jerárquico inferior. Esas nuevas propiedades *emergen* debido a la interacción entre los componentes, creando estructuras y fenómenos temporales nuevos en escalas espacio-temporales muy diferentes de aquellas en las que ocurren las interacciones. La *emergencia* de nuevos órdenes en la naturaleza no es un misterio inexplicable ni pertenecen al mundo de la magia. La emergencia no se debe a incomprensibles fuerzas oscuras, como una buena parte de la literatura pseudocientífica lo afirma. Los nuevos órdenes emergentes, es decir los sistemas complejos, son estudiados por las ciencias de la complejidad y la física no lineal y como todos los demás fenómenos de la naturaleza, son explicables científicamente.

5. Desequilibrio, fluctuaciones y autoorganización

Los sistemas complejos están formados por un conjunto generalmente grande de componentes que interactúan entre sí de manera no lineal y que pueden modificar sus estados como producto de tales interacciones. Los elementos básicos pueden ser estructuralmente simples⁵; pero esa simplicidad no impide que en conjunto y de modo *colectivo* exhiban comportamientos dinámicos diversos y no reducibles a los elementos constituyentes. El surgimiento de nuevos órdenes jerárquicos de creciente complejidad a partir de las interacciones en los sistemas complejos se origina de manera espontánea en situaciones fuera del equilibrio termodinámico, sin la intervención de fuerzas externas al sistema ni a partir de diseños prefijados. Esta dinámica es *autoorganizada*. Los sistemas complejos autoorganizados no son una rareza ni son curiosidades, más bien la autoorganización domina la función y estructura a lo largo y ancho del universo. Los intercambios de materia y energía son fundamentales para la emergencia de nuevos órdenes; pero no son suficientes. En los sistemas abiertos se requiere de fluctuaciones e inestabilidades en las condiciones existentes de energía para la emergencia autoorganizada de esos órdenes nuevos.

El concepto de energía es uno de los más importantes en física. Su comportamiento y transformaciones en trabajo, o en otras formas de energía, los estudia la termodinámica clásica. Para ello se basa en tres leyes fundamentales que se aplican a sistemas que, por definición, se encuentran en equilibrio termodinámico. Estas tres leyes son⁶:

⁵Obviamente se trata de un abuso de lenguaje. ¿Alguien podría afirmar que un átomo es un constituyente simple privado de su propia complejidad?

⁶Para algunos autores, el postulado de Nernst se conoce como tercera ley: "es imposible, por cualquier medio no importa cuan idealizado sea, llevar un sistema a temperatura cero absoluta en un número finito de

- Ley cero. *Si dos sistemas termodinámicos están cada uno en equilibrio termodinámico con un tercero, entonces ambos están en equilibrio termodinámico entre sí.*
- Primera ley. *La energía no puede ser creada ni destruida, sólo puede transformarse. O bien, En cualquier proceso que ocurra en un sistema aislado, la energía total es siempre la misma.*
- Segunda ley. *Cuando a dos sistemas aislados en regiones diferentes del espacio, cada uno en equilibrio termodinámico consigo mismo; pero en desequilibrio entre sí, se les permite interactuar rompiéndose el aislamiento que los separa de tal manera que se produce intercambio de materia o energía, alcanzarán eventualmente un estado de mutuo equilibrio termodinámico entre sí. En este caso, la suma de las entropías de los dos sistemas inicialmente aislados será menor o igual a la entropía del sistema final.*

La ley cero y la primera ley rigen principios muy básicos pero fundamentales de conservación y equilibrio. Por ejemplo, la ley cero nos explica que al momento de encender un foco, la energía eléctrica que se consume será igual a la energía que se transforma en luz, más aquella que se transforma en calor. La primera ley nos dice que dos manzanas dentro de un contenedor, una a un lado de la otra y después de un tiempo pertinente, estarán a igual temperatura.

Ya la segunda ley tiene un carácter un poco diferente porque establece un principio de direccionalidad (asimetría) y de irreversibilidad. Por ejemplo, en la interpretación de Rudolf Clausius: *No existe ningún proceso espontáneo donde el resultado sea la transferencia de calor de un cuerpo de baja temperatura a uno que tenga mayor temperatura.* Es decir, nunca sucederá de manera espontánea que un cuerpo frío se enfríe aún más en contacto con un cuerpo caliente. En otras palabras, nunca sucederá que una mano que toca un sartén caliente resulte en que el sartén se caliente aún más mientras que la mano del cocinero se enfría. Eso simplemente no existe. Después de la trágica experiencia, el cocinero debería visitar al médico para curarse las quemaduras.

La segunda ley de la termodinámica también gobierna la irreversibilidad temporal de los procesos. Una gota de tinta china negra vertida en un vaso de agua, se disolverá irremediabilmente hasta el punto en que todo volumen de esa agua, por pequeño que sea, contendrá en promedio el mismo número de moléculas de tinta. Jamás veremos de manera espontánea que una vez diluida, la tinta pueda volver a concentrarse en una sola gota o en una región de mayor concentración dentro del vaso de agua. Una vez mezclada no hay vuelta atrás. Tampoco veremos jamás que un huevo revuelto ya cocinado, colocado de vuelta en el sartén va espontáneamente a separarse en clara y yema, por más energía térmica que le suministremos.

La segunda ley de la termodinámica, por lo tanto, gobierna el proceso de producción de entropía (S) en la evolución temporal (t) del universo:

pasos”.

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad (1)$$

entonces esta ley establece que los procesos naturales espontáneos incrementan la entropía (cantidad de desorden).

Los requisitos de equilibrio y reversibilidad limitan seriamente la aplicabilidad de la termodinámica clásica, pues estas condiciones sólo se cumplen en casos verdaderamente excepcionales. En el caso de la Tierra, por ejemplo, el sol la baña continuamente con su energía y eso provoca que su atmósfera se encuentre en un estado de desequilibrio termodinámico continuo. El viento, la lluvia, los tornados, los huracanes son manifestaciones irreversibles de un desequilibrio termodinámico.

En contraste con los procesos reversibles, en los que no hay producción de entropía, los procesos irreversibles se caracterizan por la producción de entropía. La evolución del universo (es decir, su expansión) es un enorme e irreversible proceso en desequilibrio termodinámico. Ilya Prigogine⁷ acuñó el concepto de *estructuras disipativas* para caracterizar el hecho de que ciertos sistemas abiertos, al ser llevados de un régimen de equilibrio a uno de desequilibrio se tornan inestables y sufren una completa transformación en sus propiedades macroscópicas. Un ejemplo de lo anterior son las celdas de convección donde existe un fenómeno conocido como inestabilidad de Bénard (véase la figura 1). Considere un líquido, por ejemplo agua, en un contenedor en reposo y en equilibrio termodinámico con su entorno. Considere entonces que el líquido es calentado por abajo y que el líquido aumenta su temperatura. Bien antes del punto de ebullición, se establece un gradiente vertical de temperatura donde el líquido caliente se expande, su densidad disminuye y sube a la superficie, donde se enfría y luego baja nuevamente. El surgimiento de este gradiente es de hecho una ruptura de simetría. El fenómeno no se detiene aquí, las inestabilidades que se producen cuando esta ruptura de simetría continua su evolución temporal ocasiona el surgimiento de estructuras hexagonales localizadas (celdas de convección) que son flujos de fluido caliente ascendente alternados con flujos de líquido frío descendente. Surge entonces una estructura disipativa que favorece la disipación de calor de las zonas calientes hacia las frías acompañada del surgimiento de un nuevo orden espacio-temporal donde antes no existía.

La autoorganización y la emergencia pueden entenderse entonces, bajo la termodinámica del no equilibrio y los procesos irreversibles, como una sucesión de inestabilidades. Cada vez que un sistema de este tipo alcanza un punto de inestabilidad, espontánea e irreversiblemente evoluciona hacia nuevas estructuras y organizaciones funcionales. La evolución de la materia no es entonces otra cosa que eso. Una sucesión de inestabilidades y fluctuaciones donde las estructuras disipativas provocan la emergencia de nuevos

⁷ Ilya Prigogine recibió el Premio Nobel de química en 1977 debido a sus contribuciones a la termodinámica fuera del equilibrio, especialmente por su teoría de las estructuras disipativas. En 1998, la Universidad Nacional Autónoma de México le concedió un doctorado *honoris causa* por la misma razón.

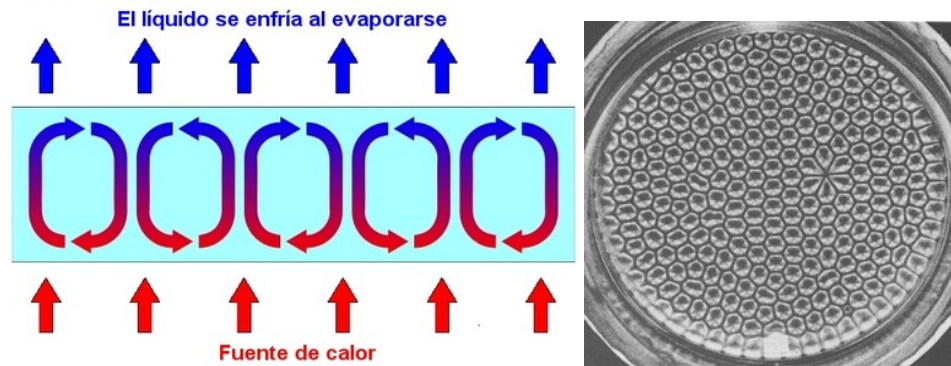


Figura 1: Celdas de convección térmica, también conocidas como celdas de Bénard. El diagrama de la izquierda muestra que cuando una fuente de calor se aplica a un líquido inicialmente en equilibrio térmico, se producen corrientes de fluido caliente que suben y luego bajan transportando líquido más frío, de tal manera que la energía térmica es transportada de abajo hacia arriba y luego disipada. Las celdas que se forman lo hacen de manera espontáneamente autoorganizada produciendo una ruptura de la simetría en el sistema. Esta ruptura implica la emergencia de estructuras espaciales y la aparición de ciclos temporales donde antes no existían. La foto de la derecha es un recipiente con líquido en desequilibrio térmico, donde en virtud de la densidad del líquido, se forman celdas de convección con simetría hexagonal, un orden espacial nuevo en virtud de la disipación de energía. Los arreglos convectivos son pues, estructuras disipativas que se autoorganizan.

órdenes, de nuevos niveles jerárquicos de complejidad en un proceso irreversible de innovación y creatividad. La materia viva no escapa de esta explicación, los seres vivos son pues, estructuras disipativas y la existencia de vida en el universo es entonces, y hasta cierto punto, un fenómeno inevitable de la rica diversidad creativa de la naturaleza.

En palabras del propio Prigogine [15]: *Una estructura disipativa o un sistema disipativo es un sistema termodinámico abierto que opera fuera del equilibrio termodinámico e intercambia materia, energía e información con su ambiente externo. En estos sistemas, la organización puede emerger mediante la ruptura espontánea de simetría, tanto espacial como temporal, en virtud del intercambio con el medio externo que propicia la formación de estructuras complejas.*

Algunos autores especulan que se requieren al menos tres condiciones para la emergencia autoorganizada de nuevos órdenes o niveles de complejidad y que corresponden a la condición en la cual una estructura disipativa se autosustenta [5, 15]. (1) La presencia de una frontera física que separa un sistema de su entorno y que permite la existencia de gradientes y flujos. Esta condición pareciera necesaria para la emergencia de la materia viva caracterizada por la compartimentalización. Además, las diferencias de gradiente representan la condición de desequilibrio. (2) Flujos bidireccionados de energía, materia e información; esto es, la característica de ser abierto termodinámicamente y de realizar in-

tercambios con el entorno. (3) Interacciones no lineales entre los elementos constituyentes del sistema, tales como retroalimentación, autocatálisis o ciclos inhibitorios.

6. Sin tregua: la evolución de la materia es inevitable

La evolución de la materia por medio de la autoorganización puede verse como una sucesión de inestabilidades donde cada vez que un sistema alcanza un punto de inestabilidad, espontáneamente y de manera irreversible, evoluciona hacia una nueva forma de organización estructural o funcional [15]. Esos puntos de inestabilidad no son continuos en el tiempo, ocurren sólo a ciertos intervalos en los que las condiciones iniciales, principalmente termodinámicas y de interacciones no lineales, son las adecuadas para el surgimiento de nuevos órdenes sobre los previamente existentes, en una sucesión jerárquica de procesos [15]. Estas aparentes pausas temporales son requisito para la preparación de las condiciones adecuadas. En estos intervalos se van construyendo y acumulando interacciones entre elementos previos a un nuevo salto cualitativo del sistema. No son de ninguna manera intervalos muertos o ratos de ocio donde la naturaleza deja de exhibir creatividad.

Luego de la “gran explosión” que dio origen al universo, en el primer segundo de su existencia, la materia se había hecho presente en la forma en como la conocemos hoy en día [16]. De manera más detallada⁸, a los 10^{-35} segundos, el universo era una sopa granulosa de quarks. A los 10^{-11} segundos, fluctuaciones espacio-temporales provocaron que la materia localmente superara a la antimateria y con ello se garantizaba su prevalencia. A los 10^{-5} segundos, los protones y neutrones se formaron a partir de los quarks. En el primer segundo de su existencia, el universo estaba formado por núcleos de los elementos más ligeros (hidrógeno y helio, principalmente) que comenzaron a formarse a partir de la asociación entre neutrones y protones. Detengámonos a reflexionar un momento en este primer segundo. Nos es difícil imaginar intervalos de tiempo tan pequeños como el comprendido entre los 10^{-35} y los 10^{-5} segundos⁹. Pero supongamos que logramos imaginarlo y podemos asistir en cámara lenta a lo acontecido en este intervalo como si transcurriera en un periodo de años. La diferencia fundamental entre los 10^{-35} y los 10^{-5} segundos (¡30 órdenes de magnitud de diferencia!) sería un universo un poco más frío, con las condiciones termodinámicas propicias como para permitir la interacción entre quarks que darían lugar a un nuevo orden: las partículas subatómicas y luego de un nuevo intervalo de tiempo, proporcionalmente largo, a la interacción entre neutrones y protones para formar los primeros núcleos atómicos¹⁰.

⁸Ver “Un Universo en evolución de Vladimir Avila-Reese, en este mismo libro.

⁹De hecho, del cero a los 10^{-43} segundos, conocido como “Era de Planck” la física actual no tiene mucha idea de como explicar lo que ahí pudo haber sucedido. Para ello es necesario contar con teorías que expliquen el papel de los efectos de la gravitación cuántica que, en esos brevísimos instantes, debieron haber dominado la física del joven universo. Véase; sin embargo, las teorías que surgen en los albores de este siglo XXI: [17]

¹⁰Ver los capítulos de Myriam Mondragón y Genaro Toledo en este mismo volumen.

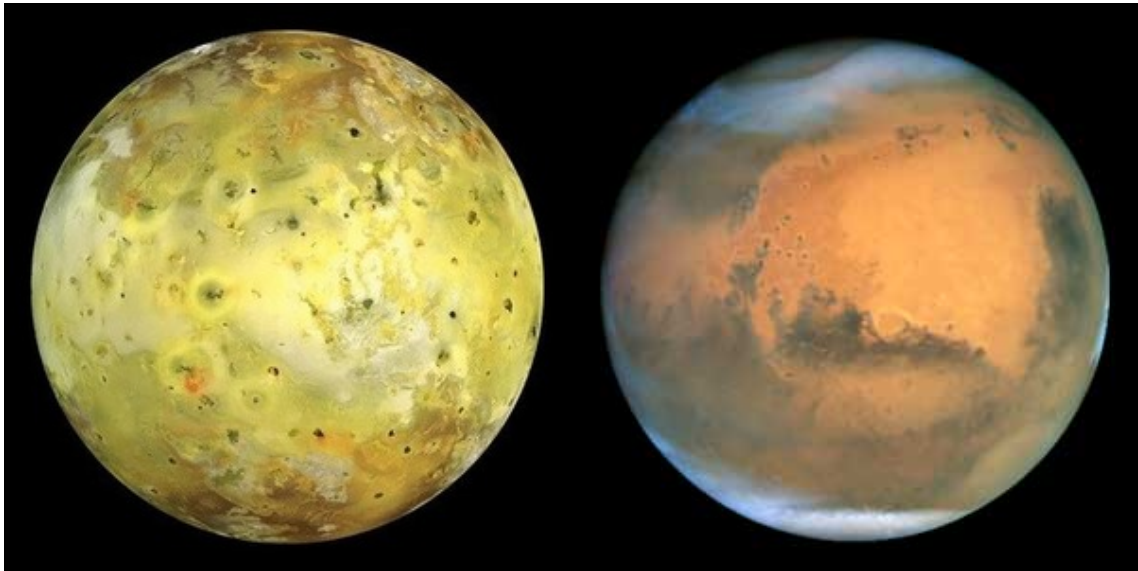


Figura 2: La evolución del universo ha generado estructuras con características sumamente complejas como son las condensaciones de materia rocosa en forma de planetas o lunas. Estas estructuras, a su vez, llegan a tener dinámicas fuera del equilibrio muy ricas como el vulcanismo, los océanos, las atmósferas y el clima. Eventualmente pueden llegar a tener condiciones energéticas propicias para la emergencia de la vida. A la izquierda la luna Io de Júpiter, que es el objeto con el vulcanismo más activo de todos los cuerpos celestes conocidos. Su superficie es una impresionante colección de volcanes activos en erupción. A la derecha, el planeta Marte visto desde el telescopio Hubble. En la foto se aprecian nubes ondulantes de cristales de hielo en los polos y tormentas de arena cercanas a la zona ecuatorial. Fotos: NASA.

Entre la emergencia de los protones y neutrones por separado y luego la formación de los núcleos atómicos, pareciera que existió un momento de quietud, de falta de innovación. Nada de eso, simplemente sucede que las condiciones termodinámicas no eran aún propicias y la expansión del universo se encargaría de ir las creando en ese periodo de espera. Como si la creación de nuevos órdenes, de nuevas estructuras sucediera, efectivamente, en saltos.

Un nuevo fenómeno de gran trascendencia en la organización del universo tendría lugar 380 mil años más adelante después de la emergencia de los núcleos atómicos. A los núcleos se unirían los electrones para formar los elementos químicos que son los constituyentes unitarios mínimos de la materia estable como la conocemos hoy en día. En esa historia narrativa de la evolución de la materia, vendría de nuevo más adelante un intervalo muy largo de espera, de casi 300 millones de años antes de que las condiciones termodinámicas y de interacciones gravitatorias dieran lugar a la condensación de gran-

des cantidades de átomos en las estructuras que conocemos como estrellas y éstas a su vez, en conglomerados de estrellas que son las galaxias [16].

Hasta donde es posible observar, el universo todo está lleno de un número gigantesco de estrellas y galaxias. El surgimiento de la primera estrella pues o de la primera galaxia no fue por tanto, un acto único, privilegiado, producto del azar. Fue por lo contrario, un acto generalizado, incontenible, inevitable e irreversible regido por el carácter termodinámicamente abierto de un universo en expansión.

En el interior de las estrellas, como ya se ha dicho, se dan procesos que originan todos los elementos químicos que existen de manera natural, ya sea por nucleosíntesis termoneuclear o bien por las condiciones extremadamente violentas y energéticas de cierto tipo de estrella que explota en forma de supernovas. Como sea, los elementos químicos más pesados llegan a condensarse para formar cuerpos sólidos masivos que llamamos planetas. Nuestro sistema solar se originó alrededor de los 9 mil millones de años luego de la gran explosión. La evidencia observacional indica que los sistemas solares, es decir una estrella orbitada por planetas, son sistemas cuya existencia es común y generalizada [18]. Nuestro sistema solar y eso incluye a la Tierra, no es una creación privilegiada y aunque nos cueste trabajo admitirlo porque finalmente es nuestra casa ¡y es una casa fabulosa!, su existencia es más bien ordinaria y banal.

¿Es la evolución química banal y ordinaria? Lamentablemente para el discurso antropocéntrico, eso es lo que parece. Estudios teóricos indican que si acaso fuera posible repetir el origen del universo y las leyes de la física fueran diferentes a las actuales, por ejemplo que algunas las constantes fundamentales tuvieran otros valores o que la fuerza nuclear débil no existiera [19–21], aún así la formación de quarks (con valores diferentes de masa), los núcleos atómicos y los elementos químicos se formarían dando lugar a universos materiales "exóticos"¹¹. En estos universos podría suceder que ciertos elementos químicos pesados nunca se formaran o que las estrellas fueran diferentes, menos energéticas y con explosiones menos espectaculares; pero aún así, existiría la química orgánica [20] (con base en el carbono) y los planetas. La evolución de la materia parece entonces inevitable.

Los planetas, diferentes a la Tierra, en alguna etapa de su existencia pudieran tener dinámicas autoorganizadas muy ricas, patentes en una variedad de fenómenos geológicos y climáticos, como lo atestiguan las tormentas de viento en Marte, las tormentas altamente turbulentas en Júpiter, el vulcanismo extremo en la luna Io y los mares de la luna Europa. Todos ellos fenómenos lejos del equilibrio termodinámico con una fuente de energía externa (una estrella por ejemplo) o con fuentes de energía propia, como en el caso de las corrientes convectivas del magma líquido terrestre causado por el calor generado por el decaimiento radioactivo del uranio y torio. La existencia de exoplanetas con atmósferas en estados termodinámicos lejos del equilibrio y más aún, con gases orgánicos en ellas es ya una realidad indiscutida [22–27].

La existencia de otros planetas ricos en fenómenos termodinámicos lejos del equilibrio,

¹¹Ver el capítulo de Genaro Toledo, "La materia y sus nuevas estructuras, en este libro".

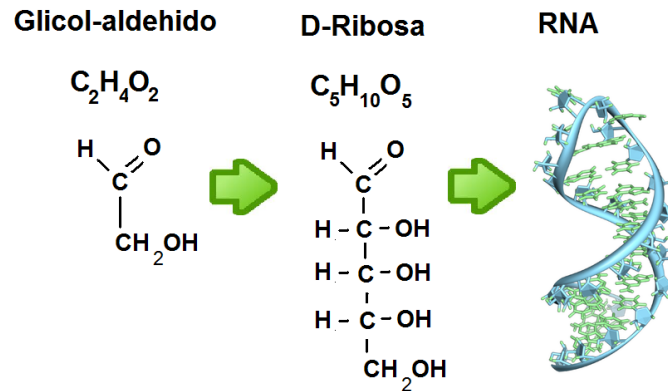


Figura 3: La molécula glicolaldehído fue recientemente identificada en el medio interestelar y fuera de nuestro sistema solar. Es químicamente precursora de la ribosa, que es un monosacárido constituyente del ARN. Su existencia en regiones lejanas del universo confirma la tesis de la evolución química hacia formas de creciente complejidad, antecedentes de las primeras moléculas con capacidad de codificación y autoreplicación, esenciales para la vida.

nos hace concluir que las condiciones ideales para la emergencia, prevalencia y evolución de las biomoléculas son también un hecho frecuente y generalizado. Se estima que tan sólo en nuestra galaxia -la Vía Láctea- existen no menos de 500 millones de planetas potencialmente habitables [28]. Lo más excitante de ello es que en las próximas décadas podremos atestiguar el posible descubrimiento de estos exoplanetas potencialmente habitados [29], pues las técnicas observacionales para detectar oxígeno molecular atmosférico de origen biótico ya existen hoy en día, por ejemplo, una vez que el proyecto del telescopio espacial James Weeb se materialize [30].

La materia compleja y el cómputo emergente

Es factible pensar que la materia viva exista en diversos confines del universo y que la vida en la Tierra tal como la conocemos, sea un mero ejemplo de un proceso generalizado, una consecuencia de la incansable fuente creativa del universo en expansión. Si bien los pasos exactos que condujeron al origen de la vida en el universo continúan siendo una gran incógnita, es de imaginarse, dado el cúmulo de evidencia científica, que la materia viva surgió como una propiedad emergente de los polímeros orgánicos que, por su tamaño relativo y estructura, tienen la capacidad de codificar y almacenar información y pueden además autoreplicarse. Tales polímeros orgánicos serían el producto de un proceso generalizado de evolución química que ha producido a lo largo de la existencia del universo formas moleculares de creciente complejidad [31, 32]. Tales moléculas, ingredientes esenciales de la vida, se encuentran presentes incluso en el medio interestelar como es el caso

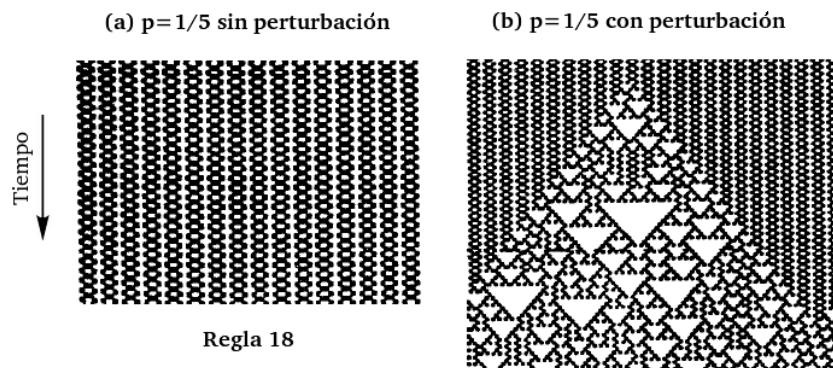


Figura 4: Un autómata celular simple con regla dinámica 18 [35]. En (a) tenemos la evolución temporal del autómata bajo condiciones iniciales homogéneas y periódicas de mínima energía con “ $p=1/5$ ”, es decir un ‘1’ en cada 5 posiciones entre ‘ceros’ [36]. El resultado de una condición inicial periódica, es un patrón periódico en la evolución espacio-temporal del autómata. En (b), la misma regla y la misma condición inicial de mínima energía. Pero luego de un tiempo de evolución se ha introducido una perturbación (fluctuación) local, que consiste en cambiar un ‘1’ por un ‘0’ en una posición aleatoria. Como resultado, se tiene la emergencia de un patrón global autoorganizado donde antes no lo había y que evoluciona temporalmente como una ruptura de simetría. Se ha demostrado que los autómatas celulares, como modelos dinámicos simples de procesos en la naturaleza, son capaces de cómputo emergente y son incluso máquinas de tipo computadora universal [37, 38]. Más aún, se ha mostrado la existencia de fluctuaciones $1/f$ en su evolución temporal (regla 110), lo que podría indicar presencia de fenómenos de criticalidad [39].

de Glicolaldehído (CH_2OHCHO), un azúcar monosacárido químicamente precursor de la ribosa que es un constituyente clave del ARN [33]. La química orgánica presente en los meteoritos también nos provee de una rica fuente de evidencias de la capacidad de evolución química orgánica de origen abiótico [34].

Existe una creciente forma de pensar que argumenta que justo antes de la aparición de la materia compleja con propiedades de vida surgió, como paso previo, la materia con características informáticas [40]¹². Es decir aquella que es capaz en su interacción, de (i) almacenar, (ii) transmitir y (iii) procesar información. De todos los aspectos que nos permiten distinguir a la materia inanimada de la viva, el aspecto más crucial y relevante es el aspecto informático. Ya desde los años 80 del siglo XX, se especuló que la materia que es capaz de mostrar los tres puntos arriba descritos, realiza lo que se conoce como *cómputo emergente* [41, 42]. Esta podría ser una propiedad generalizada de las moléculas orgánicas pre-bióticas como el ARN y sus precursores. Pero es también una propiedad genérica de muchos sistemas complejos simples (figura 4).

¹² Véase también el capítulo de Héctor Zenil “El universo algorítmico” en este mismo libro.

7. La materia compleja viva

Las biomoléculas precursoras de la vida en la Tierra, ya sea sintetizadas localmente o provenientes del espacio exterior, llegaron en su curso evolutivo a autoensamblarse protegiéndose del medio externo mediante una estructura membranosa es decir una protocélula autocontenida, a la que Alexander Oparin llamó coaservados [43] y Sydney Fox microesferas proteínoides [44]. Recordemos que la existencia de una frontera física que permita el aislamiento e intercambio de materia, energía e información es uno de los requisitos que facilitan la emergencia de nuevos niveles de complejidad. Los organismos vivos autónomos hicieron su aparición en la Tierra y eso debió haber ocurrido hace por lo menos 3.5 mil millones de años, fecha en la que se tiene registrado el fósil más antiguo conocido, un microorganismo fotosintetizador colonial llamado cianobacteria [45]. El registro fósil de la vida en la Tierra contiene entonces una enorme muestra de los organismos que en distintas épocas han poblado el planeta, mucho de ellos ya extintos y algunos de ellos poco diferentes de los que actualmente se encuentran entre nosotros. Una característica del registro fósil llama la atención. El origen de nuevas especies o su extinción acontece en saltos, es decir, periodos históricos de gran creatividad biológica, seguidos de periodos de aparente calma que los biólogos llaman *éstasis*. De hecho el patrón estadístico de estos intervalos no sigue una distribución atribuible al azar sino que es reminiscente de las distribuciones de probabilidad asociadas a los fenómenos críticos autoorganizados [46–49].

Desde los trabajos de Charles Darwin se ha creado la imagen dominante en el pensamiento biológico de que la materia viva es una mera acumulación de accidentes mutacionales que se fijan y este sería el proceso esencial de la creatividad en la naturaleza, es decir la selección natural [50]. Nada pareciera estar más equivocado que esto [51]. Nada parece más cercano a negar la contundente evidencia de la creatividad de los procesos lejos del equilibrio y la emergencia de la complejidad mediante autoorganización que esta forma de pensar, que atribuye la creatividad en el universo exclusivamente a un juego de casino donde las maravillas de la probabilidad y la suerte (mala o buena) es lo que rige. Como lo dice correctamente el premio Nobel Christian de Duve [51] “La idea de que el evento de origen de la vida es altamente improbable es demostrablemente falso. La vida no surgió de un sólo golpe”, –de suerte– podríamos agregar.

Stuart Kauffman, al igual que otros como Brian Goodwin, ha planteado la siguiente línea argumentativa [52]. Si pudiéramos atestiguar de nuevo el surgimiento y evolución de la vida en la Tierra y dado que las formas vivas son meros accidentes históricos producto de mutaciones aleatorias (lo que propone el pensamiento darwinista), las nuevas formas vivas resultantes, ¿serían semejantes en función y morfología a las que conocemos como ejemplos en la Tierra (vivas o extintas)? El pensamiento evolutivo dominante no tiene una respuesta clara frente a esta pregunta, incluso cuando estamos hablando de ciencia y ésta debería ser mínimamente predictiva. ¿Cuáles serían aquellas propiedades que serían diferentes?, ¿Cuáles serían iguales?, ¿Veríamos nuevamente aparecer la

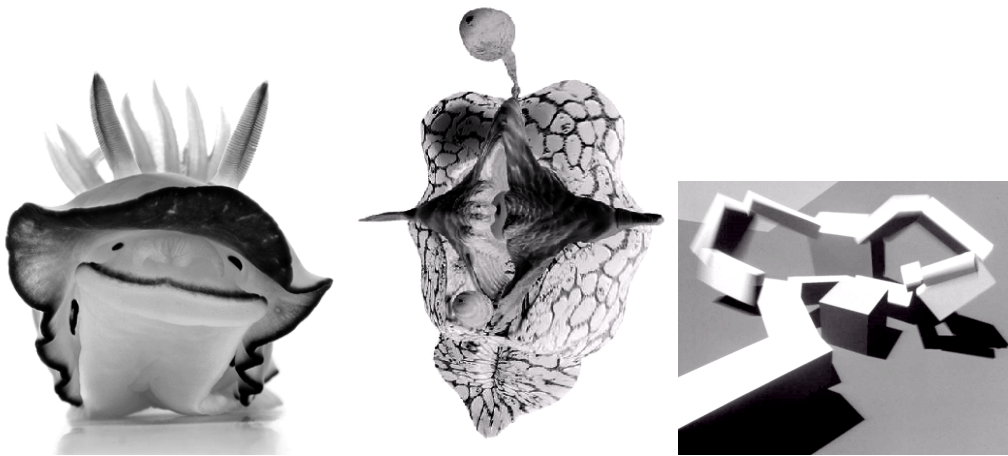


Figura 5: “Rebobinar la película” es como se conoce el experimento hipotético que repite el origen y evolución de la vida una y otra vez. ¿Qué se obtendría? Tendríamos tres posibles escenarios. En el primero obtendríamos exactamente la misma flora y fauna que vemos hoy en día, como el gasterópodo en la foto de la izquierda. Esta situación se antoja altamente improbable debido a las fluctuaciones históricas. En el segundo escenario las formas vivas resultantes no corresponderían a las conocidas actualmente; pero serían reconocibles y próximas morfológicamente a las actuales, como lo muestra la forma en la foto del centro que corresponde a un organismo hipotético generado por computadora. El último escenario correspondería a una flora y fauna totalmente diferentes a las conocidas; por ejemplo el organismo que aparece en la foto de la derecha que sería un tipo de “anélido” con segmentos cúbicos. Este tipo de organismos serían altamente improbables porque su morfología viola principios de optimización dado por las leyes de la física y este tipo de restricciones son inevitables en el curso de la evolución de la vida [13].

fotosíntesis, la reproducción sexual, los organismos cordados?

Y si fuéramos capaces de repetir una y otra vez el experimento donde viéramos surgir de nuevo la vida en la Tierra o en otros planetas, ¿qué veríamos? Si ese experimento fuera posible, veríamos un conjunto de atributos funcionales y morfológicos que no se repetiría, que sería característico de las especies accidentalmente formadas; pero también, con toda seguridad, veríamos un conjunto de características y atributos que se repetiría una y otra vez. ¿Como interpretaríamos este conjunto de atributos comunes? Hay varias posibilidades. Una de ellas diría que son características que se han seleccionado recurrentemente porque representan adaptaciones útiles. Otra diría que tales características reflejan propiedades de los organismos tan fácilmente encontradas en el proceso evolutivo que su aparición es prácticamente inevitable. Alternativamente, tales atributos recurrentes podrían deberse no a la selección sino por virtud de ser propiedades inherentes a la materia cons-

tituyente y a las leyes que la gobiernan. Tales propiedades, en opinión de Kauffman, son universales y ahistóricas. Son propiedades genéricas de los organismos autoorganizados y la selección tiene una capacidad muy limitada y modesta para desviar el curso evolutivo de esas propiedades inherentes. En pocas palabras, el mecanismo motor preponderante de la evolución sería no las mutaciones al azar, que desde luego existen, sino la autoorganización ahistórica que actuaría en base a restricciones propias de la materia. Sobre estos dos mecanismos actuaría la selección natural [53]. Nótese que he omitido la frase "evolución biológica" porque en principio, la autoorganización, como mecanismo evolutivo, actúa en todos los aspectos de la evolución en la naturaleza incluida la evolución química que dio origen a átomos y moléculas, que a su vez incluyen a los polímeros autoreplicantes constituyentes de la vida en su forma más primaria.

La autoorganización es un proceso característico de los sistemas complejos, es decir de un conjunto de elementos semejantes que interactúan para generar propiedades emergentes a escala global. Se trata de un orden emergente generado sin la intervención de un control central o de un plan predefinido, ya sea en el diseño estructural de los elementos o codificado en los mecanismos de interacción. Este nuevo orden se manifiesta generalmente como una ruptura espontánea de simetría, en la que existe formación de patrones espacio-temporales donde antes no los había, y por la posibilidad de conductas colectivas altamente organizadas, aún en la ausencia de diseños prefijados. Aparentemente, el requisito principal para su acción es que los sistemas sean termodinámicamente abiertos y por ello la autoorganización existe ahistóricamente en todos los confines del universo que, al estar aún en expansión, provee las condiciones energéticas necesarias para la evolución de la materia compleja, incluida desde luego la materia compleja viva.

8. El futuro

¿Cuáles son las propiedades de los sistemas complejos que los hacen similares? ¿Por qué vemos conductas dinámicas similares entre las inestabilidades del clima, los derrumbes de los mercados de valores, los terremotos o la actividad eléctrica del cerebro? ¿Tienen las estructuras disipativas leyes generales que describen sus conductas dinámicas y por ello los sistemas complejos tienen similitudes independientemente de sus detalles materiales? ¿Es la evolución de la materia un sistema dinámico determinista? Para responder a estas preguntas necesitamos encontrar los principios generales que gobiernan la materia compleja, sus transiciones, sus inestabilidades y su autoorganización emergente. El siglo XXI será, sin duda, el siglo de la complejidad, en el sentido de que las leyes físicas que gobiernan los sistemas complejos deberán ser entendidas y explicadas. Para ello, los sistemas complejos son unos de los temas de mayor crecimiento actual y lo seguiremos viendo por los años que vendrán. Los jóvenes físicos de hoy tendrán en sus manos, a lo largo de este siglo, la fascinante tarea de expandir las fronteras del conocimiento interdisciplinario sobre los mecanismos dinámicos de la creatividad que caracteriza a la naturaleza.

Agradecimientos

El autor agradece el apoyo de DGAPA-UNAM proyecto PAPIIT IN-101712.

9. Referencias

- [1] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R.olta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright, "First-year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) observations: Determination of cosmological parameters," *The Astrophysical Journal Supplement Series*, vol. 148, no. 1, p. 175, 2003.
- [2] I. S. Shklovski, *Universo, vida, intelecto*. Editorial Mir-Moscú URSS, 1977.
- [3] J. M. Lehn, "Toward complex matter: supramolecular chemistry and self-organization," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 99, no. 8, p. 4763, 2002.
- [4] O. Miramontes, "Evolución, autoorganización y otros números del montón," *Miscelánea Matemática*, vol. 49, 2009.
- [5] I. Prigogine and I. Stengers, *Order Out of Chaos: Man's New Dialogue With Nature*. Bantam, 1984.
- [6] P. Davies, "Quantum vacuum noise in physics and cosmology," *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, vol. 11, p. 539, 2001.
- [7] S. Battersby, 2008, "It's confirmed: Matter is merely vacuum fluctuations", *New Scientist Online*, 20 Nov.
- [8] L. Zyga, "Could the Big Bang have been a quick conversion of antimatter into matter?", *Phys.org*, 07, 2011.
. [Online]: <http://phys.org/news/2011-07-big-quick-conversion-antimatter.html#nRlv>
- [9] D. Hajdukovic, "Do we live in the universe successively dominated by matter and antimatter?" *Astrophysics and Space Science*, vol. 334, pp. 219–223, 2011. [Online]: <http://dx.doi.org/10.1007/s10509-011-0754-2>
- [10] P. Singh, "A glance at the earliest universe," *Physics*, vol. 5, p. 142, Dec 2012. [Online]: <http://link.aps.org/doi/10.1103/Physics.5.142>
- [11] Y. Habara, H. Kawai, M. Ninomiya, and Y. Sekino, "Possible origin of CMB temperature fluctuations: Vacuum fluctuations of kaluza-klein and string states during the inflationary era," *Phys. Rev. D*, vol. 85, p. 104027, May 2012. [Online]: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.85.104027>

- [12] M. Calvin, "Chemical evolution: Life is a logical consequence of known chemical principles operating on the atomic composition of the universe," *American Scientist*, vol. 63, pp. 169–177, 1975. [Online]: <http://www.jstor.org/stable/27845361>
- [13] B. C. Goodwin, *How the Leopard Changed its Spots: The Evolution of Complexity*. Scribner, 1994.
- [14] R. V. Solé and B. C. Goodwin, *Signs of life: how complexity pervades biology*. Basic Books, 2000.
- [15] I. Prigogine, "Time, structure and fluctuations," *Science*, vol. 201, no. 4358, pp. 777–785, 1978.
- [16] M. S. Turner, "Origin of the Universe," *Scientific American Magazine*, vol. 301, no. 3, pp. 36–43, 2009.
- [17] I. Agullo, A. Ashtekar, and W. Nelson, "Quantum gravity extension of the inflationary scenario," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 109, p. 251301, Dec 2012. [Online]: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.109.251301>
- [18] V. Meadows and S. Seager, "Terrestrial Planet Atmospheres and Biosignatures," *Exoplanets*, vol. 1, pp. 441–470, 2010.
- [19] R. Harnik, G. Kribs, and G. Perez, "A universe without weak interactions," *Physical Review D*, vol. 74, no. 3, p. 035006, 2006.
- [20] R. Jaffe, A. Jenkins, and I. Kimchi, "Quark masses: An environmental impact statement," *Physical Review D*, vol. 79, no. 6, p. 065014, 2009.
- [21] A. Jenkins and G. Perez, "Looking for Life in the Multiverse," *Scientific American*, vol. 302, no. 1, pp. 42–49, 2010.
- [22] G. Tinetti, A. Vidal-Madjar, M. C. Liang, J. P. Beaulieu, Y. Yung, S. Carey, R. J. Barber, J. Tennyson, I. Ribas, N. Allard *et al.*, "Water vapour in the atmosphere of a transiting extrasolar planet," *Nature*, vol. 448, no. 7150, pp. 169–171, 2007.
- [23] M. R. Swain, G. Vasisht, and G. Tinetti, "The presence of methane in the atmosphere of an extrasolar planet," *Nature*, vol. 452, no. 7185, pp. 329–331, 2008.
- [24] M. R. Swain, P. Deroo, C. Griffith, G. Tinetti, A. Thatte, G. Vasisht, P. Chen, J. Bouwman, I. Crossfield, D. Angerhausen *et al.*, "A ground-based near-infrared emission spectrum of the exoplanet HD 189733b," *Nature*, vol. 463, no. 7281, pp. 637–639, 2010.

- [25] N. Madhusudhan, J. Harrington, K. Stevenson, S. Nymeyer, C. Campo, P. Wheatley, D. Deming, J. Bleicic, R. Hardy, N. Lust *et al.*, "A high C/O ratio and weak thermal inversion in the atmosphere of exoplanet WASP-12b," *Nature*, vol. 469, no. 7328, pp. 64–67, 2010.
- [26] K. B. Stevenson, J. Harrington, S. Nymeyer, N. Madhusudhan, S. Seager, W. C. Bowman, R. A. Hardy, D. Deming, E. Rauscher, and N. B. Lust, "Possible thermochemical disequilibrium in the atmosphere of the exoplanet GJ 436b," *Nature*, vol. 464, no. 7292, pp. 1161–1164, 2010.
- [27] D. Deming, "Planetary science: A cloudy view of exoplanets," *Nature*, vol. 468, no. 7324, pp. 636–637, 2010.
- [28] NASA, "Kepler Exoplanet Mission: Cosmic census finds crowd of planets in our galaxy," *Associated Press*, 2011.
- [29] R. k. Kopparapu, R. Ramirez, J. F. Kasting, V. Eymet, T. D. Robinson *et al.*, "Habitable Zones Around Main-Sequence Stars: New Estimates," *arXiv:1301.6674, astro-ph.EP*, 2013.
- [30] A. Loeb and D. Maoz, "Detecting bio-markers in habitable-zone earths transiting white dwarfs," *arXiv:1301.4994, astro-ph.EP*, 2013.
- [31] W. Fontana and L. Buss, "What would be conserved if 'the tape were played twice'?" *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, vol. 91, no. 2, p. 757, 1994.
- [32] M. A. Nowak and H. Ohtsuki, "Prevolutionary dynamics and the origin of evolution," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, no. 39, p. 14924, 2008.
- [33] M. Beltrán, C. Codella, S. Viti, R. Neri, and R. Cesaroni, "First detection of glycolaldehyde outside the Galactic Center," *The Astrophysical Journal Letters*, vol. 690, p. L93, 2009.
- [34] Z. Martins, "Organic chemistry of carbonaceous meteorites," *Elements*, vol. 7, no. 1, p. 35, 2011.
- [35] O. Miramontes, "Algunos aspectos de la teoría de autómatas celulares y sus aplicaciones en biofísica", Tesis de Licenciatura en Física, Facultad de Ciencias, UNAM, 1989. [Online]: <http://valle.fciencias.unam.mx/titulacion/35.pdf>
- [36] H. Arce, W. L. Mochán, and G. Cocho, "Minimum energy configurations of atoms adsorbed on a lattice," *Surface science*, vol. 294, no. 1, pp. 108–115, 1993.

- [37] S. Wolfram, "Universality and complexity in cellular automata," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 10, no. 1, pp. 1–35, 1984.
- [38] M. Cook, "Universality in elementary cellular automata," *Complex Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 1–40, 2004.
- [39] S. Ninagawa, "1/f noise in elementary cellular automaton rule 110," *Unconventional Computation*, pp. 207–216, 2006.
- [40] S. I. Walker and P. C. W. Davies, "The algorithmic origins of life," *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 10, no. 79, February 6, 2013. [Online]: <http://rsif.royalsocietypublishing.org/content/10/79/20120869.abstract>
- [41] J. P. Crutchfield and M. Mitchell, "The evolution of emergent computation," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 92, no. 23, pp. 10742–10746, 1995. [Online]: <http://www.pnas.org/content/92/23/10742.abstract>
- [42] C. Langton, "Computation at the edge of chaos: Phase transitions and emergent computation," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 42, no. 1, pp. 12–37, 1990.
- [43] A. Oparin, *El origen de la vida. 11a ed.* México: Fondo de Cultura Popular, 1974.
- [44] S. Fox, K. Harada, and J. Kendrick, "Production of spherules from synthetic proteinoid and hot water," *Science*, vol. 129, no. 3357, p. 1221, 1959.
- [45] J. Schopf and B. Packer, "Early Archean (3.3-billion to 3.5-billion-year-old) microfossils from Warrawoona Group, Australia," *Science*, vol. 237, no. 4810, p. 70, 1987.
- [46] R. V. Solé and J. Bascompte, "Are critical phenomena relevant to large-scale evolution?" *Proceedings: Biological Sciences*, vol. 263, no. 1367, pp. 161–168, 1996.
- [47] R. V. Solé, S. C. Manrubia, M. Benton, and P. Bak, "Self-similarity of extinction statistics in the fossil record," *Nature*, vol. 388, no. 6644, pp. 764–767, 1997.
- [48] P. Bak and S. Boettcher, "Self-organized criticality and punctuated equilibria," *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 107, no. 2-4, pp. 143–150, 1997.
- [49] H. J. Jensen, *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological systems.* UK: Cambridge Univ Pr, 1998.
- [50] R. Dawkins, *The selfish gene.* Oxford University Press, USA, 2006.
- [51] C. De Duve, "The constraints of chance," *Scientific American, January*, p. 112, 1996.

- [52] S. A. Kauffman, "Self-organization, selective adaptation and its limits: a new pattern of inference in evolution and development," in *Evolution at a Crossroads: The New Biology and the New Philosophy of Science*, D. J. Depew and B. H. Weber, Eds. Boston: MIT Press, 1985.
- [53] J. Halley and D. Winkler, "Critical-like self-organization and natural selection: Two facets of a single evolutionary process?" *Biosystems*, vol. 92, no. 2, pp. 148–158, 2008.

Redes, Interacciones, Emergencia

Lucas Lacasa, Universidad Politécnica de Madrid, España

Tenemos la física de lo muy grande, la física de lo muy pequeño ... y la física de lo mucho. Y en este último caso, parece fundamental el conocer cómo está conectado ese mucho. Pues finalmente, el todo es más que la suma de sus partes porque las partes no suman, simplemente. Se agregan en un enjambre de interconexiones. La arquitectura de la complejidad.

1. Introducción

La tradición en ciencia, ya sea en física o en biología, ha sido hasta la fecha eminentemente reduccionista: romper el problema en sus ladrillos básicos y encontrar la solución como una sencilla extrapolación lineal del comportamiento individual. Como se ha puesto de manifiesto en la parte tercera de este libro, este enfoque reduccionista, aún cuando los logros y el avance científico asociado son incuestionables, es ineficiente cuando el sistema bajo estudio está formado por un alto número de elementos que interactúan de forma no lineal entre sí. El comportamiento complejo *emerge* de la agregación de estos elementos y para una correcta descripción de las propiedades macroscópicas del sistema se antoja necesario estudiar el sistema en su totalidad, describiendo tanto las propiedades locales e individuales de cada elemento como la arquitectura que emerge de las interconexiones y agregación del conjunto. Ejemplos existen por doquier: así como el cambio dramático que evidencia el agua al reducir la temperatura de la misma por debajo de 0° Celsius no puede explicarse únicamente a partir del estudio de las propiedades físico-químicas de la molécula H₂O, la extinción de especies en un ecosistema no puede entenderse a partir de las relaciones de predación o mutualismo entre dos especies separadas de su entorno. Es la *arquitectura* formada por las interacciones entre las moléculas de agua, o la formada por las interacciones entre cada especie que constituye un ecosistema, la que nos abre las puertas al entendimiento de los fenómenos colectivos (transiciones de fase, extinciones en cascada) que acaecen en el seno de esos sistemas. En los últimos años, un auténtico cambio de paradigma en la forma de entender los sistemas complejos está emergiendo, al constatar que una forma natural de describir dicha arquitectura es mediante un aparato matemático denominado red. Una red, formada por elementos (nodos) conectados entre

sí por enlaces que cuantifican la interacción entre ellos. Aunque las herramientas para describir estos objetos -denominados grafos en la comunidad matemática- fechan de mediados del siglo pasado, no es hasta el principio del siglo XXI cuando esta aproximación se consolida como fundamental para el estudio y la descripción de sistemas complejos que muestran comportamiento emergente. La razón de este desfase es bien sencilla: el acceso a datos empíricos (experimentos) con los que construir dichas redes no fue posible hasta hace pocos años, cuando la capacidad de procesamiento y cómputo de los ordenadores experimentase un crecimiento explosivo. Vivimos pues en la era de los datos. Con la ayuda de los ordenadores, modelos teóricos de interacción en red se están viendo comprobados diariamente. Y como no, cada respuesta plantea muchos otros interrogantes. ¿Qué información de un sistema complejo puede extraerse de la arquitectura que emerge de su red de interacciones?, ¿Qué relevancia tiene esta arquitectura en el comportamiento dinámico del sistema?, ¿Qué tipo de arquitecturas podemos encontrarnos en las redes de interacción?, ¿Por qué? En este capítulo trataremos de dar respuesta a algunas de estas cuestiones, haciendo un buceo en el mundo de las redes complejas y su aplicación en diferentes problemas, desde la transmisión de epidemias o los algoritmos de búsqueda hasta la extinción de especies. Acabaremos el capítulo planteando cuál puede ser el devenir de esta rama científica, cuyo progreso actual es exponencial y cuyo potencial está prácticamente limitado únicamente por nuestra imaginación.

2. Redes complejas: definiciones y ejemplos

Los inicios

Los orígenes de la teoría de redes están relativamente desperdigados en el tiempo. El trabajo seminal, denominado el los siete puentes de Königsberg, data del siglo XVIII y fue planteado por el gran matemático Leonard Euler. En aquel entonces, la ciudad de Königsberg (el antiguo nombre que recibía la actual ciudad rusa de Kaliningrado), que durante el siglo XVIII formaba parte de Prusia Oriental, era atravesada por el río Pregolya, el cual se bifurcaba generando una pequeña isla en el centro de la ciudad y dividiendo a la misma en cuatro partes separadas por agua y únicamente conectadas por un total de siete puentes. El problema que Euler se planteaba era saber si era posible el encontrar un circuito que pasara por cada uno de los puentes de esta ciudad, de tal forma que el caminante regresara al mismo punto habiendo atravesado cada uno de los siete puentes una vez y una sola. La respuesta fue negativa: no existe una ruta con estas características. Para hallar esta solución, Euler necesitó formalizar el problema en términos de un conjunto abstracto de nodos conectados entre si por otro conjunto de enlaces, que caracterizan las regiones terrestres y las conexiones entre ellas (ver figura 1), y analizar las propiedades de este constructo. Su demostración no solo dio lugar al nacimiento de una nueva rama en matemática discreta, la teoría de grafos, sino que la generalización del resultado de Euler en poliedros convexos dio lugar de la mano de Cauchy a la topología.

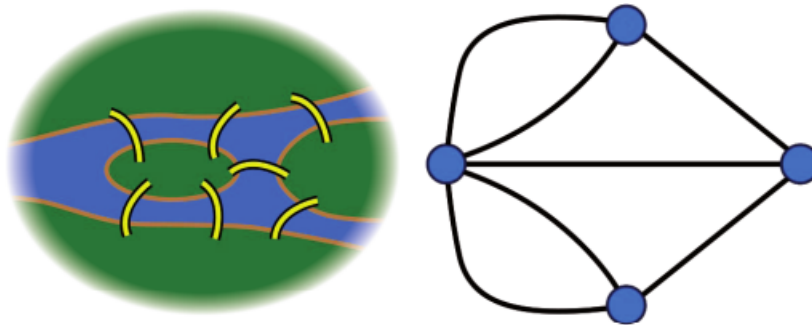


Figura 1: A la izquierda vemos el problema de los siete puentes de Königsberg, y a la derecha la abstracción matemática del mismo en términos de nodos (regiones de tierra) conectados por enlaces.

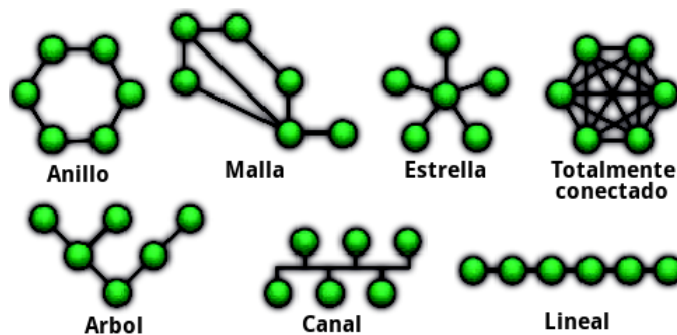


Figura 2: Grafos con diferentes topologías.

Tuvo que pasar casi un siglo, para que el matemático Cayley, que se hallaba estudiando ciertos problemas de cálculo diferencial, se topase en sus pesquisas con ciertas estructuras parecidas a las abstracciones de Euler: un tipo concreto de grafos denominados árboles (grafos acíclicos). Estos resultados tuvieron muchas aplicaciones en la química de la época. A partir de entonces, la teoría de grafos como disciplina matemática con derecho propio tuvo un auge importante, de la mano de científicos como Polya, Sylvester (quien introdujo la palabra *grafo*), Jordan o Kuratowski.

La teoría de grafos, hasta mediados del siglo pasado, estudiaba objetos que no constaban más que de un puñado de nodos (ver ejemplos en la figura 2). Con el desarrollo de las teorías de la probabilidad y la estadística, una nueva vía de estudio en la teoría de grafos tuvo lugar en los años sesenta del siglo pasado, de la mano del gran matemático Paul Erdős. Para los intereses de la subsiguiente teoría de redes este fue el punto de arranque, pues los métodos probabilísticos permitieron estudiar por primera vez las propiedades de grafos arbitrariamente grandes, cambiando ligeramente el enfoque y adquiriendo una



Figura 3: Proceso de formación de redes bajo el modelo Erdős-Rényi.

aproximación estadística. Como concepto opuesto al grafo regular (grafo donde cada nodo se conecta a k vecinos), emerge de la mano de Erdős y su colaborador Renyi el concepto de grafo aleatorio, o grafo de Erdős-Rényi, como aquel grafo generado por un proceso estocástico donde en cada paso dos nodos cualesquiera se conectan con cierta probabilidad p (ver figura 3). Estas aproximaciones teóricas se vieron muy beneficiadas a finales de los años noventa con la llegada de los ordenadores modernos, capaces de manejar una gran cantidad de datos. El estudio estadístico de grafos ya no residía únicamente en desarrollos formales. Los grafos reales, tales como la red de redes (internet) o las redes sociales o biológicas pudieron, por primera vez, ser examinadas y sus propiedades estadísticas calculadas. Y los resultados no pudieron ser más inesperados: se encontraron con que estas arquitecturas eran extremadamente más complejas de lo que la teoría de Erdős describía. Sin embargo, dentro de ese caos de conexiones, ciertos patrones de orden emergían. La nueva era de la teoría de grafos, el análisis de grafos enormes que no eran ni regulares ni aleatorios, se llamó la teoría de redes complejas. Pasen y vean.

Ejemplos de redes complejas

Existen multitud de tipos de redes: algunas son no dirigidas (donde los enlaces no tienen dirección preferente), otras que si lo son, otras donde existen realmente dos conjuntos bien diferenciados de nodos (redes bipartitas), otras donde cada enlace ha de ser pesado según la importancia del mismo, y así sucesivamente. En este capítulo no vamos a discriminar estas características y por sencillez nos centraremos en el caso más general de redes no dirigidas. A continuación, y a modo de casos ilustrativos, enumeramos una lista no exhaustiva de algunas de las redes complejas que podemos observar a nuestro alrededor.

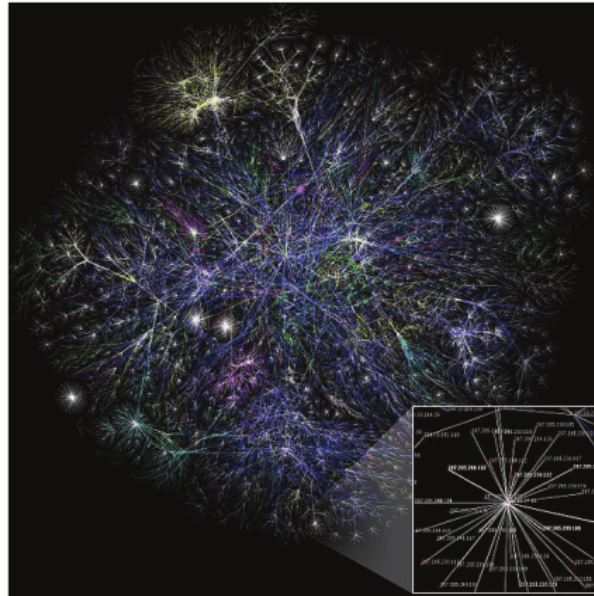


Figura 4: Red de internet.

Redes de información

- WWW: es la red más grande que ha sido analizada hasta el momento. Los nodos de esta red los conforman las páginas web, y dos nodos están conectados por un enlace si existe un hyperlink en una página que apunta a la otra. Esta red ha tenido un proceso de crecimiento descentralizado y autoorganizado, por lo que su descripción es de especial interés bajo el paraguas de los sistemas complejos.
- Internet: dependiendo del nivel de estudio, se define como una red donde los nodos son (i) computadoras o routers enlazados entre sí físicamente, o (ii) sistemas autónomos (compuestos de cientos de routers y computadoras) enlazados entre sí. De especial interés para estudiar problemas de propagación de información (donde “información” puede ser: virus informáticos, publicidad, etc).

Redes sociales

- Redes de amistad y trabajo: donde los nodos son individuos y los enlaces constituyen relaciones de amistad (Facebook), interés profesional (LinkedIn), algún grado de interés a nivel informacional (Twitter), etcétera. Interesante a la hora de estudiar comunidades de nodos con cierta afinidad, y en general en problemas de difusión de información.

- Redes de coautoría y colaboración: donde los nodos son individuos y los enlaces entre dos nodos caracterizan individuos que han colaborado. En el caso de redes de actores, la colaboración sería haber trabajado en la misma película (datos a través del Internet Movie Database), mientras que en el caso de redes de coautoría científica el enlace caracteriza el haber participado en la publicación de un artículo.
- Redes de email: donde los nodos son individuos digitales y dos individuos están enlazados si uno de ellos posee el email del otro.
- Redes de contactos sexuales: donde los nodos son individuos y los enlaces denotan un contacto sexual. Interesante a la hora de elaborar estrategias de planificación y prevención de epidemias asociadas a enfermedades de transmisión sexual.

Redes naturales

- Redes de regulación genética: Cada nodo es una función booleana (cuya entrada es un conjunto de números binarios $\{1/0\}$ y salida es a su vez un número binario). Son modelos de expresión genética: la expresión de un gen, es decir la producción por transcripción y traslación de la proteína que el gen codifica, es controlada a su vez por la presencia de otras proteínas tanto activadoras $\{1\}$ como inhibidoras $\{0\}$. De esta forma, el genoma mismo no es sino un conjunto de elementos en constante cambio *encendido/apagado*, donde los nodos representan las proteínas y los enlaces (dirigidos) representan la dependencia en la producción de cierta proteína respecto a otras proteínas (sus nodos vecinos). Estas dependencias se integran a través de las funciones booleanas anteriormente descritas. Los primeros modelos son bastante anteriores a la explosión de las redes en la primera década del siglo, y fueron planteados por el biólogo teórico Stuart Kauffman [1]
- Redes neuronales y el cerebro: existen diferentes aproximaciones a este problema, según la escala de estudio, desde redes formadas por nodos (neuronas) conectadas entre si, hasta las llamadas redes funcionales, donde los nodos son áreas neuronales y los enlaces indican una implicación funcional.
- Redes de plegamiento de proteínas: Cuando una proteína se pliega (paso previo a la expresión de la misma), toma secuencialmente diferentes conformaciones. Se representa cada nodo como una de estas configuraciones, de tal forma que dos nodos se conectan si existe un movimiento elemental que pasa de una a otra configuración. Se emplea este enfoque en problemas de dinámica de polímeros y en el estudio de proteínas.
- Redes tróficas: donde los nodos representan especies de un ecosistema y los enlaces, dirigidos, indican predación (alternativamente, el enlace puede ir en sentido con-

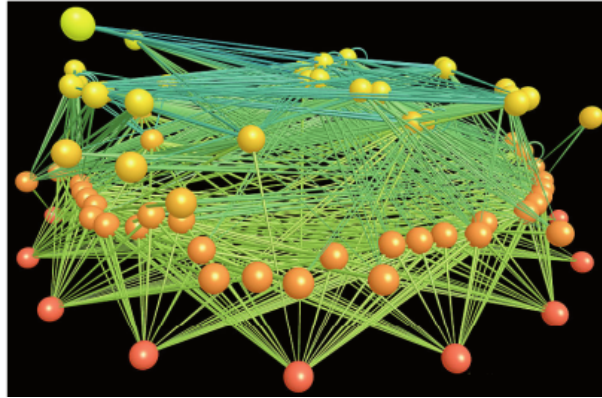


Figura 5: Ejemplo de una red trófica.

trario si lo entendemos como flujo de energía de la presa al predador). Un ejemplo puede visualizarse en la figura 5.

- Redes mutualistas: similar a la red trófica, caracteriza relaciones de mutualismo (donde ambas especies se benefician de la interacción) en lugar de predación.

Redes de infraestructura

- Red eléctrica: formada por nodos (centrales eléctricas, puntos de consumo) conectadas por enlaces que caracterizan a los cables de transmisión eléctrica. De fundamental importancia para la prevención de apagones en cascada.
- Redes de transporte aéreo: donde los nodos son aeropuertos y los enlaces son rutas aéreas. De interés para estudiar el problema de la propagación de retrasos, y en problemas de transmisión de epidemias mediante mecanismos superdifusivos.

Medidas clave

Como hemos comentado anteriormente, la teoría de redes complejas abarca el estudio de redes con un alto número de nodos, de tal forma que sus propiedades estructurales suelen estudiarse de un punto de vista estadístico, ya sea mediante técnicas matemáticas, mediante análisis por ordenador, o como una mezcla de ambas. En esta sección presentamos algunas de las medidas estadísticas clave en la descripción de las propiedades más relevantes de una red.

Camino medio $L(N)$. Es el camino mínimo entre dos nodos cualesquiera de una red, medido en saltos de nodo a nodo a través de enlaces, promediado a todos los pares de nodos

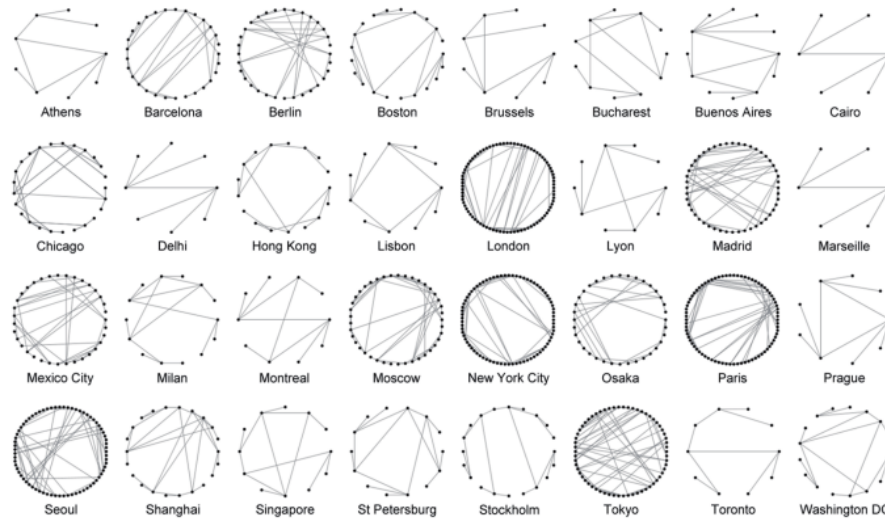


Figura 6: Topología de redes de metro de diferentes ciudades. Adaptado de Derrible [2].

de una red. Es una cantidad que caracteriza la distancia topológica a la que se encuentran, en promedio, cada uno de los nodos de una red de todos los demás. Este valor depende de la cantidad de nodos N que tenga una red, y es una medida central a la hora de entender el famoso dicho *el mundo es un pañuelo* (ver sección *redes Small-World*).

Coefficiente de clustering C . Caracteriza la probabilidad que tienen los nodos conectados a un tercero de conectarse entre si mismo. Coloquialmente, esta cantidad mide la tendencia de que *mis amigos sean amigos entre si*. Si el clustering es alto, la cantidad de motivos triangulares en la red es alto, como suele suceder en redes de tipo social.

Distribución de grado $P(k)$. Caracteriza la probabilidad de que un nodo al azar escogido de la red tenga k enlaces. La forma de calcular esta cantidad es mediante un histograma: empezamos contando cuántos enlaces tiene cada nodo, y finalmente contamos la cantidad de nodos con un enlace, con dos, etcétera. Las redes homogéneas tienden a tener la misma cantidad de enlaces por cada nodo (en la terminología de grafos, aquellas redes donde todos los nodos se conectan con exactamente k vecinos se denominan grafos k -regulares, y sus propiedades son bien conocidas). Las redes inhomogéneas tienden a tener una distribución de nodos asimétrica. Son de especial interés, como veremos más adelante, aquellas redes cuya $P(k)$ tengan una caída lenta, concretamente en ley de potencias $P(k) = Ak^{-\gamma}$.

Matriz de adyacencia A_{ij} . Es una matriz que aglomera la relación de enlaces entre nodos. Si la red tiene N nodos, la matriz de adyacencia será una matriz $N \times N$ donde cada posición (i, j) de la matriz será, respectivamente, 1 si los nodos i y j comparten un enlace,

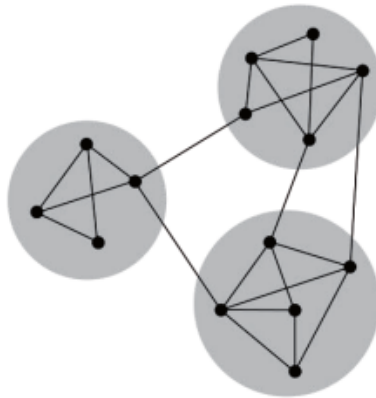


Figura 7: Red donde una estructura en comunidades evidente.

y 0 en caso contrario. Esta matriz engloba toda la información de la red, de tal forma que se puede definir una relación biunívoca entre una red y su matriz de adyacencia. Por ejemplo, estudiando las propiedades espectrales de la matriz de adyacencia A_{ij} (es decir, haciendo un estudio de los autovalores y autovectores de esa matriz), podemos, sorprendentemente, responder a preguntas tales como ¿cuán enmarañada está una red? Además, estudiando las potencias de A_{ij} podemos calcular la cantidad de maneras de circular entre el nodo i y el nodo j (o, dicho de otra forma, conocer el número de caminos que unen sendos nodos, siendo esta una medida de la redundancia en la comunicación de estos).

Existen muchas otras medidas que caracterizan una red, que por su complejidad, sólo describiremos someramente. Los *motivos* del grafo (donde un motivo es un subgrafo de la red, entendiendo a esta última como la agregación de diversos motivos) son los ladrillos básicos de una red, y su análisis es muy relevante en el estudio de las propiedades funcionales de redes biológicas. Por otro lado, la *asortatividad* caracteriza la tendencia con la que nodos con alto número de enlaces tienden a estar conectados entre sí (en el caso opuesto, se habla de *disasortatividad*), y da una medida de las correlaciones de grado entre nodos. Otras propiedades incluyen medidas de meso-escala como son las comunidades (conjuntos de nodos que comparten ciertas características -ver figuras 7 y 8-), la modularidad, la centralidad, y un largo etcétera. Encarecemos al lector interesado en recurrir a textos específicos como [4].

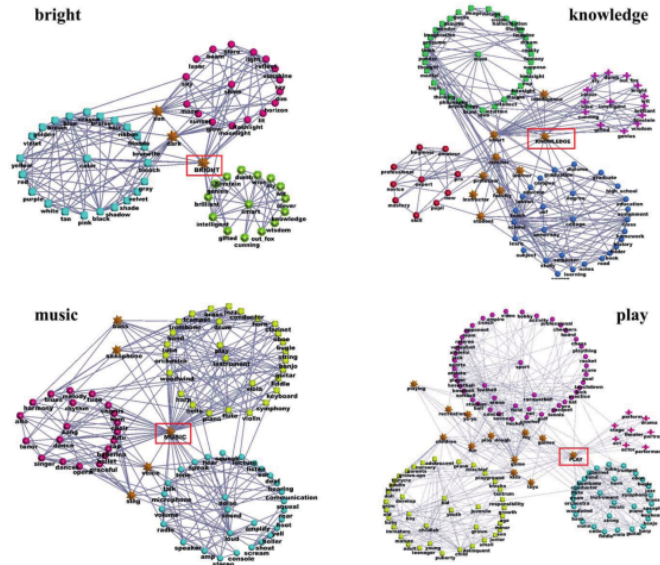


Figura 8: Redes complejas de diferente índole donde se resaltan las estructuras de comunidades, mediante un algoritmo de optimización (OSLOM). Adaptado de Lancichinetti y coautores [3]

3. Estructura y dinámica: propiedades

Redes Small-World: el mundo es un pañuelo

El experimento de Milgram

En los años 60, Stanley Milgram, un sociólogo que trabajaba en la universidad de Yale, planteándose qué estructura tendría la red social americana, diseñó el siguiente experimento. Milgram envió 160 paquetes a personas desconocidas escogidas al azar que habitaban en el estado de Nebraska. Junto con cada paquete, las instrucciones: *"el propósito del experimento es que este paquete llegue a manos de XXX" -un corredor de bolsa desconocido que vivía en Boston, Massachussets-. "No puede enviarlo directamente a su dirección, en cambio, tienen que enviárselo a alguna persona que usted conozca, que piense pueda conocer a su vez al objetivo, o al menos, tener una probabilidad mayor de conocer al objetivo que usted. Le enviará este paquete junto con estas mismas instrucciones"*.

Milgram monitoreo el flujo de paquetes a través de Estados Unidos. Estos paquetes fueron saltando entre personas conocidas, difundiéndose en la red social igual que la tinta se difunde en el agua. Finalmente, computó, de entre aquellas caminatas que alcanzaron el objetivo, la cantidad de intermediarios, es decir, la longitud (en pasos de red) entre el individuo inicial y el objetivo. La conclusión de este trabajo fue inesperado. Pese a que la población estadounidense rozaba los 250 millones de personas, lo que *a priori* sugería que



Figura 9: Esquema gráfico del modelo de interpolación entre red regular y red aleatoria de Watts-Strogatz. Adaptado de Humphries y Gurney [5].

el camino medio de la red (el número de intermediarios promedio) fuese muy grande, el camino medio encontrado por Milgram fue únicamente de seis pasos (los llamados seis grados de separación). Seguramente, sorprendido, concluyese en primera instancia ¡el mundo es un pañuelo! Aunque, ¿cómo es posible que en una red tan inmensa, cualquier par de nodos estén, en promedio, tan próximos? La respuesta llegó en 1999 de la mano de un modelo ingenioso y de extremada sencillez, propuesto por el físico estadounidense Steven Strogatz y su estudiante de doctorado, Duncan Watts.

El modelo de Watts-Strogatz

El modelo de mundo pequeño (Small-World) de Watts y Strogatz es aquella idea tan genial como sencilla, que por su simplicidad, uno se da de cabezas contra la pared pensando: ¿por qué no se me ocurrió a mi primero? La situación era la siguiente. En la teoría de grafos, existían dos modelos canónicos y antagónicos. El primero, un grafo llamado *lattice*, un modelo de red totalmente regular. En esta red, el camino medio escala linealmente con el tamaño del sistema, por lo que no funciona para explicar los seis grados de separación de Milgram, ni dar cuenta de esa medida en las redes biológicas o tecnológicas estudiadas. Sin embargo el clustering en la red tipo *lattice* es especialmente alto, parecido al que se encontraban en las redes sociales. El modelo de *lattice*, por tanto, sólo funcionaba a medias para describir la realidad. El segundo modelo canónico, ampliamente usado en epidemiología, era la red aleatoria de tipo Erdős-Renyi, de la que hablamos al principio del capítulo. Esta red posee un camino medio especialmente bajo, que escala logarítmicamente con el número de nodos, en acuerdo con lo encontrado en las redes reales. Sin embargo el clustering es también extremadamente bajo, y tiende a cero al aumentar el tamaño del sistema. Tampoco funcionaba. Y si tenemos dos modelos que funcionan a medias, ¿por qué no montarnos un proceso que interpole sendas redes? El modelo de Watts-Strogatz comienza con una red regular (con alto clustering y bajo camino medio). Con cierta probabilidad p , se escogen dos nodos al azar de esta red y se conectan (este proceso se denomina *rewiring*). Este proceso se repite, de tal forma que el número total de

enlaces de la red se conserve (es decir, si un nodo sufre rewiring pierde su enlace anterior en favor del nuevo). Es fácil observar que para valores de p bajos este efecto es irrelevante, mientras que si p es muy grande (cercano a uno), la red original queda aleatorizada (y se convierte en una Erdős-Renyi). El efecto del rewiring es tender puentes o atajos entre pares de nodos, lo que hace disminuir el camino medio de la red (ver figura 9). Ahora bien, el clustering también se reduce mediante rewiring, aunque esa reducción es relativamente más lenta que la del camino medio. Por tanto, todo parecía sugerir que existiría una situación intermedia, en donde para algún valor de p , la red resultante estaría dotada de un camino medio bajo, y un clustering relativamente alto. ¡Igual que las redes reales! Watts y Strogatz publicaron este mecanismo en la revista *Nature* [6], acompañado por una lista de redes reales cuyas medidas de camino medio y clustering coincidían con las arrojadas por su modelo. A la red teórica resultante, como un engendro a medio camino entre el orden y el desorden, la denominaron red small-world, un tipo de red compleja.

Efectos dinámicos asociados a la propiedad de mundo pequeño

Una consecuencia muy importante del llamado efecto small-world, es que la navegación por una red con estas características es muy rápida (recuerde el mecanismo de "atajo" planteado en el modelo de Watts-Strogatz). De hecho, propiedades dinámicas como puede ser la difusión de información en este tipo de redes es extremadamente eficaz. Ahora bien, téngase en cuenta que por información puede ser cualquier cosa: desde un virus que se difunde entre los individuos de una red social, un apagón en un nodo de una red eléctrica que genera otro apagón en los nodos vecinos, una especie que al desaparecer perturba al ecosistema a través de la red de interacciones tróficas, incluso el retraso de un avión en un aeropuerto, que genera un retraso en la salida de otro vuelo, lo que transmite otros retrasos en los aeropuertos vecinos (red de transporte aéreo). Por tanto, para una misma dinámica local, la dinámica global que emerge en una estructura de mundo pequeño es radicalmente diferente a la que emerge de una red regular.

Redes libres de escala

En la sección anterior explicamos el llamado efecto small-world como resultado del balance entre dos propiedades importantes de una red: el camino medio $L(N)$ y el clustering C . Otra propiedad fundamental para entender el efecto que tiene la estructura de una red en las propiedades del sistema complejo asociado es la llamada distribución de grado (ver definición). Recordamos que en una red homogénea todos los nodos de la red tienen, en promedio, una cantidad de enlaces parecida. Ejemplos de redes de este tipo son las redes regulares (donde todos los nodos tienen exactamente la misma cantidad de enlaces), o las redes aleatorias Erdős-Renyi (donde la mayoría de nodos tienen una conectividad igual a la conectividad promedio, mientras que la cantidad de nodos altamente conectados es exponencialmente pequeña). Por el contrario, en una red inhomogénea existirá toda una

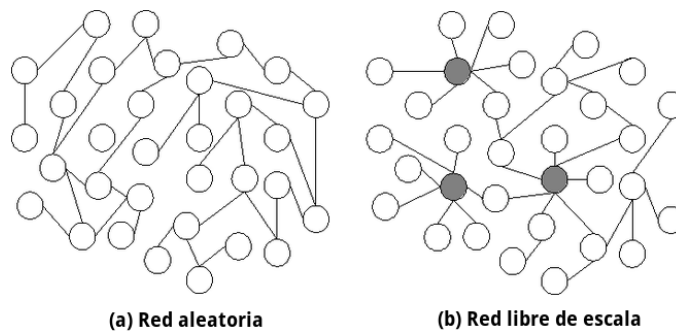


Figura 10: (a) Red aleatoria, cuya distribución de grado con escala característica: la mayoría de los nodos tienen grado similar. (b) Red libre de escala, donde existen ciertos nodos con alto grado (en gris.)

jerarquía de nodos. Se denominan redes libres de escala las redes con una distribución de grado que sigue una ley de potencias $P(k) = Ak^{-\gamma}$ (donde γ es el exponente característico y A la constante de normalización). En una red con esta cualidad, existirán muchos nodos poco conectados (con "poca importancia") pero existirán una cantidad de nodos no despreciable con una conectividad inmensa. De hecho, no existirá una escala característica: la proporción de nodos con ciertas conexiones se repetirá a todos los niveles (como recordará el lector de las propiedades de las leyes de potencias, que aparecen en fenómenos críticos).

Estos nodos muy conectados, denominados *hubs*, van a resultar clave, y como ejemplo pongamos la siguiente situación: imagínesse el lector que descubre una información muy importante que considera ha de hacerse pública, y únicamente dispone del tiempo suficiente para mandar un email con esa información a una única persona de su lista de conocidos. Ha de ser inteligente y buscar, para maximizar su probabilidad de éxito, aquel conocido que a su vez tenga la lista de amigos más grande, ya que de esa forma mandará el email a la persona que es capaz de llegar, con un solo clic, al mayor número de gentes. Ese individuo constituye uno de los hubs de su red social, querido lector.

Sorprendentemente (o quizás no tanto), la gran mayoría de redes reales son libres de escala -recordamos que las redes generadas de forma aleatoria, como las tipo Erdős-Renyi, tiene una distribución de grado con una escala característica del orden de la conectividad media-. Así como el modelo de Watts-Strogatz explicó que el fenómeno small-world podía verse como una red a medio camino entre el orden y el desorden, el afamado mecanismo de *preferential attachment*, postulado por Barabasi y Albert en un artículo en la revista *Science* [7], explica la existencia de redes cuyo grado no tenga una escala característica mediante un sencillo proceso multiplicativo. En este proceso, cuando un nuevo nodo es creado en la red (ya sea un individuo que llega al barrio o una página web de nueva creación), es estadísticamente más probable que este nuevo nodo se relacione con

nodos "importantes" del sistema (aquel personaje popular y extrovertido que te ayuda a integrarte en el barrio, aquella web importante a la que vas a mandar un hyperlink desde tu portal). Este mecanismo, redescubierto a lo largo de las décadas en diferentes contextos (modelo de Simon-Yule en lingüística, efecto Mateo por el cual "los ricos se vuelven más ricos" en sociología), lo redescubren Barabasi y Albert llamándolo enlace preferencial.

Nótese que si combinamos la propiedad de mundo pequeño (por la que la navegación en la red es rápida) con la propiedad de red libre de escala (por la que la cantidad de hubs -nodos muy conectados- es no despreciable), los mecanismos de propagación asociados al primer mecanismo se ven amplificados. Parece por tanto muy deseable, si deseásemos maximizar intercomunicación en un sistema de este tipo (por ejemplo, para reducir la energía empleada en transportar información de una parte a otra de la red), diseñar una red subyacente que posea sendas cualidades. En los últimos años se ha venido resaltando que de hecho tanto la naturaleza como la sociedad genera tales tipos de arquitecturas... ¡de forma autoorganizada! No existe ningún plan de diseño global de la *www*, ni de la red metabólica, ni de la arquitectura de la red social: únicamente mecanismos de beneficio mutuo a nivel local. Sin embargo, el proceso evolutivo tiende a optimizar a nivel global dicha arquitectura: pues a través del tiempo las páginas web aparecen, desaparecen y algunas -las mejor adaptadas al entorno- cristalizan, igual que las amistades, igual que las especies.

Asortatividad: un problema de máxima entropía

Un hecho bien conocido desde los análisis iniciales de las propiedades básicas de redes complejas reales constataba que existía una diferencia muy clara en redes tipo social y el resto de arquitecturas: mientras que las primeras tenían un alto grado de asortatividad, donde los nodos con conectividad alta tendían a estar conectados entre sí, las segundas tenían una asortatividad significativamente baja (o equivalentemente, una disasortatividad alta). En los últimos años ha habido mucha especulación en relación al motivo de tal diferencia: mecanismos evolutivos? No existe un plan de diseño predefinido para todas estas redes, luego era necesario un mecanismo lo más general posible. En un trabajo publicado en 2010 en la prestigiosa *Physical Review Letters* [8], Sam Johnson (actualmente en el Imperial College británico) y colaboradores dieron con una solución elegante y matemáticamente rigurosa: el tipo de correlaciones más probable (es decir, el que tiene un número de posibles configuraciones mayor a una distribución de grado fija, o dicho de otra forma, el estado de máxima entropía), coincide con una situación disasortativa en ausencia de mayores restricciones. Este es desde luego un resultado extremadamente general, pues no presupone mecanismos adicionales, para el origen general de la disasortatividad de redes biológicas, tecnológicas o de información. En el mismo trabajo, explican que el caso de las redes sociales introduce una restricción adicional, el llamado mecanismo homofílico por el que grandes personalidades tienden a interactuar, dando lugar a redes sociales asortativas. Este constituye un ejemplo notable de la forma de pensar de los físicos: si exis-

te un comportamiento universal, por muy complejo que este sea, es muy probable que sea debido a un conjunto mínimo de razones.

En resumen, hemos visto que las propiedades de las redes complejas son en alto grado universales y emergen por razones evolutivas o por principios de máxima entropía. Además, estas propiedades parece que le otorgan cierto grado de optimización, al ser redes con cualidades bastante buenas para el transporte de información. En la próxima sección ahondaremos en estas características, para describir y comprender la emergencia de fenómenos colectivos en red, como son la propagación de una epidemia o la extinción masiva de especies. También veremos que estas redes, que parecen óptimamente diseñadas, son muy robustas ante perturbaciones naturales (aleatorias) pero que son extremadamente frágiles frente a ataques dirigidos.

4. Aplicaciones

Fenómenos de propagación: epidemias, apagones y extinciones

Imagine el lector que un buen día abre su periódico preferido, y entre los titulares, lee:

-"El 10 de Agosto de 1996, el fallo de dos plantas eléctricas en Oregon (Estados Unidos de América) generó un apagón en cascada que dejó sin electricidad a once estados enteros y dos provincias canadienses, dejando a unos siete millones de personas a oscuras durante unas 16 horas. Más información en página 24."

Y sigue leyendo:

-"El virus informático I love you, introducido en Internet en el año 2000, ha infectado millones de ordenadores en el mundo entero, generando pérdidas por un valor incalculable. A fecha de hoy sigue siendo un virus no erradicado contra el que uno no puede más que protegerse, nunca matarlo. Más información en la sección de tecnología." .

Quizás, la información extendida sobre sendas noticias, versa sobre los problemas asociados a un fallo humano en el caso de la red eléctrica, mientras que en el caso del virus informático el periódico se centra en detallar los antivirus más novedosos. Y a usted lector, que ya se ha familiarizado con los conceptos básicos de las redes, muy seguramente le rechinaría una idea en la cabeza:

-"Son el efecto combinado de las propiedades de mundo pequeño y de grado libre de escala en sendas redes complejas", reflexiona.

Y prosigue la reflexión:

-"En el momento en que un nodo se ve afectado (ya sea una central eléctrica con un incendio o un ordenador donde un programador malicioso introduce un virus), esta infección se propagará, con cierta tasa de infección nodo-nodo. En una red homogénea, esta propagación es lenta y el efecto

puede ser controlado a tiempo. Pero no en una red compleja. Debido al efecto de mundo pequeño, por la que cualquier nodo de la red es rápidamente alcanzable (incluidos los hubs), este virus llegará a un hub con mucha celeridad. Y ese es el final. Pues una vez que llega al hub, este nodo infectará a una porción enorme de los nodos de la red, a los que está conectado. Si la red fuera aleatoria, la existencia de estos hubs no estaría garantizada, por lo que uno aún tendría tiempo de proteger localmente al resto de nodos. Pero no en una red compleja. La propiedad de red libre de escala garantiza la presencia de nodos con muchas conexiones, lo que dificulta hasta casi echar por tierra cualquier intento de mitigar la propagación del apagón, o de la epidemia cibernética. Con las redes complejas, mucho mejor prevenir que curar.”

Nótese que las noticias anteriores son reales. La razón por la cual un virus informático no puede “erradicarse” fue explicada en un trabajo publicado en *Physical Review Letters* [9] por Romualdo Pastor Satorras y Alessandro Vespignanni. Estudiaron mediante un modelo matemático clásico de difusión de epidemias en qué situaciones cierta infección pasa a ser endémica (no desaparece, convirtiéndose en una pandemia). Si la dinámica corre sobre redes regulares o aleatorias, existe un margen de acción bastante amplio -y ahí es donde tienen efecto las estrategias clásicas de curación- antes de que la infección se vuelva pandémica. Sin embargo, estos investigadores demostraron matemáticamente que en una red libre de escala la transición entre infección controlada y la pandemia es mucho más rápida, por la existencia de hubs.

Este comportamiento no se limita a apagones o virus informáticos. El conocer cómo se propaga la información en este tipo de redes es clave a la hora de planificar estrategias de prevención para la propagación de enfermedades (donde la red social es una red compleja), o a la hora de entender qué efecto tiene la extinción de una especie dentro de un ecosistema (donde la red trófica asociada también es compleja). Ha sido solo muy recientemente, en el seno de los científicos que trabajan en la teoría de redes complejas, donde estos efectos han sido constatados. La estructura afecta muy dramáticamente a la dinámica, y para entender el comportamiento dinámico, cuando está embebido en una red, es necesario conocer la arquitectura subyacente.

Robustez frente a ataques: el caso de una red trófica

La mayoría de las redes complejas que podemos observar en la naturaleza (biología, sociedad, tecnología) son redes autoorganizadas: no existe ningún plan de diseño previo a las mismas. Por otro lado, como ha quedado de manifiesto en las secciones anteriores, los rasgos característicos de las redes complejas (redes de mundo pequeño y libres de escala) parecen universales, en tanto en cuanto redes reales de diferentes ámbitos presentan en su estructura patrones similares. Estos dos hechos complementarios sugieren que el crecimiento de dichas redes y su evolución a lo largo del tiempo atiende a criterios Darwinistas. Siguiendo esta línea de pensamiento, es de interés plantearse cuán robustas son estas redes. Para que una red sea robusta, su funcionamiento ha de ser relativamente independiente de perturbaciones aleatorias externas. Por ejemplo, en un ecosistema es posible

que una especie se extinga por un hecho puntual, generando la desaparición aleatoria de un nodo en la red trófica. Bien, pues es posible demostrar que la robustez de esta red trófica es muy alta si la misma tiene la propiedad de ser libre de escala. La naturaleza por tanto es ingeniosa, y a través de la evolución organiza una arquitectura de interconexiones que no sufra dramáticamente si uno de los nodos de la red es eliminado al azar. Denominamos a esta situación robustez frente a ataques aleatorios, y es una propiedad que comparten la gran mayoría de redes complejas que observamos a nuestro alrededor.

Cabe preguntarse qué escenario sucede si la perturbación no es aleatoria (como suele suceder en problemas biológicos) sino dirigida. Dicho de otro modo, si yo deseara causar el máximo impacto en una red con un único ataque, ¿ese impacto puede llegar a ser importante? ¿y en caso afirmativo, cómo he de efectuarlo? En contraste con las perturbaciones aleatorias, se ha demostrado que las redes libres de escala son especialmente vulnerables ante ataques dirigidos: existen nodos clave cuya desaparición puede generar una cascada de desapariciones sucesivas, o puede sencillamente romper la red compleja en dos redes separadas. Estos nodos clave son típicamente hubs del sistema o en general nodos con una alta centralidad. Nótese que este fenómeno altamente no lineal es de fundamental importancia para entender porqué en algunas situaciones, la extinción de una única especie puede derrumbar el ecosistema entero. Y para conocer qué especies pueden jugar este rol, se antoja necesario aplicar el enfoque de red al problema ecológico que estamos comentando. Este tipo de aproximaciones de red en problemas de conservación biológica son muy recientes, y este campo está experimentando una verdadera revolución en los últimos años, de la mano del biólogo teórico Jordi Bascompte y su equipo.

Navegación en red y algoritmos de búsqueda

Una aplicación muy interesante de la teoría de redes complejas se basa en el estudio de las propiedades de navegación. Como ejemplo curioso veamos el caso de las llamadas redes de recomendación musical. Sea una red donde cada nodo representa una canción, y dos nodos estén enlazados si las canciones asociadas aparecen de forma conjunta en la playlist de un individuo. Tómese en segundo lugar la información contenida en las playlists de muchos individuos. La red resultante crecerá en nodos y enlaces. También, muchas canciones se repetirán, hecho que podemos tener en cuenta dando un peso al enlace entre dos nodos (la cantidad de veces que esas dos canciones co-aparecen en una lista). Una vez construida esta red, lo único que tenemos que hacer para *recomendar* música es partir de un nodo inicial, una canción que el usuario propone, e ir navegando la red. Existen diferentes algoritmos para esta recomendación, desde caminatas aleatorias hasta métodos espectrales (el famoso PageRank de Google siendo un algoritmo que pertenece a esta última familia).



Figura 11: Red de recomendación musical. Adaptado de Buldu y colaboradores [10].

5. Perspectivas de futuro

En este capítulo hemos descrito, de forma somera, cómo el enfoque de red puede arrojar luz en el estudio de sistemas complejos con muchos elementos que interactúan. La teoría de redes complejas como disciplina científica fecha de finales del siglo XX, y en la actualidad es una rama en constante crecimiento que muy probablemente resultará clave en el desarrollo científico del siglo XXI, dentro de las denominadas ciencias de la complejidad. Sin embargo en la actualidad existen muchas más preguntas que respuestas y la teoría de redes complejas dista de ser un corpus científico cerrado y maduro. A continuación planteamos algunos de los hitos concretos a los que se enfrenta esta disciplina:

- Las medidas estadísticas que podemos realizar sobre una red compleja son muy diversas. ¿De qué modo se relacionan? ¿Cuáles son las medidas clave que caracterizan plenamente la estructura relevante, y cuáles son medidas secundarias?
- La descripción de procesos dinámicos embebidos en red es una parte fundamental de la teoría de redes que no hemos hecho más que empezar a descubrir. Se antoja necesario profundizar en las propiedades dinámicas para entender de qué forma emergen los comportamientos colectivos en sistemas complejos formados por muchos elementos.
- Mientras que la estructura de una red afecta a la dinámica que corre encima, en muchos casos estos problemas no pueden estudiarse por separado: los llamados

escenarios de co-evolución, donde la estructura de una red se adquiere de forma dinámica, son problemas interesantes cuyo estudio no ha hecho más que comenzar.

- La modelización y el estudio de las condiciones bajo las cuales existen cambios dramáticos en una red pueden arrojar luz en fenómenos tales como las extinciones masivas, los crashes bursátiles o la propagación de fallos en redes de infraestructura. El conocimiento adquirido podrá dar lugar a un conjunto de estrategias de prevención orientadas a la conservación de la biodiversidad, la estabilidad financiera o la estabilidad de nuestras infraestructuras críticas (transporte, energía).
- Por último, es interesante plantear la teoría de redes como un método alternativo para estudiar problemas dinámicos y series temporales. La dinámica generada por un sistema complejo, como por ejemplo la turbulencia o la actividad cerebral, está hoy en día poco entendida. Se antojan nuevos métodos que describan, de manera profunda, la estructura que opera debajo de las series de tiempo generadas por estas dinámicas. Existen aproximaciones novedosas para estudiar dichas estructuras, que transforman una serie de tiempo a una red y trabajan sobre la red asociada para describir patrones de orden de la dinámica subyacente. Un ejemplo notable en esta dirección es el llamado algoritmo de visibilidad [11].

6. Referencias

- [1] S. Kauffman, *The origins of order: Self-organization and selection in evolution*. Oxford University Press, USA, 1993.
- [2] S. Derrible, "Network centrality of metro systems," *PloS one*, vol. 7, no. 7, p. e40575, 2012.
- [3] A. Lancichinetti, F. Radicchi, J. Ramasco, and S. Fortunato, "Finding statistically significant communities in networks," *PloS one*, vol. 6, no. 4, p. e18961, 2011.
- [4] M. Newman, "The structure and function of complex networks," *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [5] M. Humphries and K. Gurney, "Network 'small-world-ness': a quantitative method for determining canonical network equivalence," *PLoS One*, vol. 3, no. 4, p. e0002051, 2008.
- [6] D. Watts and S. Strogatz, "Collective dynamics of small-world networks," *Nature*, vol. 393, pp. 440–442, 1998.
- [7] A. Barabási and R. Albert, "Emergence of scaling in random networks," *science*, vol. 286, no. 5439, pp. 509–512, 1999.

- [8] S. Johnson, J. Torres, J. Marro, and M. Munoz, "Entropic origin of disassortativity in complex networks," *Physical review letters*, vol. 104, no. 10, p. 108702, 2010.
- [9] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, "Epidemic spreading in scale-free networks," *Physical review letters*, vol. 86, no. 14, pp. 3200–3203, 2001.
- [10] J. Buldú, P. Cano, M. Koppenberger, J. Almendral, and S. Boccaletti, "The complex network of musical tastes," *New Journal of Physics*, vol. 9, no. 6, p. 172, 2007.
- [11] L. Lacasa, B. Luque, F. Ballesteros, J. Luque, and J. Nuño, "From time series to complex networks: The visibility graph," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, no. 13, pp. 4972–4975, 2008.

Números críticos autoorganizados

Bartolo Luque, Universidad Politécnica de Madrid, España

1. Introducción

Recuerdo que, un año antes de comenzar mis estudios universitarios, todavía no tenía claro si estudiar Física o Matemáticas. La Física me resultaba apasionante, pero tenía la impresión de que sus resultados, siempre provisionales, carecían de la rotundidad de los teoremas matemáticos. Aunque por otra parte, era consciente de que los resultados matemáticos consistían en proposiciones analíticas. En cierto modo, vacías, en contraste con las proposiciones sintéticas de la Física, que necesitaban confirmación empírica. Las mates eran un juego cerrado sobre sí mismo y la física pretendía desvelar la realidad.

Finalmente, el consejo de gente mayor, y el simple hecho de que la mitad del currículum de Física fueran Matemáticas, me decantaron por hacerme físico. La cuántica, la relatividad, la cosmología o la física de partículas seguían de moda en los 80; pero un nuevo movimiento aparecía con fuerza: los sistemas complejos. La teoría del caos, las transiciones de fase, los autómatas celulares, la criticalidad autoorganizada y un largo etcétera estaban conformándose en lo que vendría a ser un nuevo paradigma. Por una parte, el enfoque filosófico de esta nueva ciencia complementaba la tradición clásica reduccionista (nunca tuve la sensación de que se contrapusiera, como muchos afirman) para dar cuenta de fenómenos emergentes que claramente eran más que la suma de las partes. Por otra parte, esta ciencia percolaba por todas las disciplinas artificialmente estancas de la ciencia: ecología, genética, geología, química, sociología, economía... Y utilizaba el ordenador como laboratorio-simulador, lo que hoy se conoce como tercera vía al binomio teoría-experimento del método científico clásico. Todo perfecto para mi carácter diletante y mis intereses dispares.

También recuerdo que cuando empezamos a publicar en el campo de los sistemas complejos, hace ya dos décadas, nos rechazaban artículos diciéndonos que las hormigas eran electrones en las revistas de Física y que los electrones no eran hormigas en las de Biología. Eso ya está superado y ahora los sistemas complejos gozan de aceptación y una envidiable actividad. Y eso a pesar de que la complejidad sigue siendo como la pornografía: nadie sabe definirla con precisión, aunque todo el mundo es capaz de reconocerla

cuando la ve. Siguiendo esa tradición transdisciplinaria, en los últimos años nuestro grupo ha venido desarrollando trabajos que construyen puentes entre la Física y la teoría de números. En fin, ya sabemos que: "ni los números no son partículas, ni las partículas son números..."pero desde luego obviarlos ha sido para mi toda una satisfacción para colmar mis aspiraciones adolescentes.

La teoría de números está llena de problemas de enunciados sencillos que, sin embargo, después de mucho tiempo permanecen irresueltos [1]. Dos ejemplos clásicos son la existencia de infinitos primos gemelos (primos de la forma p y $p + 2$) y la conjetura de Golbach (todo número par mayor que 2 es expresable como la suma de dos primos). Por su naturaleza, muchos de estos problemas se prestan a exploración numérica mediante ordenador. En muchos casos, encontrar un solo contraejemplo numérico permitiría determinar inmediatamente la falsedad de una conjetura. Eso ocurre incluso con la conjetura más famosa de las matemáticas: la hipótesis de Riemann. La existencia de un solo cero no trivial fuera de la línea crítica daría al traste con la hipótesis. Tradicionalmente la teoría de números ha sido territorio exclusivo de matemáticos, sin embargo, recientemente los físicos han comenzado a mostrar interés en el área [2]. En especial, con herramientas propias de la mecánica estadística y las ciencias de la complejidad se están proponiendo nuevos enfoques y alcanzando resultados interesantes. En este capítulo veremos un ejemplo de este contubernio, donde se juega con conceptos como la criticalidad autoorganizada, los conjuntos primitivos y las redes complejas.

2. Criticalidad autoorganizada

Si hay un concepto capital en ciencias de la complejidad ese es sin duda el de "transición de fase". Como escribió el matemático D. Ruelle: "Se podría decir que un físico es alguien que no considera evidente que el agua deba hervir o congelarse cuando se eleva o disminuye su temperatura" [3]. En un sistema puede producirse un fuerte cambio cualitativo en sus propiedades macroscópicas, conocidas como parámetros de orden, al variar adecuadamente parámetros del sistema, llamados de control. Cuando esto ocurre hablamos de transición de fase [4]. Eso sucede, por ejemplo, al hervir o congelar agua variando la temperatura. Un sistema en equilibrio térmico a temperatura T se caracteriza por su energía libre: $F = U - TS$ donde U y S son la energía y la entropía del sistema respectivamente. Muchas transiciones de fase ocurren a causa de la competencia entre la tendencia del sistema a minimizar la energía (orden) y a maximizar la entropía (desorden) con la restricción de que la energía libre sea mínima.

Al hablar genéricamente sobre transiciones de fase se distingue entre transiciones de primer y segundo orden. Una transición de fase de primer orden envuelve una reestructuración de la sustancia a nivel microscópico, como es el caso del agua al hervir y cambiar de líquido a gas. El parámetro de orden que define la transición es discontinuo y el calor latente no se hace cero. En contraste, una transición de segundo orden no puede ser detec-

tada al observar un ejemplo microscópico de la sustancia. En ella el parámetro de orden es continuo, las propiedades macroscópicas del sistema no cambian discontinuamente como en el caso de las transiciones de fase de primer orden. Sin embargo, alguna de las derivadas de primer orden de estas magnitudes macroscópicas cambian discontinuamente. Muchas transiciones de fase de segundo orden separan una fase simétrica (ordenada) de otra asimétrica (desordenada) y por ello se conocen también como transiciones orden-desorden. Los puntos del espacio de fases en donde las transiciones de fase de segundo orden se producen, son llamados puntos críticos. Y hablamos de fenómeno crítico cuando nos referimos al comportamiento de un sistema en las cercanías de un punto crítico. El dominio crítico separará la fase ordenada y la desordena en el espacio de fases [4].

Sorprendentemente, en la naturaleza encontramos muchos ejemplos de sistemas que se encuentran en el borde de las transiciones, en puntos críticos. En particular los biológicos, hecho que se conoce en el mundillo como "hipótesis del borde del caos". ¿Cómo consiguen esos sistemas complejos situarse en los puntos críticos? En algunos casos, si se trata de sistemas adaptativos sometidos a presiones de selección, los sistemas pueden explorar el espacio de fases en busca de su óptima adaptación como ocurre con los virus de RNA. Pero en otros casos, semejante argumento no tiene ni tan siquiera sentido. Por eso la aparición de la criticalidad autoorganizada a finales de los años 80 ('Self-Organized Criticality' o en breve: SOC) tuvo una extraordinaria acogida. Lo que nos muestra la SOC es un mecanismo plausible para que un sistema se sitúe por sí mismo, sin necesidad de regular desde el exterior un parámetro de control como por ejemplo la temperatura, en los puntos críticos de su espacio de fases. SOC pretende explicar el comportamiento de sistemas compuestos de muchos elementos, que interactúan a pequeña escala y evolucionan espontáneamente hacia un macroestado crítico metaestable. En dicho estado, una pequeña perturbación local puede desencadenar reacciones en cadena de todos los tamaños. Es uno de los mecanismos generales que se han propuesto para dar explicación a la ubicuidad de semejantes casos, así como a la presencia de leyes de potencias, fractalidad y ruido $1/f^\alpha$ [5-7].

Pilas de arena

El primer sistema dinámico, descrito en 1987, que exhibía criticalidad autoorganizada fue la pila de arena abeliana, conocido también como el modelo BTW en honor a sus creadores Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld [8, 9]. Desde su presentación, la pila de arena se convirtió en el paradigma ilustrativo de la SOC. Algunos científicos han simulado montones de arena mediante programas de ordenador. Otros han efectuado delicados experimentos con pilas reales. Al formar una pila de arena añadiendo granos poco a poco, el montón de arena en forma de cono aumenta poco a poco su pendiente media hasta alcanzar un valor crítico cuasiestable. Si la pila se forma sobre una plancha finita, el montón deja de crecer cuando la cantidad de arena añadida queda compensada, en término medio, por la eliminada por los bordes a través de avalanchas. En ese momento, la pila se

encuentra en estado crítico. Bak y sus colaboradores crearon un autómata celular bidimensional de reglas sencillas inspirado en la pila de arena, aunque claramente diferente y mucho más sencillo. El autómata ha sido descrito infinidad de veces, pero volveremos a hacerlo aquí para comentar los ingredientes básicos de la SOC:

(1) El autómata consiste en un tablero de $L \times L$ casillas. Cada posición, celda de coordenadas (x, y) , posee en un instante t un valor entero $h(x, y; t) \geq 0$ que podemos interpretar como granos de arena apilados en esa casilla. Si el sistema está en equilibrio ninguna de sus casillas tendrá más de 3 granos de arena.

(2) La regla dinámica de oro del sistema es bien simple: Si $h(x, y; t)$ alcanza un valor igual o mayor a 4, entonces difunde su contenido equirrepartiendo los cuatro granos a sus inmediatos cuatro vecinos. Las condiciones de contorno del tablero son abiertas, para permitir la disipación de granos por los bordes. De modo que si una casilla está en un borde del tablero los granos pueden caer del sistema.

Más formalmente la dinámica del autómata quedaría descrita por:

$$h(x, y; t + 1) = \begin{cases} h(x, y; t) - 4 & \text{si } h(x, y; t) \geq 4, \\ h(x, y; t) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

De modo que si se cumple la primera condición, el contenido perdido de 4 granos se equi-reparte entre los vecinos: $h(x + 1, y; t + 1) = h(x + 1, y; t) + 1$, $h(x - 1, y; t + 1) = h(x - 1, y; t) + 1$, $h(x, y + 1; t + 1) = h(x, y + 1; t) + 1$ y $h(x, y - 1; t + 1) = h(x, y - 1; t) + 1$. Estas reglas locales pueden interpretarse como una ecuación no lineal discreta con difusión espacial.

(3) Una vez el sistema está relajado, se perturba de nuevo lanzando un grano, aumentando en una unidad el valor de una casilla escogida al azar. El sistema evoluciona hasta un estado crítico, donde el número total de granos sobre el tablero se hace cuasiconstante. Una vez alcanzado este estado, las pequeñas perturbaciones, como añadir un grano, provocan respuestas-avalanchas a todas las escalas.

Cuando se simula el sistema comprobamos que independientemente de la condición inicial, tras un transitorio, el número de granos en el tablero se hace cuasi-estacionario. El estado crítico actúa como atractor de la dinámica. Este atractor es distinto al punto crítico en las transiciones de fase de la mecánica estadística. Normalmente el punto crítico se alcanza por regulación de un parámetro como la temperatura, por ejemplo. En el autómata pila de arena no se altera ningún parámetro, el sistema evoluciona por sí solo a un estado metaestable. Cuando medimos la distribución de tamaños de avalanchas de granos que salen del sistema o las duraciones temporales del efecto dominó en las difusiones que produce una perturbación aparecen leyes potenciales. Estas, junto a la autosimilaridad espacial de las casillas implicadas en la difusión y el ruido $1/f^\alpha$ de la cantidad total de granos

en el tablero a lo largo del tiempo, son la impronta de muchos fenómenos regulados por mecanismos SOC y aparecen en los puntos críticos de las transiciones de fase [5–7].

3. Pilas de números: conjuntos primitivos

Hemos descrito muy brevemente cómo a finales de la década de los 80 del siglo pasado, Bak, Tang and Wiesenfeld [8, 9] presentaron el concepto de criticalidad autoorganizada como un posible mecanismo capaz de explicar cómo un sistema multicomponente puede evolucionar de manera natural a un estado crítico autoorganizado sin la necesidad de un ajuste externo de sus parámetros. A partir de este trabajo seminal y de la aptitud fuertemente decidida de Per Bak, se generó una cantidad enorme de teoría, análisis de datos experimentales y modelos en muchas áreas de la ciencia. Hoy parece claro que muchos fenómenos exhiben SOC [5–7] y sin embargo, sigue sin existir una definición rigurosa de las condiciones bajo las cuales esperaríamos que se produjera. Para cazar el mecanismo fundamental los teóricos han intentado definir el modelo más simple posible que exhiba comportamiento crítico autoorganizado. En este sentido, Flyvbjerg, a finales de los 90, introdujo un modelo extramadamente simple (la máquina de pinball) junto con una definición mínima de consenso [10, 11]: un sistema SOC debe estar constituido por un *medio* a través del cual las *perturbaciones* pueden propagarse causando una *modificación* del mismo, de modo que las respuestas sean *críticas* y el medio permanezca *invariante en un sentido estadístico*. En el caso del autómatas pila de arena el medio lo constituyen los granos de arena sobre el tablero, las perturbaciones son los granos que colocamos al azar, la propagación se produce a través de la regla umbral de cuatro granos y su difusión a vecinos, las respuestas críticas son las avalanchas que acaban expulsando granos del tablero y modificando el contenido del mismo y el contenido total de granos del tablero permanece invariante en sentido estadístico.

Por otra parte, en los últimos años se está evidenciando la fuerte dependencia entre los procesos que se sustentan en una red y su topología [12, 13]. Concretamente, existe interés por las posibles relaciones entre el comportamiento SOC y las redes libres de escala [13], caracterizadas por leyes de potencia en la distribución de sus enlaces $P(k) \sim k^{-\gamma}$, y cómo los estados críticos autoorganizados pueden emerger en este acoplamiento entre topología y dinámica [14–17]. Vamos a intentar abordar ambos puntos, el sistema mínimo que exhiba SOC y su relación con las redes complejas, a través de la teoría de números. En particular, haremos uso de la sencilla idea de “conjunto primitivo”.

En teoría de números, un conjunto primitivo de N números naturales es aquel en que sus elementos no pueden dividirse entre sí de manera exacta [1, 18, 19]. Por ejemplo, el conjunto $\{14, 23, 49, 59, 88, 90, 94\}$ es primitivo como el lector puede comprobar al intentar dividir sin éxito todas las parejas posibles. Para construir nuestro sistema SOC, consideremos el conjunto ordenado de $M - 1$ números naturales $\{2, 3, 4, \dots, M\}$, que a partir de ahora llamaremos repositorio, donde no incluimos al cero ni al uno. Supongamos que en

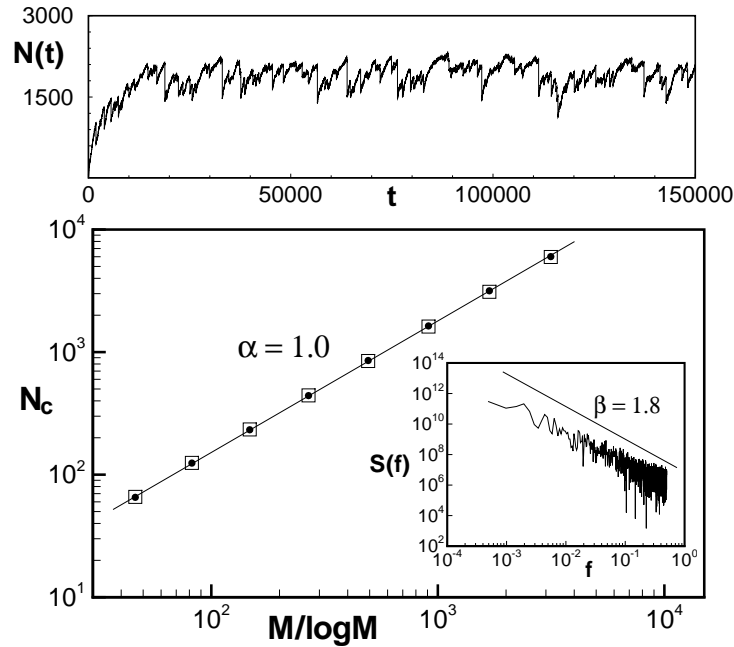


Figura 1: Arriba: Ejemplo de evolución temporal de un conjunto primitivo de tamaño $N(t)$ para un repositorio de tamaño $M = 10^4$ y una condición inicial $N(0) = 0$. Nótese que después de un breve transitorio, $N(t)$ se autoorganiza fluctuando alrededor de un valor medio estable N_c . Abajo: (puntos negros) Comportamiento escalante del valor medio N_c en función del tamaño característico del sistema $M/\log M$ y su ajuste a $N_c \sim (M/\log M)^\gamma$, con $\gamma = 1.05 \pm 0.01$. (cuadrados) Escalamiento de N_c predicho por la ecuación 8. Figura insertada: gráfica en log-log del espectro de potencias de $N(t)$, mostrando ruido $f^{-\beta}$ para la serie temporal $N(t)$ con $\beta = 1.80 \pm 0.01$ (este último valor es un promedio sobre 10^5 realizaciones de $N(t)$ a partir de 4096 pasos de tiempo después de un transitorio para cada una de ellas y $M = 10^4$).

el instante t nuestro conjunto primitivo es el antes citado, formado por $N(t) = 7$ elementos. A partir de estos sencillos ingredientes vamos a intentar construir un modelo que exhiba SOC. Las reglas dinámicas serán:

(R1) Perturbación: un número a se toma al azar del repositorio y se introduce en el conjunto primitivo. Supongamos en nuestro ejemplo que $a = 7$.

(R2) Disipación: si a divide y/o es dividido por s elementos del conjunto primitivo, entonces decimos que se produce una avalancha instantánea de divisiones de tamaño s y estos elementos son devueltos al repositorio. De manera que el conjunto permanece siendo primitivo, pero con un nuevo tamaño $N(t+1) = N(t) + 1 - s$. En nuestro ejemplo, como 7 divide a los números 14 y 49, se produce una avalancha de tamaño $s = 2$ y el nue-

vo conjunto primitivo en $t + 1$ estará constituido por $N(t + 1) = 7 + 1 - 2 = 6$ elementos: $\{7, 23, 59, 88, 90, 94\}$.

(R3) Se itera el proceso comenzando de nuevo en R1.

Observemos que el sistema propuesto se *perturba* al introducirse nuevos números en el conjunto primitivo y es *dissipativo* puesto que los números que ahora son divisibles con el recién incorporado son expulsados del conjunto y devueltos al repositorio.

Para familiarizarnos con la dinámica realizamos una serie de simulaciones de Monte Carlo para diferentes valores de tamaño de repositorio M . En la parte superior de la figura 1 hemos representado $N(t)$ para una realización concreta, con $M = 10^4$ y $N(0) = 0$. Observemos que después de un breve transitorio, $N(t)$ se autoorganiza fluctuando alrededor de un valor crítico medio N_c bien definido. En la misma figura, abajo hemos graficado en log-log el espectro de potencias de $N(t)$: el sistema evidencia ruido $f^{-\beta}$, con $\beta = 1.80 \pm 0.01$. Las fluctuaciones alrededor de la media son el resultado de la perturbación producida por la introducción en el conjunto primitivo a cada paso de tiempo de nuevos números extraídos del repositorio (el forzamiento externo por la regla R1). Eventualmente (de acuerdo con la regla R2), una avalancha producida por divisiones puede causar una *modificación* en el tamaño y composición del conjunto primitivo. Estas avalanchas constituyen la respuesta del sistema a las perturbaciones y son las que mantienen el tamaño del conjunto primitivo alrededor de N_c , en estado metaestable. Arriba, en la figura 2 hemos representado un ejemplo de la evolución temporal de los tamaños de estas avalanchas. Abajo, mostramos la distribución de probabilidad $P(s)$ del tamaño s de las mismas para distintos tamaños M de repositorio. Se ajustan a leyes de potencias $P(s) \sim s^{-\tau} \exp(s/s_0)$ con $\tau = 2.0 \pm 0.1$, apuntando que las respuestas a las perturbaciones son críticas. Observemos que la relación de ley de potencias está truncada en valores $s_0(M)$ en las colas debidos al efecto del tamaño finito M de los repositorios. La localización concreta de estos valores escala con el tamaño característico del sistema $s_0 \sim (M/\log M)^\omega$ con $\omega = 1.066 \pm 0.003$, como es típico de un sistema de tamaño finito en estado crítico [5]. Más adelante, explicaremos por qué el tamaño característico del sistema es $M/\log M$ y no simplemente M , como intuitivamente podría parecer.

Podemos concluir de acuerdo con la definición de Flyvbjerg [10], que nuestro modelo de división exhibe SOC. Las avalanchas de números conducen al sistema a estados de estabilidad marginal, que no son otra cosa que conjuntos primitivos de distintos tamaños y composiciones. Dado un repositorio $[2, M]$, las fluctuaciones temporales son la expresión de una búsqueda estocástica en el espacio de configuraciones de los conjuntos primitivos posibles.

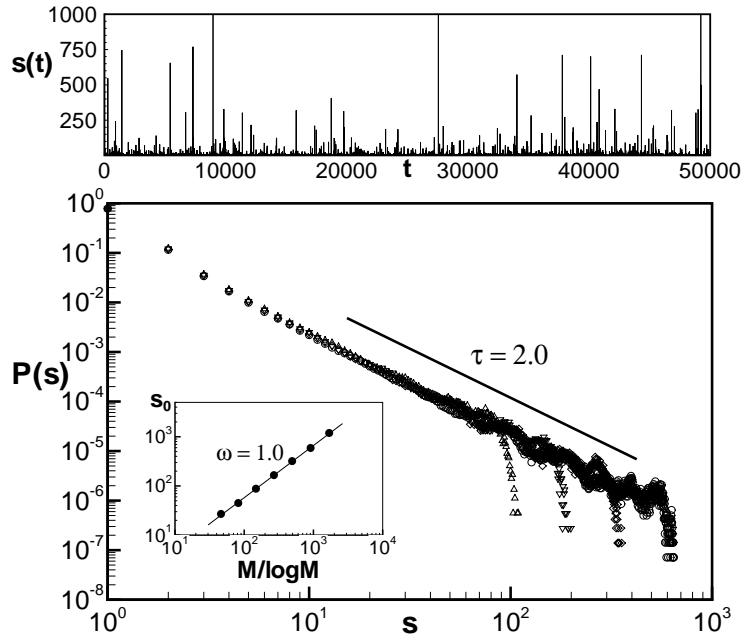


Figura 2: Arriba: ejemplo de una realización del modelo de división mostrando el tamaño de las avalanchas a lo largo del tiempo. Abajo: Distribución de probabilidad $P(s)$ de que una avalancha de tamaño s ocurra para diferentes tamaños del repositorio $M = 2^{10}$ (triángulos), $M = 2^{11}$ (triángulos invertidos), $M = 2^{12}$ (diamantes) y $M = 2^{13}$ (círculos). En cada caso encontramos $P(s) \sim s^{-\tau} \exp(s/s_0)$ con $\tau = 2.0 \pm 0.1$. Nótese que la relación de ley de potencia evidencia un límite s_0 a partir del cual el comportamiento es exponencial debido a efectos de tamaño finito. Figura insertada: Relación de escala de los valores s_0 como función del tamaño característico del sistema $M/\log M$, con un exponente $\omega = 1.0$.

Cuentas

Vamos a abordar analíticamente el problema. Para ello necesitamos considerar algunos conceptos elementales de teoría de números. Consideremos $d(n)$, la *función divisor* [20], que simplemente nos proporciona el número de divisores de n , excluyendo a 1 y n :

$$d(n) = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n-1}{k} \right\rfloor \right), \quad (1)$$

donde $\lfloor \cdot \rfloor$ es la función parte entera de un número. La cantidad media de divisores de un número arbitrario del repositorio $[2, M]$ será entonces:

$$\begin{aligned} \frac{1}{M-1} \sum_{n=3}^M d(n) &= \frac{1}{M-1} \sum_{k=2}^M \left\lfloor \frac{M}{k} \right\rfloor \simeq \sum_{k=2}^M \frac{1}{k} \\ &\simeq \log M + 2(\gamma - 1) + O\left(\frac{1}{\sqrt{M}}\right). \end{aligned} \quad (2)$$

De modo, que la probabilidad media de que dos números a y b tomados al azar de $[2, M]$ sean divisibles es aproximadamente $P = Pr(a|b) + Pr(b|a) \simeq 2 \log M/M$. Si asumimos como aproximación que los N elementos del conjunto primitivo no están correlacionados, la probabilidad de que un nuevo número genere una avalancha de tamaño s , divida o sea dividido, es en promedio $(2 \log M/M)N$. Podemos entonces, fácilmente, construir una ecuación de campo medio que describa la evolución del sistema. En esta ecuación veremos cómo a cada paso de tiempo un número del repositorio escogido al azar es introducido en el conjunto primitivo presente y eso produce una avalancha de tamaño medio $(2 \log M/M)N$:

$$N(t+1) = N(t) + 1 - \left(\frac{2 \log M}{M}\right)N(t). \quad (3)$$

Observemos que el punto fijo de esta ecuación, $N_c = M/(2 \log M)$, el valor crítico medio alrededor del cual el sistema se autoorganiza, escala con el tamaño del sistema como:

$$N_c(M) \sim \frac{M}{\log M}. \quad (4)$$

Este es el punto que nos apunta como tamaño característico del sistema, no a M como podría esperarse intuitivamente, sino a $M/\log M$. Este comportamiento de escala ya nos había aparecido en otros modelos en teoría de números que mostraban fenómenos colectivos [21, 22].

En la figura 1 hemos dibujado (puntos negros) el valor de N_c como función del tamaño característico $M/\log M$ a partir de simulaciones de Monte Carlo del modelo para diferentes tamaños de repositorios: $M = 2^8, 2^9, \dots, 2^{15}$. Para cada tamaño M estimamos $N_c(M)$ promediando $N(t)$ en el estado estacionario. Observemos que la relación de escala de la ecuación 4 funciona, sin embargo el valor numérico exacto de $N_c(M)$ se infraestima sistemáticamente por la ecuación 3. Este resultado es razonable teniendo en cuenta que hemos asumido que los elementos de un conjunto primitivo están descorrelacionados, que obviamente no es el caso. Observemos por ejemplo, que cualquier número primo $p \geq \lfloor M/2 \rfloor$ introducido en el conjunto primitivo, permanecerá en él por siempre. Podemos sortear esta deficiencia de la aproximación de campo medio considerando la función $D(n)$, que determina el número exacto de divisores de un número $n \in [2, M]$, i.e. la canti-

dad de números del repositorio que dividen o son divididos por n :

$$D(n) = d(n) + \left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor - 1. \quad (5)$$

Si definimos $p_n(t)$ como la probabilidad de que un número n pertenezca a tiempo t al conjunto primitivo, entonces tendremos:

$$p_n(t+1) = \left(1 - \frac{D(n)}{M - N(t)}\right) p_n(t) + \frac{1}{M - N(t)} (1 - p_n(t)), \quad (6)$$

que nos proporciona la probabilidad estacionaria de supervivencia en el conjunto primitivo:

$$p_n^* = \frac{1}{1 + D(n)}. \quad (7)$$

En la figura 3 (derecha) mostramos esta probabilidad estacionaria de supervivencia del número n (puntos negros) obtenida a través de simulaciones numéricas para un sistema con $M = 50$, mientras los cuadrados representan los valores p_n^* obtenidos a través de la ecuación 7. Vamos bien, porque el acuerdo es más que aceptable. Podemos proceder ahora a estimar el valor crítico $N_c(M)$ como:

$$N_c(M) \approx \sum_{n=2}^M p_n^* = \sum_{n=2}^M \frac{1}{1 + D(n)}. \quad (8)$$

En figura 1 representamos (cuadrados) los valores de $N_c(M)$ predichos por la ecuación 8, mostrando de nuevo un excelente acuerdo con los resultados numéricos (puntos negros).

Finalmente, cálculos previos apuntan que la distribución de las avalanchas $P(s)$ es proporcional al porcentaje de números que tienen s divisores. Para contrastar esta conjetura, en la figura 3 (izquierda) hemos representado el histograma que describe la cantidad de números que tienen un determinado número de divisores, obtenido a partir de la computación de $D(n)$ para $M = 10^6$. Como podemos observar, la cola del histograma sigue una ley de potencias con exponente $\tau = 2.0$. Esto es fácil de ver analíticamente: los números responsables de semejante cola potencial son aquellos capaces de dividir a muchos números del repositorio, que necesariamente tienen que ser números pequeños relativamente al tamaño del repositorio ($n \ll M$). Un número pequeño n divide típicamente a $D(n) \simeq \lfloor \frac{M}{n} \rfloor$. ¿Cuántos 'números pequeños' tienen $D(n)$ divisores? La respuesta es $n, n+1, \dots, n+z$ donde

$$\left\lfloor \frac{M}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{M}{n-1} \right\rfloor = \dots = \left\lfloor \frac{M}{n-z} \right\rfloor. \quad (9)$$

El máximo valor de z cumple $\frac{M}{n-z} - \frac{M}{n} = 1$, que es $z \simeq n^2/M$. La frecuencia de $D(n)$ es así $fr(D(n)) = n^2/M$, pero puesto que $s \equiv D(n) \simeq M/n$, tenemos que $fr(s) \sim Ms^{-2}$, y finalmente con normalización llegamos a: $P(s) \sim s^{-2}$.

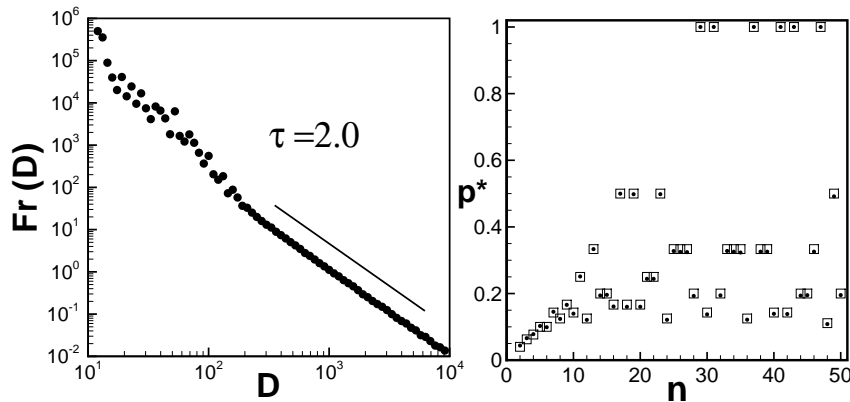


Figura 3: Izquierda: Histograma de la cantidad de números en $[2, 10^6]$ que tienen D divisores. El histograma ha sido suavizado mediante bineo para reducir la dispersión. El ajuste de los datos nos proporciona un ley de potencias $P(D) \sim D^{-\tau}$ con $\tau = 2.01 \pm 0.01$, en buen acuerdo con $P(s)$ (ver texto). Derecha: (puntos negros) Probabilidad estacionaria de supervivencia de un número n en un conjunto primitivo para un repositorio de tamaño $M = 50$, obtenida a partir de simulaciones de Monte Carlo del modelo sobre 10^6 pasos de tiempo, donde hemos descargado un transitorio preliminar de 10^4 pasos. (cuadrados) Predicción teórica de esta probabilidad de supervivencia de acuerdo con la ecuación 7.

4. Retroalimentando la teoría de números y los sistemas complejos

Volviendo a la definición de SOC dada por Flyvbjerg, ¿quién hace de *medio* en el modelo de división? Tenemos a los números, pero ¿qué "superficie" los sustenta? Observemos que el proceso puede entenderse como embebido en una red, donde los nodos son los números, y dos números se enlazan si son divisibles entre sí. Un conjunto primitivo constituye un subconjunto de nodos de esta red, que se modifica dinámicamente de acuerdo con las reglas del modelo. El grado, la conectividad, del nodo n es $D(n)$, y en consecuencia la distribución de conectividad en la red es $P(k) \sim k^{-2}$, una red libre de escala. Aquí el comportamiento SOC, que emerge debido a las propiedades de divisibilidad entre números, puede entenderse como una suerte de proceso de anti-percolación que ocurre en este red libre de escala. Observemos entonces que el modelo de división es un caso particular de una clase de modelos críticos autoorganizados: una red con M nodos con dos posibles estados (*on/off*) donde corre la siguiente dinámica:

(R1) Perturbación: a cada paso de tiempo un nodo en estado *off* se escoge de manera aleatoria y pasa a estado *on*.

(R2) Disipación: los s vecinos del nodo perturbado que estaban en estado *on* en ese instante cambian a *off*, y decimos que se ha producido una avalancha instantánea de tamaño s . $N(t)$ mide el número de nodos en estado *on* en función del tiempo.

Su evolución seguirá una ecuación de campo medio que generaliza a la ecuación 3:

$$N(t + 1) = N(t) + 1 - \frac{\langle k \rangle}{M} N(t), \quad (10)$$

donde $\langle k \rangle$ es la conectividad media de la red. En cada caso $N(t)$ se autoorganizará alrededor de un valor $N_c(M)$. Con una red regular o aleatoria, las fluctuaciones o las avalanchas, alrededor de $N_c(M)$ seguirán una distribución Binomial y de Poisson respectivamente. Sin embargo, cuando la red sea libre de escala con distribución $P(k) \sim k^{-\gamma}$, las fluctuaciones seguirán una distribución de ley de potencias $P(s) \sim s^{-\tau}$ con $\tau = \gamma$, y la dinámica será SOC. En este sentido, podemos decir que la topología libre de escala induce criticalidad.

5. Anímate a explorar por tu cuenta

Quedan muchas cuestiones abiertas, como: ¿Cuál es la relación entre la topología específica de una red libre de escala y el espectro de potencias de la dinámica temporal del sistema? ¿Qué efecto puede tener el grado de asortatividad o disasortividad de las redes libres de escala en el modelo? ¿Qué sistemas físicos podrían mostrar este comportamiento? Podemos profundizar a partir de este sencillo modelo más en ese puente entre teoría de números y física estadística. Por ejemplo, podemos generalizar el modelo usando conjuntos emparentados con los conjuntos primitivos, como son los conjuntos k -primitivos [23], donde cada número divide o es dividido a lo sumo por otros k del conjunto (k actuaría como un umbral), hasta conjuntos primitivos relativos [24] y conjuntos primitivos cruzados [19] que permitirían contruir modelos SOC acoplados. Desde el punto de vista computacional [25], las propiedades del modelo como generador de conjuntos primitivos podrían ser estudiadas. Especialmente la tarea de determinar el tamaño máximo de un k -conjunto primitivo [19, 23], que podría ser atacado a través del modelo de división usando la teoría de valores extremos.

Por último, siguiendo con la cuestión del modelo de SOC más simple posible, incluso la máquina de pinball parece "demasiado complicada" [11] si la comparamos con nuestro modelo de división. Difícilmente se nos puede ocurrir un modelo más sencillo que el que hemos expuesto, pero no vamos a asegurar que este es el más simple de los posibles, más bien esperamos que sirva como acicate para seguir motivando esta cuestión que se mantiene abierta.

6. Referencias

- [1] R. Guy, *Unsolved problems in number theory*. Springer, 2004, vol. 1.
- [2] M. R. Watkins, number theory and physics archive. [Online]: <http://empslocal.ex.ac.uk/people/staff/mrwatkin/zeta/physics.htm>
- [3] D. P. Ruelle, *Azar y caos*. Alianza Editorial, Madrid, 1993.
- [4] J. J. Binney, N. J. Dowrick, A. J. Fisher, and M. Newman, *The theory of critical phenomena: an introduction to the renormalization group*. Oxford University Press, Inc., 1992.
- [5] H. Jensen, *Self-organized criticality: emergent complex behavior in physical and biological systems*. Cambridge university press, 1998, vol. 10.
- [6] D. Sornette, *Critical phenomena in natural sciences: chaos, fractals, selforganization, and disorder: concepts and tools*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [7] D. Turcotte, "Self-organized criticality," *Reports on progress in physics*, vol. 62, no. 10, p. 1377, 1999.
- [8] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, "Self-organized criticality: An explanation of the $1/f$ noise," *Physical Review Letters*, vol. 59, no. 4, pp. 381–384, 1987.
- [9] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld *et al.*, "Self-organized criticality," *Physical review A*, vol. 38, no. 1, pp. 364–374, 1988.
- [10] H. Flyvbjerg, "Simplest possible self-organized critical system," *Physical review letters*, vol. 76, no. 6, pp. 940–943, 1996.
- [11] —, "Self-organized critical pinball machine," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 340, no. 4, pp. 552–558, 2004.
- [12] M. Newman, "The structure and function of complex networks," *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [13] R. Albert and A. Barabási, "Statistical mechanics of complex networks," *Reviews of modern physics*, vol. 74, no. 1, p. 47, 2002.
- [14] K. Goh, D. Lee, B. Kahng, and D. Kim, "Sandpile on scale-free networks," *Physical review letters*, vol. 91, no. 14, p. 148701, 2003.
- [15] P. Fronczak, A. Fronczak, and J. Holyst, "Self-organized criticality and coevolution of network structure and dynamics," *PHYSICAL REVIEW-SERIES E*, vol. 73, no. 4, p. 46117, 2006.

- [16] G. Bianconi and M. Marsili, "Clogging and self-organized criticality in complex networks," *Physical Review E*, vol. 70, no. 3, p. 035105, 2004.
- [17] D. Garlaschelli, A. Capocci, and G. Caldarelli, "Self-organized network evolution coupled to extremal dynamics," *Nature Physics*, vol. 3, no. 11, pp. 813–817, 2007.
- [18] P. Erdos, "Note on sequences of integers no one of which is divisible by any other," *J. London Math. Soc.*, vol. 10, pp. 126–128, 1935.
- [19] R. Ahlswede and L. H. Khachatrian, "The mathematics of paul erdős, vol. i algorithms and combinatorics," 1997.
- [20] M. Schroeder, *Number theory in science and communication: With applications in cryptography, physics, digital information, computing, and self-similarity*. Springer, 2008, vol. 7.
- [21] B. Luque, L. Lacasa, and O. Miramontes, "Phase transition in a stochastic prime-number generator," *Physical Review E*, vol. 76, no. 1, p. 010103, 2007.
- [22] L. Lacasa, B. Luque, and O. Miramontes, "Phase transition and computational complexity in a stochastic prime number generator," *New Journal of Physics*, vol. 10, no. 2, p. 023009, 2008.
- [23] S. Vijay, 2006, integers: Electronic journal of combinatorial number theory, 6, A01.
- [24] M. Nathanson, 2007, integers: Electronic journal of combinatorial number theory, 6, A01.
- [25] A. Percus, G. Istrate, and C. Moore, *Computational complexity and statistical physics*. Oxford University Press, USA, 2006.

Procesos difusivos: de moléculas a animales

Denis Boyer, Instituto de Física, UNAM, México

Los devenires son geografía, son orientaciones, direcciones, entradas y salidas. Son actos que sólo pueden estar contenidos en una vida y expresados en un estilo. A medida que alguien deviene, aquello en lo que deviene cambia tanto como él.
Gilles Deleuze

1. Introducción

La difusión es tal vez el mecanismo más básico de transporte en la materia y se encuentra al origen de muchos procesos, tanto de equilibrio como fuera de equilibrio, en termodinámica y física estadística. Las caminatas aleatorias ofrecen un marco teórico útil para entender la difusión a un nivel microscópico. Estas caminatas se han utilizado para describir el movimiento browniano de una partícula sujeta a colisiones con las moléculas de un fluido que la rodea, así como para entender la cinética de reacciones químicas, las propiedades estadísticas de avalanchas en medios granulares o las conformaciones de polímeros. En áreas distintas a la Física, las caminatas aleatorias aparecen de manera ubicua en la descripción de problemas donde el ruido y la incertidumbre juegan un papel fundamental, por ejemplo: cómo una proteína encuentra un sitio funcional en la célula, cómo los animales usan el espacio y los recursos de un ecosistema, cómo los precios evolucionan en mercados bursátiles o en problemas de adopción de opiniones por agentes sociales. A pesar de la simplicidad de su formulación probabilística original, los procesos difusivos siguen siendo un tema de investigación muy activo en la actualidad. En este capítulo presentaremos algunas técnicas y resultados básicos sobre la difusión, así como sus aplicaciones recientes en temas interdisciplinarios. Nos enfocaremos en el estudio de los patrones de movilidad individual en animales o humanos y discutiremos perspectivas en esa área. Muchos de nuestros problemas de interés involucran una partícula pero mencionaremos fenómenos colectivos que pueden emerger en sistemas compuestos de muchos elementos.

2. Difusión simple

Caminatas aleatorias y Teorema Límite Central

Iniciamos considerando una partícula que puede ocupar posiciones discretas $x(t)$ equidistantes a lo largo de una línea, moviéndose a cada paso en tiempo discreto ($t \rightarrow t + 1$) al sitio más cercano ubicado a su derecha o a su izquierda con igual probabilidad $1/2$, ver figura 1a. La probabilidad $P_t(n)$ de que el caminante esté en el sitio n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) al instante t obedece a una ecuación recursiva de dos variables:

$$P_t(n) = \frac{1}{2}P_{t-1}(n-1) + \frac{1}{2}P_{t-1}(n+1). \quad (1)$$

Esta expresión suma la probabilidad de que en el instante $t-1$, la partícula esté en $n-1$ y dé un salto hacia adelante y la probabilidad de que esté en $n+1$ y dé un salto hacia atrás. Si el caminante se encuentra en la posición $n=0$ al tiempo inicial $t=0$, después de t pasos la probabilidad de que haya dado n_d pasos a la derecha y $t-n_d$ pasos a la izquierda en un orden cualquiera está dada por la fórmula del binomio:

$$P_t(n) = \binom{t}{n_d} \frac{1}{2^t} \quad (2)$$

En esta fórmula se tomó en cuenta el hecho de que cualquier secuencia dada de t pasos tiene probabilidad $(1/2)^t$ de ocurrir y que la posición n vale $2n_d - t$ (si los enteros n y t tienen la misma paridad). Se puede comprobar que (2) es solución de (1). A tiempos grandes ($t \gg 1$) usamos la aproximación de Stirling y obtenemos la bien conocida distribución gaussiana [1]:

$$P_t(n) \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-n^2/4Dt}, \quad (3)$$

donde $D (= 1/2$ en este caso) es la constante de difusión. Se puede re-obtener este resultado a partir de un modelo un poco diferente, en el cual el tiempo es continuo y la probabilidad de saltar a la derecha en el intervalo de tiempo $[t, t + dt]$ es αdt (lo mismo sucede a la izquierda) [2]. Eligiendo la tasa $\alpha = 1$, podemos escribir una ecuación maestra para la evolución de $P_t(n)$:

$$\frac{\partial P_t(n)}{\partial t} = P_t(n+1) - 2P_t(n) + P_t(n-1). \quad (4)$$

El término $-2P_t(n)$ proviene del hecho de que el caminante deje su posición actual con probabilidad $2dt$ en $[t, t + dt]$. Para resolver (4) se introduce la transformada de Fourier discreta:

$$P(k, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_t(n) e^{ikn}. \quad (5)$$

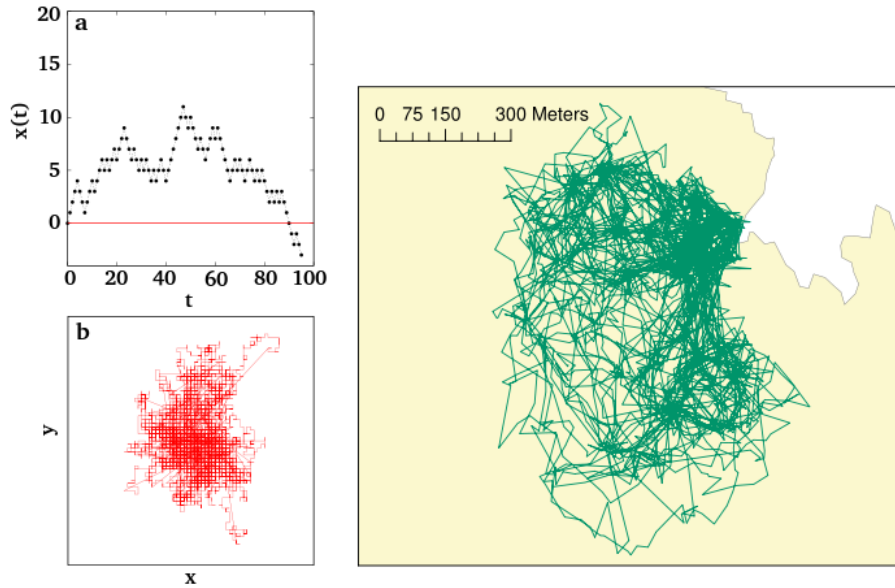


Figura 1: Izquierda: a) Posición en función del tiempo de una caminata aleatoria discreta en una dimensión espacial, que da pasos con igual probabilidad a la derecha o a la izquierda. En este ejemplo, el caminante regresa por primera vez a su punto de partida a $t = 90$. b) Caminata aleatoria en dos dimensiones espaciales con saltos intermitentes a lugares visitados anteriormente, ver sección 3. Derecha: Trayectoria recorrida durante un mes por un primate (mono capuchino) obtenida con un GPS en la isla de Barro Colorado, Panamá [cortesía de Meg Crofoot].

De (4), obtenemos

$$\frac{\partial P(k, t)}{\partial t} = [e^{ik} + e^{-ik} - 2]P(k, t). \tag{6}$$

Dado que $P_{t=0}(n) = \delta_{n,0}$ entonces $P(k, t = 0) = 1$ y (6) se puede integrar con esta condición inicial:

$$P(k, t) = e^{2(\cos k - 1)t}. \tag{7}$$

La solución $P_t(n)$ se obtiene usando la identidad $e^{z \cos k} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{ikn} I_n(z)$ donde I_n son las funciones de Bessel modificadas. Comparando con (7):

$$P_t(n) = I_n(2t) e^{-2t}, \tag{8}$$

la cual converge a la forma asintótica (3) cuando $t \gg 1$, con $D = 1$. En un espacio continuo se sustituye n por una posición real x , reconociendo que el lado derecho de (4) tiene forma de una segunda derivada espacial. Esta ecuación se convierte una ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2}, \tag{9}$$

que es la bien conocida ecuación de la difusión. $P(x, t)$ es una densidad de probabilidad: $P(x, t)dx$ es la probabilidad de que la partícula se encuentre entre x y $x + dx$ al instante t . Por normalización, $\int_{-\infty}^{\infty} P(x, t)dx = 1$ para todo t . Si la partícula se encuentra al origen $x = 0$ en $t = 0$, entonces $P(x, t = 0) = \delta(x)$ ¹ y la forma gaussiana (3) es solución exacta de (9) para $t > 0$, sustituyendo $n \rightarrow x$. Una consecuencia importante de este resultado es que por paridad, la posición media de la partícula $\langle x \rangle = \int xP(x, t)dx$ es cero: no hay *en promedio* transporte en ninguna dirección preferente. Sin embargo, el segundo momento de la distribución $P(x, t)$, también llamado desplazamiento cuadrático medio $\langle x^2 \rangle$ se relaciona con el ancho de la distribución gaussiana y no es cero. En una trayectoria dada, los números de pasos a la derecha y a la izquierda no son iguales en general y la diferencia tiende a crecer con el tiempo debido a fluctuaciones estadísticas. En otras palabras, $\langle x^2 \rangle$ crece con el tiempo:

$$\langle x^2 \rangle(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 P(x, t)dx = 2Dt. \quad (10)$$

Esta es la ley de Smoluchowski-Einstein. La cantidad $l = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$ representa la distancia típica entre el caminante y su punto de origen después de t pasos. Esta distancia crece como $t^{1/2}$, indefinidamente, aunque mucho más lentamente que una partícula en movimiento uniforme ($l \sim t$).

Además de describir la densidad de probabilidad del desplazamiento x para los modelos de caminatas aleatorias descritos arriba, la distribución gaussiana se aplica más generalmente a la suma de variables aleatorias reales independientes (es decir, sin correlaciones entre sí) cuando la suma contiene un gran número de términos. Esta universalidad se explica por el *Teorema Límite Central* (ver por ejemplo [3]). Consideremos una suma (posición) x que contiene N términos (pasos),

$$x = \sum_{n=1}^N u_n, \quad (11)$$

donde los u_n no necesariamente toman los valores ± 1 sino que están generados aleatoriamente a partir de una distribución de probabilidad $p(u)$ arbitraria². La relación (1) toma la forma general:

$$P(x, N) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x', N-1)p(x-x')dx'. \quad (12)$$

Para llegar al valor x en N pasos, hay que llegar a algún x' en $N-1$ pasos y luego añadir $x-x'$, lo cual ocurre con probabilidad $p(x-x')dx'$. La integral (12) es una convolución entre P y p . Definiendo la transformada de Fourier continua,

$$f(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (13)$$

¹ $\delta(x)$ es la función delta de Dirac y δ_{ij} la función de Krönecker.

²La probabilidad que u tome un valor en $[U, U + dU]$ es $p(U)dU$.

obtenemos de (12) la relación $P(k, N) = P(k, N - 1)p(k)$. Esta relación se resuelve fácilmente por iteración³ y se obtiene $P(k, N) = [p(k)]^N$. Notamos que $p(k = 0) = \int p(u)du = 1$ por normalización y que $|p(k)| < 1$ si $k \neq 0$: entonces $P(k, N)$ es exponencialmente chico cuando $N \gg 1$, excepto para k cerca de 0. Esto explica la universalidad de las funciones gaussianas. Desarrollando en serie de Taylor con k pequeño obtenemos $e^{iku} \simeq 1 - iku - \frac{1}{2}k^2u^2$ y deducimos que $p(k) \simeq 1 - ik\langle u \rangle - \frac{1}{2}k^2\langle u^2 \rangle$. Para simplificar consideramos $\langle u \rangle = 0$ y suponiendo $\langle u^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} u^2 p(u)du$ finito ($< \infty$), la distribución $P(x, N)$ que buscamos se obtiene por transformada inversa de Fourier de la función $[p(k)]^N$:

$$\begin{aligned} P(x, N) &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2N} N k^2 \langle u^2 \rangle \right]^N e^{ikx} dk \\ &\simeq \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{N\langle u^2 \rangle}{2} k^2 + ikx} dk \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N \langle u^2 \rangle}} e^{-\frac{x^2}{2N \langle u^2 \rangle}}. \end{aligned} \quad (14)$$

En resumen, la suma de N variables aleatorias de varianza finita tiende a una distribución gaussiana, sin importar la forma analítica de la distribución $p(u)$ de estas variables. Los resultados anteriores se generalizan fácilmente en espacios d -dimensionales, en donde se sustituye x por el vector posición \mathbf{r} y se obtiene:

$$P(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{d/2}} e^{-\frac{\mathbf{r}^2}{4Dt}}, \quad \langle \mathbf{r}^2 \rangle = 2dDt. \quad (15)$$

La figura 1b muestra un ejemplo de caminata en dos dimensiones.

Propiedades de primer paso

Consideramos un caminante con posición \mathbf{r} en una red discreta infinita dentro de un espacio de dimensión d (\mathbf{r} es por lo tanto un vector con d componentes enteros relativos). La función $P(\mathbf{r}, t)$ describe la probabilidad de *estar* en \mathbf{r} al instante t . Sin embargo, podemos plantear otra clase de preguntas. Si $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ a $t = 0$, ¿Cuál es la probabilidad de que el caminante llegue *por primera vez* a un sitio \mathbf{r}_0 dado al instante t ? ¿Cuál es la probabilidad de que el caminante vuelva a su punto de origen? ¿Cuántos sitios *distintos* son visitados en promedio en t pasos?

Las propiedades de primer paso son importantes en problemas de búsqueda aleatorias, en donde el caminante puede estar representando un animal o una molécula y \mathbf{r}_0 un sitio de alimento o un sitio de reacción [4]. Las respuestas a las preguntas anteriores no son triviales y dependen de la dimensión espacial d . En un espacio no acotado, si $d \leq 2$, las caminatas aleatorias son *recurrentes*, es decir visitan muchas veces los mismos sitios,

³Con $N = 0$, la suma x vale 0 con probabilidad 1: $P(x, 0) = \delta(x)$ o $P(k, 0) = 1$.

mientras que si $d > 3$ las caminatas son *transientes*: los sitios visitados son pocas veces revisitados y existe una probabilidad > 0 de nunca regresar a un sitio que ya ha sido visitado. Heurísticamente, a partir de la ley de la difusión (10), la trayectoria de un caminante hasta un tiempo t se encuentra en un dominio de radio $l(t) \sim t^{1/2}$. Hay t visitas en t pasos (no necesariamente a sitios distintos) por lo tanto el número de visitas a un sitio dado dentro del dominio es $n_v(t) \sim t/l(t)^d \sim t^{1-d/2}$. Si $d < 2$, $n_v(t)$ crece con t y casi seguramente todos los sitios del dominio son visitados muchas veces; si $d > 2$, $n_v(t) \rightarrow 0$: muchos sitios en el dominio nunca serán visitados.

Estas propiedades de recurrencia se pueden derivar de manera rigurosa. Considerando un caminante que sigue el proceso de difusión en tiempo continuo descrito en (4), definimos la probabilidad $P_1(\mathbf{r}_0, t)dt$ de alcanzar por primera vez una posición \mathbf{r}_0 dada entre t y $t + dt$. La variable t suele llamarse en este contexto un tiempo de primer paso (en \mathbf{r}_0). En un espacio homogéneo:

$$P(\mathbf{r}_0, t) = \int_0^t P_1(\mathbf{r}_0, t')P(\mathbf{0}, t - t') dt' + \delta_{\mathbf{r}_0, \mathbf{0}} e^{-2dt}. \quad (16)$$

Para estar en \mathbf{r}_0 al tiempo t , es necesario llegar ahí por primera vez en algún tiempo $t' \leq t$ y haber regresado a ese origen en un tiempo $t - t'$. El segundo término representa el caso $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$: la probabilidad de haberse quedado en el origen hasta t es $[\exp(-t)]^{2d}$, dado que el caminante puede saltar con tasa unidad a uno de $2d$ sitios más cercanos en la red. Como conocemos P , podemos obtener P_1 de (16). Con este fin, es conveniente usar la transformada de Laplace definida para cualquier función $f(t)$ como:

$$f(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad (17)$$

donde s es la variable conjugada al tiempo. La convolución temporal en (16) se traduce como:

$$P_1(\mathbf{r}_0, s) = \frac{P(\mathbf{r}_0, s) - \delta_{\mathbf{r}_0, \mathbf{0}}/(s + 2d)}{P(\mathbf{0}, s)}. \quad (18)$$

Elegimos ahora $\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}$ y queremos determinar $P_1(\mathbf{0}, t) \rightarrow P_1(t)$, la distribución de los tiempos de primer retorno al origen (ver un ejemplo de primer retorno en la figura 1a). La cantidad $\mathcal{R} = P_1(s = 0) = \int_0^\infty P_1(t) dt$ representa entonces la probabilidad de que el caminante regrese en algún momento a su punto de partida. Usando (18) y (15) se obtiene:

$$\mathcal{R} = 1 - \frac{1}{P(\mathbf{0}, s = 0)}. \quad (19)$$

$P(\mathbf{0}, s = 0) = \int_0^\infty P(\mathbf{0}, t) dt$ es la densidad de presencia en el origen integrada sobre todos los tiempos. De (15), $P(\mathbf{0}, t) \propto t^{-d/2}$ a t grande. Para $d \leq 2$ esa función decae más lentamente que $1/t$, por lo tanto $P(\mathbf{0}, s = 0) = \infty$. Usando (19), concluimos que $\mathcal{R} = 1$: las caminatas siempre vuelven a pasar por su punto de origen. En dimensiones mayores que

2, $P(\mathbf{0}, s = 0) < \infty$ y su valor preciso para redes hiper-cúbicas puede ser calculado a partir de (8). En $d = 3$, la caminata regresa al origen solamente con probabilidad $\mathcal{R} = 0.3405\dots$

También podemos derivar el comportamiento de la distribución $P_1(t)$ de los tiempos del primer retorno al origen, a tiempos grandes. Esto se obtiene analizando la ecuación (18) para s pequeño. En $d = 1$, $P(\mathbf{0}, t) \simeq (4t)^{-1/2}$ implicando que $P(\mathbf{0}, s) \simeq 4s^{-1/2}$ cuando $s \rightarrow 0$. Deducimos de (18) que $P_1(\mathbf{0}, s) \simeq 1 - \sqrt{s}$, que es la transformada de Laplace de la función:

$$P_1(t) \simeq \frac{1}{\sqrt{4\pi}} t^{-3/2}, \quad t \gg 1 \quad (d = 1). \tag{20}$$

Esta distribución es una ley de potencia decreciente: es más probable que el caminante regrese al origen (o a cualquier punto previamente visitado) en un plazo corto que después de mucho tiempo. Sin embargo, el decaimiento de $P_1(t)$ con t es lento, por ejemplo, cuando se compara con una exponencial, incluso algunas excursiones son muy largas, tan largas que el tiempo medio de primer retorno al origen diverge: $\langle t \rangle = \int_0^\infty t P_1(t) dt \propto \int_1^\infty t^{-1/2} dt = \infty$. Los caminantes siempre regresan pero en promedio se tardan un tiempo infinito para hacerlo... En $d = 2$, para s pequeño $P(\mathbf{0}, s) \simeq \int_1^\infty (4\pi t)^{-1} e^{-st} dt \simeq -1/(4\pi) \ln s$. Usando (18), obtenemos $P_1(s) = 1 + \pi \ln s$, que es la transformada de Laplace de

$$P_1(t) \simeq \frac{\pi}{t(\ln t)^2}, \quad t \gg 1 \quad (d = 2). \tag{21}$$

Esta distribución decae aún más lentamente con t que en el caso $1d$ y su tiempo medio de primer retorno $\langle t \rangle$ es infinito también.

Número de sitios distintos visitados y procesos de aniquilación

También es de particular interés el número $S(t)$ de sitios distintos visitados en promedio durante un intervalo de tiempo t [5]. Esta cantidad representa el territorio cubierto o “conocido” por el caminante. Dado que el caminante puede visitar varias veces un mismo sitio, $S(t)$ no puede ser mayor a $\mathcal{O}(t)$. La probabilidad de que \mathbf{r} haya sido visitado durante $[0, t]$ es $\int_0^t P_1(\mathbf{r}, t') dt'$, entonces

$$S(t) = 1 + \sum_{\mathbf{r} \neq \mathbf{0}} \int_0^t P_1(\mathbf{r}, t') dt'. \tag{22}$$

Usando (18), obtenemos para la transformada de Laplace de $S(t)$: $S(s) \simeq 1/[s^2 P(\mathbf{0}, s)]$ cuando $s \rightarrow 0$. Del comportamiento de $P(\mathbf{0}, s)$ para s pequeño (ver arriba) deducimos que:

$$S(t) \sim \begin{cases} t^{1/2}, & d = 1 \\ t/\ln t, & d = 2. \\ t & d > 2 \end{cases} \tag{23}$$

De acuerdo con el argumento heurístico anterior, la dimensión 2 marca una transición recurrencia/no-recurrencia arriba de la cual las propiedades de $S(t)$ no cambian fundamentalmente. Por esta razón, la dimensión $d_c = 2$ se denomina dimensión crítica para el número de sitios visitados. Como suele pasar en otros fenómenos críticos, aquí también aparecen correcciones logarítmicas en d_c , ver la ecuación (23). Un sitio visitado durante $[0, t]$ se visita en promedio $t/S(t)$ veces. En $d = 2$ este número crece de manera logarítmica pero es una propiedad difícil de predecir heurísticamente.

Los resultados mostrados tienen aplicaciones a problemas de cinética de reacciones químicas, entre otros [2]. Consideremos un conjunto de partículas que se difunden libremente en un medio. Supongamos que cuando 2 partículas se encuentran en un mismo sitio se aniquilan, es decir, desaparecen: $A + A \rightarrow \emptyset$. Dado un número inicial de partículas $N_0 \gg 1$ en un volumen L^d (densidad $\rho_0 = N_0/L^d$), en promedio ¿cuál es el número de partículas $N(t)$ sobrevivientes al instante t ?

En este problema con muchos cuerpos interactuando entre sí, un argumento de tipo cualitativo puede ser muy útil. Consideremos al tiempo t una partícula sobreviviente y mantengamos las otras $N(t) - 1 \simeq N(t)$ fijas en sus posiciones. Al tiempo $t + \tau$, el número medio n_e de partículas encontradas por la partícula focal es proporcional al número de sitios distintos que visitó durante el tiempo τ y a la densidad media en $[t, t + \tau]$: $S(\tau)\bar{\rho} = S(\tau)\tau^{-1} \int_t^{t+\tau} dt' N(t')/L^d$. Suponiendo que $N(t)$ decae como una ley de potencia, $N(t) \sim t^{-\alpha}$, entonces $n_e \propto S(\tau)[(t + \tau)^{-\alpha+1} - t^{-\alpha+1}]/\tau$. Cuando n_e es de orden 1, la probabilidad de que la partícula considerada desaparezca es bastante alta, independientemente de t . Eso es posible si $\tau = \text{const} \times t$ y $S(t) \times t^{-\alpha} = \text{const}$. Concluimos que:

$$N(t) \propto 1/S(t). \quad (24)$$

Dado (23), $N(t)$ decae asintóticamente como $1/t$ si $d > 2$, como $\ln t/t$ en $d = 2$ y como $1/\sqrt{t}$ en $d = 1$. Es interesante observar que estos resultados se comprueban en simulaciones numéricas.

Podemos comparar estos resultados con lo que predice una ecuación cinética de tipo campo medio que ignora las fluctuaciones espaciales de densidad. Tradicionalmente, la evolución de las densidades medias en reacciones químicas se describe con ecuaciones diferenciales ordinarias. Para el proceso de aniquilación considerado aquí:

$$\frac{d\rho}{dt} = -2K\rho^2, \quad (25)$$

que tiene como solución $\rho(t) \sim 1/t$. Este comportamiento es correcto solamente en $d > 2$, ya que en dimensiones bajas, la recurrencia de las caminatas aleatorias modifica de manera importante el resultado de campo medio. Estos argumentos también se pueden aplicar a otros tipos de reacciones. Para procesos de aniquilación entre dos especies distintas, $A + B \rightarrow \emptyset$, se obtiene $d_c = 4$: los efectos de la difusión son aún más fuertes y siguen presentes en el caso $d = 3$ de mayor relevancia física [2].

3. Movilidad de organismos complejos: perspectivas presentes y futuras

Más de un siglo después de los experimentos clásicos de Jean Perrin, quien rastreaba con precisión el movimiento browniano de partículas microscópicas de látex, los avances tecnológicos de hoy en día permiten realizar experimentos similares y por largos periodos de tiempos (típicamente meses) sobre tiburones, babuinos, tortugas, albatros, roedores, etcétera; sin olvidar a los humanos. Desde hace apenas algunos años, el interés por el estudio de la movilidad de los organismos vivos ha conocido un crecimiento exponencial. Es sorprendente constatar que se sabe más sobre la difusión de proteínas en una célula que sobre las propiedades estadísticas de los desplazamientos de un humano en una ciudad o de un animal en un ecosistema silvestre. Sin embargo, la movilidad individual es de gran importancia en problemas de dinámica poblacional, de tránsito o de propagación de enfermedades. Dado su carácter interdisciplinario, cada vez es más frecuente que físicos colaboren con biólogos, ecólogos o antropólogos en estos temas.

Más allá de la difusión simple

Desde un punto de vista teórico, el movimiento de organismos complejos en ambientes no menos complejos plantea varios retos matemáticos y computacionales. Los modelos de caminatas aleatorias antes mencionados son relativamente fáciles de resolver porque se trata de procesos markovianos o sin memoria: la evolución de t a $t + 1$ depende del estado del sistema a t . Sin embargo, muchos procesos en la naturaleza no son markovianos. Por ejemplo, los mamíferos y vertebrados en general tienen memoria y la capacidad de crear mapas mentales, es decir representaciones espacio-temporales de mayor alcance que la vecindad de la posición \mathbf{r} y del tiempo t actuales. Aunque las caminatas aleatorias han sido muy útiles para describir el movimiento animal en escalas temporales cortas [6], el uso de las capacidades cognitivas debería tener repercusiones importantes en varias propiedades dinámicas asintóticas y en lo que los ecólogos llaman “el uso del espacio”. Desafortunadamente estas repercusiones han sido poco exploradas.

Una limitación de las caminatas aleatorias en la naturaleza se manifiesta, por ejemplo, en el poco entendido fenómeno del *ámbito hogareño*. Los animales no se difunden libremente y su desplazamiento cuadrático medio no crece indefinidamente según una ley de Smoluchowski-Einstein (10). Más bien, los individuos en general se quedan confinados en ciertas áreas relativamente pequeñas (“territorios”), a menudo sin fronteras físicas visibles. La probabilidad de ver al animal fuera de esa área es prácticamente nula (ver figura 1-derecha). De manera similar, muchos humanos deben ir al trabajo y regresar a casa tarde o temprano, lo cual limita los lugares que puede visitar un individuo. En otras palabras, somos *muy* recurrentes, aunque no totalmente predecibles. Datos obtenidos de animales equipados de collares con GPS [7] o de humanos usuarios de teléfonos celulares [8] muestran que el desplazamiento cuadrático medio de un individuo $\langle \mathbf{r}^2 \rangle(t)$ tiende

asintóticamente a un valor constante o crece muy lentamente, típicamente con una ley logarítmica de t .

Visitas preferenciales

En [9], se discute cualitativamente en contextos ecológicos un modelo donde un ámbito hogareño emerge a partir de reglas estocásticas simples. Sea un parámetro $0 \leq p \leq 1$. A cada paso de tiempo $t \rightarrow t + 1$, un caminante con posición discreta elige con probabilidad $1 - p$ moverse a uno de los sitios vecinos más cercanos (cada uno con igual probabilidad), o con probabilidad complementaria p , elige un tiempo al azar t' de manera uniforme en $[0, t]$ y salta directamente al sitio donde estaba al instante t' . Por lo tanto, el movimiento combina una exploración local aleatoria estándar y pasos que pueden ser muchos más largos (pero menos frecuentes si $p \ll 1$). Dicha combinación se observa empíricamente en muchas especies y a veces se le denomina movimiento *intermitente* [10]. El presente modelo supone que estos pasos hacia lugares más lejanos se deben al uso intermitente de la memoria (la cual es ilimitada porque todas las posiciones pasadas se recuerdan). Un ejemplo de una trayectoria generada por estas reglas se muestra en la figura 1b. En una dimensión espacial, la ecuación de recurrencia generaliza la ecuación (1):

$$P_t(n) = \frac{1-p}{2}P_{t-1}(n-1) + \frac{1-p}{2}P_{t-1}(n+1) + \frac{p}{t} \sum_{t'=0}^{t-1} P_{t'}(n). \quad (26)$$

El último término de memoria indica que el sitio n puede ser visitado desde cualquier lugar si ha sido visitado antes. La regla de memoria tiene una interpretación simple: la probabilidad de que el caminante elija un sitio particular es proporcional al número de veces que este sitio fue visitado antes. Un sitio familiar tiene mayor posibilidades (tiempos t') de ser elegido para visitas futuras que un sitio visitado pocas veces. Es similar al principio “el rico se vuelve más rico” o de “vinculación preferencial” muy popular actualmente en la ciencia de las redes complejas. La transformada de Fourier-Laplace discreta⁴ de $P_t(n)$, definida como

$$P(z, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} z^n \lambda^t P_t(n), \quad (27)$$

se puede obtener analíticamente a partir de (26):

$$P(z, \lambda) = (1 - \lambda)^{-a} [1 - u(1 - p)\lambda]^{-b/u(1-p)}, \quad (28)$$

donde $u = (z + z^{-1})/2$, $a = p/[1 - u(1 - p)]$ y $b = 1 + u(1 - p) - a$. Esta relación es difícil de invertir pero el desplazamiento cuadrático medio $\langle x^2 \rangle(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 P_t(n)$ se puede obtener sin conocer $P_t(n)$. Notamos que la transformada de Laplace $\langle x^2 \rangle(\lambda)$ obedece a la

⁴En las notaciones anteriores, $z = e^{ik}$ y $\lambda = e^{-s}$.

relación general $\langle x^2 \rangle(\lambda) = \frac{\partial}{\partial z} (z \frac{\partial}{\partial z} P(z, \lambda))|_{z=1}$. El análisis del límite $\lambda \rightarrow 1$ (equivalente al $s \rightarrow 0$ de la sección anterior) permite determinar el comportamiento asintótico $t \rightarrow \infty$:

$$\langle x^2 \rangle(\lambda) \simeq -\frac{(1-p)}{p(1-\lambda)} [\ln(1-\lambda) - \ln p] \implies \langle x^2 \rangle(t) \simeq \frac{1-p}{p} [\ln(pt) + \gamma], \quad (29)$$

con $\gamma = 0.57721\dots$ Concluimos que la difusión es logarítmicamente lenta en este modelo. La memoria convierte al caminante en muy recurrente, a tal punto de modificar drásticamente, para todo $p > 0$, la ley estándar (10) lineal en t . Un modelo similar basado en visitas preferenciales pudo reproducir patrones de movilidad humana observados recientemente [8].

Una consecuencia importante del principio “el rico se vuelve más rico” es la de generar mucha heterogeneidad entre sitios o entre nodos en caso de redes: hay muchos “pobres” (sitios poco populares/poco visitados) y pocos “ricos” (sitios muy populares/-de uso muy rutinario). Un sitio “rico” suele ser mucho más visitado que un sitio típico elegido al azar. Frecuentemente, esta disparidad creada por la asociación preferencial se manifiesta por la emergencia de distribuciones en *leyes de potencias* o *libres de escala*⁵. Sea un sitio elegido al azar dentro de los sitios visitados mínimo una vez por un caminante durante un cierto intervalo de tiempo. En los modelos preferenciales discutidos arriba, la probabilidad $P(k)$ de que este sitio haya sido visitado exactamente k veces sigue una ley de potencia:

$$P(k) \propto k^{-\gamma}, \quad (30)$$

con $\gamma > 1$ un exponente que puede depender de los parámetros del modelo considerado. Es bastante probable que el sitio haya sido visitado solamente 1 vez, pero como la función $x^{-\gamma}$ decae lentamente con x , no es imposible que algunos sitios hayan recibido 10, 100 o más visitas. En el mundo real, dicho uso muy heterogéneo del espacio se observa efectivamente tanto en humanos como en otros animales. Subdividiendo el espacio continuo (por ejemplo una ciudad) en celdas y contando el número de visitas a cada celda por un mismo individuo durante un periodo dado (6 meses, típicamente), la probabilidad $P(k)$ de popularidad definida arriba se aproxima bien por (30) con $\gamma \approx 1.8$ en humanos en EU [8] y $\gamma \approx 1.2$ en monos capuchinos en una selva de Panamá [7]. Unos pocos sitios reciben una enorme cantidad de visitas (la casa y el lugar de trabajo para los humanos). En la figura 1-derecha, se aprecia cómo un mono capuchino también usa el espacio de manera muy heterogénea. A pesar de la elegancia y éxito del principio de visitas preferenciales para reproducir datos empíricos, no queda muy claro que dicho principio estocástico gobierne exclusivamente el movimiento de organismos complejos.

Caminatas reforzadas

Otra clase de procesos en donde los sitios visitados en el pasado tienden a ser revisitados preferentemente son las caminatas reforzadas. A diferencia del modelo anterior,

⁵Vimos un ejemplo de dicha distribución en la sección 2.

los pasos siempre se dan hacia los vecinos más cercanos, por lo tanto no hay pasos largos. Esta propiedad complica el análisis porque la ecuación maestra se convierte en *no lineal*. Lo interesante es que por efectos de no linealidad se pueden presentar fenómenos nuevos como *transiciones de fase* entre regímenes dinámicos muy diferentes cuando algún parámetro rebasa un valor crítico.

Un modelo propuesto recientemente [11] muestra una transición de fase entre un régimen en donde el caminante se localiza estrictamente y un régimen en donde el caminante se difunde sin límites. A cada paso de tiempo con probabilidad $1-p$ el caminante ubicado en el sitio n salta a un sitio vecino más cercano $m = n \pm 1$ elegido al azar con probabilidad $w_{n \rightarrow m} = 1/2$ (en una dimensión). Con probabilidad p el caminante salta a m con probabilidad $w_{n \rightarrow m} \propto [v_m(t) + 1]^\alpha$ donde $v_m(t)$ es el número de visitas recibidas por el sitio m en el intervalo $[0, t]$ y α una constante. Si $\alpha > 0$, cuanto más visitas haya recibido un sitio, se vuelve más atractivo cuando el caminante pasa cerca⁶; p representa la frecuencia con la cual se toman decisiones basadas en este mecanismo. La ecuación maestra en su forma más general

$$P_{t+1}(n) = \sum_{m \text{ vecino de } n} w_{m \rightarrow n} P_t(m), \quad (31)$$

es ahora no lineal dado que $w_{m \rightarrow n}$ depende del número de visitas pasadas y por lo tanto de P . Tomando el límite continuo y usando la relación $v_x(t) = \int_0^t P(x, t') dt'$, se obtiene la siguiente ecuación de difusión para la densidad de probabilidad de presencia $P(x, t)$:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P(x, t)}{\partial x^2} - \alpha p \frac{\partial}{\partial x} \left\{ P(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \ln \left[1 + \int_0^t P(x, t') dt' \right] \right\}. \quad (32)$$

La densidad de probabilidad de una partícula que se difunde libremente en un medio infinito se diluye cuando $t \rightarrow \infty$, es decir $P(x, t) \rightarrow 0$ para todo x , como en (15). A pesar de la complejidad de (32), se pueden buscar condiciones para la existencia de soluciones estacionarias espacialmente localizadas en el límite $t \rightarrow \infty$, es decir un patrón territorial permanente. Sustituyendo en el lado derecho de (32) $P(x, t)$ por una función de x , $P(x) \neq 0$, pero manteniendo en primera aproximación la dependencia temporal del lado izquierdo, se obtiene:

$$\frac{\partial P}{\partial t} \approx \tilde{D} \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad \text{con } \tilde{D} = \frac{1}{2} - \alpha p. \quad (33)$$

Si $\tilde{D} > 0$, las soluciones de (33) son difusivas, ver (32), y se contradice la suposición $P(x, t = \infty) = P(x) \neq 0$. Sin embargo, si $\tilde{D} < 0$, se observa un fenómeno inverso a la difusión⁷: típicamente la partícula se va concentrando en algún punto x_0 a un cierto tiempo, y para tiempos mayores $P(x) = \delta(x - x_0)$. Por lo tanto, fijando α , existe una frecuencia crítica de uso de la memoria $p_c = 1/(2\alpha)$ tal que si $p > p_c$ el caminante se convierte en sedentario en tiempos suficientemente grandes mientras se difunde si $p < p_c$.

⁶Si $\alpha < 0$, un caso no discutido aquí, los sitios nunca visitados antes son los más atractivos.

⁷Equivalente a mantener $\tilde{D} > 0$ e invertir el tiempo, $t \rightarrow -t$.

Esta transición es posible si $p_c < 1$, es decir si $\alpha > 1/2$. Estos resultados se confirman por simulaciones numéricas en dos dimensiones. Algo nuevo mostrado por las simulaciones es que el caminante parece restringir sus visitas a unos cuantos sitios y no a uno sólo [11]. En resumen, en este modelo una región limitada de presencia se auto-organiza dinámicamente debido a la interacción del caminante con su propia trayectoria, por arriba de un umbral crítico de memoria.

Exclusión y efectos de muchos cuerpos

Existen otros mecanismos relevantes para los organismos vivos que pueden causar difusión restringida. Con el propósito de tener un acceso exclusivo a ciertos recursos, muchos animales marcan los sitios que visitan con olores para excluir a otros individuos de la misma especie. Esta interacción repulsiva entre animales tiene conexiones con una clase de procesos muy estudiados en física estadística fuera de equilibrio: los procesos de exclusión. El modelo más sencillo de este tipo consiste en una línea uni-dimensional discreta donde N caminantes aleatorios se difunden sin poder ocupar un mismo sitio (ver figura 2, arriba). Cuando un caminante se encuentra en un sitio vecino de otro caminante, el único cambio permitido de t a $t + 1$ es retroceder en la dirección opuesta (o quedarse inmóvil si está bloqueado entre dos caminantes). En este sistema de muchas partículas en interacción⁸ los efectos de exclusión frenan de manera drástica la difusión individual. Contrariamente al caso una partícula libre, el desplazamiento cuadrático medio no crece linealmente con el tiempo como en (10) sino mucho más lentamente. La ley asintótica exacta fue derivada por Arratia [12]:

$$\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle \simeq \frac{1 - \rho}{\rho} \sqrt{\frac{2t}{\pi}}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (34)$$

donde $x(t)$ es la posición de algún caminante y ρ la densidad de caminantes (N dividido por el número de sitios). Este es un resultado notable porque indica que, debido a efectos colectivos, la distancia típica entre un caminante y su punto de origen, $l(t) = \sqrt{\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle}$, crece como $t^{1/4}$ en lugar de $t^{1/2}$ en la difusión normal. Este resultado se puede entender de manera cualitativa en altas densidades ($\rho \sim 1$), donde los caminantes son a menudo inmóviles. En este límite, las vacancias (sitios desocupados, en densidad $1 - \rho$) recorren caminatas aleatorias normales e independientes; dos vacancias se cruzan sin interactuar. Cada vez que una vacancia alcanza desde la izquierda a un caminante (inicialmente ubicado en el origen), éste puede dar un paso hacia la izquierda. En un tiempo t , las vacancias recorren típicamente una longitud $l_v \sim t^{1/2}$. Entonces, son $N_v \sim 2(1 - \rho)l_v$ vacancias que pueden alcanzar al caminante focal desde la izquierda o derecha en $[0, t]$. El desplazamiento $x(t) - x(0)$ del caminante se puede ver como una caminata aleatoria de N_v pasos independientes, $x(t) - x(0) \approx \sum_{i=1}^{N_v} \epsilon_i$, con $\epsilon_i = \pm 1$. De (14), deducimos $\langle [x(t) - x(0)]^2 \rangle \approx N_v \langle \epsilon_i^2 \rangle \sim (1 - \rho)t^{1/2}$, en acuerdo cualitativo con (34).

⁸O procesos de Markov interactuando en \mathbb{Z} .

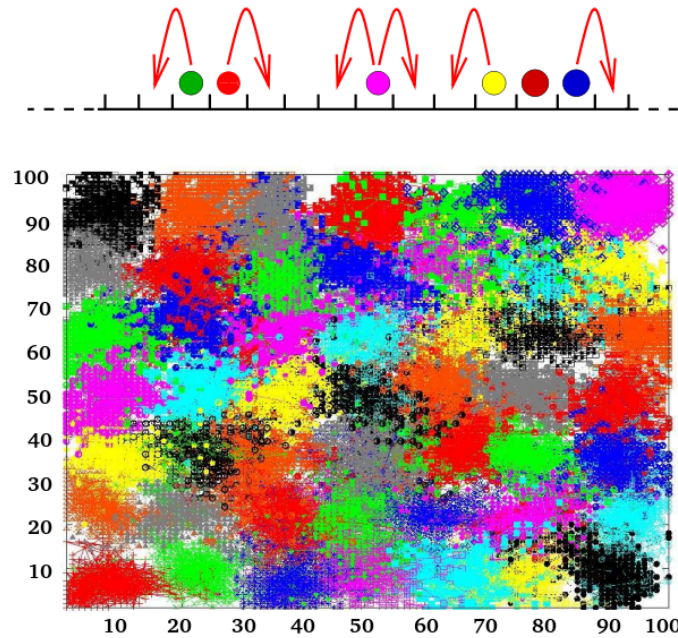


Figura 2: Arriba: Proceso de exclusión simétrica entre N caminantes en $1d$. Cada caminante puede saltar hacia uno de sus dos sitios más cercanos con igual probabilidad, siempre y cuando el sitio este desocupado. Abajo: Patrón territorial numérico formado por 49 caminantes con tendencia a excluirse (ver texto). Cada mancha de color ilustra el área ocupada por un caminante.

Sin embargo, se trata de un crecimiento algebraico con t , que sigue siendo mucho más rápido que una ley logarítmica como en (29). Se pueden considerar reglas de exclusión más severas y también más realistas. En una extensión de este modelo [13], cada caminante deposita en los sitios discretos que visita un olor que tarda un tiempo T_{AS} en desaparecer. Si un caminante llega a un sitio marcado, donde el olor de otro está todavía activo, éste retrocede. Entonces, las zonas de exclusión pueden ser grandes y no solamente limitadas a la posición actual de los animales. Si el parámetro T_{AS} es $\gg 1$, se forma un patrón espacial de olores activos (es decir, ámbitos hogareños) similares a los mostrados en la figura 2 (abajo) en un espacio bidimensional. En el caso más simple unidimensional, se muestra que, aunque este mecanismo no elimina por completo la difusión en tiempos muy largos, disminuye fuertemente su amplitud. Se muestra en [13] que las fronteras que separan ámbitos hogareños vecinos se difunden con la ley (34) modificada con un prefactor exponencialmente pequeño:

$$\langle [x_f(t) - x_f(0)]^2 \rangle \propto e^{-\frac{1}{2}\rho^2 T_{AS}} \sqrt{t}, \quad (35)$$

en donde x_f denota la posición de una frontera. Los dominios se vuelven casi estacionarios si T_{AB} es muy grande. Un efecto cualitativamente similar se observa en $2d$. Este

modelo con valores realistas de T_{AB} ha sido aplicado a la descripción de la distribución de zorros en el área urbana de Bristol, Reino Unido.

Biología y modelos basados en agentes

Los modelos expuestos desde el inicio de este capítulo generan trayectorias individuales (posición, tiempo) a partir de reglas dinámicas. Una ventaja de este enfoque es que las trayectorias se pueden simular y analizar de la misma manera que los datos reales, lo cual permite *a posteriori* evaluar la relevancia de las reglas propuestas. Este es el principio de los modelos basados en agentes. Debido a que el uso de las computadoras se está generalizando, en un futuro cercano la complejidad de las reglas a modelar se podrá incrementar prácticamente *ad libitum*, dependiendo del grado de realismo que se desee alcanzar en el estudio de un sistema específico o de los mecanismos de movimiento de interés. Aunque una solución matemática esté fuera de alcance, un modelo computacional puede ser valioso para identificar mecanismos biológicos en un patrón observado y/o para predecir algún fenómeno nuevo.

Una pregunta que no se planteó en las secciones anteriores es ¿por qué los organismos vivos hacen lo que hacen? Según la teoría de la evolución, si un animal tiene cierto comportamiento al recorrer su ambiente, es que este comportamiento ha evolucionado (por ejemplo con el desarrollo de ciertas capacidades cognitivas) para mejorar la adecuación del animal con su medio y su facultad para sobrevivir. Una limitación de los modelos presentados en las secciones anteriores es que en gran parte ignoran la existencia de un medio ambiente con el cual el animal interactúa. Tomemos el ejemplo de las *búsquedas aleatorias* [10, 14, 15]: consideremos un ambiente con puntos de alimentos distribuidos al azar y un animal que desconoce la ubicación de estos puntos. Supongamos que la alimentación es un factor limitante y que el animal adopta una estrategia que le permite encontrar más lugares de alimentos por unidad de tiempo comparado con lo que haría con otra estrategia (por ejemplo una caminata aleatoria simple), esta estrategia tendrá una ventaja evolutiva. Muchas teorías biológicas recientes (por ejemplo [16]) deberían ser comprobadas o invalidadas con datos de campo y modelos basados en agentes, hacerlo significa un gran reto. A continuación mencionaremos esfuerzos recientes en esta dirección.

¿Agruparse o andar solo?

Los mejillones, como muchos otros animales, se enfrentan a un dilema: si se agrupan densamente sobre rocas en el mar pueden resistir más fácilmente a factores externos adversos, como corrientes y depredadores, a los cuales un individuo aislado es más vulnerable. Sin embargo, en grupos deben competir por recursos limitados (alimentos), mientras que un mejillón sin vecinos cercanos tiene más recursos para él solo. La figura 3 ilustra un modelo basado en agentes propuesto recientemente en donde cada mejillón simplemente combina periodos de movimiento aleatorio con periodos de inmovilidad [17]. Se

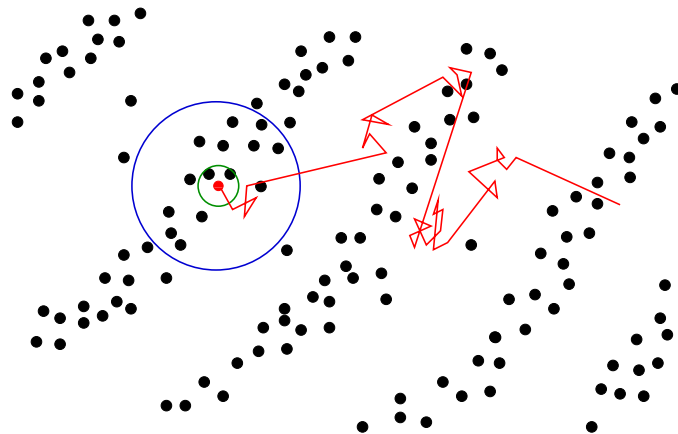


Figura 3: Cada agente de esta población, por ejemplo el señalado en rojo, decide en cada intervalo de tiempo dar un paso aleatorio o quedarse inmóvil. Se supone que la probabilidad de quedarse inmóvil crece cuando hay más vecinos a corta distancia (dentro del círculo pequeño) porque la agregación disminuye los riesgos de mortalidad. Pero si hay demasiados agentes a distancias mayores (dentro del círculo grande), aumenta la probabilidad de que el agente decida moverse para no competir por alimentos. Por estas dos reglas antagonistas, el sistema se auto-organiza rápidamente en bandas, parecidas a las observadas en colonias de mejillones en el mar. La velocidad a la cual se forma este patrón es máxima si los caminantes se mueven combinando pasos cortos con pasos largos menos frecuentes (caminatas de Lévy, como lo muestra la línea roja). Además, la adecuación media de los individuos es también máxima para este tipo de movimiento [17].

encontró que cierto tipo de caminatas aleatorias (llamadas de Lévy [14]), permiten *maximizar* la adecuación media (o probabilidad de sobrevivencia) de los mejillones. Además, esta estrategia óptima individual hace emerger por efectos de retroalimentación patrones colectivos de agrupación espacialmente *no-uniformes*. Estos patrones están caracterizados por la alternancia periódica de zonas pobladas y poco pobladas en forma de rayas. Finalmente, si se permiten mutaciones aleatorias en el comportamiento, cualquier estado sub-óptimo forzosamente evoluciona en el tiempo hacia el estado óptimo, siendo por lo tanto un punto atractor estable [17].

La importancia de este modelo es que ha sido capaz de explicar con un mismo mecanismo motivado biológicamente, la función de dos observaciones empíricas *a priori* sin conexión: los movimientos de Lévy de mejillones individuales, que han sido analizados cuidadosamente en el laboratorio, y sus patrones de agrupación en el mar en forma de rayas. Además, el modelo hizo la predicción de que esta especie tenía que haber evolucionado hacia un estado óptimo, detalle que no es nada trivial y raramente es considerado en estudios del movimiento animal.

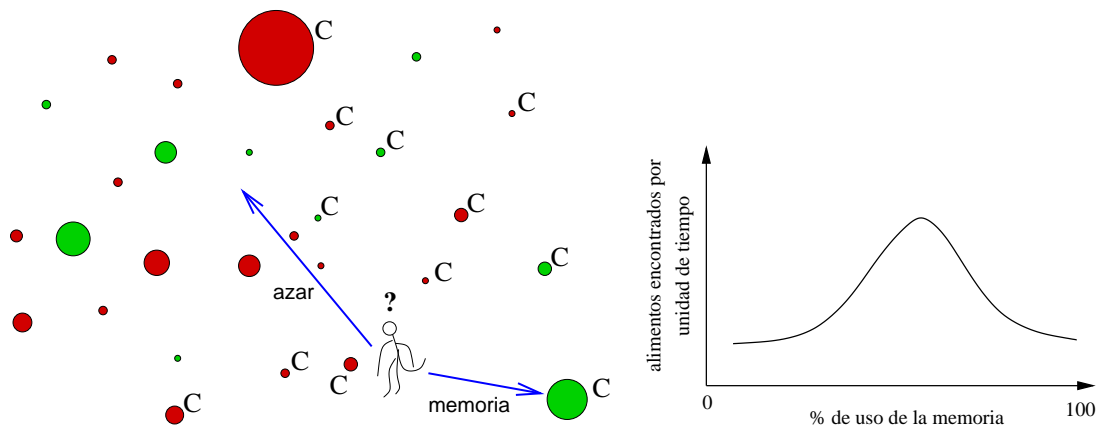


Figura 4: Izquierda: Un agente (mono) conoce ciertos árboles (marcados con una "C") por haberlos visitado en el pasado. Puede decidir usar este mapa mental para visitar un árbol conocido que esté fructificando (color verde), o bien dar un paso al azar, sin certeza de encontrar recursos pero con la posibilidad de incrementar su conocimiento del bosque. Si los árboles fructifican por poco tiempo y de manera estocástica, los recursos son efímeros y el medio es poco predecible. En tal caso, si el agente usa solamente su memoria, puede ser que muchos de los árboles que conoce ya no estén fructificando (de color café) y que ignore por falta de exploración árboles que ya están siendo productivos. Derecha: Existe un balance óptimo entre el uso del azar y de la memoria que permite maximizar la cantidad de alimentos ingeridos por unidad de tiempo. (Adaptado de [18]).

¿Usar su memoria o explorar al azar?

Ahora consideremos a un animal que se mueve solo en un ambiente con fuentes de alimentos (árboles con fruta), ver la figura 4. Supongamos, como se observa en muchas selvas, que los árboles no son todos del mismo tamaño: la mayoría son pequeños/poco productivos, pero existen unos cuantos árboles muy grandes/productivos, es decir la distribución espacial de los recursos es heterogénea. Además, aunque siempre hay frutos en el ambiente, un árbol no tiene frutos todo el año sino durante un periodo relativamente corto, que varía entre árboles. Cuando fructifica un árbol, produce cierta cantidad de fruta cada día. Después de un tiempo, los frutos no consumidos se caen y se pudren. Supongamos finalmente que el caminante tiene la capacidad de construirse *mapas mentales*: al moverse, recuerda las posiciones, tamaños y estados de fructificación de los árboles que visita. ¿Cuál es la mejor estrategia a seguir para maximizar la cantidad de frutos ingeridos por unidad de distancia recorrida?

Este es un problema muy complejo de optimización combinatoria (aún más difícil que el Problema del Agente Viajero). Para simplificar, podemos tratar de optimizar las siguientes reglas: a cada paso el caminante se pregunta: ¿Me muevo hacia una dirección al azar o voy hacia un árbol que conozco y que tiene frutos? Si siempre camina al azar, el animal

no saca provecho de su memoria: en lugar de dirigirse directamente a un buen árbol ya visitado, lo revisitaría solamente si lo encuentra otra vez por azar. Un resultado poco intuitivo es que tampoco un uso excesivo de la memoria es eficiente, porque en este caso el caminante se limita a una misma zona reducida, ignorando otras regiones con recursos disponibles [18]. Como se muestra en la figura 4 (derecha), la estrategia óptima combina tanto el azar como el uso de la memoria.⁹ Una dosis de exploración al azar es valiosa sobretudo cuando los recursos son efímeros, es decir cuando el caminante necesita actualizar constantemente sus conocimientos. También se demuestra que la memoria es de mayor utilidad en ambientes más heterogéneos espacialmente, lo cual sugiere que ecosistemas complejos pudieron haber propiciado el desarrollo de la memoria en los animales [18].

Debido al uso de mapas mentales, este modelo genera caminatas poco aleatorias y con un alto grado de determinismo. Además de formar un ámbito hogareño, las trayectorias son bastante *predecibles* o de baja entropía: el caminante visita frecuentemente secuencias de lugares en el mismo orden. Esta propiedad también caracteriza los trayectos humanos [19].

El tipo de estrategia descrita arriba, que consiste en combinar *explotación* de información disponible con *exploración* para adquirir información nueva, tiene aplicaciones para organismos muy sencillos en otros contextos. Consideremos una bacteria móvil buscando una fuente de alimento fija en un punto. Supongamos que esta fuente emite moléculas (“olores”) que se difunden en el medio y que representan índices que proporcionan información sobre la ubicación de la fuente cuando la bacteria encuentra estas moléculas. Si la fuente emite muy pocas moléculas por unidad de tiempo, la información disponible para la bacteria es muy escasa y desconectada espacialmente. En este caso, la bacteria no puede seguir los gradientes de concentración¹⁰ porque éstos son muy pequeños y fragmentados. Una estrategia adecuada para este caso llamada *infotaxis*, ha sido planteada recientemente [20]. A medida que encuentra moléculas, el caminante se va construyendo con el tiempo una idea sobre dónde puede estar la fuente de alimento. Esta información, a un tiempo t , está contenida en una densidad de probabilidad esperada $P(\mathbf{x}, t)$ de que la fuente esté en la posición \mathbf{x} . A esta distribución se le puede asociar una entropía de Shannon, $S = - \int d\mathbf{x} P(\mathbf{x}, t) \ln P(\mathbf{x}, t)$. Cuando más localizada es $P(\mathbf{x}, t)$, menos incertidumbre hay sobre la ubicación de la fuente y más baja es la entropía S . Cada vez que se mueve de un paso (exploración) y encuentre o no una molécula, el caminante usa un modelo de inferencia estadística para actualizar la densidad de probabilidad esperada (y por lo tanto S). La *infotaxis* consiste en moverse en la dirección hacia donde se maximiza la disminución de la entropía S , es decir, se maximiza la ganancia en información a partir de la información previa disponible (explotación). Esta estrategia permite al organismo tener tiempos de búsqueda bastante cortos, aún en ambientes escasos.

⁹Cualquiera puede haber experimentado este dilema a la hora de salir a comer y tener que elegir un restaurante.

¹⁰Tal estrategia es adecuada cuando las concentraciones son altas y se le conoce como *quimiotaxis*.

4. Conclusiones

En años recientes, el estudio del movimiento de organismos vivos ha permitido ampliar el marco de los procesos difusivos, mediante el planteamiento de nuevas preguntas teóricas y la introducción de nuevos modelos con propiedades físicas y matemáticas inéditas. Paralelamente, se están acumulando enormes cantidades de datos de movilidad, que hace unos años eran imposibles adquirir. No cabe duda que las tecnologías de rastreo empleadas en estudios de campo van a progresar aún más. Sin embargo, aún con estos datos, el proceso de validación de las teorías clásicas y modelos conocidos se está apenas iniciando. Solamente el análisis conjunto de modelos y datos permitirá determinar cuáles son los procesos generadores de movimiento y entender su origen. Los datos empíricos motivarán nuevos enfoques teóricos y estos últimos permitirán extraer más información cuantitativa de los datos. Una pregunta abierta importante, es si existen principios universales que gobiernen el movimiento de todos los organismos vivos, de bacterias a elefantes. Existen opiniones divergentes al respecto [7, 8, 16], pero esta pregunta tuvo el mérito a nutrir el crecimiento de una nueva rama de las ciencias naturales en la cual la Física puede aportar mucho: la Ecología del Movimiento [16].

Varias de las consideraciones expuestas se pueden aplicar a los Sistemas Complejos en general. Si bien es difícil predecir dónde estaremos en el futuro, podemos afirmar que la investigación en muchos temas ha cambiado significativamente durante las últimas dos décadas. Entre otros aspectos nuevos, existe ahora un mar de datos, muchos de los cuales están disponibles libremente en el Internet y a menudo los podemos encontrar sin haber sido nunca analizados por un científico. De alguna manera, esperan que alguien descifre los secretos que encierran. Entender matemáticamente un modelo puede ser muy satisfactorio y enriquecedor, sin embargo esto no significa necesariamente entender el mundo real. Por citar dos ejemplos entre muchos posibles, los estudios [17] y [21] son fuentes de inspiración y esperanza para futuras investigaciones.

Nota: Debido a la falta de espacio, muchos temas de interés actual y relacionados con la difusión no se pudieron abordar en este capítulo. Simplemente hemos mencionado brevemente los procesos de búsqueda aleatoria y su aplicación al forrajeo animal. Para más detalles sobre las búsquedas de Lévy, intermitentes o de reseteo se recomiendan las referencias [14], [10] y [15], respectivamente. Las búsquedas bayesianas se exponen en [22]. El estudio de los efectos de la movilidad de individuos sobre la propagación de enfermedades en humanos y animales es un tema de intensa investigación actual [23]. Modelos epidemiológicos basados en agentes móviles pueden ayudar a diseñar políticas de conservación de primates en parques de África [24]. En [21] se estudia con un enfoque similar, la lenta propagación de palabras nuevas en un país (Japón). Finalmente, el movimiento colectivo de animales en grupos se discute por F. Sevilla en este libro.

5. Referencias

- [1] S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy," *Reviews of modern physics*, vol. 15, no. 1, pp. 1–89, 1943.
- [2] P. Krapivsky, S. Redner, and E. Ben-Naim, *A kinetic view of statistical physics*. Cambridge University Press, 2010.
- [3] B. Hughes, M. Shlesinger, and E. Montroll, "Random walks with self-similar clusters," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 78, no. 6, pp. 3287–3291, 1981.
- [4] S. Redner, *A guide to first-passage processes*. Cambridge University Press, 2001.
- [5] B. Hughes, *Random Walks and Random Environments: Volume 1: Random Walks*. Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [6] P. Smouse, S. Focardi, P. Moorcroft, J. Kie, J. Forester, and J. Morales, "Stochastic modelling of animal movement," *Philosophical Transactions of the Royal Society B: Biological Sciences*, vol. 365, no. 1550, pp. 2201–2211, 2010.
- [7] D. Boyer, M. Crofoot, and P. Walsh, "Non-random walks in monkeys and humans," *Journal of The Royal Society Interface*, vol. 9, pp. 842–847, 2012.
- [8] C. Song, T. Koren, P. Wang, and A. Barabási, "Modelling the scaling properties of human mobility," *Nature Physics*, vol. 6, no. 10, pp. 818–823, 2010.
- [9] L. Börger, B. Dalziel, and J. Fryxell, "Are there general mechanisms of animal home range behaviour? a review and prospects for future research," *Ecology Letters*, vol. 11, pp. 637–650, 2008.
- [10] O. Bénichou, C. Loverdo, M. Moreau, and R. Voituriez, "Intermittent search strategies," *Rev. Mod. Phys.*, vol. 83, pp. 81–129, Mar 2011.
- [11] J. Choi, J. Sohn, K. Goh, and I. Kim, "Modeling the mobility with memory," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 99, no. 5, p. 50001, 2012.
- [12] R. Arratia, "The motion of a tagged particle in the simple symmetric exclusion system on \mathbb{Z}^1 ," *The Annals of Probability*, vol. 11, no. 2, pp. 362–373, 1983.
- [13] L. Giuggioli, J. Potts, and S. Harris, "Animal interactions and the emergence of territoriality," *PLoS Computational Biology*, vol. 7, no. 3, p. e1002008, 2011.
- [14] G. Viswanathan, E. Raposo, and M. Da Luz, "Lévy flights and superdiffusion in the context of biological encounters and random searches," *Physics of Life Reviews*, vol. 5, no. 3, pp. 133–150, 2008.

- [15] M. Evans and S. Majumdar, "Diffusion with stochastic resetting," *Physical Review Letters*, vol. 106, no. 16, p. 160601, 2011.
- [16] R. Nathan, W. Getz, E. Revilla, M. Holyoak, R. Kadmon, D. Saltz, and P. Smouse, "A movement ecology paradigm for unifying organismal movement research," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 105, no. 49, pp. 19 052–19 059, 2008.
- [17] M. de Jager, F. Weissing, P. Herman, B. Nolet, and J. van de Koppel, "Lévy walks evolve through interaction between movement and environmental complexity," *Science*, vol. 332, no. 6037, pp. 1551–1553, 2011.
- [18] D. Boyer and P. Walsh, "Modelling the mobility of living organisms in heterogeneous landscapes: does memory improve foraging success?" *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 368, no. 1933, pp. 5645–5659, 2010.
- [19] C. Song, Z. Qu, N. Blumm, and A. Barabási, "Limits of predictability in human mobility," *Science*, vol. 327, no. 5968, pp. 1018–1021, 2010.
- [20] M. Vergassola, E. Villermaux, and B. Shraiman, "Infotaxis as a strategy for searching without gradients," *Nature*, vol. 445, no. 7126, pp. 406–409, 2007.
- [21] L. Lizana, N. Mitarai, K. Sneppen, and H. Nakanishi, "Modeling the spatial dynamics of culture spreading in the presence of cultural strongholds," *Physical Review E*, vol. 83, no. 6, p. 066116, 2011.
- [22] A. Hein and S. McKinley, "Sensing and decision-making in random search," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 109, no. 30, pp. 12 070–12 074, 2012.
- [23] V. Belik, T. Geisel, and D. Brockmann, "Natural human mobility patterns and spatial spread of infectious diseases," *Physical Review X*, vol. 1, no. 1, p. 011001, 2011.
- [24] T. Bonnell, R. Sengupta, C. Chapman, and T. Goldberg, "An agent-based model of red colobus resources and disease dynamics implicates key resource sites as hot spots of disease transmission," *Ecological Modelling*, vol. 221, no. 20, pp. 2491–2500, 2010.

Movilidad y agentes

Francisco J. Sevilla, Instituto de Física, UNAM, México

Este capítulo es una breve introducción al estudio de la movilidad en sistemas de muchos individuos y de los fenómenos colectivos que aparecen cuando se considera interacción entre ellos. En la primera parte nos concentramos en describir ciertos aspectos de la movilidad y de su importancia en diversas áreas de la ciencia. También se presentan dos de los marcos teóricos más usados en el campo para describir agentes móviles y se orienta al lector interesado, a la bibliografía correspondiente que considera sus respectivas generalizaciones. En el intermedio se consideran los efectos debidos a la interacción entre agentes móviles y se presenta un modelo de agentes autopropulsados. En la última parte se mencionan algunas posibles direcciones de este campo de estudio desde una perspectiva general.

1. Introducción

El estudio de la movilidad en sistemas de muchas “partículas” ha tenido especial relevancia en muchas áreas de la ciencia y la industria. En física, por ejemplo, las propiedades de transporte de la materia son de gran interés en sistemas que van desde las escalas microscópicas hasta las escalas astronómicas [1]. En biología, la importancia de la “movilidad” de grupos de animales proporciona información valiosa de los mecanismos de supervivencia de muchas especies. Por ejemplo el forrajeo realizado por grupos de animales, es decir, el movimiento en manadas, parvadas, etc., cuyo propósito es buscar y consumir alimentos, es de gran interés en ecología. En sociología, el estudio de la movilidad humana es de interés para comprender aspectos globales que van desde el modelado de epidemias hasta la predicción del tráfico y planeación urbana [2].

La descripción del movimiento de las entidades móviles que conforman esta amplia variedad de sistemas se ha realizado usando diversos marcos teóricos que han servido de piedra angular a la física estadística y que han resultado de mucha utilidad en otras ramas de la ciencia. Así, dado que el interés es describir el movimiento de estas entidades, usaremos la palabra *agente* para referirnos a toda entidad capaz de exhibir movilidad. Por

lo que un agente puede representar a un pez en un cardumen, a una célula epitelial que se desplaza en la piel humana, etc.

Uno de estos marcos teóricos, ampliamente usado, es el de *caminata aleatoria* el cual es presentado con cierto detalle por D. Boyer en el capítulo *Procesos difusivos: de moléculas a animales* de este libro. En este marco conceptual, el movimiento no es descrito explícitamente en términos de trayectorias sino de probabilidades. A decir, la cantidad de interés es la probabilidad de que un agente móvil se encuentre localizado en un punto del espacio x al instante t . En general esta probabilidad cambia de punto a punto y de instante a instante a través de otra probabilidad, la de hacer una transición de un punto a otro al tiempo t , en general esta última probabilidad es conocida *a priori* [3, 4].

Un gran número de resultados se han obtenido en caminatas aleatorias. Uno que podemos considerar de interés en el contexto de este capítulo es el problema del territorio explorado por N caminantes aleatorios independientes, es decir, caminantes sin interacción entre ellos. Este problema fue estudiado exhaustivamente en la última década del siglo pasado con aplicaciones a diversas áreas del conocimiento, entre ellas: Física, química y particularmente en ecología [5–8]. Actualmente ha sido necesario hacer generalizaciones al marco conceptual de caminata aleatoria para considerar problemas más complejos tales como el análisis y optimización de estrategias de forrajeo, en la que los agentes exhiben un tipo de movimiento *correlacionado* [9–12] y términos como caminatas y vuelos de Lévy se han vuelto populares hoy en día [13].

Un marco teórico cercano al de las caminatas aleatorias corresponde a la *ecuación de Fokker-Planck-Kramers*. Este esquema conceptual tiene como base la teoría del *movimiento browniano*¹ formulada por Einstein y Smoluchowski y extendida posteriormente por Ornstein, Uhlenbeck y Kramers. Análogamente como ocurre en las caminatas aleatorias, en el caso más general el movimiento de un agente no es descrito por sus trayectorias, sino por una densidad de probabilidad $P(x, v, t)$ tal que $P(x, v, t)d^3x d^3v$ da la probabilidad de que la partícula se encuentre en una vecindad de volumen d^3x alrededor del punto x con valores de la velocidad en el elemento d^3v alrededor de v . Dicha densidad de probabilidad se encuentra al resolver la ecuación de Fokker-Planck-Kramers la cual es una ecuación diferencial parcial en t , x , y v [14], explícitamente en una dimensión:

$$\frac{\partial P(x, v, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v P(x, v, t) - \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{V}'(x) P(x, v, t) = \frac{\partial}{\partial v} \left[\frac{\gamma}{m} v + D_v \frac{\partial}{\partial v} \right] P(x, v, t), \quad (1)$$

donde m denota la masa de la partícula, $-\mathcal{V}'(x)$ la fuerza debida al potencial externo $\mathcal{V}(x)$

¹El movimiento browniano, llamado así en honor al botánico inglés Robert Brown, quien fue uno de los primeros científicos que realizaron experimentos para explorar el origen del movimiento irregular de una partícula macroscópica inmersa en un fluido (Brown observaba partículas de polen en agua). La diferencia entre la masa de la partícula y la masa de las moléculas del líquido es causa de una separación en las escalas de tiempo, es decir, la moléculas del líquido se mueven mucho más rápido que la partícula macroscópica razón por la cual los efectos sobre esta sólo se consideran de manera efectiva.

y γ y D_v constantes con unidades de [masa]/[tiempo] y [velocidad]²/[tiempo] respectivamente.

Otro marco teórico de la mecánica estadística de sistemas fuera de equilibrio que ha sido bastante influyente y que está basado en las trayectorias de movimiento de los agentes, fue presentado por Paul Langevin –físico de origen francés nacido en 1872– hace más de un siglo [15, 16]. Langevin sabía que el movimiento irregular de una partícula browniana tiene su origen en el incesante número de colisiones con las moléculas del fluido circundante y propuso que en un periodo de tiempo τ , suficientemente largo para considerar un número grande de estas colisiones pero también suficientemente corto comparado con el tiempo de observación, el efecto neto podía ser representado por una *fuerza aleatoria* dependiente del tiempo $\xi(t)$ actuando sobre la partícula browniana. Otro efecto importante que también tiene su origen en la interacción con el fluido circundante, corresponde al de una fuerza efectiva de arrastre, que en el caso más simple, se modela como una fuerza de fricción lineal en la velocidad de la partícula (fuerza de arrastre de Stokes) $-\gamma v$, con γ el mismo coeficiente que aparece en la ecuación (1).

La *ecuación de Langevin*, como ahora es llamada, describe de manera simple el movimiento browniano y está basada en las ecuaciones que determinan la trayectoria de la partícula, es decir, en la ecuaciones de movimiento de Newton

$$m \frac{d}{dt} \mathbf{V}_B = -\gamma \mathbf{V}_B + \xi(t), \quad (2)$$

donde $\mathbf{V}_B = d\mathbf{X}_B/dt$ es la velocidad de la partícula browniana y \mathbf{X}_B su posición.

La naturaleza de la fuerza fluctuante es difícil de conocer a partir del abrumador número de colisiones, sin embargo, bajo ciertas consideraciones físicas, se espera que la fuerza fluctuante satisfaga ciertas propiedades generales. En principio se puede argumentar que el efecto neto de las colisiones de la moléculas del fluido con la partícula browniana durante el lapso de tiempo τ , es la de ejercer una fuerza que en promedio se anula, es decir que $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Además se puede argumentar que debido al gran número de colisiones que se llevan a cabo durante el tiempo τ , en un instante dado t , el valor de esta fuerza es independiente del valor a cualquier otro instante s . Esta independencia estadística puede expresarse como $\langle \xi(t) \cdot \xi(s) \rangle \propto \delta(t - s)$, donde $\delta(x)$ denota la función delta de Dirac, la cual queda definida por la expresión

$$\int_a^b \delta(x - x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in [a, b] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (3)$$

con $b > a$. Si se considera la caracterización de la fuerza fluctuante hasta sus correlaciones de segundo orden $\langle \xi(t) \cdot \xi(s) \rangle \propto \delta(t - s)$, se puede demostrar que $\xi(t)$ corresponde a un *proceso estocástico gaussiano* [17]. Este término aleatorio es también conocido en la literatura como ruido térmico o simplemente ruido. En la figura 3 se muestra una posible trayectoria de una partícula browniana en dos dimensiones al integrar la ecuación (2) con *ruido gaussiano blanco*, es decir $\langle \xi(t) \cdot \xi(s) \rangle \propto \delta(t - s)$.

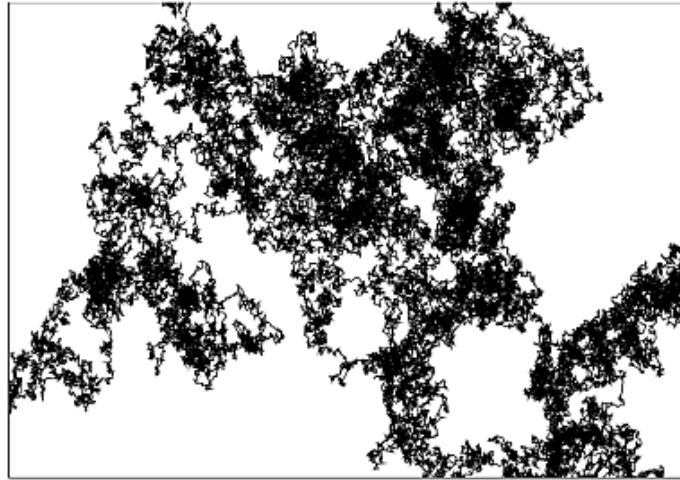


Figura 1: Trayectoria de una partícula browniana en dos dimensiones que resulta de resolver la ecuación (2).

Una propiedad más, que completa el esquema de la ecuación de Langevin se refiere a la naturaleza de las fuerzas aleatoria y disipativa. En el caso de la partícula browniana, si el fluido circundante está en equilibrio térmico caracterizado por la temperatura T , la fuerza disipativa y la fluctuante no son independientes entre sí, sino que se relacionan a través de una ecuación de balance, conocida como la relación *fluctuación-disipación* [18, 19], explícitamente en tres dimensiones $\langle \xi(t) \cdot \xi(s) \rangle = 6k_B T \gamma \delta(t - s)$. Dicha relación encierra un significado físico análogo al principio de *Le Châtelier* en termodinámica.

En muchas situaciones de interés la fuerza disipativa y la aleatoria pueden ser más complicados que lo expuesto aquí, lo que ha dado origen al estudio de generalizaciones de la ecuación de Langevin [20], que incluyen el caso en el que la relación fluctuación-disipación no se satisface. Se ha encontrado también que el ruido puede tener efectos importantes en sistemas fuera de equilibrio tales como ocasionar *transiciones de fase* [21, 22] o el fenómeno de resonancia estocástica [23, 24] por mencionar algunos. Incluso se ha ido más allá del caso de ecuaciones de movimiento con fuerzas aleatorias. Ciertamente, el formalismo de Langevin ha sido adaptado a situaciones con aplicaciones interdisciplinarias más generales [25], lo que ha impulsado el estudio del campo de las *ecuaciones diferenciales estocásticas*, en el que históricamente la ecuación de Langevin (2) es considerada la primera en su tipo.

2. Fenómenos colectivos: los efectos de interacción entre agentes

Hasta ahora sólo hemos mencionado que el movimiento de un agente puede ser descrito por una caminata aleatoria o un ecuación de Langevin, en algunos casos esta des-

cripción es suficiente, sin embargo en la mayoría de los sistemas de interés esto no es así. En estos se debe considerar la interacción entre agentes la cual da una riqueza enorme a la dinámica del sistema y desafortunadamente, también una enorme complicación en su descripción.

A muchos nos ha causado asombro las formas de movimiento coordinado o “sincronizado” que presentan ciertos grupos de aves y de peces, o de la formación de patrones que son exhibidos en grupos de muchos agentes. El asombro aumenta cuando se considera el gran número de individuos que los componen y a pesar de ello percibimos que se comportan como una sola entidad que pareciera obedecer principios básicos, aún cuando podríamos adjudicar un elemento de “libre elección” a cada individuo. Así lo aborda en una audaz metáfora Iain Couzin, un biólogo dedicado al estudio de estos sistemas, en su ensayo titulado “Collective Minds” [26], donde presenta el problema de como una interacción del tipo “social” afecta la manera en que los animales dentro de grupos altamente sincronizados adquieren y procesan información.

Desde un punto de vista puramente biológico, el cual tiende a considerar hasta los detalles más finos para encontrar los elementos subyacentes que dan origen al comportamiento grupal observado, se formulan preguntas sobre las ventajas evolutivas de la interacción social y por tanto sobre la ventaja evolutiva de determinados comportamientos colectivos [27]. En contraste, desde el punto de vista reduccionista de la física, el cual ha permitido avanzar en el entendimiento de la naturaleza, se formulan modelos simples de los sistemas bajo estudio para ser analizados y comparados con los resultados provenientes de la observación.

En física el interés en los fenómenos colectivos¹ no es nuevo y se cuenta con una lista amplia de sistemas que lo presentan en diversas situaciones, tanto en equilibrio termodinámico como alejados de este. El desarrollo en el entendimiento de la aparición de una dinámica colectiva en sistemas fuera de equilibrio se realizó principalmente en la década de los 70 [28] y uno de los sistemas mejor estudiados y entendidos fue el *laser*. Dos ejemplos más de sistemas que exhiben una dinámica colectiva fuera de equilibrio son mostrados en la figura 2 [29, 30].

Recientemente, los físicos han prestado atención al estudio de la aparición de patrones y/o formas de movimiento grupal en sistemas un tanto alejados de los habituales en física. La diversidad de estos sistemas es tan amplia (formación de patrones en el movimiento de células epiteliales, el movimiento grupal de muchas bacterias, insectos, aves, peces, etc., ver figura 3) que también hay un gran número de biólogos, ingenieros, matemáticos, sociólogos que junto con físicos, reúnen sus esfuerzos para entender los principios que subyacen y dan origen a estos fenómenos colectivos más generales. Por ejemplo, en la referencia [31] los autores presentan un modelo de caminantes aleatorios para describir las

¹De manera simple, se dice que un fenómeno es colectivo cuando el sistema exhibe un comportamiento *global* (correlaciones de largo alcance) que surge como consecuencia de la interacción local entre los elementos que conforman al sistema. Este comportamiento surge como efecto de muchos cuerpos y es distinto al comportamiento de un solo elemento del sistema.

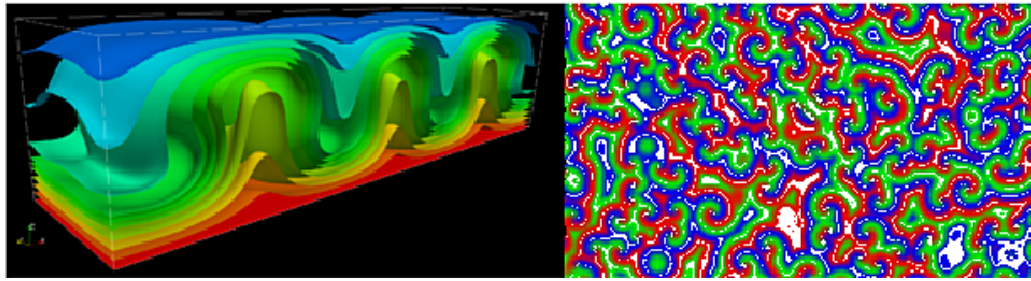


Figura 2: Izquierda, rollos de convección que aparecen al pasar un valor umbral del gradiente de temperaturas entre dos placas paralelas que confinan un líquido (imagen generada en computadora). Derecha, patrones dinámicos (oscilaciones químicas) que se observan a escalas macroscópicas en la reacción química de Belousov-Zhabotinski [29, 30] (imagen generada en computadora).

contracciones musculares a través de la interacción de motores actina-miocina, presentes en los músculos y que realizan trabajo mecánico teniendo como fuente de energía trifosfato de adenosina. Otro sistema biológico de interés corresponde al enjambre de bacterias que presentan estructuras organizadas y que se mueven de una manera altamente coordinada, sin duda la interacción entre bacterias cercanas entre sí juega un papel fundamental.

Durante las últimas dos décadas la física estadística ha contribuido en el estudio de la emergencia espontánea de un comportamiento altamente organizado en fenómenos sociales como el esparcimiento de rumores, los sistemas de transporte en las ciudades, la “World Wide Web”, la red de colaboraciones científicas, etc. [32]. Un ejemplo importante es el modelo de Axelrod [33] el cual engloba las características esenciales en la diseminación de la cultura. El modelo de Axelrod muestra como a partir de interacciones locales entre individuos que intercambian rasgos culturales, se observa la emergencia de “sociedades” distintas en una escala global. Aunque la motivación de este modelo se da en un contexto puramente social, el mismo modelo puede interpretarse como una generalización al modelo de Potts del ferromagnetismo [34]. Es así como la física ha hecho contacto con varias ramas del conocimiento.

Así, la idea que las interacciones locales entre las entidades que forman un sistema pueden llevar a un comportamiento colectivo global se ha transmitido a muchas ramas de la ciencia. En el lado de las humanidades, los expertos en ciencias cognitivas tienden a concentrarse en el comportamiento de un individuo *per se*, sin embargo es debido a la interacción de este con otros individuos que emergen estructuras complejas en un nivel jerárquico superior como son las ciudades, los grupos socioeconómicos, etc. Son bien sabidas por ejemplo, las estructuras coloniales que emergen en grupos de hormigas y no es clara la idea que dicha información pudiera estar presente en una sola de ellas.

Después de esta breve reflexión sobre la importancia de las interacciones para la emergencia de fenómenos colectivos, presentamos en la siguiente sección una introducción a una clase particular de estos sistemas, aquellos compuestos de agentes autopropulsados.



Figura 3: Imágenes de izquierda a derecha y de arriba a bajo. Estructuras que se forman en el movimiento colectivo de bacterias. Portada de la revista *Nature* donde se muestra el estado de movimiento colectivo en un banco de peces. Centenares de estorninos que despliegan un espectáculo aéreo exhibiendo un comportamiento colectivo. Grupo de personas moviéndose colectivamente en La Meca, centro religioso musulmán. Estructura de tipo vórtice observado en algunos cardúmenes de peces. Finalmente, una manada de mamíferos donde se observa una dirección preferencial de movimiento a pesar de que en principio, cada individuo puede moverse en una dirección arbitraria.

3. Sistemas de agentes brownianos autopropulsados

Para estudiar sistemas más generales a partir de los principios y métodos de la Física y describir situaciones más allá de sus tradicionales dominios de investigación, el practicante de esta disciplina debe tener claro cuales son sus alcances y limitaciones, por ejemplo, podemos preguntarnos sobre la posibilidad de formular una teoría que describa el movimiento colectivo de una parvada de cientos de miles de estorninos (*sturnus vulgaris*) que exhiben un espectáculo aéreo asombroso o estudiar las complejas conexiones que se establecen en las redes de telefonía celular. En principio, uno podría considerar con cierta renuencia el hecho de intentar describir el comportamiento colectivo que exhiben las parvadas de aves o bancos de peces como si fueran simples moléculas o espines de un sólido, los cuales sabemos también exhiben dinámicas colectivas, sin embargo, como se ha mostrado en la literatura, la colaboración entre varias disciplinas hacen que esta renuencia pueda ser disipada al extender algunos conceptos bien establecidos en física [35]

a los territorios de las demás ciencias.

Primero, no hay duda que el tipo de interacción entre las partículas con los que lidia la física debe ser de naturaleza diferente al tipo de interacción entre los agentes de un sistema más general, por ejemplo, al tipo de interacción entre los individuos de un cardumen. Mientras algunos principios de conservación deben satisfacerse en sistemas físicos, como el de conservación del momento cuando colisionan un par de partículas, esto no resulta tan obvio cuando un par de aves se alinean una con la otra al moverse dentro de una parvada. Ciertamente muchos de los resultados de la mecánica clásica están basados en la descripción hamiltoniana de esta. Lo que implica la consideración de fuerzas conservativas. Una diferencia importante de los sistemas que queremos describir aquí está relacionada con fuerzas que no pueden derivarse de una función de potencial y por tanto una formulación hamiltoniana no es posible

¿Cuáles son entonces los métodos que podrían emplearse para describir estos sistemas? En general no hay preferencia de uno de estos sobre los otros, excepto por la complejidad de la formulación de un problema en particular. En los casos donde el aspecto discreto de los elementos que componen el sistema no es importante la descripción de un continuo de materia es apropiada, esta es la manera *Euleriana* de abordar el problema, donde se establecen ecuaciones que describen la evolución temporal de una densidad de elementos en el sistema (densidad de aves por ejemplo) a través de los flujos causados por las fuerzas involucradas en el sistema, justo como sucede en *hidrodinámica* razón por la cual esta formulación también recibe este nombre. Este enfoque ha sido usado ampliamente en la literatura y resultados tanto de carácter general como particular han sido obtenidos [36–39].

En la manera *Lagrangiana* de abordar la descripción de estos sistemas, la atención es puesta en las trayectorias de los individuos que los conforman, las cuales son determinadas tanto por la interacción entre ellos como por fuerzas externas. La ecuación de Langevin discutida en la sección anterior y los llamados *autómatas celulares* caben perfectamente en esta formulación. En muchas ocasiones la interacción entre agentes se establece a través de *reglas*, las cuales deben considerar de manera mínima y simple el comportamiento entre agentes. Con los avances en la tecnología para la solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, este método se ha convertido en el preferido por los especialistas para estudiar sistemas de muchas partículas bajo reglas de interacción social, como en el estudio del flujo vehicular en ciudades de México [40].

Autopropulsión

Una marcada diferencia entre las partículas convencionales, a las que los físicos estamos acostumbrado a describir, y las “partículas” en los sistemas biológicos (células, bacterias, hormigas, aves, peces, etc.), es que estas últimas tienen la capacidad de moverse por sí mismas, es decir, pueden extraer energía de sus alrededores y usarla con propósitos de locomoción [41]. Es precisamente esta idea la que introdujeron Ebeling y colaborado-

res [42] para describir estas partículas autopropulsadas también conocidas como *partículas brownianas activas* [43].

En principio, esta característica de autopropulsión puede considerarse como una situación de movimiento alejada del equilibrio térmico, pues considera el flujo de energía del medio a la partícula, la cual esta usa activamente para autopropulsarse. En contraste, el movimiento browniano convencional puede ser considerado como pasivo pues dicho movimiento es consecuencia del gran número de impactos que las moléculas del fluido ejercen sobre la partícula. Si el fluido está en equilibrio térmico, la distribución de velocidades de la partícula browniana a tiempos largos, es decir, mayores que τ , corresponde a la distribución de velocidades de Maxwell. Es en esta diferencia donde nace la idea de agentes brownianos, los cuales generalizan el concepto de partícula browniana introducido por Langevin¹.

La ecuación de Langevin correspondiente para el caso de partículas autopropulsadas puede escribirse de manera genérica como:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{V} = -\gamma(\mathbf{V})\mathbf{V} + \boldsymbol{\xi}(t), \quad (4)$$

donde ahora $\gamma(\mathbf{V})$ es una función real de la velocidad \mathbf{V} y denota un coeficiente de fricción que hace de término disipativo no-lineal, el cual puede ser negativo para ciertos valores de \mathbf{V} . Un caso ampliamente estudiado corresponde a $\gamma(\mathbf{V}) = \gamma_0 (\mathbf{V}^2 - V_0^2)$, con γ_0, V_0 dos constantes positivas. Es claro que para valores de \mathbf{V} tales que $|\mathbf{V}| > V_0$ el término de fricción no-lineal actúa como tal, pero en el caso contrario $|\mathbf{V}| < V_0$, $\gamma(\mathbf{V})$ se vuelve negativa, lo cual se interpreta como un periodo en el que se transfiere energía de los alrededores hacia la partícula acelerándola. En el caso determinista, es decir $\boldsymbol{\xi} = 0$, uno puede mostrar fácilmente que la solución estacionaria corresponde al caso en que la partícula se mueve con rapidez V_0 . En este ejemplo, la autopropulsión puede entenderse como la tendencia de las partículas a moverse con una rapidez característica. El modelo más simple de autopropulsión es considerar que los agentes se mueven con rapidez constante [45].

Transiciones de fase en un sistema de partículas autopropulsadas.

Un importante artículo de física donde partículas autopropulsadas son consideradas, apareció en el año 1995 en la revista *Physical Review Letters* [45], en este, los autores describen una transición de fase novedosa en un sistema de partículas autopropulsadas en interacción. El sistema consiste de un número N de partículas que se mueven con rapidez constante (de aquí la autopropulsión) en una caja bidimensional de lado L , con condiciones a la frontera del tipo periódico y bajo la acción de una interacción entre agentes del

¹La inclusión de un término de autopropulsión es sólo una manera de extender el concepto de partícula browniana. Otra manera de hacerlo es distinguir entre procesos estocásticos "internos", asociados a los procesos internos de los agentes de los procesos estocásticos externos [44] los que serían equivalentes al ruido generado por el sinnúmero de colisiones de las moléculas del líquido sobre la partícula browniana.

tipo “social”. La interacción es debida a la tendencia de los agentes a moverse en la misma dirección. Así, estos adquieren la dirección promedio de movimiento de los agentes más cercanos en un radio de interacción determinado, $\Omega(R)$. Si los agentes estuvieran fijos en una red cuadrada y la dirección de movimiento fuera sustituida por otro grado de libertad caracterizado por una dirección en el plano (el espín, por ejemplo), el modelo correspondiente sería el modelo XY del ferromagnetismo [46]. La novedad de la transición de fase en el ahora llamado modelo de Vicsek, radica en la existencia de una fase con orden de largo alcance, es decir, un orden que se difunde en todo el sistema. En este estado todas las partículas se mueven en promedio en la misma dirección. Este tipo de orden no es posible en el modelo XY en dos dimensiones, esto ha sido demostrado en un famoso teorema ahora llamado teorema de Mermin-Wagner-Hohenberg [47, 48] el cual establece que no es posible que un sistema exhiba un fase con orden de largo alcance, en dos o menores dimensiones, si la interacción entre partículas es de corto alcance.

Siendo más explícitos, a continuación se dan los detalles de la dinámica en el modelo de Vicsek. La posición x_i y velocidad v_i del i -ésimo agente están determinadas por las siguientes reglas de actualización:

$$x_i(n+1) = x_i(n) + v_i(n)\Delta t \quad (5)$$

$$\theta_i(n+1) = \langle \theta_i(n) \rangle_{\Omega(R)} + \Delta\theta \quad (6)$$

donde $v_i = v_0 \theta_i$, y θ_i da la dirección de movimiento del i -ésimo agente y $\langle \theta_i(n) \rangle_{\Omega(R)}$ denota la interacción social del i -ésimo agente con aquellos que están en su vecindad $\Omega(R)$. Las fluctuaciones en la dirección de movimiento debidas a los errores que comete la partícula al alinearse con sus vecinos son introducidas a través de un ángulo aleatorio $\Delta\theta$ el cual es tomado de una distribución uniforme en el intervalo $[-\eta\pi, \eta\pi]$ con η en $[0, 1]$, es decir, la probabilidad de elegir un ángulo ϕ en un intervalo $\phi + \Delta\phi$ es simplemente $\Delta\phi/2\eta$.

Después de un tiempo transitorio el sistema llega a un estado estacionario el cual depende únicamente de la densidad de partículas en el sistema, del radio de interacción R y de η . Cuando la densidad y el radio de interacción están fijos, los estados estacionarios transitan de una fase desordenada caracterizada por un parámetro de orden Λ , cuyo valor es muy pequeño a otro donde es marcadamente distinto de cero (ver figura 4). Λ es simplemente la rapidez promedio, normalizada a 1, de todo el grupo $\Lambda = (1/Nv_0) \langle \sum_{i=1}^N v_i \rangle$.

El valor de η crítico para el cual se observa la transición entre ambos estados se le conoce punto crítico y se dice que el sistema sufre una *transición de fase*.

Este trabajo pionero ha sido estudiado con más detalle en la última década y del cual se siguen descubriendo muchos efectos novedosos, como lo es la formación de grupos pequeños (segregación), los cuales se forman de manera intermitente a tiempos que pueden caracterizarse de manera precisa [49].

Además de tener la posibilidad de que un sistema pueda desarrollar una fase donde las entidades cooperen para alcanzar un estado coherente, también es de interés la posibi-

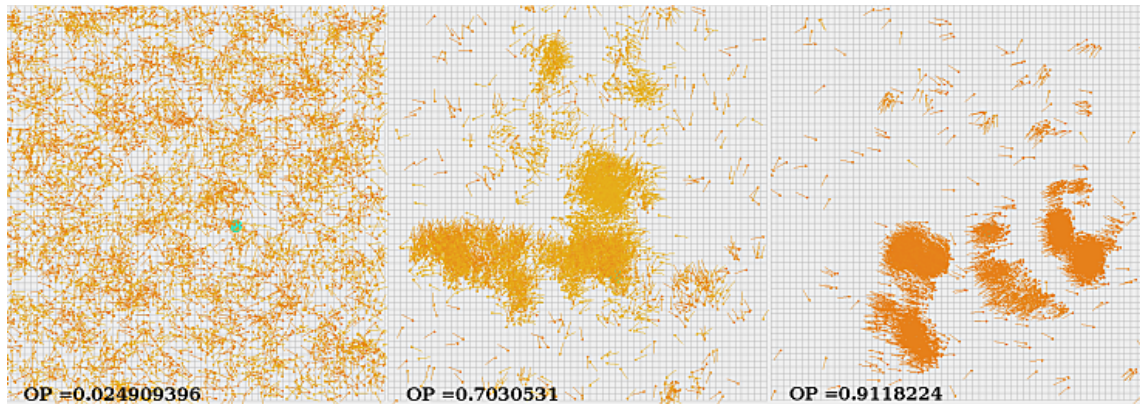


Figura 4: Tres imágenes instantáneas de un sistema de 5000 agentes en una caja de tamaño fijo L y radio de interacción $R = 0.017L$ en las que se muestra el valor instantáneo del parámetro de orden denotado con OP. La imagen de la izquierda corresponde a $\eta = 0.9$ (caso de desorden), la del medio a $\eta = 0.5$ (caso de orden) y la de la derecha a $\eta = 0.1$ (caso de orden).

lidad de explorar la formación de patrones que pueden originarse en estos sistemas [50]. Un ejemplo son la formación de estructuras de tipo vórtice que son observadas en sistemas de peces y aves. Diferentes mecanismos pueden dar origen a dichas estructuras. Uno de ellos es combinar los efectos de una fuerza “social” de alineamiento con los efectos de autopropulsión y de fuerzas atractivas y repulsivas. El trabajo de Levine y colaboradores [51] muestra que con estos ingredientes se pueden obtener estructuras tipo vórtices en un sistema bidimensional de agentes autopropulsados (sin ruido). Un aspecto importante que falta por entender es la estabilidad de las estructuras observadas ante perturbaciones. En la figura 5 se muestran dos sistemas donde se observan vórtices (colonia de hormigas a la izquierda, banco de peces a la derecha) y se compara con el vórtice obtenido por Levine y colaboradores (centro).

En esta misma línea de investigación el modelo de Ebeling y Erdmann [42], el cual usa como autopropulsión el modelo de fricción no-lineal expuesta en líneas anteriores, ha sido estudiado con la adición que las partículas influyen entre sí a través de fuerzas de tipo de oscilador armónico. En ese estudio, fuerzas de tipo “social” no son consideradas, sin embargo el sistema exhibe dos estados colectivos y estacionarios muy distintos, uno es caracterizado por un estado “coherente” en el que el grupo se desplaza en una única dirección de movimiento; el otro estado presenta un movimiento desorganizado de tipo enjambre [53]. La transición de un estado a otro está determinado tanto por la intensidad de las fuerzas aleatorias que actúan sobre los agentes así como de las condiciones iniciales del sistema. El valor umbral se encuentra a través del monitoreo de un parámetro de orden, como en el caso de Vicsek, la rapidez promedio del grupo. En el estado de enjambre, el parámetro de orden vale cero mientras que tiene un valor distinto a cero en el estado



Figura 5: Tres imágenes que muestran estructuras de tipo vórtice en: una colonia de hormigas (izquierda, adaptado de [52]), el modelo de Levine *et al.* (centro, adaptado de [51]), en un banco de peces (derecha, adaptado de [52]).

de movimiento “coherente”.

Existe una gran cantidad de estudios y modelos referentes a fenómenos colectivos de partículas autopropulsadas y resulta difícil exponerla en detalle o referirse a ella exhaustivamente, sólo expusimos brevemente algunos de los modelos teóricos, que en opinión del autor son emblemáticos, de este interesante campo de investigación. El lector interesado puede encontrar más información en los recientes artículos de revisión [54, 55].

4. Direcciones futuras

A pesar de los grandes avances que se han realizado en el contexto de movilidad y agentes, aún queda mucho por aprender. Por ejemplo, aún no es clara la razón por la que el modelo de Vicsek y similares tienen la posibilidad de presentar un fase con orden de largo alcance en dos dimensiones con interacción de corto alcance. En un principio, se creyó que la autopropulsión era el elemento fundamental para que el sistema escapara del alcance del teorema de Mermin-Wagner-Hohenberg, pues este último es válido, en principio, para sistemas en equilibrio termodinámico, sin embargo, como se presenta en la referencia [56], autopropulsión no es un requerimiento para alcanzar un estado de cooperación. En esta dirección se plantean problemas importantes en el contexto de la física de sistemas lejos de equilibrio. Aunque esta afirmación no es nueva, si lo es el hecho que sistemas no-físicos nos indiquen una ruta alternativa para ello.

Actualmente se comienzan a abordar preguntas muy parecidas a las que se formulan en biología usando las herramientas de la física estadística de sistemas fuera de equilibrio. Por ejemplo, en la referencia [57] se plantea la posibilidad de explicar como una muchedumbre de aves se comporta como un sola entidad. Los autores argumentan que dicho efecto es consecuencia de la acción conjunta de colapsos de organización (por instantes el

estado de movimiento coherente se ve disminuido debido a la segregación del sistema) y de la facilidad con la que se transmite la información muy cerca del punto de crítico de la transición.

Por otra parte los aspectos que hasta ahora han sido estudiados en los sistemas de muchos agentes brownianos que consideran interacción entre ellos, han sido analizados bajo una actitud reduccionista. En algunos estudios sólo se inquiera el efecto combinado de interacción social y ruido, en otros, los efectos del mecanismo de autopropulsión con fuerzas de tipo intermoleculares soslayando la importancia de la interacción social. Esta manera de proceder ha permitido explorar y entender los ingredientes esenciales de algunos aspectos que exhiben los sistemas reales, pero aún se está lejos de entenderlos de una manera holística. Si bien en algunos casos se puede controlar experimentalmente algunos efectos que no son de interés, y así confrontar nuestras ideas planteadas en los modelos teóricos, en otros, esta opción es casi imposible de alcanzar. De cualquier modo, es esencial contar con un análisis experimental que permita la extracción de información de la interacción entre agentes y mejorar las reglas de interacción social [58]. La gente está muy interesada en tal situación y es perceptible la tendencia hacia esta visión holística que nos permitirá establecer y mejorar nuestros modelos teóricos para representar de manera más fiel la realidad.

Aún se requiere de mucha investigación para que nuestros modelos puedan describir muchos de los procesos biológicos, químicos, físicos y sociales que observamos en la naturaleza, los cuales son dinámicos, evolutivos, y que no permanecen en estados estacionarios, donde el tiempo no juega más un papel esencial. El considerar que conocer dichos estados estacionarios es el último fin, equivale a la visión Boltzmanniana sobre el destino del universo, el que se consideraba llegaría al equilibrio termodinámico, a un estado donde todo indicio de evolución se ve desvanecido [29]. En consideración a esto, en [59] se presenta un modelo de agentes brownianos en el que se exhibe una región en el espacio de parámetros (tiempo de correlación de la fuerza aleatoria y su intensidad) en donde el sistema transita dinámicamente entre dos soluciones estables distintas, uno donde el grupo se mueve de manera "coherente," el otro donde el grupo se mueve desorganizadamente en un estado de enjambre. En contraste con otros estudios, dicho modelo muestra esta característica dinámica, relevante, de algunos sistemas que observamos en la naturaleza, los cuales transitan entre varios estados de comportamiento colectivo.

Como último comentario quiero decir que los sistemas presentados en este capítulo son de interés para varias ramas de la ciencia las cuales a través de colaboración entre ellas, contribuyen al objetivo general de esta, el cual según Alfred North Whitehead, consiste en la construcción de un marco teórico, coherente y lógico, donde los conceptos generales pueden ser interpretados a través de los elementos de nuestra experiencia. En un futuro no muy lejano quizá, dicho objetivo podría alcanzarse.

5. Referencias

- [1] S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy," *Reviews of modern physics*, vol. 15, no. 1, pp. 1–89, 1943.
- [2] C. Song, T. Koren, P. Wang, and A. L. Barabási, "Modelling the scaling properties of human mobility," *Nature Physics*, vol. 6, no. 10, pp. 818–823, 2010.
- [3] F. Spitzer, *Principles of random walk*. Springer Verlag, 2001, vol. 34.
- [4] B. D. Hughes, *Random Walks and Random Environments: Volume 1: Random Environments*. Oxford University Press, USA, 1996.
- [5] H. Larralde, P. Trunfio, S. Havlin, H. E. Stanley, and G. H. Weiss, "Territory covered by N diffusing particles," *Nature*, vol. 355, pp. 423–426, 1992.
- [6] ———, "Number of distinct sites visited by N random walkers particles," *Physical Review A*, vol. 45, no. 10, pp. 7128–7138, 1992.
- [7] G. M. Sastry and N. Agmon, "The span of one-dimensional multiparticle Brownian motion," *Journal Chemical Physics*, vol. 104, no. 8, pp. 3022–3025, 1996.
- [8] S. B. Yuste and L. Acedo, "Territory covered by N random walkers," *Physical Review E*, vol. 60, no. 4, pp. R3459–R3462, 1999.
- [9] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Havlin, E. P. Raposo, M. G. E. da Luz, and H. E. Stanley, "Optimizing the success of random searches," *Nature*, vol. 401, pp. 911–914, 1999.
- [10] G. M. Viswanathan, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley, *The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters*. Cambridge University Press, 2011.
- [11] F. Bartumeus, M. da Luz, G. Viswanathan, and J. Catalan, "Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis," *Ecology*, vol. 86, no. 11, pp. 3078–3087, 2005.
- [12] L. Giuggioli, F. J. Sevilla, and V. M. Kenkre, "A generalized master equation approach to modelling anomalous transport in animal movement," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 43, p. 434004, 2009.
- [13] M. F. Schlessinger, G. M. Zaslavsky, and F. (Eds.), *Lévy Flights and Related Topics in Physics*. Springer, Berlin, 1995.
- [14] H. Risken, *The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications*. Springer Verlag, 1996, vol. 18.

- [15] P. Langevin, "On the Theory of Brownian Motion," *C.R. Seances Acad. Sci. (Paris)*, vol. 146, pp. 530–533, 1908.
- [16] D. S. Lemons and A. Gythiel, "Paul Langevin's 1908 paper On the Theory of Brownian Motion," *American Journal of Physics*, vol. 65, no. 11, p. 1079, 1997.
- [17] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods*, 2nd ed. Springer-Verlag, 1985.
- [18] R. Kubo, "The fluctuation-dissipation theorem," *Reports on Progress in Physics*, vol. 29, no. 1, p. 255, 2002.
- [19] K. Kawasaki, "Simple derivations of generalized linear and nonlinear langevin equations," *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, vol. 6, no. 9, p. 1289, 2001.
- [20] E. Lutz, "Fractional langevin equation," *Physical Review E*, vol. 64, no. 5, p. 051106, 2001.
- [21] C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, and R. Toral, "Noise-induced nonequilibrium phase transition," *Physical review letters*, vol. 73, no. 25, pp. 3395–3398, 1994.
- [22] C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, R. Toral, and R. Kawai, "Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise," *Physical Review E*, vol. 55, no. 4, p. 4084, 1997.
- [23] K. Wiesenfeld, F. Moss *et al.*, "Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and squids," *Nature*, vol. 373, no. 6509, pp. 33–36, 1995.
- [24] B. McNamara and K. Wiesenfeld, "Theory of stochastic resonance," *Physical review A*, vol. 39, no. 9, p. 4854, 1989.
- [25] M. Schienbein and H. Gruler, "Langevin equation, Fokker-Planck equation and cell migration," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 55, no. 3, pp. 585–608, 1993.
- [26] I. Couzin, "Collective Minds," *Nature*, vol. 445, p. 715, 2007.
- [27] J. K. Parrish and L. Edelstein-Keshet, "Complexity, Pattern, and Evolutionary Trade-Offs in Animal Aggregation," *Science*, vol. 284, no. 2–April, pp. 99–101, 1999.
- [28] H. Haken, "Cooperative phenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems," *Reviews of Modern Physics*, vol. 47, no. 1, pp. 68–119, 1975.
- [29] I. Stengers and I. Prigogine, *Order out of chaos*. Bantam Books Inc, 1984.
- [30] P. Glansdorff and I. Prigogine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Wiley, New York, 1971.

- [31] F. Jülicher and J. Prost, "Cooperative Molecular Motors," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 13, pp. 2618–2621, 1995.
- [32] S. Fortunato, C. Castellano, and V. Loreto, "Statistical physics of social dynamics," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, pp. 591–646, 2009.
- [33] R. Axelrod, "The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization," *Journal of Conflict Resolution*, vol. 41, pp. 203–226, 1997.
- [34] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel, "Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction," *Physical Review E*, vol. 67, no. 2, p. 026120, 2003.
- [35] G. Flierl, D. Grünbaum, S. Levin, and D. Olson, "From Individuals to Aggregations: the Interplay between Behavior and Physics," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 196, pp. 397–454, 1999.
- [36] J. Toner and Y. Tu, "Long-Range Order in a Two-Dimensional Dynamical XY Model: How Birds Fly Together," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 23, pp. 4326–4329, 1995.
- [37] —, "Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking," *Physical Review E*, vol. 58, no. 4, pp. 4828–4858, 1998.
- [38] C. M. Topaz and A. L. Bertozzi, "Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 65, no. 1, pp. 152–174, 2004.
- [39] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, "Hydrodynamic equations for self-propelled particles: microscopic derivation and stability analysis," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 1, p. 445001, 2009.
- [40] M. Krbalek¹ and P. Seba, "Headway statistics of public transport in Mexican cities," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 1, pp. L7–L11, 2003.
- [41] F. Schweitzer, W. Ebeling, and B. Tilch, "Complex Motion of Brownian Particles with Energy Depots," *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 23, pp. 5044–5047, 1998.
- [42] U. Erdmann, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and F. Schweitzer, "Brownian particles far from equilibrium," *The European Physical Journal B*, vol. 15, pp. 105–113, 2000.
- [43] F. Schweitzer, *Brownian agents and active particles: collective dynamics in the natural and social sciences*. Springer, 2007.
- [44] R. Groffmann, L. Schimansky-Geier, and P. Romanczuk, "Active Brownian particles with velocity-alignment and active fluctuations," *arXiv:1204.4304v1*, 2012.

- [45] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, "Novel type of phase transition in a system of self-driven particles," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 6, pp. 1226–1229, 1995.
- [46] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems," *Journal of Physics C: Solid State Physics*, vol. 6, pp. 1181–1203, 1973.
- [47] N. D. Mermin and H. Wagner, "Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic heisenberg models," *Physical Review Letters*, vol. 17, no. 22, pp. 1133–1136, 1966.
- [48] P. C. Hohenberg, "Existence of long-range order in one and two dimensions," *Physical Review*, vol. 158, no. 2, pp. 383–386, 1967.
- [49] C. Huepe and M. Aldana, "Intermittency and Clustering in a System of Self-Driven Particles," *Physical Review Letters*, vol. 92, no. 16, p. 168701, 2004.
- [50] P. Romanczuk and L. Schimansky-Geier, "Swarming and Pattern Formation due to Selective Attraction and Repulsion," *arXiv:1205.3406v1*, 2012.
- [51] H. Levine, W.-J. Rappel, and I. Cohen, "Self-organization in systems of self-propelled particles," *Physical Review E*, vol. 63, no. 1, p. 017101, 2000.
- [52] J. K. Parrish and L. Edelstein-Keshet, "Self-Organized Fish Schools: An Examination of Emergent Properties," *Biological Bulletin*, vol. 202, no. 3–June, pp. 296–305, 2002.
- [53] U. Erdmann, W. Ebeling, and V. S. Anishchenko, "Excitation of rotational modes in two-dimensional systems of driven brownian particles," *Physical Review E*, vol. 65, no. 6, p. 061106, 2002.
- [54] T. Vicsek and A. Zafeiris, "Collective motion," *Physics Reports*, vol. 517, pp. 71–140, 2012.
- [55] P. Romanczuk, M. Bär, W. Ebeling, B. Lindner, and L. Schimansky-Geier, "Active Brownian Particles: From Individual to Collective Stochastic Dynamics," *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 202, pp. 1–162, 2012.
- [56] F.J. Sevilla and A. Heiblum, "Collective motion in a system of Brownian agents," in *Unifying Themes in Complex Systems Volume VIII*, H. Sayama, A.A. Minai, D. Braha, and Y. Bar-Yam, Eds. Greenwood Press, 2011, pp. 526–537.
- [57] F. Vanni, M. Luković, and P. Grigolini, "Criticality and Transmission of Information in a Swarm of Cooperative Units," *Physical Review Letters*, vol. 107, no. 7, p. 078103, 2011.

- [58] S. V. Viscido, M. Miller, and D. S. Wethey, "The Dilemma of the Selfish Herd: The Search for a Realistic Movement Rule," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 217, pp. 183–194, 2002.
- [59] V. Dossetti, F. J. Sevilla, and V. M. Kenkre, "Phase Transitions induced by complex nonlinear noise in a system of self-propelled agents," *Physical Review E*, vol. 79, p. 051115, 2009.

Física Interdisciplinaria

Física y Sociedad

Gerardo García Naumis, Instituto de Física, UNAM, México

1. Introducción

Existe una opinión generalizada entre los investigadores de las ciencias naturales. Piensan que el progreso de la humanidad depende primordialmente de avances científicos y tecnológicos los cuales resolverán “los grandes problemas”. Esta visión es incompleta. En esta época existen suficientes conocimientos y riqueza para resolver muchos de los dilemas civilizatorios. Si no se aplican es por una combinación de conflictos, intereses e ignorancia. Esto se plantea claramente en los objetivos de desarrollo del milenio propuestos por la ONU. Así, hay una problemática social preponderante en un mundo que se enfrenta a cuestiones fundamentales de supervivencia, tales como el calentamiento global, agotamiento de recursos naturales (acuíferos, reservas minerales, combustibles fósiles), contaminación, etcétera. Esto no es poca cosa, después de todo, las sociedades resultan de la interacción entre cerebros y su medio ambiente. Si se pregunta dónde estará la frontera de la ciencia en el siglo XXI, se podría decir que arriba de nuestros hombros. En efecto, los misterios de cómo se procesa la información en el cerebro, el origen de la conciencia, el reconocimiento de patrones, etcétera. aún no han sido resueltos [1]. Ni siquiera existe un consenso en la cuestión de si puede o no existir inteligencia artificial [1].

En este capítulo abordaremos una faceta poco conocida pero fascinante de la física: su uso en el estudio de sistemas sociales. Esta faceta puede dividirse en dos grandes ramas las cuales estudiaremos de manera separada. La primera de ellas plantea el uso de métodos desarrollados por la física para el estudio de sistemas sociales. Dentro de esta rama, podemos citar la econofísica y la sociofísica que, como veremos aquí, modelan diversos aspectos de la economía, organización social, política, antropología, etcétera. La otra gran rama consiste en el estudio de cómo la física, mediante sus leyes fundamentales, provee un marco de restricciones y posibilidades a las sociedades en su conjunto. Ambas ramas nos dotan de herramientas poderosas para el análisis y toma de decisiones. Debe decirse además que estos enfoques han podido aplicarse también al estudio de ecosistemas [2] y sociedades animales [3].

Las cuestiones sociales caen definitivamente dentro de los sistemas complejos, los cua-

les han sido estudiados en otros capítulos. Esto se debe a la interacción entre sí de 7,000 millones de personas, así como con otros seres vivos, el planeta, el sistema solar, etcétera. Como en cualquier sistema complejo, el sistema está formado por una jerarquía de subsistemas interdependientes entre sí, dando lugar a comportamientos emergentes diferentes a cada escala (es decir, tamaño) que se observe. En otras palabras, en la práctica no se puede deducir la historia del siglo XX estudiando una neurona o la física del modelo estándar. De allí la famosa frase del premio Nobel P. Anderson "more is different" (más es diferente); a cada escala hay fenómenos nuevos que en sí mismos son tan fundamentales como cualquier otro. El ejemplo más típico es el código genético. El descubrimiento de la estructura y función del DNA como molécula fundamental para la vida es considerado un hito fundamental dentro la ciencia, aún cuando desde el punto de vista químico y físico sigue las mismas leyes que cualquier otra molécula conocida antes de su descubrimiento.

De hecho, la existencia misma de sociedades altamente tecnificadas se debe a un proceso de auto-organización emergente cuyo origen se remonta a la expansión del universo [4]. Ello se debe a que el orden en ciertas regiones del universo reduce la entropía de manera local. Esto sólo puede obtenerse si existe un flujo de energía libre en las regiones ordenadas. Así, deben existir gradientes térmicos que permitan extraer trabajo para realizar la tarea de ordenar, de manera análoga a una máquina térmica que opere entre dos reservorios. Por esta razón, el dominio energético actual de la materia sobre la radiación es el responsable de que existan regiones con gradientes térmicos fuera del equilibrio termodinámico. Estas islas de orden, permiten la complejidad suficiente para la evolución biológica y eventualmente dan lugar a sociedades avanzadas. Si se piensa al flujo de energía libre como una medida aproximada de la complejidad del sistema, se ha logrado evidenciar un crecimiento monótono continuo que lleva desde la formación de los átomos a las sociedades humanas, pasando por galaxias, estrellas, planetas, plantas y animales [4]. Uno de los mayores flujos ocurre en nuestra sociedad, con unos $10^6 \text{ erg/s} - \text{gr}$, lo cual es 6 órdenes de magnitud mayor que el valor observado en galaxias.

En general, la idea de usar la física para describir lo social, se basa en considerar a las sociedades como sistemas formados por muchas partículas con cierta clase de interacciones, de manera análoga al tratamiento dado por la física estadística a los sistemas atómicos. El problema es que las interacciones son difusas, tienen elementos aleatorios, etcétera. En otras palabras, las personas o animales no son átomos. Sin embargo, según A. Kolmogorov, no hay nada más predecible que la suma de muchos factores aleatorios. La física de los últimos 30 años ha confirmado, y llevado aún más lejos esta idea. La teoría moderna de los fenómenos críticos está basada en el concepto fundamental de que muchos detalles microscópicos de los compuestos físicos son irrelevantes para describir el cambio macroscópico que, por otro lado, parece ser universal. Fenómenos que parecían estar desconectados, como el magnetismo y los cambios de fase en líquidos y gases, resultan tener características similares. Mientras el número de sistemas físicos que sufren transiciones de fase es muy grande, todas estas pueden ser descritas en términos de un pequeño número de clases de universalidad. Sólo unos cuantos parámetros, como la dimensión espacial,

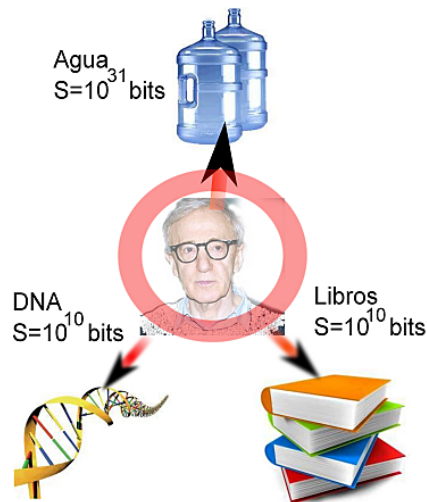


Figura 1: Hasta el mismísimo Woody Allen tiene acotada su complejidad, medida usando la entropía en unidades de bits. Esta puede obtenerse de varios modos: con su peso equivalente en agua o mediante la información de su DNA. También puede hacerse con una buena biblioteca de comportamiento humano e historial personal.

determinan a qué clase de universalidad pertenece el sistema. El concepto de universalidad plantea que los detalles no son importantes. De manera simultánea, los matemáticos encontraron que los sistemas no-lineales comparten estas características; mapeos y ecuaciones diferenciales no-lineales diferentes dan lugar a comportamientos análogos. Esta explosión de ideas hace tentadora su aplicación a sistemas no físicos, en particular a sistemas sociales, para los cuales existe una relación entre propiedades microscópicas y realidades macroscópicas.

Antes de entrar a estudiar algunas de las técnicas usadas en la descripción de sistemas sociales, realizemos aquí un breve ejercicio de reflexión acerca de los límites de la tarea planteada en describir una sociedad humana. Existen varias maneras de estimar la complejidad de un sistema; una de ellas se basa en la información mínima necesaria para describirlo. Esta mínimo viene dado por la teoría de la información de Shannon, en la cual la entropía de un sistema nos dá idea de su contenido de información. Pensemos por ejemplo, que la complejidad humana está acotada por la entropía física de los átomos que lo componen. Esta entropía en unidades de bits $S/k_B \ln 2$ (donde k_B es la constante de Boltzmann), puede estimarse usando la entropía del equivalente a nuestro peso en agua a temperatura ambiente, de donde obtenemos que vale 10^{31} bits.

Esta cota es demasiado grande para los propósitos del estudio de sistemas sociales. En realidad, nos interesa la complejidad a una escala espacial y temporal relevante a los propósitos de explicar comportamientos sociales, por lo cual debería realizarse un renor-

malización, es decir, promediar de alguna manera inteligente varios grados de libertad para reducir su número. Para bajar la cota, podríamos recurrir entonces al contenido de información necesaria para formar un ser vivo. Esta información está contenida en su código genético. Se estima en 10^{10} bits, calculada de considerar que el genoma está formado por cuatro letras, correspondientes a las cuatro bases que sirven para codificar los aminoácidos y, estos a su vez, a las proteínas.

Desde luego que la educación y el medio ambiente influyen sobre el resultado. De manera alternativa podemos usar otra cota si pensamos otra vez en que nos interesa una descripción a escalas mayores que la molecular. Una manera simple sería pensar en analogía a los lenguajes de computación. Podríamos estimar el tamaño mínimo del programa requerido para describir el comportamiento de los humanos [5]. Se puede empezar por animales más sencillos, usando libros de etología tomados de una biblioteca. El comportamiento de un pez se puede describir en unas páginas, de las hormigas en varios capítulos de libro, de los tigres en un libro, y de los primates en varios libros. Si cada letra puede representarse por un bit (usando por ejemplo el código ASCII), una página contiene aproximadamente 3,000 caracteres, es decir, 10^4 bits, de donde se sigue que un libro típico tiene del orden de 10^6 bits. El comportamiento humano podría entonces describirse con varios libros, es decir, 10^7 bits. Es claro que se requiere información extra para entender que significa cada palabra, dado que en realidad el lenguaje es un mecanismo sistemático para la comprensión de información. Pensando de manera pragmática, podríamos usar un diccionario para definir cada palabra del texto usado. Si hay 10 palabras por página en el diccionario, cada palabra necesita 10^3 bits para ser definida. Usando este método, la complejidad del comportamiento humano queda en 10^{10} bits, lo cual coincide sorprendentemente con el cálculo obtenido mediante el código genético. Desde luego que muchos de los aspectos anteriores son criticables (por ejemplo, gran parte del DNA es redundante, etcétera) y requieren de más análisis, pero en esencia esta clase de cálculos pertenecen a la manera de enfocar los problemas en el contexto de física y sociedad. Por un lado, la física nos da una cota superior para la complejidad, y por otro, la teoría de la información, surgida mediante una analogía con la física estadística, nos da una cota mínima. De este modo, la complejidad del ser humano, puede cuantificarse de manera aproximada, dando una idea general de la complejidad inherente de la sociedad humana.

El ejercicio anterior no sólo es relevante por develar cuantitativamente la complejidad básica de los elementos que forman la sociedad humana, sino que además muestra como la física sirve para tender un puente entre ciencias exactas y sociales. Claro que las ciencias exactas y sociales comparten algo en común: su categoría de ciencia. Es decir, en principio tienen al método científico como herramienta fundamental para entender, clasificar y predecir los diversos fenómenos que les competen. El apellido de "exactas" en una de ellas parecería implicar que las otras dos no lo son. De hecho, la física tiene la reputación de ser "el paradigma de todas las ciencias" debido a que puede condensar una cantidad enorme de fenómenos usando unas pocas leyes básicas. Gran parte de su éxito se debe a su enfoque reduccionista, que trata de hacer mínimo el número de variables, dejando sólo

aquellas que sean relevantes para un fenómeno particular. Este procedimiento implica en realidad un aceptación tácita del precepto de renormalizar grados de libertad.

Sin embargo, han existido muchos intentos de racionalizar las ciencias sociales usando algunas leyes simples. Por ejemplo, la teoría de la evolución de Darwin ha sido citada como un antecedente claro del materialismo histórico de Marx o del psicoanálisis de Freud, ambos esquemas propuestos para reducir la complejidad histórica o psicológica a leyes más o menos simples. Históricamente han habido dos puntos débiles en los intentos de volver a las ciencias sociales más cuantitativas; por un lado, la dificultad de realizar predicciones exactas y al mismo tiempo la gran cantidad de variables involucradas en los procesos, y el hecho de que la sociedad humana es, en sí misma, un experimento único e irrepetible. En realidad, un análisis más detallado muestra que ni la física es tan exacta como se pretende, ni las ciencias sociales son tan inexactas como los físicos piensan. En efecto, en la física estadística, la mecánica cuántica y la física no-lineal hay cierto grado de incertidumbre. Si la física presenta estos problemas, es de esperarse que las ciencias sociales sean aún más problemáticas. En los últimos años, varios factores se han conjugado para lograr avances en el análisis cuantitativo de las ciencias sociales. El primer factor ha sido el desarrollo de nuevas herramientas de la física, como física no-lineal, teoría del caos, redes, fenómenos fuera del equilibrio, sistemas complejos, etcétera. El otro gran paso ha sido la disponibilidad de bases de datos enormes como, por ejemplo, teléfonos celulares, preferencias de búsqueda en internet, análisis masivos de textos, redes de intercambio científico, etcétera. Potenciando estos dos factores tenemos computadoras poderosas que permiten el análisis de datos y su comparación con diversas teorías, así como la posibilidad de formular modelos para explicar las tendencias observadas en las bases de datos.

Dejemos aquí estas ideas generales, para estudiar algunos ejemplos de como abordar problemas de econofísica, sociofísica, ciencias políticas y geoestrategia.

2. Econofísica

El término Econofísica fué acuñado a fines del siglo XX para englobar el trabajo que los físicos hacían sobre diversos aspectos de la economía¹ [6]. Muchos de estos pensaban que los métodos de la economía clásica eran demasiado limitados por estar basados en sistemas en equilibrio, los cuales no siempre pueden aplicarse a la realidad. Mas aún, los economistas clásicos no tenían las herramientas para describir esta economía fuera del equilibrio, ya que requerían ideas y matemáticas nuevas como dinámica no-lineal, grupo de renormalización, procesos estocásticos, percolación, fractales, auto-organización crítica, etcétera. Esta tendencia se vió reforzada por un hecho histórico interesante. La decisión de no construir un super acelerador de partículas en EUA llevó a varios físicos al desempleo. Muchos de ellos encontraron trabajo en el sector financiero donde potenciaron el

¹ Ver también el capítulo "Econofísica" de Ana M. Contreras y Hernán Larralde, en este mismo volumen para una visión complementaria.

uso de analogías físicas en la economía. Sin embargo, el interés en sí de los físicos en el tema no era nueva. David Bernoulli sentó en 1738 las bases para uno de los puntos claves de la teoría neoclásica de economía, desarrollando la teoría de la utilidad y el riesgo en economía. Los otros fundadores de la teoría neoclásica, I. Fisher y J. Tinbergen (quien obtuvo el primer el primer Nobel de Economía), fueron alumnos de destacados físicos. El primero de ellos fué alumno del fundador de la teoría de ensambles en Física Estadística, J. Willard Gibbs, mientras que el segundo fué alumno de Paul Eherenfest. En esta breve capítulo desde luego no haremos una revisión de un tema tan extenso. En lugar de ello, mostraremos algunos ejemplos de cómo aparece de manera natural la física en la economía, tratando de enlazar nuestros ejemplos con la siguiente sección de sociofísica, para después analizar algunas de las cuestiones abiertas en el campo.

Reparto de riqueza en un mundo de recursos limitados

Empezaremos con una pregunta sencilla. ¿De que depende ganar un cierto salario? Si preguntamos esto a diversas personas, seguramente obtendremos varias respuestas, tal y como han mostrado diversas encuestas sobre el tema. Nos pueden decir que de su educación, esfuerzo, dedicación, talento, suerte, voluntad divina, contactos, belleza, etcétera. Viendo los árboles, no podemos apreciar el bosque. Decidimos entonces hacer una estadística del número de personas en el país que ganan cierto salario (r), i.e., construimos la distribución de salarios del país $P(r)$. Dado que esta distribución puede contener algunos picos, es mas sencillo considerar la cantidad acumulada de personas que ganan hasta cierto salario, es decir,

$$C(r) = \int_0^r P(r') dr' \quad (1)$$

En la figura 2 aparece graficada esta cantidad, obtenida de los datos de recaudación de impuestos en EUA en diversos años. La escala usada es de tipo log-log para resaltar el tipo de ley que se obtiene. De los datos, se sigue la sorpresa de que $P(r)$ es una distribución de Boltzmann-Gibbs para salarios bajos y medios, i.e., $P(r) \approx \exp(-r/\lambda)$, la cual describe la distribución de energías de las moléculas en un gas. Mas extraño es el caso para salarios muy altos, es decir, arriba del 97% de la población. Allí la distribución de Boltzmann-Gibbs deja de ser válida y se aplica la "ley de Pareto", consistente en una ley de potencias. Veamos como explicar algunos de estos resultados en terminos de una teoría basada en la física estadística [7].

Consideremos para ello N "agentes", donde el i -ésimo de ellos tiene un balance de dinero m_i . Estos agentes pueden interaccionar entre sí mediante transacciones donde se intercambia dinero. Si el agente i interacciona con el j , intercambiandose una cantidad de dinero δM , tenemos que,

$$m_i \rightarrow m_i - \delta M \quad m_j \rightarrow m_j + \delta M \quad (2)$$

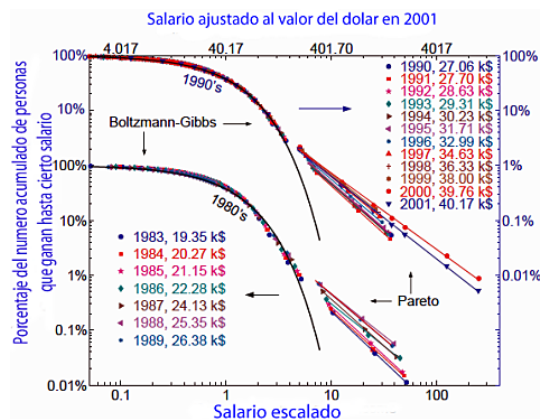


Figura 2: Porcentaje acumulado de personas que ganan hasta cierto salario obtenido de su declaración de impuestos en E.U.A para diferentes años. El salario aparece en el borde inferior escalado de manera que el promedio queda en 1, mientras que en el superior aparece en miles de dólares ajustados a su valor en el año 2001. Hay una translación arbitraria en el eje y para poder apreciar las diferencias entre los 80's y 90's. Adaptado de [7].

La cantidad neta de dinero para ambos agentes antes y después de la transacción resulta la misma,

$$m_i + m_j = m'_i + m'_j \quad (3)$$

Debe notarse así que la compra-venta es en principio un operación que conserva la cantidad de dinero, y por lo tanto, recuerda de manera inmediata la conservación de energía en las colisiones entre moléculas que ocurren en un gas. En este enfoque hay una distinción clara entre dinero y los bienes. Aquí no consideramos la producción o bienes consumidos en la transacción, los cuales evidentemente no se conservan. Sin embargo, estos entrarán posteriormente en la discusión.

En un sistema cerrado, la ley local de conservación (2) lleva a la conservación del dinero en el sistema,

$$\sum_i m_i = M \quad (4)$$

Para economías reales, M puede variar debido a la emisión de dinero, lo cual eventualmente puede tomarse en cuenta. Aquí consideraremos que M es constante. Otra cuestión importante es la deuda, la cual puede considerarse asumiendo que m_i pueda ser negativo. Para simplificar aún mas el análisis supondremos que $m_i \geq 0$.

Ahora asumimos que después de cierto intervalo de tiempo, el sistema llega a un estado estacionario. Este estado se caracteriza por una distribución de dinero dada por $P(m)$. Para encontrar esta distribución, supongamos que partimos el eje del dinero m en intervalos de tamaño δm , donde el número entero k etiqueta a cada intervalo. Si N_k es el número de agentes con una cantidad de dinero entre m_k y $m_k + \delta m$, la probabilidad de tener un balance de dinero en este intervalo viene dada por $P(m_k) = N_k/N$.

Una posibilidad es que todos los agentes tuvieran lo mismo, es decir, $m_i = M/N$. Bajo las reglas del mercado actual, esta distribución es altamente improbable. En cambio, podemos suponer que la distribución observada es aquella que maximiza la entropía, i.e., el desorden. Esta puede obtenerse procediendo mediante una analogía con el caso de un gas. Para ello consideremos el número de posibles realizaciones Ω de un estado en términos de las diferentes configuraciones que podemos tener usando una partición del dinero en términos del conjunto $\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$. Dado que los agentes son distinguibles, Ω viene dado por,

$$\Omega = \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!\dots} \quad (5)$$

La entropía del sistema se define como $S = \ln \Omega$. Ahora se puede proceder como en la mecánica estadística usual, es decir, debemos maximizar Ω con respecto al conjunto de las $\{N_1, N_2, \dots, N_k\}$ bajo las restricciones de conservación del número de agentes económicos $N = \sum N_k$ y dinero total $= \sum m_k$. El resultado de este proceso es bien conocido, llevándonos a la distribución exponencial de dinero $P(m)$ dada por,

$$P(m_k) = \frac{N_k}{N} = \exp^{-(m_k - \mu)/T} \quad (6)$$

donde se han introducido dos parámetros, μ y T , asociados a los multiplicadores de Lagrange debido a las leyes de conservación. Aquí μ y T representan los análogos del potencial químico y la temperatura en el caso económico. Usando,

$$\langle m \rangle = \frac{M}{N} = \sum_k m_k P(m_k) = \int_0^\infty \frac{dm}{m} m \exp^{-(m-\mu)/T} = T \quad (7)$$

De este modo, la temperatura del sistema económico no es otra cosa que la cantidad promedio por agente de dinero, ya que $T = \langle m \rangle$. Se puede dar una interpretación análoga al potencial químico. Notamos en esta deducción una gran generalidad, ya que hemos encontrado como distribuir entre agentes una cantidad limitada de recursos asumiendo el principio de máxima entropía. En el caso de un gas clásico, la energía total es el recurso total disponible mientras que en un sistema social es el dinero. Así pues, hemos demostrado de una manera sencilla el porqué los salarios siguen una distribución de Boltzmann-Gibbs. Desde luego, estos argumentos pueden extenderse a otros recursos

como acceso a la alimentación, energía, educación, etcétera. Por otra parte, podemos llevar un poco más allá las analogías para predecir que sucede al poner en contacto dos economías con temperaturas diferentes ($T_2 > T_1$). El cambio en entropía será,

$$\delta S = \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \delta M + \ln(T_2/T_1) \delta N. \quad (8)$$

Si asumimos que la entropía es siempre creciente, $\delta S > 0$, entonces el dinero deberá fluir del sistema con mayor riqueza (país rico) al de menor riqueza (país pobre). Del mismo modo, el último término muestra que la migración será del país pobre al país rico. Tanto migración como flujo de dinero son bien conocidos como fenómenos globales en nuestro mundo actual.

Finalmente, queda por explicar la desviación respecto a la distribución exponencial para el 3% de salarios más grandes, conocida como ley de Pareto. Esta ley tiene una forma muy interesante,

$$P(m) = \frac{C}{m^{1+\alpha}}. \quad (9)$$

siendo C una constante de normalización, y α un exponente. El hecho de que sea una ley tipo potencias, con un exponente, recuerda inmediatamente la teoría de fenómenos críticos en física. De hecho, un estudio en el período 1983-2001 [7] muestra que esta distribución es muy dinámica y volátil, mientras que la exponencial correspondiente al 97% es muy estable, correspondiente a un caso de equilibrio térmico. Así, parece ser que la ley de Pareto resulta de procesos fuera de equilibrio, los cuales pueden analizarse mediante procesos estocásticos dependientes del tiempo [8], tales como ecuaciones del tipo Fokker-Planck que aparecen en sistemas fuera del equilibrio térmico. Es interesante destacar que la ley de Pareto fue introducida en 1895 para describir la distribución de ingreso, mediante una regla abreviada conocida como 80 – 20, la cual indica que el 20% de la población controla el 80% de los recursos. Esto lleva a la idea de que en realidad sólo existen dos clases sociales, fenómeno que ha sido observado en muchas sociedades [9]. La estabilidad de la clase de menores recursos refuerza la idea de usar ideas de la física estadística en equilibrio, mientras que la ley de Pareto requiere técnicas mucho más modernas. Desde luego debemos agregar que existe una infinidad de sistemas donde se ha observado esta ley por tratarse de un fenómeno fuera de equilibrio emparentado con la teoría del caos, sistemas complejos y fractales. Podemos citar la distribución de tamaños en los agregados de los condensados de Bose-Einstein, el valor de las reservas en los campos petroleros, el tamaño de los meteoritos y arena, eventos extremos de lluvias, etcétera. Otra posibilidad con la cual podría obtenerse la distribución de Pareto partiendo de la entropía, sería maximizando la llamada entropía- q de Tsallis [10], en vez de la entropía normal. De este modo, se obtiene una distribución con colas largas [11].

Pasemos ahora a estudiar algunas consecuencias del equilibrio térmico de una parte de la distribución de ingresos.

Termodinámica de la riqueza

La mecánica estadística del dinero puede llevarse mas lejos aún si se toma en cuenta la propiedad material de los agentes, de manera que dé lugar a una teoría similar a la termodinámica. Para ello consideramos que los agentes tienen dos clases de riqueza. Por un lado, su dinero dado como antes por m_i , y sus bienes materiales como casa, coche, acciones en la bolsa, joyas, etcétera. Consideraremos por simplicidad sólo un tipo de propiedad, por ejemplo coches. Si cada agente tiene v_i unidades que valen cada una P , el equivalente en dinero será simplemente Pv_i . La riqueza individual de cada agente será $w_i = m_i + Pv_i$, y la del sistema total,

$$W = M + PV. \quad (10)$$

donde $V = \sum_i v_i$ es el número total de unidades físicas de riqueza.

Dado que hemos identificado a M con la energía total, podemos hacer la analogía entre M y la energía interna total del sistema U . De este modo, W puede identificarse con la entalpía. Consideremos ahora la diferencial de M ,

$$dW = dM + dPV + VdP. \quad (11)$$

En un *sistema cerrado*, $dM = 0$ y $dV = 0$, de donde $dW = VdP$. Así, la única manera de aumentar la riqueza es mediante un cambio de precio. Para entender estas ideas, es posible construir un ciclo de Carnot considerando un ciclo cerrado en un diagrama (P, V) . Este ciclo puede entenderse como un modelo de especulación en el mercado o de exportación e importación entre dos países. Para ello, consideremos que un agente incrementa su cantidad V_1 de bienes a V_2 , comprando a un precio bajo P_2 . Si el agente compra muchos bienes, la ley de la oferta y demanda provocará que se incremente el precio unitario del bien. El precio pasará entonces de P_2 a P_1 . El agente vende entonces los mismos bienes, pasando de V_2 a V_1 , al precio P_1 mas alto. Debido a la sobreoferta, el bien bajará de P_1 a P_2 , cerrandose así el ciclo. En este proceso, el cambio de riqueza para el especulador vendrá dado por el área encerrada en el ciclo,

$$\Delta W = \oint VdP = (P_1 - P_2)(V_2 - V_1). \quad (12)$$

Dado que la riqueza total no varía en este modelo simple, es claro que la ganancia del especulador es obtenida de los otros agentes del mercado.

3. Sociofísica

En la sección anterior analizamos varias características de la economía que pueden ser estudiadas mediante analogías físicas. Quedan sin embargo varias preguntas que respon-

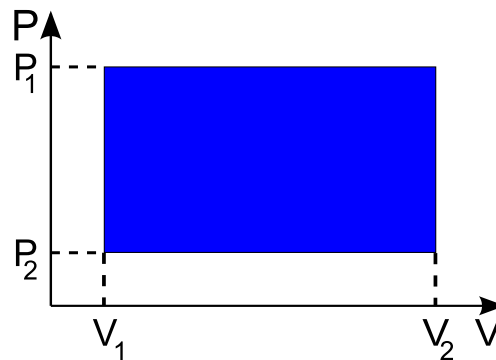


Figura 3: Ciclo de Carnot correspondiente a un ciclo de especulación donde se compra y vende una cantidad $V_2 - V_1$ de bienes a dos precios diferentes dados por P_1 y P_2 . El área encerrada es la riqueza acumulada por el especulador, tomada de otros agentes.

der. Por ejemplo, es claro que los datos muestran la existencia de dos clases sociales. Una pregunta interesante es cómo aparecieron estas dos clases y de que depende nuestra pertenencia a una clase u otra. Podrían argumentarse otra vez muchos factores, pero estadísticamente está determinada por la clase donde se nace [12]. Ello llevaría inmediatamente al campo de la historia. Desde este punto de vista, es sabido que las sociedades primitivas no muestran clases definidas. Al parecer, las clases surgieron cuando las sociedades pasaron de nómadas a sedentarias debido al uso de la agricultura. En las sociedades nómadas, era difícil generar un excedente de recursos para su acumulación, y todavía más difícil era el poder transportar dicho excedente. De este modo, podría entenderse el surgimiento de clases como un proceso social histórico. Nuestro camino nos cruza con el estudio de la historia, la antropología, la sociología, política, etcétera. Como veremos, la física puede proveer de algunos enfoques novedosos a estas disciplinas, dando lugar a la sociofísica. Es interesante decir aquí que si bien la sociofísica comenzó como una rama claramente definida a mediados de la década de 1990, hay muchos antecedentes históricos. Por ejemplo, uno de los primeros intentos para desarrollar algo de esta naturaleza fue hecho por el filósofo inglés Thomas Hobbes en 1630-1640. En su famosa obra *Leviathan* escrita en 1651, utilizó la física del movimiento creada por Galileo para concluir que el despotismo absoluto es la mejor forma de gobernar una nación [14]. El astrónomo, matemático y sociólogo Adolphe Quetelet, en 1835 describe el proyecto de crear una física social, basada en lo que el llama el hombre medio, caracterizado por tener todas las medias de diversas variables distribuidas según una curva normal. Auguste Comte sustituyó al término *física social* por *sociología* al descubrir que Quetelet lo había propuesto antes para describir el estudio de sistemas sociales. Otra idea al respecto, se remonta al escritor de ciencia ficción Isaac Asimov. En su famosa serie de novelas conocida como *Fundación e Imperio*, se describe cómo la psichistoria, basada en la teoría estadística de los gases, permitía a su fundador Hari

Seldon predecir el futuro. Esta teoría estaba basada en dos axiomas,

- La población a modelar debería ser suficientemente grande.
- La población debía mantenerse ignorante de la aplicación de los análisis de la psicohistoria.

Las ecuaciones resultantes eran resueltas en una especie de computadora llamada el Radiante. Cada cierto número de años, el radiante emitía un holograma donde Seldon discutía los sucesos que muy probablemente habrían ocurrido en la etapa concluida. Basado en el resultado de las ecuaciones, se decide formar una fundación encargada de hacer una enciclopedia galáctica con todo el conocimiento de la época.

Aunque la serie de *Fundación e Imperio* fué muy popular desde su publicación, la sociofísica no nació inmediatamente, y de hecho, hay críticos que señalan como indeseable confundir a Asimov como uno de los antecedentes de la sociofísica, dado que en realidad no contribuyó a la creación de una rama de la ciencia, justamente por carecer de una base experimental sólida. Aún mas, algunos le atribuyen el haber retrasado su creación por darle un cierto barniz de ficción a lo que en realidad es una ciencia [13]. Otro antecedente se debe al famoso físico italiano E. Majorana, quien propuso el uso de ideas cuánticas a los sistemas sociales [14]. Sin embargo, S. Galam fué uno de los primeros en tratar de publicar un artículo con algunas ideas al respecto. En ese entonces, Galam escribía su disertación doctoral sobre teoría de escalamiento en transiciones de fase, dándose cuenta del potencial que tenía en el estudio de sistemas sociales. Su manuscrito fué confiscado por el director del laboratorio, con el argumento de que podría dañar la reputación del mismo. Sólo después de varios años, y con la ayuda de un entusiasta con sólidas credenciales científicas, el alemán D. Stauffer, se pudo publicar el primer artículo del tema. El resultado fué un largo y gélido silencio. Mas tarde, el campo reviviría con el trabajo de Axelrod et. al., el cual paradójicamente, fué refutado parcialmente por Galam. Galam demostró que en realidad Axelrod introducía de manera velada sus propios prejuicios en el modelo. Sin duda, ese es justamente el mayor peligro al que se enfrenta la sociofísica, i.e., como modelar e interpretar a un sistema social cuando el investigador forma parte de él. Aún a pesar de esto, en los últimos años este campo ha tenido un crecimiento verdaderamente explosivo por el surgimiento global de las redes, especialmente las sociales. Por ejemplo, es posible cuantificar aproximadamente el grado de amistad usando el tiempo que se habla con otra persona en el celular. Se ha construido un mapa de la conectividad pesada de amistad usando la red de telefonía celular en Europa [15]. Obviamente, esta clase de estudios van de la mano con el desarrollo de tecnologías que permitan el manejo de bases de datos enormes, pero lo importante aquí es la existencia de datos experimentales que requieren ser explicados mas allá de los prejuicios o formación cultural del investigador. Aquí surge un punto importante relacionado con el axioma 2 de Asimov; la sociofísica podría tener el paradójico efecto de influir eventualmente en el desarrollo de la sociedad,

con buenos y malos fines. Sin duda, este será un tema de discusión que eventualmente tendrá que ser planteado.

Para entender la relevancia de estos temas, basta con recordar la famosa fórmula de Drake, la cual da el número esperado de civilizaciones en la Galaxia con al menos nuestro mismo nivel tecnológico [16],

$$N = R_* f_p n_e f_1 f_i f_c L. \quad (13)$$

Esta fórmula es básicamente una multiplicación de factores que dan cuenta de los sucesos que deben ocurrir para generar civilizaciones. R_* es el ritmo de formación estelar promediado para toda la vida de la Galaxia, en estrellas por año, f_p es la fracción de estrellas con sistemas planetarios; n_e es el promedio de los planetas que son ecológicamente apropiados para la vida; f_1 es la probabilidad de que aparezca vida, f_i es la fracción de tales planetas en los cuales nace vida inteligente una vez que aparece la vida, f_c es la fracción de tales planetas en los cuales los seres inteligentes desarrollan tecnologías de comunicación; y L es la vida media de esas civilizaciones técnicas. Como vemos, esta fórmula abarca la astrofísica, la biología, la química, la física, la neurofisiología. f_c y L involucran la antropología, arqueología, política, historia, etcétera. En la fórmula, la confianza que se tiene en la estimación de cada factor decrece de izquierda a derecha, siendo f_c y L los términos para los cuales existe mayor incertidumbre. Desde luego que con fines de entender la supervivencia humana, el término más importante es L . La amenaza de guerras nucleares, destrucción de ecosistemas o agotamiento de reservas energéticas plantea una gran interrogante sobre L . Cada año que pasa desde el inicio de las pruebas de armas termonucleares abona nuestra confianza en poder aumentar L . Una postura contraria es la planteada por Erico Fermi quien se preguntaba, "si existen tantas civilizaciones extraterrestres, ¿dónde están?". L podría ser entonces bastante pequeña (por cierto, esto daría probablemente una cota superior para el avance científico medio de una civilización). Lo interesante de la fórmula de Drake es que parece ser un paradigma de la interdisciplina, en la cual la física se haya entremezclada a todos sus niveles.

Así pues, hagamos ahora un ejercicio por resumir algunos de los temas de investigación estudiados por la sociofísica,

- Evolución y organización social.
- Toma de decisiones.
- Formación de alianzas.
- Modelos de votación.
- Estrategias de supervivencia

- Comportamiento
- Formación de opinión
- Conflictos
- Flujo y fenómenos de pánico de multitudes

En este capítulo, abordaremos algunos de estos aspectos a modo de ejemplos de cómo aplicar la física a sistemas sociales. Empezaremos con uno de los problemas planteados en la parte de econofísica ¿cómo aparecen dos clases? Desde luego, el modelo planteado no responde totalmente a esta cuestión. Es más, el modelo planteado fué propuesto para entender la jerarquía entre animales. Sin embargo, es muy ilustrativo de las hipótesis y manera de abordar un problema de organización social.

Transiciones de tipo social

Como se mencionó en la introducción, existe un consenso entre historiadores, antropólogos, economistas y politólogos sobre la evolución de la organización social. En los últimos años se han dedicado muchos esfuerzos a la comprensión de cómo se dan estos cambios en los sistemas. Un enfoque consiste en formular modelos plausibles de comunidades animales y humanas mediante la introducción de reglas simples para producir sociedades artificiales. Por ejemplo, la transición desde sociedades igualitarias de caza a una jerárquica de tipo agrícola puede ser descrito por una transición de fase, similar al modelo de jerarquías sociales propuesto por Bonabeau [17]. Este modelo se hizo para explicar la territorialidad y jerarquías sociales observadas en los animales. Es muy sabido por ejemplo que los gatos y gallinas comen en un estricto orden. Este orden da a ciertos individuos un acceso privilegiado a los recursos y parejas para reproducción. Como sociedad, se cree que esto da ventajas para la superviviencia y selección natural. La sociofísica intenta modelar cómo se establece esta jerarquía.

En el modelo original de Bonabeau [17], los agentes deambulan siguiendo una caminata aleatoria en un territorio consistente en una red cuadrada con N sitios. Inicialmente, se coloca una cierta concentración de agentes (p) en la red al azar, de tal manera que dos agentes nunca ocupan la misma posición. Eventualmente, los agentes se moverán a un sitio ocupado, desatándose una pelea entre los dos. El resultado de la pelea se decide al azar, pero tomando en cuenta una distribución que es función de peleas pasadas. Un agente con un buen historial de luchas podrá tener mayor probabilidad de ganar una pelea. Esta probabilidad se decide mediante una distribución parecida a la de Fermi-Dirac a temperatura cero, usada para conocer la ocupación de los estado cuánticos por los electrones. La probabilidad q de que i gane viene dada por,

$$q = \frac{1}{1 + \exp(\sigma [h(k) - h(i)])} \quad (14)$$

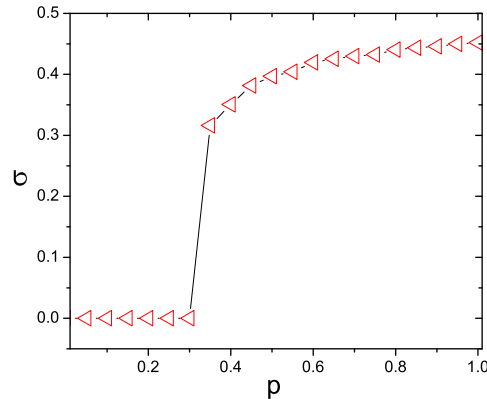


Figura 4: Desigualdad en la habilidad para ganar peleas como función de la densidad de población p . Nótese la transición de fase entre una sociedad igualitaria a una jerárquica alrededor de $p = 0.35$

donde $h(i)$ es el historial de cada agente. Este cuenta el número de victorias menos el número de pérdidas de la persona i , ponderado por el número total de peleas. Inicialmente, la probabilidad de perder o ganar es de 50% ya que todos los $h(i)$ son cero. Sin embargo, al evolucionar la sociedad, ocurren peleas dado que los agentes intentan ocupar los mismos sitios. Esto da lugar a que los agentes empiezen por acumular un historial. Las fluctuaciones estadísticas harán entonces que pueda existir una desigualdad en la habilidad de los agentes. Esta desigualdad se puede medir mediante un parámetro, llamado de orden, por su analogía con las transiciones de fase que ocurren en la termodinámica o física estadística,

$$\sigma = \sqrt{\langle q^2 \rangle - \langle q \rangle^2} \quad (15)$$

donde el promedio de $\langle q \rangle$ se lleva a cabo en toda la población de agentes. El caso $\sigma = 0$ indica una sociedad igualitaria en el sentido de que todos los agentes tienen la misma posibilidad de ganar una pelea, $\sigma = 1$ corresponde a jerarquía máxima.

El resultado principal de este modelo es la aparición de una transición de fase en la sociedad cuando la densidad de agentes en la red supera cierto valor crítico. En la figura 4 presentamos la evolución de σ en función de la densidad de agentes. Si la ocupación de los agentes es menor a 0.35, σ es cero, indicando una sociedad igualitaria. Para una $p > 0.35$, aparecen dos clases sociales, una fuerte y la otra débil. [18]

Una posible crítica del modelo anterior, es que supone a los sitios del territorio como equivalentes, en el sentido de que tienen el mismo valor estratégico. Por ello los agentes deciden la dirección del movimiento al azar. Aunque esta suposición conduce a una

importante comprensión del mecanismo básico de creación jerarquía social, en muchos ambientes esto no resulta cierto [19]. En realidad, algunos sitios son más valiosos que otros debido a varios factores, como por ejemplo la disponibilidad de recursos naturales o una sitio geoestratégico valioso. Por lo tanto, las peleas en los sistemas reales suelen tener lugar con el fin de dominar territorios de alto valor, y es poco probable que difusión tenga lugar como una caminata al azar. Para mejorar el modelo de Bonabeau, los agentes se mueven de manera que localmente tratan de alcanzar los sitios de valor. Este tipo de sitios son atractivos para los agentes. Es importante señalar que este modelo introduce un aspecto de optimización para la problema de las jerarquías sociales, es decir, las peleas tienen lugar de aumentar la riqueza media de los agentes.

Así, para mejorar el modelo Bonabeau, se pueden mantener las normas de combate, pero cambiando la manera en que los agentes se mueven [19]. Al principio se asigna a cada sitio de la red un valor determinado, para simular algunas condiciones geográficas, como por ejemplo pozos de agua donde los animales deben ir a beber. Las nuevas reglas de los movimientos de los agentes podrían ser las siguientes [19]:

- Si los valores de todos los vecinos del sitio son menores que el valor del sitio ocupado originalmente por el agente, el agente permanece en el sitio, ya que no vale la pena tener un sitio de menor valor.
- Si la condición anterior no se cumple, el agente se mueve al sitio vecino con el valor más alto. Sin embargo, puede suceder que más de uno de los sitios vecinos tengan el mismo valor. En tal caso, se escoge uno al azar entre los más valiosos.
- Por último, también puede ocurrir que el sitio original tenga el mismo valor que el valor máximo de sus vecinos, entonces el agente se mueve siempre a un sitio vecino elegido aleatoriamente entre los vecinos valiosos. Hemos establecido esta regla con el fin de recuperar el límite de la modelo de Bonabeau para un territorio homogéneo, ya que bajo Bonabeau siempre es necesario saltar a un sitio vecino. Así, en el modelo modificado si todos los sitios son ricos o pobres, las normas de movimiento se reducen al caso Bonabeau.

El siguiente paso es producir un territorio en el que los agentes se mueven. A fin de comprender los efectos de las nuevas normas, el territorio más simple que se puede imaginar es tener dos tipos de sitios: sitios no atractivos o pobres, con valor cero, y atractivo o valioso, con un valor igual a 1. La distribución de los sitios puede hacerse al azar, con una probabilidad x de tener un sitio valiosos, y $1 - x$ para los no valiosos. Por lo tanto, la red es similar a un problema de percolación en $2D$. Vale la pena observar que la transición de percolación se produce para $x = 0.59$, es decir, para x mayores a este valor, hay un camino de sitios valiosos que atraviesa el territorio.

La figura 5 (a) muestra los resultados de la desigualdad como una función de la densidad p de los agentes. Lo primero que debe notar es que para $x = 1, 0$, recuperamos los

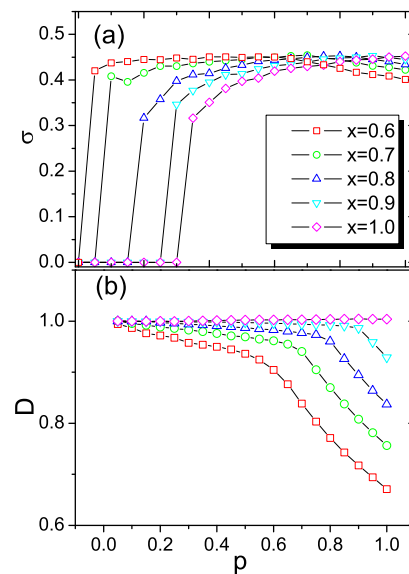


Figura 5: a) Desigualdad en la habilidad para ganar peleas como función de la densidad de población p para diferentes concentraciones de riqueza. Nótese como la transición de fase entre una sociedad igualitaria a una jerárquica se desplaza para diferentes x . b) Difusividad de los agentes en la red. Esta disminuye cuando la población es mayor que la cantidad de sitios atractivos.

resultados originales de Bonabeau [17], donde se observa una transición de fase alrededor de $p = 0,35$, con un desigualdad de 0.45. Cuando la concentración de sitios ricos disminuye, se observan dos características importantes. El primero es un cambio gradual de la transición de fase hacia poblaciones de baja densidad. Cuando $x = 0.60$ la transición de fase ocurre casi en $p = 0$. En ese sentido, la introducción de sitios de valor tiende a aumentar la desigualdad a bajas p . La razón es sencilla, al buscar los agentes los sitios de valor, ocurren muchos más conflictos dado que los agentes se congregan en los pocos sitios valiosos. En otras palabras, los conflictos sociales aumentan al disminuir la riqueza del territorio. Aunque este resultado es intuitivamente claro, como sabemos de los conflictos en ambientes ecológicos degradados, lo interesante es la transición de fase, indicando que el cambio no sucede de manera gradual. En la figura 5 (b) se incluye también el coeficiente de difusión D , obtenido de la relación $\langle \mathbf{r}^2 \rangle = Dt$, donde \mathbf{r} es el desplazamiento cuadrático medio. Puede notarse como disminuye la difusión al haber más sitios pobres.

Un hecho interesante de este modelo modificado, es que permite incluir no sólo la habilidad para pelear, sino evaluar la riqueza promedio de los agentes m , definida como,

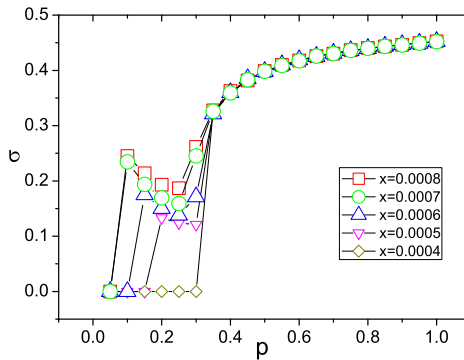


Figura 6: Habilidad como función de la densidad p para territorios con diferentes grados de pobreza x , en el límite donde x y p son pequeños. La fase de caciques es el pequeño escalón que se forma antes de la subida a $\sigma = 0.5$

$$m = \frac{N_R}{N} \quad (16)$$

donde N_R es el número de agentes en sitios atractivos y N el número total de agentes. Si $x > p$, entonces podría en principio haber suficiente riqueza para todos, dado que hay más sitios atractivos que agentes. Una de las sorpresas de este modelo es que dicha observación es cierta si x no es pequeña comparada con el límite de percolación. Para x muy pequeñas respecto a $p = 0.35$, podemos ver en la figura 7 que aparece un estado intermedio entre el de desigualdad máxima y el cero. Un análisis de este estado, revela que se trata de una fase donde el sistema llega a una especie de mínimo local, ya que los agentes se agolpan en torno a unos pocos sitios valiosos, peleándose en la vecindad de algunos de ellos sin que la sociedad pueda evolucionar a otro estado [19]. Lo curioso del modelo es que en este límite, pueden existir sitios valiosos no ocupados, sin embargo, la falta de información global, dado que las reglas de movimiento son locales, hacen que el sistema quede atrapado en esas peleas locales, donde domina un agente mientras muchos otros tratan todo el tiempo de tomar su lugar, quedando cada vez más débiles. Por eso, hemos denominado a esta fase como *de caciques y cabezones* (cabezón usado en el sentido de terco o necio), el cual tiene cierta analogía con la formación de vidrios. Así, en la fase de caciques y cabezones, el valor de m es casi siempre menor al teóricamente posible. Aunque para $x = 0$ recuperamos el modelo de Bonabeau, tal y como sucede para $x = 1$, la diferencia estriba en el modo de llegar al estado homogéneo. En el caso de un territorio pobre, hay muchos conflictos locales mientras que en un territorio rico respecto a la población, la transición es suave. En el caso de pobreza, el conocimiento de la información global es muy relevante para evitar caer en un estado no óptimo.



Figura 7: Caricatura de la fase de caciques y cabezones. Aunque hay dos círculos que representan sitios valiosos, los agentes permanecen en sólo uno de ellos debido al horizonte local de las reglas de movimiento. Como resultado, hay muchos conflictos donde el cacique es cada vez mas fuerte, representado aquí por el rey con el león.

Conflictos y formación de alianzas

Uno de los temas donde la sociofísica ha sido más fructífera, es en el estudio de la formación de coaliciones, la cual puede aplicarse en muchos contextos como guerras, alianzas comerciales, políticas, formación de opinión, etcétera. Una coalición debe entenderse como una forma de agregación entre un conjunto de actores (países, empresas, individuos, etcétera). La idea principal detrás de estos modelos es que deben de existir algoritmos que los agentes aplican de manera empírica para decidir entre varias opciones. La tarea de la sociofísica es obtener estos algoritmos observando los datos de la experiencia y mediante simulaciones en mundos artificiales.

Típicamente, se piensa que las opciones escogidas por los agentes se toman de modo que el grado de insatisfacción total produzca el menor conflicto posible, llevando esto a definir un Hamiltoniano del sistema. Por ejemplo, en el trabajo seminal de Axelrod y Bennett [20], se obtuvo la alineación de diecisiete países europeos en la Segunda Guerra Mundial (WW II) y la pertenencia a alianzas competidoras de nueve empresas de informática para establecer normas para los sistemas operativos Unix informáticos. Para la Segunda Guerra Mundial, los parámetros del modelo fueron obtenidos a partir de los conflictos del pasado, las fronteras físicas, la religión, etcétera [20]. Galam demostró posteriormente que este modelo tenía algunos problemas. Mejorándolo, Florian y Galam [21] usaron el modelo para describir la fragmentación de la ex-Yugoslavia.

Las analogías más usuales toman prestados modelos de sistemas magnéticos, usados por los físicos para entender cómo aparece el ferromagnetismo o el antiferromagnetismo. La razón de ello es simple. Según muchos expertos en el tema, cuando realmente se quie-

re "jugar duro", las opiniones se polarizan en dos bandos que compiten intensamente. Eventualmente, los actores deben escoger una de las dos opciones (*o están con nosotros, o contra nosotros, George Bush dixit*). Esto recuerda inmediatamente al espín. En ausencia de campos externos, los espines pueden alinearse por su interacción entre ellos, dando lugar a un momento magnético neto, lo cual produce un material magnetizado de manera espontánea, conocido como ferromagneto. Dado que los modelos magnéticos son básicos en el estudio de formación de coaliciones u opinión, pasemos a realizar un breve repaso de ellos.

El modelo de Ising es especialmente apropiado para su uso en sociofísica. El Hamiltoniano de Ising se obtiene de simplificar el modelo de Heisenberg, en el cual el Hamiltoniano viene dado por la interacción entre parejas de dipolos magnéticos situados en una red,

$$H = - \sum_{i>j} \sum_{\alpha} J_{ij}^{\alpha} S_i^{\alpha} S_j^{\alpha} \quad (17)$$

Aquí S_j^{α} es la componente $\alpha = x, y, z$ del operador de espín en el sitio j , J_{ij}^{α} es la magnitud de interacción entre el sitio i y el j . El signo menos indica que la energía baja cuando los espines se alinean en la misma dirección. Este Hamiltoniano se puede reducir si se considera sólo espín 1/2 y la componente z . En ese caso, obtenemos el famoso Hamiltoniano de Ising,

$$H = - \sum_{i>j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j, \quad (18)$$

donde ahora σ_i vale simplemente 1, correspondiente a un espín para arriba en la dirección z , o -1 en caso contrario. Si $J_{ij} = J > 0$ para átomos vecinos y 0 en caso contrario, es sencillo demostrar que el estado de energía mas baja se obtiene cuando todos los espines apuntan en una dirección. Para ello notamos que el valor esperado de la energía en el estado base denotado por $|0\rangle$ es,

$$E_0 = \langle 0 | H | 0 \rangle = - \sum_{\langle i,j \rangle} J \sigma_i^0 \sigma_j^0, \quad (19)$$

siendo σ_j^0 el valor de σ para el estado base, y la notación $\langle i, j \rangle$ se usa para indicar que la suma se realiza sólo sobre átomos cercanos. Para ser el estado base, E_0 deberá tener el valor mas negativo posible, lo cual se obtiene si todos los productos $\sigma_i \sigma_j$ son $+1$. Hay dos opciones, o todos apuntan hacia arriba con $\sigma_j = 1$ o bien hacia abajo, $\sigma_j = -1$. Esto describe justamente el fenómeno del ferromagnetismo. En cambio, si $J_{ij} = J < 0$, el estado base requiere que todas las parejas valgan $\sigma_i \sigma_j = -1$. El estado base corresponde ahora a un antiferromagneto, en el cual los átomos deben de tener siempre el espín contrario a su vecino. Si llegara a existir un campo externo, se agrega un término de interacción con el

mismo,

$$H = - \sum_{i>j} J_{ij} \sigma_i \sigma_j - \mu_0 B \sum_j \sigma_j, \quad (20)$$

siendo μ_0 la norma del momento magnético del dipolo atómico correspondiente.

Un fenómeno interesante es el rompimiento espontáneo de la simetría. En ausencia de campos externos, no hay una dirección privilegiada, por lo cual el estado base puede tener magnetización total para arriba o para abajo. Ambos estados son igualmente probables. La magnetización observada resulta de alguna pequeña perturbación que finalmente acaba por “convencer” a los espines que se alineen en su dirección. En un ferromagneto, hay dominios o regiones que comparten una misma magnetización en la misma dirección. En presencia de campo, el estado con mínima energía será el que haga mínimo el primer y segundo términos del Hamiltoniano. Así, el segundo término se hace mínimo cuando los espines se alinean en la dirección del campo. Suponiendo que $J_{ij} = J$ para los vecinos y cero en caso contrario, la energía de este estado es,

$$E_0 = \langle 0|H|0 \rangle = -ZJN/2 - \mu_0 B \sum N, \quad (21)$$

donde Z es el número de vecinos que tiene un átomo en la red y N es el número total de átomos.

Estas ideas pueden usarse en problemas de toma de decisiones. Empezemos con un ejemplo. Supongamos que se organiza una cena de solteros con la idea de que estos conozcan potenciales parejas. La pregunta es como sentarlos de manera que se maximice el número de posibles parejas con sexos opuestos, como se muestra en la figura 8. Para resolver el problema, se propone primero que hay tres tipos de interacción entre pares: hombre-hombre, mujer-mujer y hombre-mujer. Luego podemos suponer que para estos fines, la interacción hombre-hombre es igual a la de mujer-mujer. Así, sólo nos quedan dos interacciones diferentes. Es evidente que una cena de este tipo, la interacción entre sexos opuestos es favorable mientras que entre sexos iguales es menos favorable. Pensamos entonces en medir el grado de insatisfacción de los comensales con el orden escogido, lo cual podría evaluarse experimentalmente mediante encuestas de salida. El grado de insatisfacción individual puede obtenerse mediante un puntaje, usando el siguiente método,

- poner $-J$ puntos por cada vecino del sexo opuesto que se tuvo en la cena.
- poner un $+J$ puntos por cada vecino del mismo sexo.

siendo J un número arbitrario mayor que zero, i.e., de aquí en adelante consideraremos que $J > 0$. Así, la persona j puede dar el siguiente puntaje ϵ_j al terminar la cena,

- $2J$ si ambos vecinos fueron del mismo sexo que el encuestado.
- 0 si tuvo vecinos de uno y otro sexo.

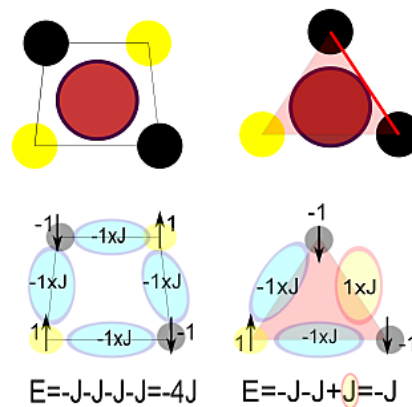


Figura 8: Cena de solteros con cuatro y tres comensales. En el caso de cuatro, se puede minimizar el conflicto sentando en la mesa redonda a cada mujer (círculos amarillos) rodeada de un hombre (círculos negros), y viceversa. En cambio, en el caso de tres, necesariamente hay dos hombres sentados juntos. Esto genera una interacción conflictiva marcada en rojo. Abajo de cada situación se muestra como entender la situación usando el hamiltoniano de Ising. En ese caso, las mujeres se representan con el espín hacia arriba y los hombres abajo. Entre cada par de comensales vecinos, la energía de interacción viene dada por el producto de sus respectivos espines, multiplicada por el factor de peso J . Para cuatro comensales, el estado base es el mostrado en la figura, donde cada pareja da lugar a un $-J$. La energía del estado base es $E = -4J$. Con tres comensales, el estado base presenta una interacción conflictiva con valor $+1$, marcada con un círculo rojo, dando una energía $E = -J$.

- $-2J$ si ambos vecinos fueron del sexo opuesto al entrevistado.

Si sentamos a los comensales en un orden dado, el grado de insatisfacción en el grupo vendrá dado por la suma de los puntajes individuales (ver figura 8),

$$E = \sum_j \epsilon_j \quad (22)$$

Esta energía, para N individuos corresponde justamente a la de un posible estado de un hamiltoniano de Ising antiferromagnético en una red unidimensional con condiciones de frontera cíclica, haciendo:

$$H = |J|(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_4 + \dots + \sigma_1\sigma_{N+1}), \quad (23)$$

donde $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Ello se debe a que el puntaje individual puede obtenerse si asignamos arbitrariamente un valor $+1$ a las mujeres y -1 a los hombres. Luego multiplicamos para cada pareja de vecinos el valor de cada uno de ellos, como se muestra en la figura 8. De este modo,

- vecinos hombre-hombre, $J(+1 \times +1) = J$.
- vecinos mujer-mujer, $J(-1 \times -1) = J$.
- vecinos mujer-hombre $J(-1 \times +1) = -J$.

De este hamiltoniano podemos aprender varias cosas:

- El estado de mínima insatisfacción para un número N_h hombres y N_m de mujeres será aquel que minimize la energía del hamiltoniano de Ising
- Para $N_h = N_m$, el estado de mínima energía es aquel en el cual se sientan alternadamente un hombre y una mujer. Dicho estado tiene energía,

$$H = -(N_h + N_m)|J| \quad , \quad (24)$$

- Si $N_h \neq N_m$, la energía mínima alcanzable será mas alta que $-JN$ porque necesariamente habrán personas del mismo sexo sentadas juntas. Esto se ilustra claramente en el caso de tres personas (ver figura 8). Aquí hay dos "enlaces" cuyo puntaje total da $-J$, mientras que hay uno con puntaje J , siendo el total $-2J + J = -J$ en lugar de $-3J$, que sería el mínimo posible si se pudiera tener tres enlaces con puntaje $-J$. Este fenómeno se conoce como *frustración*. Indica que si existen en la red un número impar de personas, o un número diferente de hombres y mujeres así como interacciones que formen triángulos, entonces habrá un costo de insatisfacción en el sistema. El estado base del hamiltoniano de Ising antiferromagnético dará la configuración de menor conflicto posible, por lo cual se postula usualmente como el estado de equilibrio final al que llegan estos sistemas.

Hagamos un alto en el camino y veamos que se ganó al formular el problema en términos de un hamiltoniano de Ising. Lo inmediato es la posibilidad de resolver sistemas con un gran número de interacciones mediante el uso de computadoras, proporcionando soluciones que no son obvias a simple vista. Pero también está la posibilidad de estudiar transiciones de fase, incluir una dinámica en el tiempo, etcétera. Además, podemos llevar mas allá las analogías, modificando un poco las ideas para estudiar la formación de alianzas. Así, Axelrod y Bennett [20] trataron de explicar la composición de las coaliciones mediante el empleo de la afinidad relativa por parejas o propensión bilateral p_{ij} entre los actores i y j , definiendo una energía del sistema,

$$E(X) = \sum_{i>j} s_i s_j p_{ij} d_{ij}(X), \quad (25)$$

aquí s_i es un factor de peso positivo que mide el poder del agente i y $d_{ij}(X)$ es la distancia j desde i en la configuración X . Esta distancia es 0 si i y j pertenecen a la misma

coalición, y 1 cuando se encuentran en una coalición diferente. Este modelo tiene sólo dos posibles coaliciones, y por lo tanto se le llama bimodal. Si $p_{ij} > 0$, los agentes i y j tienden a ser aliados, y de lo contrario $p_{ij} < 0$. A continuación, se postula que la configuración del sistema es el que minimiza la energía. El camino seguido por el sistema en el espacio de posibles soluciones, sigue la dirección de mayor gradiente de energía. Una vez que se alcanza un mínimo, el sistema se vuelve estable. Este modelo ha sido aplicado al estudio tanto de las alianzas de la Segunda Guerra Mundial y UNIX [20]. Galam demostró que en el caso de las coaliciones bimodales (A y B), el modelo es equivalente a un sistema de Ising a temperatura cero. Para ello, las configuraciones pueden ser expresados por las variables de espín σ_i , donde el espín es $+1$ si el agente i pertenece a la coalición A y -1 si pertenece a la B . Al volver a escribir las distancias como $d_{ij}(X) = \frac{1}{2}(1 - \sigma_i(X)\sigma_j(X))$, la energía se convierte en

$$E(X) = E_r - \sum_{i>j}^n J_{ij}\sigma_i(X)\sigma_j(X) \quad (26)$$

con,

$$E_r \equiv \frac{1}{2} \sum_{i>j} s_i s_j p_{ij} \quad J_{ij} = \frac{1}{2} s_i s_j p_{ij} \quad (27)$$

que es básicamente el estado fundamental de un modelo de Ising, dado por el siguiente hamiltoniano,

$$H^{(2)} = - \sum_{i>j}^N J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum_i^N h_i\sigma_i \quad (28)$$

donde el espín σ_i en el sitio i puede ser 1 o -1 , con un campo magnético (H_i). La coalición a la que pertenece un agente i , está dada por el valor del espín. La interacción entre los agentes i y j es J_{ij} , tomada de la experiencia histórica, cultural y económica. La interacción J_{ij} favorece la cooperación si $J_{ij} > 0$, conflicto $J_{ij} < 0$ y la neutralidad $J_{ij} = 0$. Una particularidad interesante de este hamiltoniano es que las J_{ij} pueden tomar tanto valores positivos como negativos. En general, los valores J_{ij} no siguen un patrón dado, sino que semejan mas bien un patrón aleatorio. Llegamos entonces a un modelo donde las J_{ij} vienen dadas de manera aleatoria. Este modelo es bien conocido en la física estadística. Se conoce como vidrio de espín, debido al carácter aleatorio de las interacciones. Un ejemplo de vidrio de espín son las aleaciones desordenadas de dos metales con momentos magnéticos diferentes. Durante las décadas de 1980 y 1990, la física estadística dedicó un gran esfuerzo al entendimiento de estos sistemas. Su complejidad necesitó del desarrollo de varios conceptos nuevos, como la técnica de réplicas. Uno de los conceptos mas interesantes fué el reconocimiento de la fractalidad del espacio de soluciones.

Sin embargo, hay dos objeciones en todos estos modelos. La primera proviene de la falta de claridad al intentar cuantificar algunos de los parámetros de un sistema real. Por lo tanto, una mejor y más detallada cuantificación de las propensiones bilaterales debe

ser el objetivo de cada problema particular. Pero la segunda crítica es muy general y es que en la mayoría de los modelos, la interacción es siempre entre pares. Esto es tanto como decir que si existe un triángulo amoroso, por ejemplo, dos hombres, Juan y Pedro, y una mujer, Alicia, la relación Juan-Alicia no se ve afectada por la relación Pedro-Alicia. Por ejemplo, recientemente se analizó la segunda guerra de Irak (2005) mediante los preceptos de Galam [22]. Según ese modelo, la solución indicaba que Israel debería atacar a Irak. Sin embargo, se mantuvo neutral. La razón es simple; la neutralidad de Israel permitió a los E.U.A contar con el apoyo de algunos países Musulmanes, lo cual no hubiera sucedido con Israel en guerra. De este modo, la relación Israel-E.U.A. afecta la relación E.U.A.-Musulmanes. Este indica que existe una interacción de muchos cuerpos, de manera parecida a como ocurre con la física de altas energías. En Naumis *et al.* [22], se propuso una manera simple de resolver este problema agregando al hamiltoniano de Ising H un término que toma en cuenta esta interacción H_3 , para construir un nuevo hamiltoniano H_{mb}

$$H_{mb} = H + \alpha H_{(3)} \quad (29)$$

donde α es un parámetro que mide la magnitud del efecto de tres cuerpos. La forma más simple de la perturbación es,

$$H^{(3)} = \sum_{i,j,k}^N \frac{t_{ijk}}{3} \sigma_i \sigma_j \sigma_k, \quad (30)$$

con un parámetro de acoplamiento t_{ijk} por cada triángulo de actores de i , j y k que se produce en la red. Los parámetros vienen dados por,

$$t_{ijk} \equiv \gamma_{ijk} J_{ij} J_{jk} J_{ki} \quad (31)$$

donde γ_{ijk} es la magnitud del conflicto o daño asociado con una interacción de tres cuerpos. Los resultados usando este modelo, resuelven el problema de la neutralidad de Israel en la 2a. Guerra del Golfo [22].

4. Análisis de las sociedades mediante leyes fundamentales de la física

En las secciones anteriores, mostramos un panorama general de cómo se pueden modelar algunos aspectos sociales mediante el uso de la física. Sin embargo, no podemos finalizar sin mencionar el gran poder de síntesis que proporcionan las leyes de la física a ciertos aspectos genéricos de la civilización. Este enfoque debería ser fundamental en los planes de desarrollo y políticas sociales. En efecto, la física puede ayudar a calcular cuantas personas pueden habitar el planeta, como hacer mas eficiente una sociedad, cuantificar la sustentabilidad de un modelo económico, etcétera.

Aquí haremos un simple ejercicio de reflexión acerca de los tópicos que se pueden abordar mediante un enfoque físico.

El gran balance de energía y entropía

En realidad, las claves más fundamentales para cualquier ecosistema o economía es su consumo y eficiencia energética [23]. De la termodinámica, sabemos que la eficiencia está íntimamente ligada con la entropía. Los seres vivos son en sí mismos, sistemas fuera de equilibrio termodinámico luchando de manera permanente por preservar su información requiriendo para ello incrementar la entropía del resto del universo, tal y como se mencionó en las primeras páginas de este capítulo.

Hagamos una vez más un análisis rápido de este punto. Veamos por ejemplo los requisitos energéticos mínimos para la subsistencia en un país como México. Simplemente por tener una temperatura entre los 36°C y 37°C, los humanos emiten radiación electromagnética con un máximo en frecuencias del infrarrojo. Asumiendo que fuéramos un cuerpo negro a temperatura T , un cálculo simple usando la ley de Stefan-Boltzmann muestra que la potencia radiada P en un área A ,

$$P = A\sigma T^4, \quad (32)$$

es aproximadamente la misma que la de un foco de 100 Watts. En la ciudad de México hay 25 millones de habitantes, lo cual equivale a 2500 MWatts. En el país hay 110 millones de habitantes, es decir, se disipa como calor al menos 11,000 MWatts. A modo de comparación, los reactores nucleares de Laguna Verde suministran 1,365 megawatts (MW). Vemos así que simplemente por estar vivos, existe una demanda mínima de potencia equivalente a 8 reactores nucleares. Se puede argumentar que la potencia requerida no sale de las plantas de energía sino que proviene de la comida, la cual a su vez es simplemente energía acumulada del sol. Si bien esto es cierto, hay un factor capital que se escapa en este argumento. Se estima que para producir 1 caloría de alimento, se requieren al menos 10 calorías de energéticos para producirla (los cuales en el caso de México provienen en gran parte de combustibles fósiles). La razón es simple, para poder alimentar una población tan grande se necesitan técnicas que involucran mucha demanda de energía. En el caso de México, se debe bombear el agua del subsuelo o traerla de grandes distancias, se deben fabricar y transportar al lugar de consumo los fertilizantes, semillas mejoradas y utilizar tractores o animales de tiro los cuales a su vez consumen energía. Finalmente, la comida debe transportarse grandes distancias a los centros de consumo. En el siglo pasado, se estimaba que la comida provenía de un radio menor a los 30 Km, mientras que en la actualidad la cadena se extiende, en promedio, a unos 700 Km, demandando esto energía. (En el caso de la Cd. de México podemos poner como ejemplo la leche. Antes se producía en la zona de Chalco, actualmente se trae de la región Lagunera, distante unos 1000 Km). Es muy importante notar que la energía consumida se utiliza en generar entropía, dado

que la temperatura de los humanos permanece constante. Esta observación será relevante al medir el flujo de energía libre como una medida de la complejidad.

Hagamos otro cálculo rápido de los requisitos energéticos para alimentar la población de México. La dieta diaria requiere de al menos unas 2,000 Kcal por persona, es decir, aproximadamente 8,000 KJoules diarios. Multiplicada por la población de México, se obtiene unos 9×10^{14} Joules diarios. Usando la regla de que se necesitan al menos 10 cal de energéticos para obtener 1 de alimentos, se concluye que el consumo diario es de 9×10^{15} Joules. A modo de comparación, la producción de petróleo en México es de unos 2.3×10^6 barriles diarios. Cada barril equivale en energía a,

$$1 \text{ barril} = 6.1 \text{ GJoules} \quad (33)$$

de donde la producción diaria es $2.3 \times 10^6 \times 6.1 \times 10^9 = 1.4 \times 10^{16}$ Joules. De este modo, se utiliza el equivalente al 64 % de todo el petróleo producido para alimentar a la población. Sorprende saber que México importa de alimentos un 61 % de lo que consume. Si tomamos en cuenta que la producción de energía en México es del 38 %, esto representa un 24 % de toda la energía. A nivel mundial, se sabe que la producción de alimentos consume aproximadamente el 10 % de la energía generada, lo cual muestra que hemos sobrestimado algunos factores, aunque el orden de magnitud es correcto.

Otro ejemplo es el costo energético de traer el agua a la Cd. de México. El sistema comprende 11,900 Km de tuberías y 68 estaciones de bombeo [24]. Solamente el sistema del Cutzamala nos provee de 17 m^3 de agua por segundo (en realidad, la mayor parte del agua viene de pozo de bombeo, los cuales proveen [24] $60 \text{ m}^3/\text{s}$). Dado que esta debe subir unos 1000m de altura para cruzar la sierra que separa al DF del Valle de Toluca, podemos estimar la potencia necesaria calculando primero la energía potencial requerida,

$$dE = m_A gh = (\rho dt)gh \quad (34)$$

siendo g la gravedad, h la altura y m_A la masa de agua que pasa en un tiempo dt . De aquí, tomando en cuenta que 1 m^3 de agua pesa una tonelada,

$$P = \frac{dE}{dt} = \rho gh = (17 \times 10^3 \text{ kg})(10 \text{ m/s}^2) \times (1000 \text{ m}) = 170 \text{ MW} \quad (35)$$

lo cual requiere en KW-hora, unos $170000 \text{ KW} \times 3600 \text{ s} = 680 \times 10^6 \text{ Kw} - \text{h}$. En realidad, el sistema consta de 6 plantas de bombeo que en conjunto consumen 2280 millones de kilowatts cada hora, el equivalente al consumo de energía eléctrica de la ciudad de Puebla [24]. Notamos que nuestro cálculo da tres veces menos que el real; la diferencia se debe a la viscosidad del agua que disipa energía, especialmente en una tubería de cientos de kilómetros. Lo interesante es que nuestro cálculo da una idea bastante buena del reto energético de traer el agua.

Claramente, podemos apreciar que una crisis energética es al mismo tiempo una crisis alimentaria, y no sólo un problema de si se puede usar o no coche. El problema es que

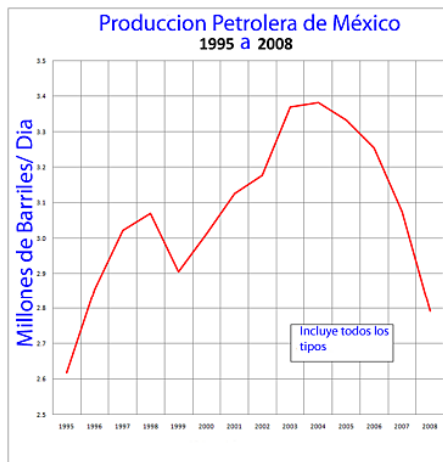


Figura 9: Producción petrolera de México en millones de barriles diarios.

según el Departamento de Energía de Estados Unidos, la producción mundial de energía debe aumentar en un 57% en los próximos 25 años para satisfacer la demanda prevista [25]. Al mismo tiempo, los costos de extracción de combustibles fósiles van en aumento y la opción nuclear al parecer está fuertemente cuestionada. Países como Japón han vivido de cerca esta dramática situación. Tras el accidente nuclear de Fukushima han decidido cerrar todos sus reactores nucleares, tratando de buscar soluciones más seguras y con una visión a largo plazo, aunque con un gran impacto en su economía. México obtiene el 37% de su energía del petróleo. En la figura 9 presentamos la producción petrolera de México. Podemos ver un descenso continuo de la producción. Un punto importante aquí es el costo de producción del barril. En pozos como Cantarell, este es mínimo, mientras que aumentan de manera considerable en los nuevos yacimientos de aguas profundas o Chicontepec. De hecho, se sabe que la producción de combustibles fósiles sigue la ley de Hubbert, es decir una campana Gaussiana. En el caso de México, el pico se alcanzó en el 2005, con reducciones anuales de hasta 2.3% de la producción. Si tomamos en cuenta el incremento continuo de la población, la producción de petróleo per cápita va en un rápido descenso con un costo por barril en aumento. De aquí podemos concluir que muchas de las políticas del país están equivocadas: en lugar de construir carreteras se debería fomentar el ferrocarril que resulta hasta 4 veces más eficiente energéticamente, las regiones de alta insolación solar deberán considerarse estratégicas, el reciclaje de agua debe ser obligatorio, etcétera. Debe agregarse que si bien la extracción de petróleo de las arenas bituminosas en Canadá y Estados Unidos han levantado dramáticamente la producción de combustibles, estos tienen un costo de producción mucho mayor con un impacto ecológico mucho más negativo.

Es interesante mencionar que el astrónomo soviético Nikolai Kardashev propuso al

consumo de energía como una medida para poner en perspectiva cósmica a las posibles civilizaciones [16]. En su clasificación hay 3 categorías. Las de tipo I usan toda la energía disponible en su planeta, las de tipo II la de su sol, y las de tipo III de toda la galaxia. Usando el consumo anual de energía, Carl Sagan propuso la fórmula [16],

$$K = \frac{\log_{10} MW}{10} \quad (36)$$

donde MW es la potencia usada en MegaWatts y K es el rango de Kardashev de la civilización. Usandola, estimó que nos encontramos en el rango de 0.7, mientras que si se toma en cuenta solamente la conversión de energía por fotosíntesis [16], se obtiene un 0.8.

Finalmente, el calentamiento global, vinculado al uso exagerado de los hidrocarburos, es parte fundamental de la ecuación. El aumento del nivel de los mares, la intensidad mayor de los huracanes, el uso del aire acondicionado, etcétera. harán más difícil sostener el consumo de energéticos. Al mismo tiempo, la gran pregunta que tantos energéticos no-renovables quedan con respecto al nivel de aumento de gases invernadero. Si estos se acaban en un período relativamente corto, el problema del calentamiento global se vería parcialmente resuelto.

La civilización humana en el Universo

Una pregunta recurrente es el papel la civilización terrestre en el Universo. Aunque al principio parecería una problemática mas propia de la ciencia ficción, lo cierto es que hay algunos elementos, desde luego muy polémicos, que permiten abordar la cuestión. Un ejemplo típico es el principio artrópico, el cual postula que las constantes físicas toman ciertos valores tales que puedan permitir la vida y una sociedad capaz de observarla [26]. Si la constante de estructura fina fuera ligeramente diferente, no existirían estrellas ligeras como el sol, y la vida pluricelular no habría tenido tiempo para desarrollarse [26]². Aunque parezca increíble, este principio sirvió a Fred Hoyle para proponer una corrección a las tablas de niveles energéticos del núcleo de Carbono, ya que debía existir una resonancia con la reacción Helio-Berilio de modo que el Carbono pudiera ser sintetizado en las estrellas y eventualmente, dar lugar a la vida. Este nivel fué medido posteriormente por un grupo de Caltech [26]. El principio artrópico tiene diversas variantes, como el fuerte o débil, pero lo cierto es que no existe un consenso de su validez, y muchos lo consideran como una tautología.

Otra teoría desarrollada por Karo Michaelian del Instituto de Física de la UNAM, indica que los animales son un mecanismo primordial para disipar entropía (S), ya que actúan como catalizadores para que las plantas y bacterias puedan incidir en el ciclo del agua [27]. La idea es que la producción neta de entropía en un tiempo dt viene dada por la diferencia entre la producción incidente a la tierra y la radiada, integrada sobre toda la banda de frecuencias ω ,

²Véase el capítulo "Evolución y materia compleja" de Octavio Miramontes, en este mismo libro.

$$P = \int_0^{\infty} \left(\frac{dS_{radiada}(\omega)}{dt} - \frac{dS_{incidente}(\omega)}{dt} \right) d\omega \quad (37)$$

Al parecer, la vida juega un papel fundamental al modificar el espectro de la parte radiada, aumentando la producción de entropía neta [27].

Otra faceta importante que fué mencionada en la introducción, es el flujo de energía libre. Esta energía, definida como $F = E - TS$, donde E es la energía interna, y S la entropía, contiene las dos entidades básicas que generan el orden o desorden, ya que existe una competencia entre E y S debida al signo menos. La ventaja de usarla como medida de la complejidad, radica en su menor ambigüedad comparada con la teoría de la información. Un estudio completo del flujo de energía libre, ha demostrado una evolución continua desde los átomos a los humanos [4]. Es interesante agregar que la tecnología aumenta de manera natural la complejidad medida de esta forma. Los circuitos de alta densidad presentan valores 4 órdenes de magnitud arriba de la complejidad humana, indicando que para continuar en el camino de una complejidad creciente, será necesario pasar a una tecnoespecie, híbrida entre humanos y máquinas. La sociedad humana parece ser un escalón en la evolución de la cada vez mas creciente complejidad observada en las islas de orden de un universo que acelera su expansión.

5. El dilema del futuro

Sea cual sea el papel de la civilización, al menos algunos aspectos del futuro lejano pueden ser vislumbrados. A nivel planetario, sabemos que dentro de 6 millones de años el sol empezará a crecer hasta llegar a la órbita de Mercurio. En ese momento, la tierra deberá empezarse a evacuar. Esta tarea requerirá enormes cantidades de energía, conocimiento, tecnología y organización. todas estas actividades implican un esfuerzo considerable a los ya de por si mermados recursos del planeta. Las sociedades menos sustentables son al mismo tiempo las grandes potencias espaciales. Con el estado actual de la tecnología, la sustentabilidad parecería estar peleada con el designio último de la civilización: dar el salto final hacia el espacio. Al mismo tiempo, la sustentabilidad parece ser la única salida a la supervivencia en el momento actual. He ahí el gran dilema al cual se enfrentarán las futuras generaciones.

Agradecimientos

Agradezco a M. del Castillo, S. Galam, K. Michaelian, J. Montemayor, D. Stauffer por sus valiosas opiniones sobre el tema.

6. Referencias

- [1] R. Penrose, *La nueva mente del emperador*. Grijalbo Mondoval, Madrid, 1991.

- [2] I. Prigogine and G. Nicolis, *La estructura de lo complejo*. Alianza Editorial, Madrid, 1994.
- [3] O. Miramontes, D. Boyer, and F. Bartumeus, "The effects of spatially heterogeneous prey distributions on detection patterns in foraging seabirds," *PloS one*, vol. 7, no. 4, p. e34317, 2012.
- [4] E. Chaisson, "Exobiology and complexity," in *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*, R. A. Meyers, Ed. Springer, Berlin, 2009.
- [5] Y. Bar-Yam, *Dynamics of complex systems*. Westview Press, Boulder Colorado, 1997.
- [6] H. Stanley, P. Gopikrishnan, V. Plerou, and L. Amaral, "Quantifying fluctuations in economic systems by adapting methods of statistical physics," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 287, no. 3, pp. 339–361, 2000.
- [7] A. Silva and V. Yakovenko, "Temporal evolution of the thermal and superthermal income classes in the USA during 1983-2001," *EPL (Europhysics Letters)*, vol. 69, no. 2, p. 304, 2007.
- [8] D. Fiaschi and M. Marsili, "Economic interactions and the distribution of wealth," *Econophysics and Economics of Games, Social Choices and Quantitative Techniques*, pp. 61–70, 2010.
- [9] V. Yakovenko and J. Rosser Jr, "Colloquium: Statistical mechanics of money, wealth, and income," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, no. 4, p. 1703, 2009.
- [10] C. Tsallis, "Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics," *Journal of statistical physics*, vol. 52, no. 1, pp. 479–487, 1988.
- [11] J. Bercher, "Tsallis distribution as a standard maximum entropy solution with 'tail' constraint," *Physics Letters A*, vol. 372, no. 35, pp. 5657–5659, 2008.
- [12] S. Fiske and H. Markus, *Facing social class: How societal rank influences interaction*. Russell Sage Foundation Publications, 2012.
- [13] S. Galam, *Sociophysics: A Physicist's Modeling of Psycho-political Phenomena*. Springer Verlag, Berlin, 2012.
- [14] E. Majorana, "Il valore delle leggi statistiche nella fisica e nelle scienze sociali, *Scientia*, Quarta serie, Febbraio-Marzo 1942 pp. 58. english translation in Ettore Majorana, the value of statistical laws in physics and social sciences," *Quantitative Finance*, vol. 5, p. 133, 2005.

- [15] J. P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertész, and A. L. Barabási, "Structure and tie strengths in mobile communication networks," *Proceedings of the National Academy of Sciences*, no. 18, pp. 7332–7336, 2007.
- [16] C. Sagan, R. Carbo, and M. Torres, *Comunicación con inteligencias extraterrestres*. Grupo Editorial Planeta, Barcelona, 1990.
- [17] E. Bonabeau, G. Theraulaz, and J. Deneubourg, "Mathematical model of self-organizing hierarchies in animal societies," *Bulletin of mathematical biology*, vol. 58, no. 4, pp. 661–717, 1996.
- [18] L. Lacasa and B. Luque, "Bonabeau hierarchy models revisited," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 366, pp. 472–484, 2006.
- [19] G. Naumis, M. del Castillo-Mussot, L. Pérez, and G. Vázquez, "Phase transition and diffusivity in social hierarchies with attractive sites," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 369, no. 2, pp. 789–798, 2006.
- [20] R. Axelrod, *The complexity of cooperation: Agent-based models of competition and collaboration*. Princeton University Press, 1997.
- [21] R. Florian and S. Galam, "Optimizing conflicts in the formation of strategic alliances," *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 189–194, 2000.
- [22] G. Naumis, F. Samaniego-Steta, M. del Castillo-Mussot, and G. Vazquez, "Three-body interactions in sociophysics and their role in coalition forming," *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 379, no. 1, pp. 226–234, 2007.
- [23] G. Pie, F. Bello, P. Morrison, and J. Winovsky, *La energía: Colección Scientific American*. Alianza Editorial, Madrid, 1975.
- [24] C. Tortajada, "Water management in Mexico City metropolitan area," *Water Resources Development*, vol. 22, no. 2, pp. 353–376, 2006.
- [25] M. T. Klare, *Planeta sediento, recursos menguantes: La nueva geopolítica de la energía*. Tendencias Editores, 2008.
- [26] A. Delsemme, *Les origines cosmiques de la vie*. Flammarion, Paris, 1995.
- [27] K. Michaelian, "Thermodynamic function of life," *arXiv:0907.0040*, 2009. [Online]: <http://arxiv.org/abs/0907.0040>

Econofísica

Ana M. Contreras y Hernán Larralde, Instituto de Ciencias Físicas, UNAM, México

1. ¿De qué se trata la Economía?

Todos hemos oído hablar de las crisis económicas, leemos noticias que informan sobre indicadores económicos como la inflación y el desempleo; sabemos que los precios de los productos están relacionados con la oferta y demanda, hemos oído hablar del neoliberalismo, de caídas de mercados, de futuros, opciones y portafolios financieros, pero pocos sabemos, bien a bien, de qué se trata la economía. Menos, todavía, sabemos que muchas herramientas y enfoques propios de la física hallan aplicaciones en el estudio y descripción de sistemas económicos y financieros. Ése es el tema que abarcaremos en el presente capítulo¹.

En términos generales, la economía estudia cómo las personas asignan e intercambian recursos y qué consecuencias tienen estas acciones sobre las decisiones y acciones de otras personas. A grandes rasgos, la economía se divide en las siguientes áreas:

1. Microeconomía: Es la rama de la economía en donde se estudian las decisiones de asignación e intercambio de recursos a nivel de agentes individuales y/o firmas. Por ejemplo, la determinación de precios de bienes de intercambio, la ubicación de negocios, las estrategias de competencia entre firmas, entre muchos otros.
2. Macroeconomía: Se refiere a la descripción agregada de las actividades económicas. Por ejemplo, la productividad y el consumo por sectores en una sociedad, en una región o en todo el país. En esta área caen los estudios sobre la inflación, recesión, producto interno bruto, empleo, etcétera.
3. Finanzas: Se relaciona con las decisiones de asignación de recursos en el tiempo bajo condiciones de riesgo (incertidumbre). En particular podemos mencionar la descripción de las actividades que se desarrollan en los mercados donde se compran y venden instrumentos financieros como acciones y bonos; instrumentos derivados

¹ Véase también "Física y Sociedad" de Gerardo García Naumis, en este mismo volumen.

como opciones, futuros y *swaps*; o los mercados de divisas. Pero también abarca otras áreas, como las finanzas personales, donde las decisiones de asignación de bienes en el tiempo determinan, por ejemplo, los fondos de retiro, las inversiones familiares, etcétera.

De lo anterior es evidente que el campo de estudio de la economía es extremadamente amplio, y de profundas repercusiones en todos los ámbitos del quehacer humano. Esto hace realmente sorprendente el hecho de que el grueso de la economía se base en una hipótesis fundamental: Las decisiones de los participantes en todo sistema económico se toman de manera “racional”. Específicamente, cada agente toma sus decisiones buscando maximizar su “felicidad” (utilidad) [1]. Tal vez vale la pena enfatizar que esta hipótesis no hace referencia a qué es lo que hace feliz a cada persona, después de todo, “sobre gustos no hay nada escrito”, sólo afirma que los agentes buscan maximizar aquello que los hace feliz, cualquier cosa que esto sea.

Evidentemente, esta hipótesis es solo una aproximación al comportamiento real de las personas, pero suena plausible que en general, sí represente bastante bien el comportamiento “típico” de los actores en la economía. A partir de esta hipótesis, por ejemplo, se puede predecir el efecto que tienen los impuestos sobre el precio y volumen de ventas de un producto, o que los mercados equilibran en un estado “óptimo” para todos los participantes [2].

En finanzas, donde se incorpora la variable temporal al proceso de decisión, además de la hipótesis de agentes racionales, se hace frecuentemente otra hipótesis: que los mercados son “eficientes”. Esto significa que se supone que toda la información sobre un producto que pueda proveer la oportunidad de obtener una ganancia sin riesgo, incentiva acciones que “inmediatamente” modifican el precio del producto, cancelando esa oportunidad. Esto significa que los precios cambian reflejando en cada instante toda la información disponible. De manera muy explícita: esta hipótesis significa que los precios son procesos Markovianos, cuyos cambios son independientes de la historia.

Indudablemente, los alcances e innumerables éxitos de los modelos económicos son extraordinarios. Sin embargo, es claro que todavía existen problemas por resolver, como es evidente a la vista de las frecuentes crisis económicas que nos preocupan y afectan a todos. Esto hace importante identificar y entender qué es lo que ha fallado, o qué es necesario implementar en los modelos económicos para, idealmente, evitar estas crisis, o en su defecto, predecirlas y dar los pasos para resolverlas eficientemente.

Además, no sólo se ha fallado en lograr predecir y evitar las crisis financieras, también se ha fallado en la predicción del impacto que las crisis tienen tanto a escala local como a escala global. Esto es debido a que los modelos económicos frecuentemente no contemplan la existencia siquiera de los eventos que desatan las crisis.

Un ejemplo donde esta omisión es patente, es la fórmula de Black-Scholes, a la que han culpado de estar relacionada con las recientes crisis bancarias [3]. Dicha fórmula sirve para ponerle precio a las *opciones*, que son instrumentos financieros (derivados) usados

por firmas para intentar “cubrirse” (disminuir riesgos). Las opciones son contratos que otorgan la opción de comprar o vender determinado producto a un precio preestablecido en un tiempo dado [4]. Esta ecuación fue presentada por primera vez por Fischer Black y Myron Scholes en 1973 [5], y fue desarrollada y justificada matemáticamente por Robert C. Merton, mereciendo el Premio Nobel de Economía en 1997. Como en todo modelo económico, en su derivación se hicieron las hipótesis usuales que, como mencionamos arriba, a primera vista parecen razonables: se eliminó la oportunidad de arbitraje, es decir, la oportunidad de poder aprovechar diferencias de precios entre mercados para obtener ganancias; se asumió una tasa de interés libre de riesgo constante y no se tomaron en cuenta costos de transacción. Sin embargo, la simplificación con consecuencias más importantes fue la de asumir que el precio del producto que está en juego en el contrato, sigue un movimiento Browniano geométrico (como el de la figura 1), con arrastre y volatilidad constante [6]. En otras palabras, esto significa que el modelo asume que el logaritmo del cambio de precio está descrito por una distribución gaussiana, y por lo tanto, que la ocurrencia de eventos extremos, como ocurre en una crisis, es prácticamente despreciable.

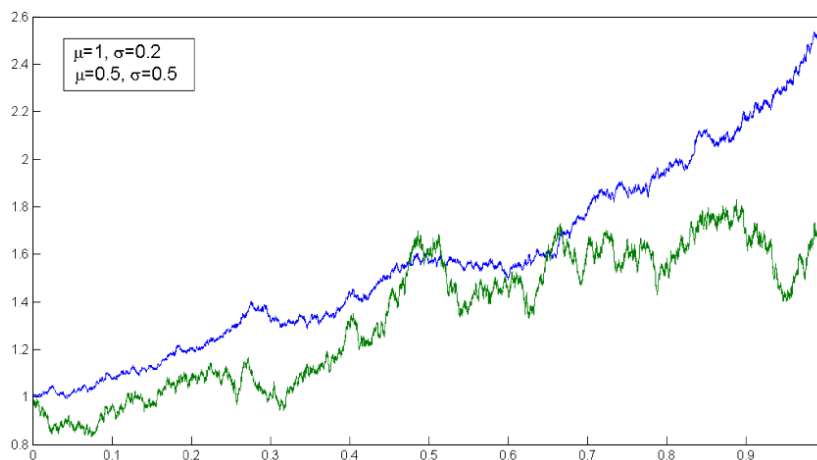


Figura 1: Muestras de caminatas aleatorias que siguen un movimiento Browniano geométrico. Para distinguir el efecto de las variables estamos mostrando la posición contra el tiempo de una caminata con mayor arrastre μ en azul, y en verde con una mayor desviación estándar (o volatilidad) σ .

Pero las crisis económicas sí ocurren. Por ejemplo, el 19 de Octubre de 1987, en el llamado *Black Monday*, el mercado financiero mundial perdió más del 20% de su valor en unas cuantas horas (ver la figura 2). Un evento de este tipo era esencialmente imposible bajo las condiciones del modelo. Otra situación en donde se omitió la posibilidad de que ocurriera un evento raro ocurrió en la crisis del 2008, desatada por el colapso de

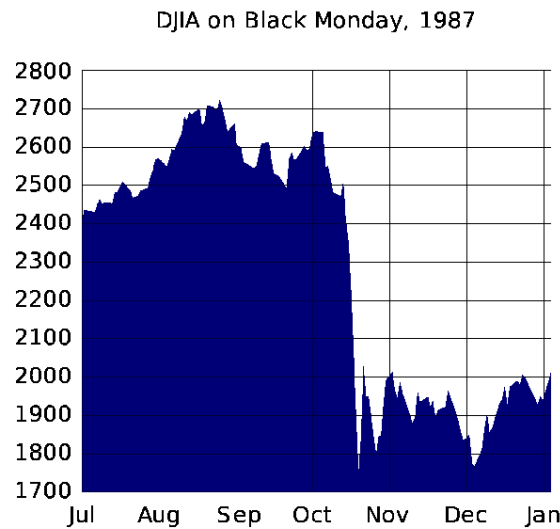


Figura 2: Caída del índice Dow Jones Industrial Average, en 1987, cuando los mercados mundiales se desplomaron en un día conocido como *Black Monday*.

la “burbuja” inmobiliaria. Esta crisis parece haberse desencadenado tras el desarrollo de un producto financiero para el cual subestimaron la probabilidad de que, de manera simultánea, muchos prestatarios no pagaran sus deudas [7], y eso fue justamente lo que ocurrió.

Evidentemente los economistas se han dado cuenta de que los supuestos sobre los que descansa la teoría económica podrían no ser del todo correctos. De hecho, economistas tan reconocidos como Paul Krugman y Joseph Stiglitz, ambos premios Nobel de Economía y activos participantes tanto en críticas como en soluciones económicas, han expresado su descontento con algunas de las bases teóricas de la economía [8, 9].

De hecho, en mayor o menor grado, todos los supuestos fundamentales de la economía han sido cuestionados. Por ejemplo, se ha puesto en duda la hipótesis de agentes racionales. De hecho, hay evidencia de que en ocasiones efectivamente sí se toman decisiones de forma “irracional”; decisiones más orientadas por la aversión al riesgo que por la búsqueda de máxima utilidad, y otras decisiones tomadas siguiendo un comportamiento gregario (por presión social y *herding*), como en la caricatura de la figura 3. Identificar hasta qué grado se toman decisiones gregarias es importante para tratar de entender ciertos eventos en el mercado financiero [10], en el que también se han hecho análisis empíricos [11], ya que podrían dar lugar a una “irracionalidad colectiva”, a pánicos y a grandes colapsos financieros [12].

Otros posibles defectos en los fundamentos de la economía son, por un lado, el enfoque del “agente representativo”, el cual ignora la diversidad en el mundo real y modela la



Figura 3: Caricatura ya clásica de Kal (1989), que ilustra el comportamiento gregario y la irracionalidad de agentes en la sala de operaciones bursátiles.

economía como si el mundo estuviese poblado por agentes y firmas “promedio”; en vez de contemplar que puede haber diferentes intereses y capacidades en juego, y por lo tanto una diversidad de objetivos y estrategias actuando simultáneamente [9]. Por otro lado, también se ha cuestionado la hipótesis de que los mercados son estables, eficientes y auto-regulados por naturaleza [13], cuando parece evidente que el estado en que se encuentran frecuentemente, difícilmente podría identificarse como un estado de equilibrio.

2. Los puentes entre la Física y la Economía

Habiendo discutido a muy grandes rasgos de lo que se trata la economía, en qué se basa y cuáles son sus puntos débiles, tal vez sea más fácil darnos cuenta en qué pueden contribuir otras áreas de la ciencia, en especial la física.

El interés de los físicos en economía en general, y sobre todo en tratar de entender y describir los mercados financieros, despegó con la disponibilidad de enormes cantidades de datos financieros en los 80's; cuando muchos físicos y matemáticos fueron contratados en *Wall Street* para analizar el mercado.

Más tarde, en los años 90's, con el motivo de archivar los artículos de físicos en dicho

campo, H. E. Stanley [14] denomina con el nombre de “Econofísica” a esta área multidisciplinaria que intenta combinar física, economía, matemáticas y finanzas. Sin embargo, la conexión entre economía y física es muy vieja, y los caminos de ambas disciplinas se han cruzado en varias ocasiones [7]. Por ejemplo fue Daniel Bernoulli, el descubridor del principio de Bernoulli en hidrodinámica, quien introduce el concepto de “utilidad” para describir las preferencias de la gente. De manera contrapuesta, a los economistas les gusta hacer notar que en el contexto de finanzas, Louis Bachelier resolvió el problema matemático del movimiento Browniano antes que Einstein. Específicamente, Bachelier, desarrolló un modelo de caminata aleatoria para describir la dinámica de los precios [15]. Si bien el trabajo de Bachelier parece haber pasado desapercibido hasta muchos años más tarde que resurgió el modelo de caminata aleatoria en relación con la hipótesis de mercados eficientes, esta línea de modelación desemboca en la fórmula de Black y Scholes, que como habíamos mencionado, permite asignar un precio, y por lo tanto abrir el mercado de las opciones. La contraparte física, el movimiento browniano, y su corroboración experimental, que también mereció un Premio Nobel, terminaron de disipar las dudas respecto a la naturaleza molecular de la materia.

De hecho, la física estadística tradicionalmente busca ser el puente entre la física microscópica y la fenomenología macroscópica. Esta disciplina trasciende la suposición, a la postre errónea, de que la materia está formada por moléculas sujetas a las mismas leyes de la física que todos los demás cuerpos. La descripción estadística de la naturaleza incorpora procesos estocásticos, como el término de ruido de la ecuación de Langevin para describir movimiento Browniano, que buscan representar el complejísimo y fundamentalmente impredecible efecto de las innumerables interacciones a las que cada partícula está sujeta. En principio, este enfoque es capaz de extenderse más allá de los sistemas en equilibrio y puede abarcar la descripción de la cinética de sistemas caracterizados por tener elementos impredecibles, prácticamente indistinguibles del azar. Este camino culmina en lo que actualmente se denomina sistemas complejos.

Desde la perspectiva de la física se ha podido avanzar en el entendimiento de este tipo de sistemas, denominados complejos, en los que, entre otras cosas, pequeñas perturbaciones pueden llevar a efectos enormes, y donde los estados que alcanza el sistema emergen de fenómenos colectivos entre los componentes. Este tipo de sistemas frecuentemente presentan eventos extremos, que eventualmente podrían explicar tanto los temblores/terremotos [16] como las crisis mundiales [17]. En efecto, la dinámica de los sistemas económicos surge de la actividad de agentes, en ocasiones un gran número de ellos, cuyas decisiones afectan las opciones y perspectivas de otros agentes, todos con incentivos y objetivos más o menos heterogéneos. Sistemas de este tipo tienen los ingredientes y exhiben las propiedades de los sistemas complejos, y por lo tanto, las herramientas de la física estadística, procesos estocásticos y dinámica no lineal pueden ser de mucha utilidad para su análisis.

3. ¿Qué estudia la Econofísica?

Son varios los temas que están incluidos dentro del campo de la Econofísica, y éstos abarcan problemas tanto de macro y micro-economía como de finanzas. En algunos de estos temas, al igual que en la física estadística, el objetivo principal es tratar de extraer y entender las propiedades de los fenómenos económicos a partir de la dinámica microscópica de los agentes que participan, en otros temas se busca hacer una caracterización precisa del fenómeno en cuestión. En lo que resta del capítulo discutiremos los elementos de algunos de los temas más activos del campo, y mencionaremos otros que pueden ser relevantes en el futuro. Pero, sin lugar a dudas, de todos los temas que hasta la fecha han sido estudiados desde la perspectiva de la econofísica, el más popular es el relacionado con el análisis de los mercados financieros. Con este tema empezaremos.

Finanzas cuantitativas

Caracterización estadística de los cambios en precios de activos financieros

Aprovechando la enorme cantidad de información que proviene de la compra y venta de acciones en los varios mercados del mundo diariamente, especialmente ahora que es posible disponer de los precios y volúmenes de transacciones que ocurren en los mercados financieros en escalas de milisegundos [18], algunos físicos, con la experiencia adquirida analizando datos en procesos estocásticos y diversos sistemas complejos, han buscado contribuir en este tema.

La secuencia de precios de determinada acción (u otro instrumento financiero) que se almacena se conoce como una *serie de tiempo*, y su análisis busca identificar tendencias, e idealmente, hacer predicciones de su comportamiento al futuro. El enfoque típico consiste en tratar de encontrar el modelo que mejor reproduzca las propiedades estadísticas empíricas, entre éstas destacan los llamados *hechos estilizados*.

Los hechos estilizados son regularidades cualitativas que se observan esencialmente para cualquier acción, en cualquier mercado, en (casi) cualquier escala temporal. Entre ellas podemos mencionar:

1. Las distribuciones de cola ancha de los cambios relativos en los precios (*returns*): Si denotamos p_t al precio de un instrumento financiero al tiempo t . El cambio relativo en un intervalo de tiempo τ estará dado por:

$$r_\tau(t) = \frac{p(t + \tau) - p(t)}{p(t)} \approx \log(p(t + \tau)) - \log(p(t)); \quad (1)$$

Empíricamente se observa que la distribución de esta cantidad no es una distribución gaussiana, sino que está caracterizada por tener una cola que decae más lentamente que una exponencial [19]. En la actualidad, muchos estudios empíricos con diferentes series de datos [20] que corroboran esta observación se pueden encontrar

en la literatura. A pesar de ser éste uno de los hechos estilizados mejor establecidos, aún existen varias propuestas para la forma de la distribución del cambio de precios, como distribuciones de Lévy por Rosario Mantegna y H. E. Stanley [21] u otras distribuciones con leyes de potencia [22].

2. Los cambios relativos en los precios tiene autocorrelación cero: La función autocorrelación está definida como:

$$\rho(T) = \langle r_\tau(t+T)r_\tau(t) \rangle - \langle r_\tau \rangle^2. \quad (2)$$

Hay amplia evidencia de que la autocorrelación entre los valores de los cambios en los precios decae rápidamente a cero, de manera que el precio es, efectivamente, un proceso Markoviano, en concordancia con la hipótesis de mercados eficientes.

3. Agrupación de la volatilidad: Este hecho se refiere a la observación de que el valor absoluto, o el cuadrado de los cambios de precios, sí parecen estar correlacionados en el tiempo; y dicha función decae lentamente. Esto apunta a que los cambios de precios no están idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo, y que grandes cambios en los precios tienden a ser seguidos por cambios grandes durante un intervalo de tiempo.
4. Normalidad de agregación: Esto significa que cuando uno incrementa la escala de tiempo para el análisis de datos (por ejemplo la τ en el cambio de precio), las distribuciones se acercan más a la forma gaussiana. Esto es, la forma de la distribución depende de la escala de tiempo [20].

Para una revisión completa de este tipo trabajos, desde el punto de vista de la física estadística, el libro de Bouchaud [23] es una opción excelente. Además de las propiedades arriba mencionadas, otras características como la correlación entre volumen y volatilidad (la desviación estándar del cambio relativo de precios), el escalamiento y el exponente de Hurst han sido estudiados en los datos financieros [24].

Modelos teóricos de mercados financieros: El libro de órdenes

Como hemos mencionado con anterioridad, en la construcción de modelos de mercados financieros hay aspectos que habían sido soslayados, entre éstos destaca la presencia de distribuciones de cambios de precio con colas largas, que implica la posibilidad de eventos raros. Esto significa que los mercados pueden presentar grandes fluctuaciones y son susceptibles de tener caídas catastróficas [25, 26]. Además, los modelos deben de reproducir los hechos estilizados que caracterizan a los mercados. Una posibilidad interesante sería que estos aspectos surgieran a partir de la descripción adecuada de los eventos elementales del mercado, es decir, los procesos a través de los cuales se compran y venden los instrumentos financieros: El libro de órdenes.

En la actualidad, la mayoría de las acciones en mercados importantes como London Stock Exchange, Paris Bourse, DAX, etcétera; son vendidas y compradas electrónicamente a través de un sistema de doble subasta, en el cual los participantes muestran públicamente sus intenciones de vender y/o comprar, el volumen y precio que están dispuestos a pagar o al que están dispuestos a vender. Estas ofertas y demandas son almacenadas en un "Libro de órdenes" central. Hoy en día en que las órdenes son electrónicas, es posible llevar registro de la aparición y ejecución de órdenes en intervalos de hasta milisegundos. En la Fig 4, mostramos las mejores ofertas de compra y venta para las acciones de Bayer AG, como sucedían a intervalos de dos segundos un día de diciembre del 2011. Los datos fueron grabados de Xetra, el sistema electrónico de la bolsa alemana (DAX).

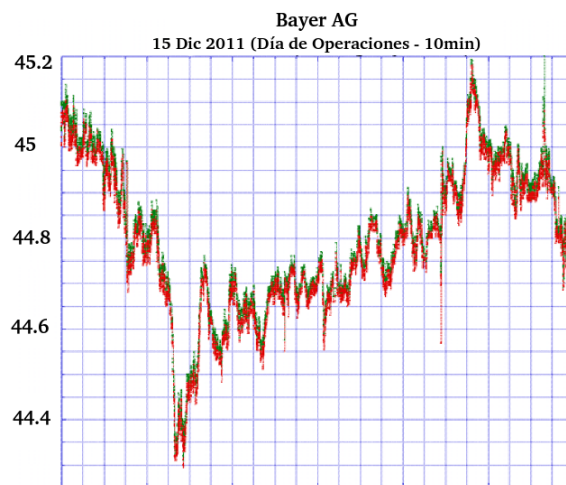


Figura 4: Precio (en euros) de Bayer AG contra tiempo, durante un día de operaciones (8-16:30 horas). El precio de la mejor oferta de compra (verde) y venta (rojo) se registra cada dos segundos. La diferencia entre estos valores se llama "spread".

Las órdenes se pueden diferenciar entre "limit orders", que son los pedidos de compra o venta que se registran a un precio específico y que quedan en "cola" hasta que otro participante acepta hacer la transacción al precio propuesto; y los "market orders" que son las órdenes de compra o venta al mejor precio disponible en el libro de órdenes en ese momento, dando lugar a una transacción inmediata.

Para tener más clara la dinámica del libro de órdenes, en la figura 5 (tomada de [27]) se pueden observar todas las órdenes de compra y venta (asks y bids) durante un día del año 2001 para las acciones de GlaxoSmithKline (del London Stock Exchange). El precio instantáneo de la acción, es decir, el precio al que ocurren las transacciones, corresponde al de las "mejores" órdenes en ese momento. Las demás órdenes se quedan en fila, en espera de que el precio al que se ejecutan las compra/ventas las alcance. La variación en el tono de rojo (compras) y azul (ventas), representa el volumen de las transacciones

propuestas a cada precio.

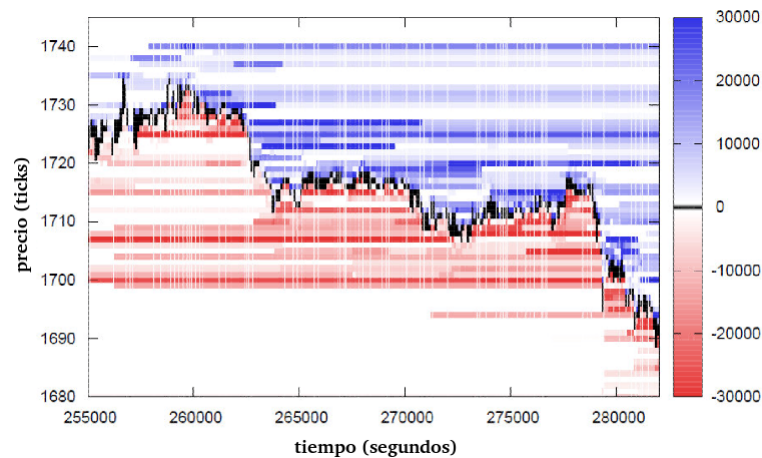


Figura 5: Libro de órdenes para GlaxoSmithKline (GSK) durante un día de operaciones bursátiles del 2001 (escala temporal en segundos). En negro se muestra el *spread*, en rojo todas las *limit orders* de compra (a mayor tonalidad de rojo, mayor volumen de compra), y en azul el equivalente para las *limit orders* de venta. Figura tomada de la referencia [27].

Han habido varios intentos para modelar el libro de órdenes, buscando reproducir estadísticamente los datos empíricos disponibles y los hechos estilizados que los datos reales satisfacen. Entre las variables que juegan un papel importante en este proceso están el flujo de órdenes, los tiempos de llegada de las órdenes, el volumen de los pedidos, el perfil del libro de órdenes, entre otras. Una revisión de las estadísticas más interesantes del libro de órdenes se puede encontrar en Ref [28]. Entre los principales resultados empíricos sobre el comportamiento del libro de órdenes podríamos mencionar los siguientes: la distribución del volumen de las órdenes decae con una ley de potencias con exponente $1 + \mu \sim 2$ [29]; las órdenes se colocan en una distribución amplia alrededor del precio instantáneo de transacción, caracterizada por un exponente que varía de un mercado a otro ($1 + \mu \sim 1.6$ para la Bolsa de París, ~ 2 para la de Nueva York y ~ 2.5 para Londres); y las órdenes son canceladas con una distribución de tiempos de espera con ley de potencia con exponente $1 + \mu \sim 2.1$ y ejecutadas con exponente $1 + \mu \sim 1.5$ [18].

Entre las contribuciones pioneras para modelar el libro de órdenes figura el modelo de Bak [30], que está basado en la idea de creación y aniquilación de partículas: $A + B \rightarrow 0$. En este modelo, los precios de compra y venta son vistos como partículas que se mueven difusivamente y se aniquilan al encontrarse (que representa una transacción). Conforme las partículas son eliminadas es necesario introducir más partículas al sistema para conservar la concentración. Este trabajo es muy importante por su papel seminal y porque se pueden obtener muchos resultados de manera analítica. Sin embargo, no es un modelo realista; en particular, no hay ningún motivo para pensar que los precios propuestos en

las órdenes se muevan de manera difusiva. Otros resultados importantes aparecen en el trabajo de Stigler [31], quien llevó a cabo las primeras simulaciones del libro de órdenes, y en cuyo algoritmo los pedidos se generaban aleatoriamente, y quedaban en “cola”, esperando hasta que otra orden los igualara, y entonces se eliminaban. Más tarde, Maslov [32] introdujo las órdenes de mercado, las cuales se ejecutan inmediatamente al mejor precio disponible en ese momento, y lo cancelan. Posteriormente Challet y Stinchcombe [33] incluyen la posibilidad de cancelar órdenes, para completar un modelo más realista del libro. Sin embargo, ninguno de estos modelos ha ajustado los resultados empíricos satisfactoriamente [34].

Los trabajos mencionados son los más clásicos, pero muchos más pueden encontrarse en la literatura de estos dos últimos años [35–40]. Una compilación reciente de los trabajos relacionados en el tema puede encontrarse en [41].

Matrices de correlación y correlaciones cruzadas

Otro tema en que el que la caracterización estadística del comportamiento de las series de tiempo financieras es de suma importancia es en la construcción de “portafolios”. Los portafolios son combinaciones de instrumentos con los que se busca disminuir el riesgo de inversión, esto es, se busca “cubrir” contra la posibilidad de pérdidas. Para lograrlo se requiere identificar instrumentos que varíen en direcciones opuestas uno del otro. En este sentido, en vez de las correlaciones temporales, que de todas maneras se supone que no existen en los mercados eficientes, para la construcción de portafolios hay que considerar las correlaciones (o anticorrelaciones) entre distintos instrumentos. Una herramienta que puede indicar la existencia de codependencia entre instrumentos financieros, así como develar la existencia de sutiles relaciones temporales en el historial de precios de cada instrumento, surge no de los métodos de la física estadística, sino del ámbito de la mecánica cuántica. Allí se observó que las propiedades de los espectros de sistemas clásicamente caóticos eran similares a los espectros de eigenvalores de matrices cuyas entradas eran variables aleatorias. Estas propiedades difieren dependiendo de cómo se escogen las variables, así como de las propiedades de simetría de la matriz. Estos resultados se pueden comparar, por ejemplo, con la matriz de covarianza de un instrumento, o la matriz de correlación cruzada entre instrumentos distintos [42].

Teoría de juegos y el juego de minorías

Para estudiar el proceso detallado de la toma de decisiones, sobre todo cuando las decisiones que se toman afectan a otros participantes del sistema, se puede recurrir a la teoría de juegos. De hecho, la teoría de juegos tiene su impulso inicial precisamente en referencia a sus aplicaciones económicas con el libro “Theory of Games and Economic Behavior” por John von Neumann y Oskar Morgenstern [43]. En esta área, un problema que ha sido extensamente estudiado desde la perspectiva de la física es el que se conoce como “Juego

de minorías". Este juego busca capturar, de manera simplificada, el proceso de decisión en un mercado financiero, en donde, por lo general, las decisiones *correctas* dependen de qué hayan decidido los demás participantes del mercado [44]. En la versión original de este juego, cada participante debe decidir entre dos opciones, digamos comprar o vender un bien en el mercado. La particularidad del juego consiste en que la decisión redituable es aquélla que coincide con la de la minoría de los participantes. La justificación de esta regla es que, si la mayoría de los participantes decide vender, por ejemplo, entonces los compradores, que son menos, pueden adquirir el bien a un precio bajo. Si, en cambio, la mayoría de los participantes decide comprar, entonces aquéllos que decidieron vender podrán hacerlo a precios altos. Sin embargo, por definición, dado que es la minoría de los participantes los que pueden ganar el juego, es más probable perder que ganar. Si este juego se repite en múltiples ocasiones, entonces los participantes pueden tratar de formular estrategias que les reditúen máxima ganancia, o, si no, mínimo riesgo, o ambos. En general, estas estrategias que se basan en la historia de los resultados previos, son un elemento inherente de heterogeneidad. Dependiendo entonces de la naturaleza de las estrategias de los participantes, así como del número de participantes en el juego, este modelo de decisión puede dar lugar a comportamientos colectivos inesperados [45].

Distribución espacial de tiendas

Otra área de aplicación de la teoría de juegos en la descripción de los procesos de toma de decisiones, concierne al problema de distribución espacial de tiendas y otros tipos de diferenciación entre negocios [46]. Es un lugar común decir que la ubicación de un negocio es un factor fundamental para que éste prospere. De hecho, hay compañías a las que puedes contratar para llevar a cabo la selección de ubicaciones óptimas para un negocio. Sin embargo, es notable que frecuentemente uno halle varias joyerías juntas, en una o dos cuadras de una ciudad y que éstas prosperen como negocios. En cambio, es muy raro encontrarse con un agregado similar de farmacias. Más bien, para prosperar, las farmacias parecen requerir ubicarse lejos unas de otras. Este fenómeno está ilustrado en la figura 6, que muestra la ubicación de farmacias y joyerías cerca del centro de la ciudad de México. Bajo la suposición de que los dueños de los negocios, tanto de joyerías como de farmacias llevan a cabo la estrategia que maximiza sus ganancias, es decir, haciendo la hipótesis de que los dueños son agentes racionales, resulta interesante que dependiendo del giro, las estrategias sean tan diferentes. De igual manera, las galerías de arte tienden a agregarse, así como las tiendas de vestidos de novia y las tiendas de libros usados; mientras que las panaderías, al igual que las farmacias, tienden a separarse. Este comportamiento, que recuerda a las transición de fase, surge de la competencia entre las tiendas por atraer al mayor número de clientes, al mismo tiempo que busca cobrarles lo más posible por su producto. Estas estrategias dependerán del comportamiento de los clientes, y dan lugar a interacciones efectivas de repulsión o atracción entre las distintas tiendas de cada giro.

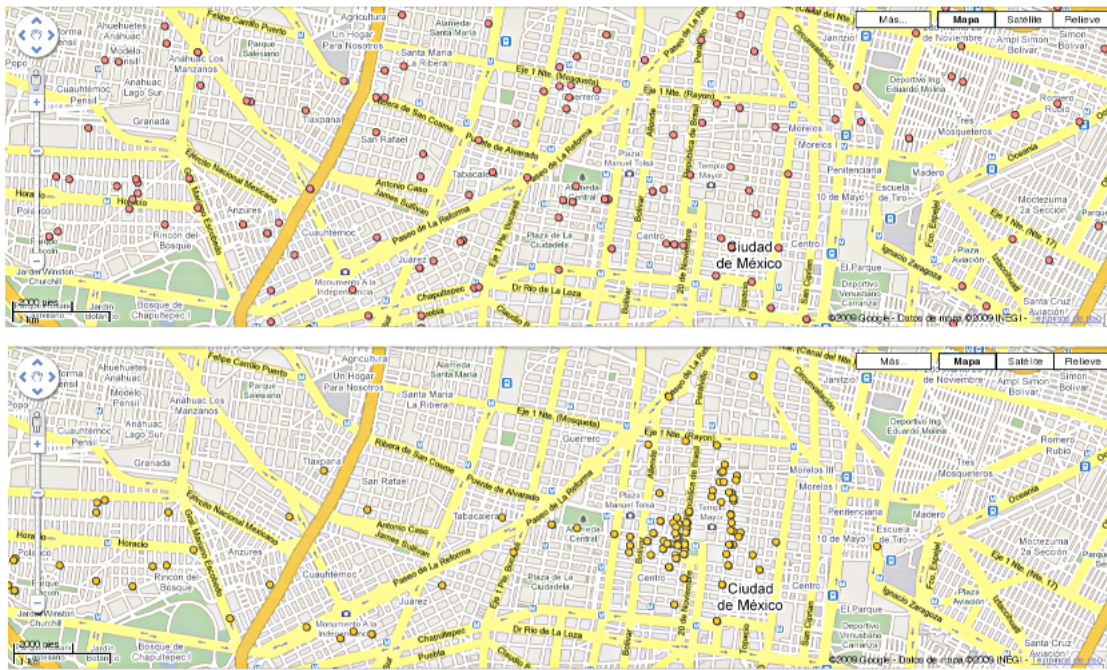


Figura 6: Distribución de ubicaciones de farmacias y joyerías cerca del centro de la Ciudad de México. Arriba se muestran las farmacias, que no se agregan entre sí; abajo las joyerías, que se ubican muy cerca unas de otras. Imagen cortesía de Google Maps©.

¡Y mucho más!

Necesitaríamos todo un libro para agotar los temas en los que la física ha intentado contribuir en economía, y otro tanto para cubrir los temas en los que pueda influir en el futuro. Por ejemplo, está el problema de tratar de entender los factores detrás de la distribución de riquezas. A principios del siglo pasado, el italiano Vilfredo Pareto observó que la distribución de riquezas en distintos países y en distintas épocas estaba bien descrita por una ley de potencia. Evidentemente, este tipo de resultados de carácter “universal” son muy atractivos para los físicos. En particular porque las leyes de potencia de tipo universal aparecen de manera natural en los estados críticos de sistemas de partículas interactuantes en mecánica estadística, y trae consigo otros fenómenos característicos, como correlaciones de largo alcance, etcétera. De hecho, esta similitud probablemente haya motivado varios modelos sencillos de intercambio entre agentes, sin producción de riquezas, que no han sido muy del agrado de los economistas [47].

Otro tema que se vislumbra como un buen candidato para una colaboración fructífera

entre la física y la economía es el de redes complejas². El fenómeno económico que se necesita entender es el hecho de que las crisis económicas se contagian de una región a otra, y en ocasiones, al mundo entero. Una posible explicación de este fenómeno es que los bancos e instituciones financieras de distintas regiones están relacionados: son filiales unos de otros, o tiene vínculos de otra índole, de manera que están “conectados” entre sí, como se muestra en la figura 7. Entonces, cuando una crisis regional impide a un banco cubrir sus deudas, los bancos acreedores también pueden enfrentarse a problemas de falta de liquidez, suspender el otorgamiento de créditos, abriendo las puertas a una crisis en su propio país. Así, cada banco puede propagar el problema a sus filiales y socios como una epidemia propagándose en una red compleja, un problema que ha sido ampliamente estudiado desde la perspectiva de la física [48].

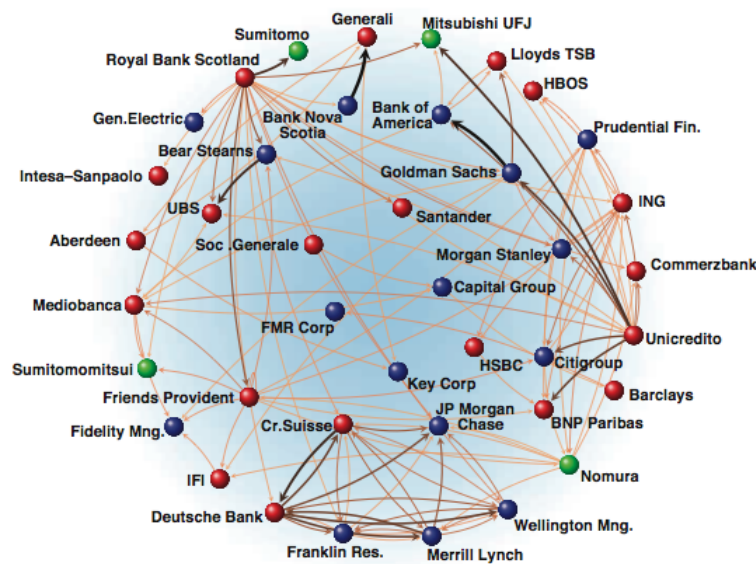


Figura 7: Redes económicas, que muestran las relaciones entre instituciones financieras, que se forman a través de propiedades, deudas o préstamos y otros tipos de intercambios. En esta figura, los nodos de la red son las firmas de diferentes tamaños y capital. Fuente: [49].)

Hasta la fecha, los economistas no están muy impresionados con el trabajo de los físicos en la economía [50], con la posible excepción de las finanzas cuantitativas, que es un área más abierta, cuyos practicantes gustan de modelos de fluctuaciones comunes a los que se usan en física. De hecho, la aceptación del enfoque de la física en finanzas posiblemente ha funcionado porque es un área que funciona un poco como la física: con grandes cantidades de datos que pueden ser analizados, y que sirven como la contraparte empírica a la teoría. Sin embargo, en general, los economistas se han visto renuentes a aceptar

² Véase, de Lucas Lacasa, el capítulo “Redes, Interacciones, Emergencia” en este volumen.

los nuevos enfoques que propone los físicos, pero estamos seguros de que conforme se logren más avances, y conforme los físicos aprendan más economía, el vínculo entre ambas disciplinas se volverá más estrecho y se logrará resolver problemas que, por lo pronto, ni una de las dos disciplinas puede resolver por sí sola.

4. Referencias

- [1] S. Landsburg, *The Armchair Economist*. The free press, 1993.
- [2] —, *Price theory and applications*, 2nd ed. Dryden Press, 1992.
- [3] I. Steward, "The mathematical equation that caused the banks to crash," *The Guardian* (online), UK, feb 2012.
- [4] J. Hull, *Options, Futures and Other Derivatives*. Prentice Hall, 2008.
- [5] F. Black and M. Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, vol. 81, no. 3, 1973.
- [6] P. Wilmott, *Paul Wilmott on Quantitative Finance*. Wiley, 2006.
- [7] B. Sharma, S. Agrawal, M. Sharma, D. Bisen, and R. Sharma, "Econophysics: A brief review of historical development, present status and future trends," arXiv:0810.5306, 2011.
- [8] P. Krugman, "How did economists get it so wrong?" *The New York Times* (online), sept 2009.
- [9] E. Zurich, "Predicting economic crises with "econophysics"," *Sciencedaily.com*, may 2010.
- [10] R. Cont and J.-P. Bouchaud, "Herd behavior and aggregate fluctuations in financial markets," *Macroeconomic Dynamics*, vol. 4, pp. 170–196, 2000.
- [11] F. Lillo, E. Moro, G. Vaglica, and R. Mantegna, "Specialization of strategies and herding behavior of trading firms in a financial market," *New J. Phys.*, vol. 10, p. 043019, 2008.
- [12] J.-P. Bouchaud, "Crises and collective socio-economic phenomena: cartoon models and challenges," arXiv:1209.0453v1, 2012.
- [13] E. Fama, "The behavior of stock market prices," *Journal of Business*, vol. 38, pp. 34–105, 1965.

- [14] R. Mantegna and H. Stanley, *An Introduction to Econophysics*. Cambridge University Press, 2000.
- [15] L. Bachelier, *Theory of Speculation, translation in: P.H. Cootner (Ed.), The Random Character of Stock Market Prices*. MIT Press, 1964.
- [16] H. Saleur, C. Sammis, and D. Sornette, "Discrete scale invariance, complex fractal dimensions, and log-periodic fluctuations in seismicity," *Journal of Geophysical research*, vol. 101, no. B9, pp. 17–661, 1996.
- [17] D. Sornette, "Predictability of catastrophic events: material rupture, earthquakes, turbulence, financial crashes and human birth," *Proc. Nat. Acad. Sci.*, vol. 99, no. 1, pp. 2522–2529, 2002.
- [18] A. Chakraborti, I. Toke, M. Patriarca, and F. Abergel, "Econophysics review: I. empirical facts," *Quantitative Finance*, vol. 11, no. 7, pp. 991–1012, 2011.
- [19] B. Mandelbrot, "The variation of certain speculative prices," *Journal of Business*, vol. 26, pp. 394–419, 1963.
- [20] R. Cont, "Empirical properties of assets returns: stylized facts and statistical issues," *Quantitative Finance*, vol. 1, pp. 223–236, 2001.
- [21] R. Mantegna and H. Stanley, "Stochastic Process with Ultra-Slow Convergence to a Gaussian: The Truncated Levy Flight," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 73, pp. 2946–2949, 1994.
- [22] T. Lux, "Applications of Statistical Physics in Finance and Economics," *Kiel Working Paper*, no. 1425, 2008.
- [23] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management*. Cambridge University Press, 2000.
- [24] R. Mantegna and H. Stanley, "Scaling behavior in the dynamics of an economic index," *Nature*, vol. 376, pp. 46–49, 1995.
- [25] D. Sornette, A. Johansen, and J.-P. Bouchaud, "Stock market crashes, precursors and replicas," *Journal of Physique I*, vol. 6, no. 1, pp. 167–175, 1996.
- [26] A. Johansen and D. Sornette, "Stock market crashes are outliers," *European Physical Journal B*, vol. 1, pp. 141–143, 1998.
- [27] Z. Eisler, J. Kertész, and F. Lillo, "The time order book on different time scales," arXiv:0705.4023, 2007.
- [28] J.-P. Bouchaud, M. Mézard, and M. Potters, "Statistical properties of stock order books: empirical results and models," *Quantitative Finance*, vol. 2, pp. 251–256, 2002.

- [29] S. Maslov and M. Mills, "Price fluctuations from the order book perspective: Empirical facts and a simple model," *Physica A*, vol. 299, pp. 234–246, 2001.
- [30] P. Bak, M. Paczuski, and M. Shubik, "Price variations in a stock market with many agents," *Physica A*, vol. 246, pp. 430–453, 1997.
- [31] G. Stigler, "Public regulations of the securities markets," *The Journal of Business*, vol. 37, p. 117, 1964.
- [32] S. Maslov, "Simple model of a limit order-driven market," *Physica A*, vol. 278, p. 571, 2000.
- [33] D. Challet and R. Stinchcombe, "Non-constant rates and over-diffusive prices in a simple model of limit order markets," *Quantitative Finance*, vol. 3, pp. 155–162, 2003.
- [34] A. Chakraborti, I. Toke, M. Patriarca, and F. Abergel, "Econophysics review: Ii. agent-based models," *Quantitative Finance*, vol. 11, no. 7, pp. 1013–1041, 2011.
- [35] R. Cont and A. De Larrard, "Price dynamics in a markovian limit order market," arXiv:1104.4596, 2011.
- [36] —, "Order book dynamics in liquid markets: limit theorems and diffusion approximations," arXiv:1202.6412, 2012.
- [37] A. Langnau and Y. Punchev, "Stochastic price dynamics implied by the limit order book," arXiv:1105.4789, 2011.
- [38] Yudovina, "A simple model of a limit order book," arXiv:1205.7017, 2012.
- [39] K. Vaninsky, S. Myzuchka, and A. Lukov, "A multi-agent nonlinear markov model of the order book," arXiv:1208.3083, 2012.
- [40] T. Schmitt, R. Schäfer, and T. Münnix, M. and Guhr, "Microscopic understanding of heavy-tailed return distributions in an agent-based model," arXiv:1207.2946, 2012.
- [41] F. Abergel, B. Chakraborti, A. Chakraborti, and M. Mitra, Eds., *Econophysics of Order-driven Markets*. Springer, 2011.
- [42] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. Amaral, T. Guhr, and H. Stanley, "Random matrix approach to cross correlations in financial data," *Physical Review E*, vol. 65, p. 066126, 2002.
- [43] O. M. John Von Neumann, *Theory of games and economic behavior*. Princeton University Press, 1944.
- [44] D. Challet and Y. Zhang, "On the minority game: Analytical and numerical studies," *Physica A*, vol. 256, p. 514, 1998.

- [45] D. Challet, M. Marsili, and Y. Zhang, "Stylized facts of financial markets and market crashes in minority games," *Physica A*, vol. 294, pp. 514–524, 2001.
- [46] H. Hotelling, "Stability in competition," *Economic Journal*, vol. 39, no. 153, pp. 41–57, 1929.
- [47] M. Gallegati, S. Keen, T. Lux, and P. Ormerod, "Worrying trends in econophysics," *Physica A*, vol. 370, pp. 1–6, 2006.
- [48] A.-L. Barabasi, *Linked: How Everything Is Connected to Everything Else and What It Means*. Plume, 2002.
- [49] F. Schweitzer, G. Fagiolo, D. Sornette, F. Vega-Redondo, A. Vespignani, and D. White, "Economic networks: The new challenges," *Science*, vol. 325, no. 422, 2009.
- [50] P. Ormerod, "Econophysics and The Social Sciences: Challenges and Opportunities," *Journal of Natural and cultural sciences*, vol. 76, pp. 345–351, 2010.

Física Médica

Mercedes Rodríguez, Instituto de Física, UNAM, México

*...the goal of medicine and supporting science is to ensure that
people live long and die quickly...
J. G. Evans¹*

1. Resumen

La física médica es un área que aplica los principios de la física a la medicina, especialmente en la prevención, diagnóstico y tratamiento de enfermedades. Lo más atractivo de esta rama de la física es que tiene un impacto directo sobre la calidad y seguridad de la atención médica en los seres humanos: esta componente social con implicaciones directas sobre la población es de alto valor.

Este capítulo se divide en dos partes. La primera de ellas describe de manera muy general los principios físicos involucrados en algunas de las técnicas que utilizan radiación ionizante para el diagnóstico y tratamiento de enfermedades. Aunque existen otras tecnologías basadas en el uso de radiación no-ionizante, me he concentrado en aquellas que emplean radiación ionizante no sólo porque este tipo de radiaciones están involucradas con un amplio espectro de usos, sino porque es mi área de especialización. Más allá de tratar de ser un texto exhaustivo, se muestran sólo generalidades y tendencias actuales para que el lector tenga una idea clara del principio de funcionamiento y de la física involucrada en las técnicas tomadas como ejemplo.

En la segunda parte se describe lo que desde mi perspectiva es el futuro de la física médica en México. Para esto me baso en un ejemplo muy específico: datos estadísticos sobre la situación actual de un servicio de salud para pacientes oncológicos. Esta información sirve como introducción a la situación actual de la física médica como profesión, la cual está directamente relacionada con los esfuerzos de investigación básica y clínica. Desde el punto de vista de investigación básica la física médica es un área muy nueva con gran potencial. Por tanto requiere de un impulso substancial por parte de universidades

¹Profesor de Gerontología de la Universidad de Oxford.

y hospitales para contratar investigadores jóvenes altamente calificados y de apoyos de entidades gubernamentales a través de proyectos de investigación que permitan la evolución tan necesaria de esta rama de la ciencia en México.

2. Introducción

Los primeros descubrimientos en física que permitieron ver el interior del cuerpo humano sin la necesidad de ingresar el paciente al quirófano, transformaron completamente las ciencias médicas. Actualmente el desarrollo tecnológico llevado a cabo por grandes centros mundiales de investigación (CERN, Fermilab, DESY, SLAC, KEK, etcétera) famosos por sus investigaciones pioneras en física fundamental (particularmente en física de aceleradores de partículas, física de detectores y cómputo científico) ha jugado un papel decisivo en el avance de la física aplicada al diagnóstico y tratamiento de enfermedades. Un compendio completo sobre los principios básicos de detección de radiación en investigaciones fundamentales en física y sus aplicaciones en la formación de imágenes fue publicado recientemente en 2012 por Grupen y Buvat [1].

Las aplicaciones de técnicas no invasivas de diagnóstico por imagen (radiografía, ultrasonido, resonancia magnética, tomografía computarizada, tomografía por emisión de positrones, etcétera) y aquellas para el tratamiento de enfermedades basadas en el uso de radiación ionizante (teleterapia, braquiterapia, protonterapia) son herramientas indispensables para el equipo multidisciplinario a cargo de la asistencia médica. Hoy en día la formación de imágenes ya no se limita a aplicaciones en diagnóstico, sino que se ha convertido en un elemento esencial en programas de escrutinio para la detección temprana de enfermedades y en planificaciones de tratamientos en radioterapia. En un futuro no muy lejano también permitirán obtener información sobre la respuesta biológica de tejidos irradiados durante tratamientos personalizados en radioterapia.

3. ¿Qué es la física médica?

La física médica, tal como lo define la Organización Internacional de Física Médica [2], es una rama de la física aplicada que utiliza los principios, métodos y técnicas de la física para la prevención, diagnóstico y tratamiento de las enfermedades humanas. Su objetivo principal es mejorar la salud y bienestar de los seres humanos. La física médica se puede clasificar en diferentes especialidades las cuales incluyen física de la radioterapia, física de la imagenología médica, física de la medicina nuclear, física de la salud (también conocida como protección radiológica en medicina), física de las radiaciones no-ionizantes en medicina y medidas fisiológicas.

La física médica, ¿profesión o disciplina científica?

La física médica, a diferencia de las otras especialidades de la física, tiene dos vertientes muy importantes: una de ellas es su práctica profesional realizada por físicos médicos clínicos que trabajan en instituciones hospitalarias o médicas realizando actividades asistenciales, docentes y de investigación. La segunda vertiente está relacionada con la actividad científica llevada a cabo por académicos quienes desempeñan labores docentes y de investigación en universidades, laboratorios o, inclusive, en empresas públicas y privadas. En cualquier caso, las contribuciones a la física médica son multidisciplinarias; no sólo es esencial la colaboración de físicos en los equipos de asistencia médica, sino que es indispensable la participación de individuos con alta preparación en matemáticas, computación e ingenierías, además de la importante contribución de especialistas en las áreas médico-biológicas.

Tres descubrimientos clave

Muchos consideran que la física médica, tal como se conoce hoy en día con una componente muy fuerte de física de radiaciones, tuvo sus inicios a partir del descubrimiento de los rayos X por el alemán Wilhelm Conrad Röntgen en 1895, galardonado con el primer Premio Nobel de Física en 1901. Durante los experimentos de Röntgen los rayos X se producían al hacer pasar una corriente eléctrica a través de un gas a muy baja presión, podían atravesar objetos opacos como madera o metal y permitían obtener imágenes de su interior. La noticia del descubrimiento de los rayos X, ilustrada con una radiografía de la mano de la esposa de Röntgen (ver la figura 1) en el periódico Vienés Die Presse, permitió divulgar el descubrimiento ampliamente no sólo al público en general sino, más relevante aún dada la época, a la comunidad médica [3]. La visión tan generosa de Röntgen al negarse a solicitar una patente por su descubrimiento, hizo posible que los tubos de rayos X se usaran de manera inmediata y extensiva para visualizar el interior del cuerpo humano sin necesidad de cirugía: así fue como nació el radiodiagnóstico.

El siguiente hallazgo decisivo en las aplicaciones de las radiaciones ionizantes en medicina consistió en el descubrimiento de la radiactividad espontánea en 1896 por Henri Becquerel, seguido por el trabajo de los esposos Pierre y Marie Curie, quienes realizaron importantes experimentos con uranio y torio y posteriormente descubrieron y sintetizaron dos elementos radiactivos: el polonio y el radio. En 1903 Becquerel y los esposos Curie también recibieron el premio Nobel de Física por sus descubrimientos. El uso inmediato de sustancias radiactivas se limitó al tratamiento y control de algunas enfermedades debido a que los elementos radiactivos descubiertos no eran adecuados para ser utilizados en el área de diagnóstico.

Durante más de 60 años las imágenes producidas con rayos X se limitaron a la proyección en dos dimensiones (2D) de objetos tridimensionales (3D) con información cuantitativa limitada debido al traslape de estructuras anatómicas. No fue sino hasta la década

de 1960 que se inventó la Tomografía Computarizada (CT), técnica que produce imágenes anatómicas en 3D. La CT fue desarrollada por el físico nuclear Allan Cormack [4] y el ingeniero Godfrey Hounsfield [5], galardonados con el premio Nobel en Fisiología y Medicina en 1979. Resulta interesante mencionar que Cormack y Hounsfield trabajaron de manera independiente con objetivos completamente diferentes. Cormack, con formación de físico nuclear y quien trabajaba de tiempo parcial en un hospital, tenía interés desde el punto de vista académico de mejorar la precisión en la planificación de tratamientos de radioterapia incorporando información anatómica (posición y forma) de diferentes tumores. Hounsfield, por otro lado, llevó a cabo su invento mientras trabajaba para la compañía EMI Central Research Laboratories en el área de investigación, pero con propósitos claramente comerciales.

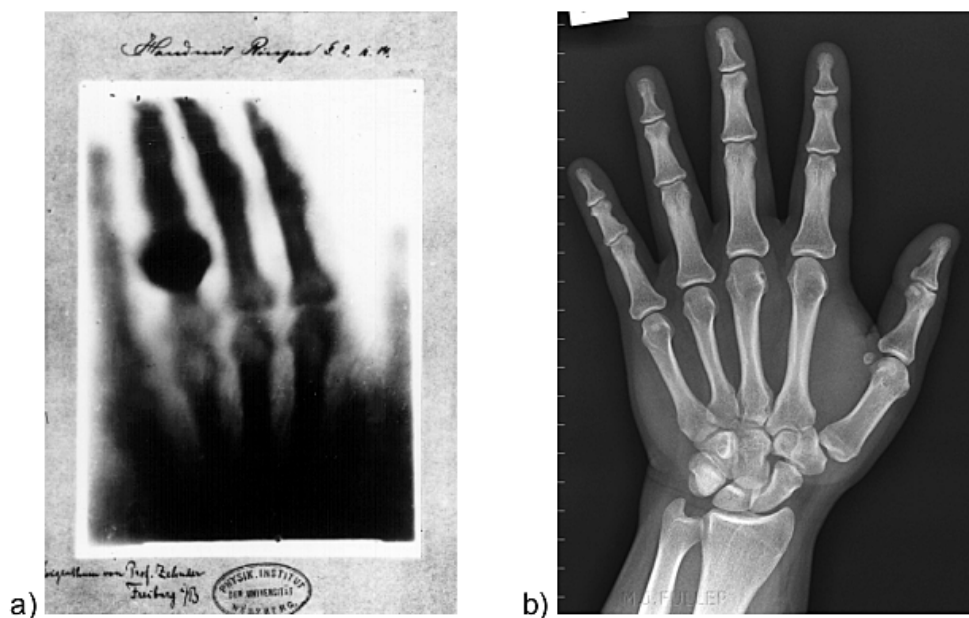


Figura 1: a) Primera radiografía médica por W. C. Röntgen de la mano de su esposa Anna Bertha Ludwig. b) Radiografía digital moderna. Es importante resaltar la alta calidad de la radiografía digital.

4. Imagenología médica

La formación de imágenes del cuerpo humano en radiología requiere del uso de radiación electromagnética con suficiente energía para poder atravesar los tejidos. Técnicas como la radiografía, mamografía o la tomografía computarizada (CT) utilizan rayos X con energías aproximadamente entre 20 y 150 keV, la medicina nuclear usa rayos gamma con

energías entre 75 y 511 keV, mientras que la resonancia magnética (MRI) usa radiación electromagnética de radiofrecuencia. La utilidad de las imágenes en radiodiagnóstico reside en el hecho de que éstas representan diferentes propiedades de los tejidos; en el caso de la formación de imágenes con rayos X se mide su poder de atenuación (absorción y dispersión) a la radiación, mientras que en medicina nuclear se mide la concentración de sustancias radiactivas. La tabla 1 muestra las resoluciones espaciales de diferentes modalidades de imagenología médica, indicando también el tipo de información que ofrece.

Tabla 1: Resoluciones espaciales (R_e) típicas de diferentes modalidades de imagenología médica.

Modalidad	R_e (mm)	Información*
Radiografía con pantalla-película	0.08	A
Radiografía digital	0.17	A
Mamografía con pantalla-película	0.03	A
Mamografía digital	0.05-0.10	A
Tomografía computarizada	0.3	A/F
Gammagrafía	5	M/F
Tomografía por emisión de fotón único (SPECT)	7	M/F
Tomografía por emisión de positrones (PET)	5	M/F
Resonancia magnética (MRI)	1	A/M/F
Ultrasonido	0.3	A/F

*A: Anatómica, M: Metabólica, F: Fisiológica [6].

Como se puede observar, las resoluciones espaciales cubren un intervalo muy amplio de valores, que van desde las decenas de micrómetros para estudios anatómicos como la mamografía, hasta de varios milímetros como SPECT o PET que proveen información metabólica. Cada modalidad de formación de imágenes tiene usos muy específicos, y es común que para el diagnóstico de una enfermedad se utilicen varias modalidades de imagen de manera complementaria.

Formación de imágenes planas con rayos X

Los detectores para la formación de imágenes planas han evolucionado sorprendentemente en la última década. Originalmente los receptores de imagen eran analógicos basados en películas radiográficas o combinaciones de películas radiográficas con pantallas intensificadoras. Las características más importantes de este tipo de detectores es que son simples, relativamente baratos y producen imágenes con alta resolución espacial. Sin embargo, son muy ineficientes (las películas radiográficas, por ejemplo, tienen una eficiencia del orden del 1 %) con respuesta limitada y ofrecen poca flexibilidad para procesar las imágenes. En los últimos años se han introducido detectores digitales de panel plano que producen imágenes en tiempo real sin necesidad de tratamientos químicos, con mejor

calidad diagnóstica debido a su amplio rango dinámico, que se traduce en una reducción de dosis de radiación al paciente [7].

El principio físico de funcionamiento de los detectores digitales puede ser a través de la conversión directa de los rayos X a carga eléctrica (e.g. selenio amorfo a-Se o silicio amorfo a-Si). También los hay de conversión indirecta de rayos X a luz, seguida de la transformación de luz a carga eléctrica, y de ésta a señales digitales con electrónica rápida muy sofisticada. Un ejemplo de los detectores digitales de conversión indirecta es a través del uso de capas finas de cristales centelladores (e.g. Gd_2O_2S) acopladas a fotosensores (e.g. CMOS). Hoy en día la radiografía digital requiere de detectores muy sofisticados, con control automatizado de exposición, de equipo de cómputo suficientemente potente y rápido para el análisis, transferencia y almacenamiento² de las imágenes, así como monitores de alta definición para su despliegue. Todo esto hace que esta tecnología sea muy costosa comparada con los detectores analógicos.

El desarrollo de nuevos algoritmos para el análisis y procesamiento de imágenes ha sido un factor clave y necesario para explotar el potencial de las imágenes digitales. El procesamiento digital permite realzar ciertas características de las imágenes como sus bordes, mejorar el contraste y suavizar el ruido [8]. Gracias a esto, es posible desarrollar nuevos tipos de estudios como el uso de medios de contraste, la sustracción temporal de imágenes, las técnicas de energía dual para seleccionar diferentes tipos de tejidos con base en sus propiedades de atenuación y las técnicas que usan contraste de fase [6]. Debido a que la información es digital, se pueden aplicar métodos de compresión de datos sin pérdida importante de información. Esto permite una transmisión rápida de los estudios, haciendo posible el intercambio de imágenes médicas entre diferentes departamentos del mismo hospital, o entre diferentes hospitales, permitiendo el desarrollo de la telemedicina.

Tomografía Computarizada (CT)

La Tomografía Computarizada es una técnica que produce imágenes tomográficas (a lo largo de diferentes cortes del paciente) que representan mapas de coeficientes lineales de atenuación de los diferentes tejidos. Una de las características más relevantes de la CT es que provee información en 3D (ver figura 2) sin el traslape de estructuras anatómicas. Esto permite mejorar la cuantificación de diferencias de intensidades de pixel sobre las imágenes (contraste) con respecto al contraste de imágenes planas.

La descripción más simple del principio de funcionamiento de un escáner CT consiste en el movimiento alrededor del paciente y adquisición de datos sincronizados de un haz colimado de rayos X y un conjunto de detectores colocados de lado opuesto. Los datos registrados por los detectores representan integrales de línea (proyecciones) de los coe-

²Por ejemplo, considerando que el área sensible de un detector digital de panel plano puede variar entre $24 \times 24 \text{ cm}^2$ y $43 \times 43 \text{ cm}^2$, con tamaños de pixel entre $50 \mu\text{m}$ (mamografía) y $200 \mu\text{m}$ (radiografía digital) codificados con una profundidad de 14 bits, el tamaño de imágenes individuales puede variar entre 20 y 50 MB.

ficientes lineales de atenuación de los tejidos atravesados. Las imágenes tomográficas se obtienen invirtiendo las proyecciones con técnicas matemáticas como la retroproyección filtrada, métodos algebraicos, métodos de Fourier o métodos iterativos [9].

De todos los métodos de reconstrucción de imágenes tomográficas, la retroproyección filtrada es la técnica más utilizada en la clínica debido a su facilidad de implementación y rapidez. Sin embargo, esta técnica sólo permite obtener información semi-cuantitativa. Por otra parte, los métodos iterativos tienen un gran potencial pues pueden incorporar los principios físicos de la formación de la imagen, desde la estadística de emisión de los rayos X, los efectos de atenuación y dispersión de la radiación dentro del paciente, la estadística de conteo y la respuesta de los detectores [9].

El principio básico de funcionamiento de los escáneres CT no ha cambiado desde su invención. Sin embargo los avances tan importantes en las tecnologías de los tubos de rayos X, los detectores de radiación y las computadoras han mejorado substancialmente su desempeño en términos de calidad de imagen (resolución espacial, contraste y cociente señal a ruido), tiempo de adquisición y dosis impartidas a los pacientes. En las últimas dos décadas los fabricantes de tubos de rayos X han mejorado la construcción de estos dispositivos para funcionar con voltajes entre 80 y 140 kV, con manchas focales entre 0.3 mm y 2 mm, y con una alta capacidad para soportar el calentamiento gracias al uso de configuraciones sofisticadas de ánodos giratorios, mancha multifocal o haces pulsados. Los detectores más comunes para CT son de integración y están basados en cristales centelladores rápidos (normalmente CdWO_4) acoplados a fotodiodos.

La tabla 2 resume algunas características de desempeño de equipos CT, desde su invención hasta el año 2004. Es evidente que en tan sólo algunas décadas se ha mejorado notablemente la resolución espacial (axial y transaxial) de los escáneres, reduciendo drásticamente el tiempo de duración de los estudios.

Tabla 2: Características de desempeño de escáneres CT de 1972 a 2004 [10].

	1972	1980	1990	2004
Tiempo de rotación (s)	300	5-10	1-2	0.33-0.5
Datos de un escán de 360° (MB)	0.058	1	1-2	10-100
Tamaño de la imagen (píxeles)	80×80	256×256	512×512	512×512
Espesor del corte (mm)	13	2-10	1-10	0.5-1.0
Resolución espacial (mm)	1.70	0.42-0.63	0.33-0.50	0.20-0.42

Las aplicaciones que se pueden llevar a cabo con CT cubren un amplio espectro, y en los últimos años se han extendido más allá de su uso para obtener información anatómica. Se puede utilizar para estudios fisiológicos de perfusión del cerebro, hígado o tumores, estudios del sistema vascular (evaluación del grado de calcificaciones, visualización de árboles vasculares, análisis de estenosis, aneurismas, planificación en la colocación de estents), inserción de prótesis dentales, planificación en radioterapia, cirugía guiada por imagen o imagenología intervencional [9].

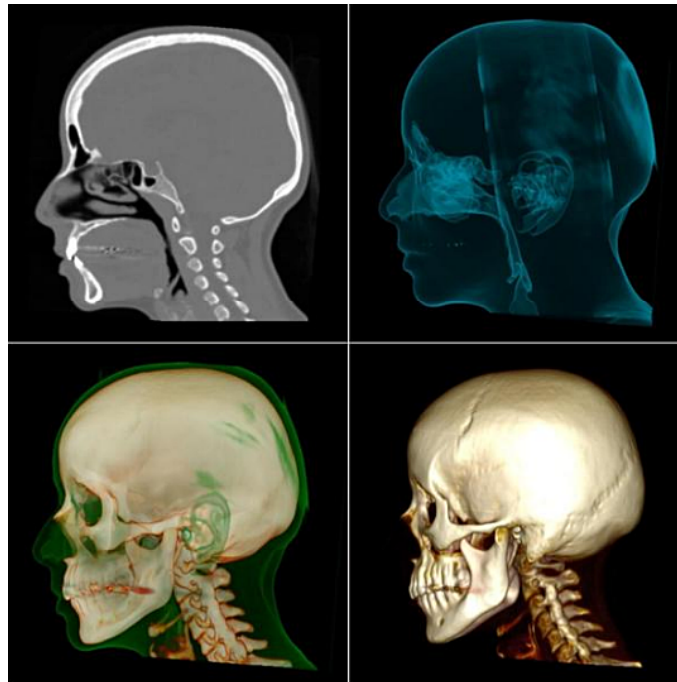


Figura 2: Visualización a lo largo del plano sagital (arriba-izquierda) y en 3D de un estudio CT de cráneo (120 kV, 222 mA, corte: 1 mm). Las ventanas de despliegue en las visualizaciones 3D fueron ajustadas para enfatizar las vías aéreas (arriba-derecha), tejido blando y hueso (abajo izquierda) y hueso (abajo-derecha).

La última revolución en el área de CT es gracias al detector de conteo Medipix desarrollado en el CERN para aplicaciones en experimentos del gran colisionador de hadrones (LHC). Dentro de las ventajas del Medipix se pueden mencionar su alta resolución espacial y capacidad de determinar la energía de los rayos X, permitiendo así la formación de imágenes con información espectroscópica. La tecnología del Medipix permite realizar lo que se conoce como "imagenología de color" en la que se utiliza la información espectral de la radiación para conocer la densidad y composición de los tejidos [11]. Este tipo de estudios prometen tener un valor diagnóstico mayor que el que se consigue en CT tradicional.

Medicina nuclear molecular

La medicina nuclear molecular es una técnica para el diagnóstico de enfermedades que utiliza radiofármacos (moléculas marcadas con elementos radiactivos) administrados al paciente para producir imágenes en 2D o 3D. Estas imágenes representan la distribución espacio-temporal de actividad en órganos y tejidos, permitiendo así el estudio de

procesos metabólicos o funcionales a partir de las trayectorias metabólicas que sigue el radiofármaco. De esta manera es posible detectar cambios tempranos en la fisiología debido a alguna enfermedad aún antes de que se presenten los primeros síntomas o aparezcan alteraciones anatómicas. La medicina nuclear se desarrolló después de la Segunda Guerra Mundial, una vez que fue posible producir de manera artificial elementos radiactivos con las características adecuadas y en cantidades suficientes para poder ser utilizados con seguridad en el ser humano.

De acuerdo al tipo de radionúclido que se utilice, existen diferentes modalidades de medicina nuclear. Cuando el radionúclido es emisor de un solo fotón (e.g. ^{99m}Tc , emisor de rayos gamma de 140 keV con vida media de 6 h), el detector más comúnmente empleado es la cámara gamma que puede formar imágenes planas (gammagrafías) o tomográficas (tomografía por emisión de fotón único, SPECT). Los componentes básicos de una cámara gamma son un colimador de un material con número atómico muy alto que permite solamente el paso de los fotones que tienen una determinada dirección, un monocristal de centelleo (normalmente de NaI:Tl) que transforma los fotones en luz, y ésta a su vez es transformada en señales eléctricas por un conjunto de tubos fotomultiplicadores [12]. Las señales de salida son procesadas para obtener información sobre la posición y energía de los fotones detectados. Las imágenes producidas con la cámara gamma normalmente son de baja calidad en términos de resolución espacial, sensibilidad y cociente señal a ruido.

Tomografía por Emisión de Positrones (PET)

La tomografía por emisión de positrones es una técnica de medicina nuclear molecular que usa radionúclidos emisores de positrones (e.g. ^{11}C , ^{13}N , ^{15}O , ^{18}F). Siguiendo el mismo razonamiento descrito previamente, los emisores β^+ se utilizan para marcar fármacos diseñados para seguir una trayectoria metabólica específica dentro del paciente. Los positrones emitidos comienzan a perder su energía cinética hasta que se aniquilan con electrones del medio emitiendo dos fotones de 511 keV a $180^\circ \pm 0.25^\circ$. El principio físico de formación de imágenes en PET consiste en la detección en coincidencia de los fotones de aniquilación, lo cual implica el uso sincronizado de detectores colocados en posiciones opuestas y del establecimiento de ventanas temporales dentro de las cuales ocurre la detección: esto permite determinar las líneas de respuesta a lo largo de las cuales ocurrió la aniquilación. Las distribuciones espacio-temporales (imágenes) del radiofármaco se forman a partir de millones de eventos en coincidencia registrados durante el estudio. La técnica de PET utiliza métodos de reconstrucción de imágenes tomográficas similares a los empleados en CT. Los métodos de reconstrucción iterativa son los más precisos para reconstruir las imágenes, pues permiten incorporar la estadística de emisión y detección de los fotones de aniquilación, las variaciones en respuesta de los detectores debido a aspectos geométricos y de eficiencia de detección, así como la incorporación de otro tipo de correcciones. El principio de colimación electrónica en PET permite que su sensibilidad y resolución espacial sea mejor que en SPECT.

Actualmente los módulos de detección más modernos para PET están contruidos de arreglos pixelizados de cristales centelladores muy rápidos (e.g. de Lu_2SiO_5) acoplados a fotosensores como tubos fotomultiplicadores o fotodiodos de avalancha. La electrónica de adquisición es muy compleja y rápida pues se requiere usar ventanas temporales menores a 10 ns, discriminar eventos en función de su energía, eliminar pulsos no deseados y convertir las señales analógicas a digitales. Además, debe transferir los datos a una computadora para su análisis, procesamiento y almacenamiento, así como para reconstruir las imágenes tomográficas. La figura 3 muestra estudios PET de individuos sanos con diferentes radiofármacos. Los colores en las imágenes muestran diferentes concentraciones de actividad (azul menor concentración, rojo mayor concentración). Las flechas indican las regiones de interés para lo cual fueron diseñados los radiofármacos.

Las áreas de investigación que están siendo desarrolladas actualmente en PET tienen como objetivo mejorar el desempeño de los equipos con base en su sensibilidad, contraste y resolución espacial (esta última a nivel sub-milimétrico). Para lograr esto se están proponiendo nuevas configuraciones de detectores que permitan obtener información sobre la profundidad de interacción, geometrías novedosas y tamaños pequeños de cristales centelladores [13], así como técnicas de tiempo de vuelo (TOF-PET) usando detectores con resoluciones temporales de algunos cientos de picosegundos [14].

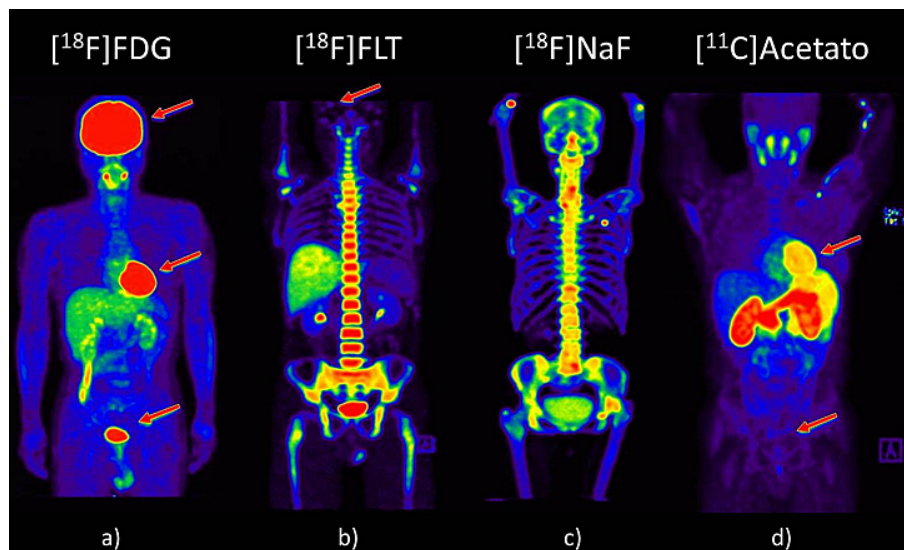


Figura 3: Imágenes PET de individuos sanos para estudiar: (a) metabolismo de la glucosa, (b) proliferación celular, (c) lesiones óseas y (d) metabolismo β oxidativo. Fuente: Dr. M. A. Ávila Rodríguez, Unidad PET/CT-Ciclotrón, Facultad de Medicina, UNAM.

Sistemas multimodales

La construcción de equipos multimodales de imágenes es una tendencia actual que tiene como objetivo fusionar información generada con dos o más técnicas de imagenología, como por ejemplo SPECT/CT, PET/CT o PET/MRI. Dado que para cada modalidad las imágenes representan diferentes propiedades de los tejidos (anatómicos, fisiológicos o metabólicos), la información es complementaria; esto se traduce en un mayor beneficio para el paciente. Los sistemas multimodales son ahora una realidad gracias al desarrollo de instrumentación científica que incluye el uso de cristales centelleadores cada vez más rápidos y luminosos (e.g. LaBr_3 , continuos o pixelizados) y de fotodetectores como tubos fotomultiplicadores sensibles a la posición, fotodiodos de avalancha y fotodiodos de silicio. La combinación de cualquier modalidad de imagen con resonancia magnética es particularmente difícil pues es necesario el uso de detectores insensibles a campos magnéticos. También se están haciendo esfuerzos para desarrollar técnicas innovadoras para sistemas preclínicos como la imagenología óptica (fluorescencia, bioluminiscencia o Cerenkov), micro-ultrasonido de alta frecuencia, tomografía fotoacústica, etcétera, que tendrán un impacto relevante en la evolución y mejoramiento de sistemas de imagenología clínicos [15].

5. Radioterapia

Al poco tiempo del descubrimiento de los rayos X y la radiactividad, se reconoció que las radiaciones ionizantes producen efectos dañinos en tejidos sanos, y de manera natural se propuso su uso para el tratamiento de enfermedades. La radioterapia es una de las áreas más importantes de la física médica que hace uso de haces de radiación ionizante (rayos X, rayos gamma, electrones, neutrones, protones, etcétera) para depositar grandes cantidades de energía en tejido. La radioterapia permite controlar el crecimiento celular debido a la capacidad de la radiación ionizante de dañar el ADN del tejido irradiado y de producir su muerte. Dado que la radiación daña tanto a las células malignas como a las normales, el reto de cualquier tipo de tratamiento en radioterapia es concentrar la dosis depositada por la radiación en el tejido neoplásico y al mismo tiempo proteger en la medida de lo posible a los tejidos sanos.

Teleterapia

Los rayos X se utilizaron para el tratamiento externo de algunos tipos de cáncer poco tiempo después de su descubrimiento. Había dos limitantes para su uso en radioterapia, la primera estaba relacionada con la energía tan baja de los rayos X producidos (energías máximas de decenas de keV) y la segunda con su baja eficiencia de producción, por lo que su aplicación se limitó para el tratamiento de lesiones superficiales [3]. A principios de la década de 1920 se inventaron los tubos de rayos X de ortovoltaje, operando con potencia-

les entre 200 y 300 kV, con los cuales se producían haces con suficiente energía e intensidad para poder atravesar algunos centímetros de tejidos ocasionando, sin embargo, daños a la piel. No fue sino hasta la década de 1940 durante la segunda guerra mundial que se desarrolló la radioterapia externa con rayos gamma de 1.17 y 1.33 MeV (producto del decaimiento del ^{60}Co) para irradiar tumores a mayor profundidad. A partir de entonces, las técnicas para planificar los tratamientos se fueron haciendo más complejas, impulsando fuertemente el campo de la dosimetría para caracterizar experimentalmente los haces de radiación y aplicarlos en el cálculo de distribuciones de dosis en el paciente. Estos cálculos se vieron beneficiados con la aparición de las computadoras, esenciales para manejar grandes cantidades de datos e individualizar los tratamientos para cada paciente [8].

En los años 1950 se introdujeron los aceleradores lineales (linac) en radioterapia. Estos aparatos permiten acelerar electrones a altas energías usando ondas electromagnéticas de alta frecuencia a lo largo de un tubo lineal compacto. Los haces de electrones se pueden utilizar directamente para irradiar lesiones superficiales, o bien se les puede hacer incidir sobre blancos de alto número atómico (como el tungsteno) para producir haces intensos de rayos X e irradiar tumores profundos. Actualmente en hospitales de países desarrollados los linac han desplazado prácticamente a las unidades de ^{60}Co debido a que operan en un intervalo amplio de energías (entre 4 y 25 MV). Además la forma de los haces está mejor definida con una menor penumbra, se puede variar la tasa de dosis y se pueden producir campos grandes de suficiente intensidad para la irradiación de cuerpo completo. Sin embargo, su uso requiere una dosimetría de alta precisión y exactitud, así como de la aplicación de protocolos rigurosos de control de calidad. Los tratamientos se realizan usando campos múltiples que irradian al tumor desde diferentes direcciones. Una limitante de la radioterapia convencional con linacs es la restricción de usar campos cuadrados o rectangulares; a éstos se les puede cambiar la forma o distribución de intensidad sólo con accesorios externos como bloques o cuñas.

Radioterapia de Intensidad Modulada (IMRT)

Actualmente la técnica de IMRT es una de las modalidades de radioterapia externa con linac más sofisticadas. Su característica más relevante es que la distribución de dosis se puede ajustar (conformar) de una manera extremadamente precisa a la forma de los tumores, además de que se les puede impartir una mayor dosis. Esto se logra no sólo variando la forma y tamaño del haz, sino modulando su fluencia [16]. Una planificación cuidadosa del tratamiento permite impartir dosis muy altas a los tejidos enfermos mientras que al mismo tiempo es posible minimizar la dosis a tejidos sanos circundantes. La irradiación del volumen blanco se realiza mediante una combinación de campos de intensidad modulada con diferentes direcciones de incidencia. La forma de los haces se puede modificar dinámicamente utilizando colimadores multiláminas controlados en sincronía con la dirección del haz.

En IMRT las planificaciones de tratamiento requieren de una delineación cuidadosa de

la anatomía de la región a irradiar para delimitar los volúmenes blanco y los órganos de riesgo involucrados, por lo que se utilizan estudios que proveen información anatómica del paciente (ver la figura 4) y métodos sofisticados de planificación inversa. Estos métodos toman como información de entrada la distribución de dosis que se desea impartir con base en la forma, tamaño y localización del tumor, así como algunas restricciones para la impartición del tratamiento (e.g. máximas dosis que pueden recibir órganos de riesgo). Como resultado de la planificación se obtiene el número, forma, dirección y fluencia de los haces de radiación necesarios y optimizados para conformar la dosis de radiación al tumor. Contrario a la técnica de CT en la que se desea conocer la distribución espacial de los tejidos a partir de sus proyecciones, en IMRT se conoce la distribución de dosis y se desea determinar las características de los haces (proyecciones). Los protocolos en IMRT, comparados con la teleterapia convencional, son mucho más complicados dada la precisión con la que se desea impartir la dosis, por lo que su planificación toma mucho más tiempo. Actualmente se pueden impartir altas concentraciones de energía al volumen blanco con precisiones del 2% en dosis, y entre 1 y 2 mm de precisión espacial [17].

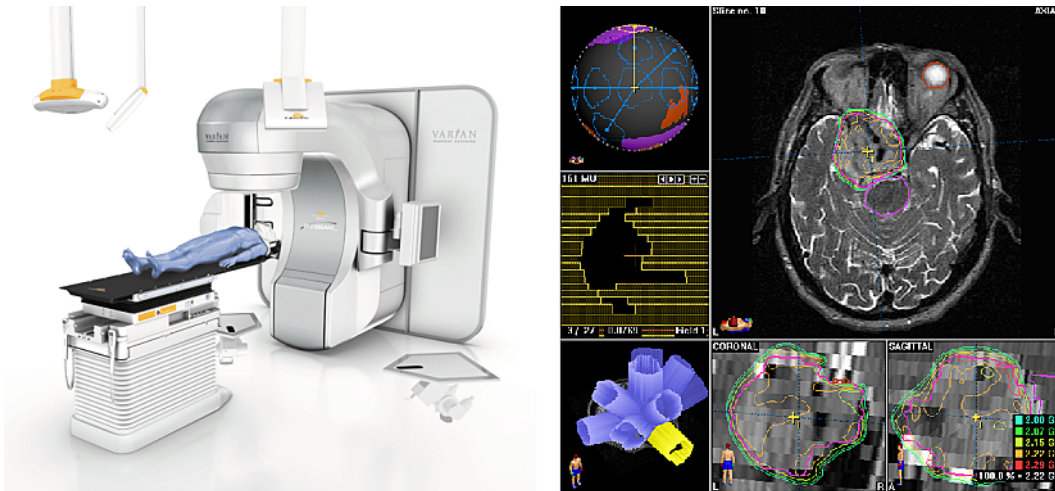


Figura 4: Izquierda: Acelerador lineal para tratamientos de IMRT. Derecha: planificación de un tratamiento de IMRT de un paciente con un tumor cerebral. Se muestra la imagen anatómica sobre la que se define el volumen blanco con líneas de diferentes colores para identificar curvas de isodosis. Los haces inciden en diferentes direcciones para maximizar la dosis al tumor. Fuente: M. en C. J. M. Lárraga Gutiérrez, Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía, México.

Hadronterapia

La hadronterapia es una técnica novedosa para el tratamiento de cáncer que hace uso de haces intensos de iones ligeros (e.g. protones, carbonos, oxígenos) con energías del

orden de 400 MeV/n para irradiar tejidos neoplásicos bien localizados. La ventaja más importante de la hadronterapia reside en su alta precisión en la aplicación del tratamiento debido a la forma en que los iones depositan energía en el medio pues se trata de radiación de muy alta transferencia de energía (LET). Mientras que las curvas dosis-profundidad para haces de rayos X presentan una caída prácticamente exponencial conforme atraviesan el tejido, los hadrones tienen un alcance finito y depositan una gran cantidad de energía al final de su trayectoria en un pico bien definido denominado pico de Bragg (ver la figura 5). Debido a que la localización del pico de Bragg puede seleccionarse graduando la energía del haz incidente para que coincida con la posición y forma del volumen blanco (i.e. el tumor), es posible reducir significativamente el daño a tejidos sanos circundantes.

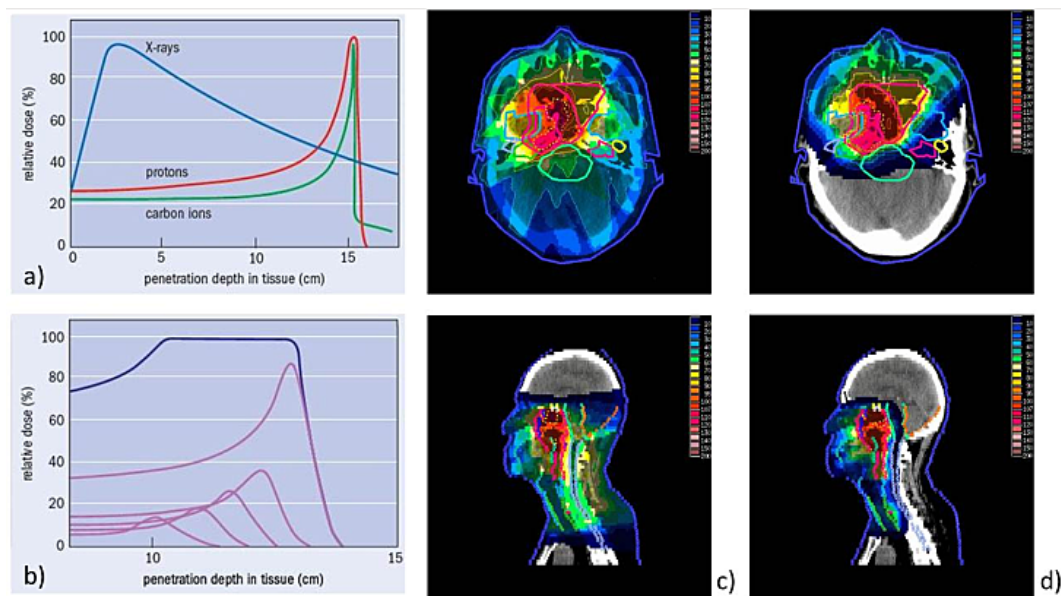


Figura 5: Depósito de dosis como función de la profundidad en agua para haces de fotones, protones y carbonos (a). El esparcimiento del pico de Bragg se logra graduando la energía del haz incidente (b). Los cálculos de distribuciones de dosis con rayos X (c) y protones (d) sobrepuestos sobre imágenes anatómicas muestra un mejor desempeño de la protonterapia para maximizar la dosis al tumor y minimizar la dosis al tejido sano circundante. Fuente: (a) y (b) [18].

El haz de hadrones se puede producir con aceleradores de partículas como el sincrotrón o ciclotrón, originalmente desarrollados para aplicaciones en física de altas energías. El alto costo de este tipo de aceleradores y la infraestructura relacionada con la aplicación del tratamiento ha limitado su uso en la clínica a sólo algunos países desarrollados.

6. El presente y futuro de la física médica en México

Para poder hablar del futuro de la física médica en México, es necesario poner en contexto la infraestructura existente en los servicios de salud en términos de recursos humanos y de equipamiento, en particular aquella relacionada con el cáncer. Como introducción al tema es importante mencionar que en países desarrollados se cuenta típicamente con un equipo de radioterapia por cada 250 mil habitantes, mientras que en los países en vías de desarrollo se tiene un equipo de radioterapia por varios millones de habitantes. La IAEA estima que en los países en vías de desarrollo se encuentra alrededor del 85 % de la población mundial, y a pesar de esto cuenta con sólo una tercera parte de instalaciones de radioterapia [19].

La Organización Mundial de la Salud (WHO) ha identificado 4 componentes para el control del cáncer: prevención, detección oportuna (diagnóstico temprano y escrutinio de poblaciones asintomáticas), tratamiento y cuidados paliativos. La detección temprana de la enfermedad es particularmente importante ya que aumenta las opciones de tratamiento y las probabilidades de que éste sea exitoso.

Infraestructura para el tratamiento de cáncer en México

Como parte de un estudio conducido por la IAEA en 2004, Zubizarreta y colaboradores reportaron estadísticas respecto al número de instalaciones de radioterapia en 19 países Latinoamericanos [20]. Sus resultados indican que en México, hasta el año 2003, se tenían 75 departamentos de oncología con 102 máquinas de MV (82 unidades de ^{60}Co y 20 linacs) instaladas. Tomando en cuenta una población de 102 millones de habitantes, se contaba con 1 equipo de radioterapia por cada millón de habitantes. El estudio también mostró que, al relacionar el número de máquinas de MV por millón de habitantes como función del producto interno bruto, México tenía el peor desempeño. Datos más actuales reportados por la Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias [21] indican que en los últimos 9 años las unidades de ^{60}Co han comenzado a ser descontinuadas, incrementando al mismo tiempo el número de linacs: a la fecha se reportan 50 unidades de ^{60}Co y 83 linacs. Además de estos equipos de MV para radioterapia, México cuenta con 72 centros con braquiterapia, 157 unidades de medicina nuclear, y aproximadamente 7400 establecimientos con servicios de rayos X.

Estadísticas del Instituto Nacional de Cancerología (INCan)

El INCan es un organismo descentralizado de la Secretaría de Salud y el más importante en el país que brinda atención médica a enfermos oncológicos. Actualmente el INCan es el mejor equipado de América Latina y su labor también incluye una fuerte componente de investigación básica y clínica, además de que funge como coordinador de 25 Centros Estatales de Cáncer. Las estadísticas reportadas por este instituto son muy relevantes para mostrar el contexto de la situación de provisión de servicios de salud en México para

pacientes que padecen algún tipo de cáncer. Recientemente la dirección del INCan indicó que en México se reportan 120 mil nuevos casos de cáncer, cifra que bien podría ascender a 150 mil considerando que hay 25 % de sub-registro de nuevos casos. Un dato impactante que permite prever una situación difícil en México a mediano plazo es que se pronostica que en las próximas dos décadas uno de cada dos hombres, y una de cada tres mujeres, tendrá un diagnóstico de cáncer. De acuerdo a los datos del 2011 publicados en el portal del INCan, los pacientes tratados provienen en un 65 % del interior de la república mientras que el 35 % restante proceden del Distrito Federal. El número de sesiones de radioterapia fue de aproximadamente 63 mil, mientras que los estudios de imagenología ascienden a más de 94 mil.

A pesar de que existe un número importante de Centros Estatales de Cáncer en México, resulta sorprendente la gran cantidad de pacientes provenientes de otros estados que tienen que trasladarse de su lugar de origen para ser atendidos en el INCan. Naturalmente esto implica una falta de infraestructura en provincia que incluye recursos humanos y equipamiento, lo cual reduce drásticamente el potencial e impacto local que podrían tener los centros estatales para el control del cáncer.

El futuro de la física médica en México está ligado necesariamente no sólo a la modernización de los servicios de salud ya existentes, sino al establecimiento de nuevos hospitales en donde se instale equipo de alta tecnología y se incorpore a los físicos médicos clínicos como parte de los grupos multidisciplinarios responsables del diagnóstico y tratamiento de pacientes. Sin embargo, establecer nuevos centros de radioterapia es un proceso largo y de muy alto costo. El entrenamiento del personal médico puede involucrar hasta cuatro años para los radio-oncólogos y dos años para los físicos médicos clínicos. Adicionalmente también es necesario planear y construir las instalaciones (idealmente con la participación activa de físicos médicos), seleccionar y comprar el equipo, instalarlo, realizar pruebas de aceptación y comisionamiento, registrarlo, licenciarlo, diseñar protocolos y manuales de procedimiento y desarrollar programas de control de calidad antes de iniciar los tratamientos. Todo esto requiere de aproximadamente 5 años. El aspecto más importante en todo este proceso es garantizar la presencia de personal altamente calificado; no hacerlo resultaría peligroso dada la complejidad de los aparatos involucrados [19].

Los físicos médicos clínicos y la investigación

Como parte de equipos multidisciplinarios para la asistencia médica, los físicos médicos clínicos requieren de una educación universitaria formal que, de acuerdo a recomendaciones internacionales [22, 23], debe ser a nivel de maestría. En México existen dos maestrías en Física Médica creadas hace poco más de 15 años [24, 25]. A la fecha estos son los únicos programas de posgrado en el área, con aproximadamente 125 egresados. Un porcentaje alto de estos profesionales trabaja en departamentos de radioterapia, y sólo una pequeña fracción está asociada a servicios de rayos X, medicina nuclear o resonancia magnética.

Las actividades profesionales de los físicos médicos clínicos incluyen labores asistenciales, docentes y de investigación. Cabe resaltar su participación como enlace con universidades y centros de investigación para el desarrollo de proyectos que involucren el uso de la infraestructura de instituciones médicas y hospitalarias. Esto es fundamental debido a la sofisticación tecnológica de los equipos involucrados en el diagnóstico y tratamiento de enfermedades. El físico médico clínico debe garantizar el funcionamiento adecuado de los equipos y su uso a través de protocolos estándares, de tal manera que su uso en proyectos de investigación no interfiera con la atención de los pacientes o resulte en deterioro del equipo mismo.

Investigación en física médica

La física médica en México como área de investigación es muy joven. Esto se debe, al menos en parte, a la ausencia de posgrados en el área que permitan enlazar las actividades académicas con el ejercicio profesional en los hospitales. Además de la investigación que se realiza utilizando la infraestructura en hospitales, también existen laboratorios en universidades y centros de investigación. Sin embargo, dado el alto costo del equipamiento necesario para realizar investigación de punta, su número está limitado. La investigación en empresas es prácticamente nula.

Tomando como referencia las áreas de especialidades de la física médica mencionada en la sección 2, la tabla 3 muestra un resumen de las áreas más importantes de investigación básica y clínica que se desarrollan en México, así como las diferentes universidades, institutos de investigación y de salud en donde se realizan. Estos datos fueron extraídos de diferentes portales web y de memorias *in extenso* de los Simposios Mexicanos de física médica publicadas por el American Institute of Physics (a la fecha han ocurrido 12 desde su creación en 1997).

La comunidad científica que realiza investigación en física médica en todo el país es probablemente menor a 50 investigadores. En términos geográficos, la concentración de actividades es mayor en el Distrito Federal, lo cual no es sorprendente pues es en donde se ubican la mayoría de los institutos de salud más importantes del país. Desde el punto de vista de universidades, la UNAM es la que contiene al mayor grupo de investigadores y líneas de investigación, en parte debido a la existencia de la maestría en física médica y a los convenios que de manera permanente establece con hospitales. En el sector salud sobresalen las actividades de investigación del INNN a través de su Unidad de Física Médica en donde actualmente están contratados tres investigadores y cinco físicos médicos clínicos que trabajan de tiempo completo en el área. El INCAN también destaca en este rubro por su Laboratorio de Física Médica e Imagen Molecular y una planta de 10 físicos médicos clínicos.

Tabla 3: Principales áreas de investigación en física médica que se desarrollan en México.

Área de Investigación	Lugar en donde se realiza [†]
Desarrollo de nuevos radionúclidos y radiofármacos para medicina nuclear	ININ, UNAM
Dosimetría de la radiación	CINVESTAV, INCan, ININ, INNN, UAEMex, UNAM
Imagenología con técnicas que no usan radiación ionizante (óptica, ultrasonido, fotoacústica, termografía)	UAM, UNAM
Instrumentación:	
∞ CT, SPECT, PET	BUAP, UNAM
∞ Resonancia magnética	UAM, UNAM
Biomagnetismo, magnetogastrografía	CINVESTAV, UG
Modelación matemática y computacional en neurociencias	INNN, UAM, UNAM
Modelos matemáticos en biología y medicina	UNAM
Nuevas técnicas en tomografía (óptica coherente, fotoacústica)	INAOE, UNAM
Ondas de choque	UNAM
Óptica en oftalmología	UNAM
Procesamiento/reconstrucción de imágenes	CINVESTAV, INAOE, UACJ, UAM, UNAM
Quimio-radioterapia	ININ, UNAM
Radiobiología	ININ, INNN, UNAM
Radioterapia dirigida	INCan, ININ, UNAM
Resonancia magnética (conectividad y mapeo de función cerebral, espectroscopía, neuroimagen)	INNN, UAM, UNAM
Simulaciones Monte Carlo en:	
∞ Radiodiagnóstico, medicina nuclear	BUAP, ININ, UNAM
∞ Radioterapia	CINVESTAV, INNN, ININ, UAZ, UNAM
Técnicas avanzadas de imagenología digital (mamografía digital, contraste de fase, medios de contraste, terahertz)	CINVESTAV, INAOE, INCan, INNN, UNAM
Técnicas avanzadas de radioterapia con fotones	INCan, INNN, UNAM

[†] Benemérita Universidad Autónoma de Puebla (BUAP); Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (CINVESTAV); Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica (INAOE); Instituto Nacional de Cancerología (INCan); Instituto Nacional de Investigaciones Nucleares (ININ); Instituto Nacional de Neurología y Neurocirugía (INNN); Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ), Universidad Autónoma del Estado de México (UAEMex); Universidad Autónoma Metropolitana (UAM); Universidad Autónoma de Zacatecas (UAZ); Universidad de Guanajuato (UG); Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

La calidad de la investigación que se realiza en México es a nivel de competencia internacional, sin embargo, en términos de cantidad es indudable que el número de investigadores es extremadamente pequeño. Existen diferentes estrategias para fortalecer las actividades de investigación, que incluyen:

- La contratación de investigadores jóvenes con preparación de alto nivel en física médica tanto en universidades como en el sector salud,
- Impulsar fuertemente la creación de nuevos laboratorios en universidades y hospitales con tecnología de punta con apoyos gubernamentales suficientes y apropiados,
- Incrementar los convenios de colaboración y el desarrollo de proyectos académicos entre universidades y hospitales,
- Incentivar la creación de programas académicos (maestrías y doctorados) en física médica en diferentes partes del país,
- Establecer convenios de colaboración con empresas multinacionales (Siemens, Varian, General Electric, etcétera) para tener acceso de bajo nivel a los equipos para realizar investigación básica,
- Promover colaboraciones multidisciplinarias dentro de las mismas universidades y entre diferentes universidades nacionales,
- Fortalecer las colaboraciones académicas con universidades y hospitales en el extranjero,
- Aumentar los lazos de comunicación y cooperación con entidades internacionales como el Organismo Internacional de Energía Atómica y la Organización Panamericana de la Salud.

Con estas y otras estrategias, será posible que los físicos médicos tengan acceso y optimicen el uso de equipos de alta tecnología, establezcan lazos académicos de colaboración y se puedan hacer propuestas de mejoras en la tecnología, se pueda comenzar a desarrollar investigación traslacional (inexistente en México) y, finalmente, madurar en la investigación básica de punta.

El futuro del PET en México – un ejemplo a seguir

Es imposible describir en este capítulo el futuro de cada una de las líneas de investigación de la física médica en México. En lugar de eso, servirá como ejemplo un proyecto que desde su creación ha sido muy exitoso y que tiene un plan de desarrollo bien definido. Me referiré al futuro a mediano plazo de la investigación en PET, el cual está claramente definido y lo encabeza la Unidad PET/CT-Ciclotrón de la Facultad de Medicina, UNAM. Esta

Unidad, creada en el año 2000, actualmente cuenta con un ciclotrón para la producción de radionúclidos emisores de positrones para uso médico, un laboratorio de radiofarmacia, un sofisticado escáner PET/CT clínico y un microPET para estudios preclínicos con animales pequeños.

La Unidad PET/CT-Ciclotrón produce de manera rutinaria radiofármacos convencionales como $[^{18}\text{F}]\text{FDG}$, $[^{18}\text{F}]\text{NaF}$, $[^{13}\text{N}]\text{Amoníaco}$ y $[^{11}\text{C}]\text{Acetato}$. A corto plazo tiene como objetivo desarrollar nuevas radiomoléculas tales como $[^{18}\text{F}]\text{FLT}$, $[^{18}\text{F}]\text{FMISO}$, $[^{18}\text{F}]\text{FES}$, $[^{18}\text{F}]\text{FDOPA}$, $[^{11}\text{C}]\text{Raclopride}$ y $[^{11}\text{C}]\text{DTBZ}$ que permitan realizar estudios de procesos fisiológicos y biológicos más específicos. Estos radiofármacos permitirán diagnosticar enfermedades en etapas tempranas, establecer de una manera más precisa su estadio, así como para evaluar la progresión y efectividad de los tratamientos aplicados. Como segundo objetivo se ha planteado producir radionúclidos metálicos no-convencionales (que incluyen ^{64}Cu , ^{66}Ga , ^{86}Y y ^{89}Zr) con vidas medias largas que presenten farmacocinética lenta, adecuados para marcar proteínas y anticuerpos monoclonales. Todos estos esfuerzos en el área de radiofarmacia, junto con los sofisticados escáneres PET y microPET para realizar estudios clínicos y preclínicos, además de la integración de grupos multidisciplinarios de investigación, permitirán que México se ponga a la vanguardia en investigación básica y clínica en PET.

Un ejemplo del uso de la imagenología molecular con PET usando un radiofármaco innovador para la valoración de un tratamiento en diferentes pacientes se ilustra en la figura 6. El radiofármaco utilizado está basado en fluorotimidina marcada con ^{18}F , útil para evaluar la proliferación celular in vivo. Se puede observar la distribución espacial y concentración (escala de colores) del radiofármaco antes del tratamiento. Aquellos pacientes que presentan una buena respuesta a quimioterapia presentan una menor concentración del radiofármaco en la médula espinal (escala de azules) que aquellos que son resistentes a la enfermedad (escala de verdes-amarillos-rojos).

7. Tendencias globales

Tratamiento personalizado del cáncer

El tratamiento personalizado del cáncer es una propuesta ambiciosa que se está impulsando fuertemente desde hace algunos años y que indudablemente se podrá implementar en un futuro gracias a la aparición de técnicas avanzadas en las áreas de imagenología molecular y radioterapia. En esta sección se describen brevemente dos propuestas innovadoras en las que, idealmente, se tendrá que aplicar la radioterapia adaptativa. Este concepto considera modificaciones en el plan de tratamiento durante el curso del mismo debido a cambios anatómicos y biológicos de los tejidos irradiados.

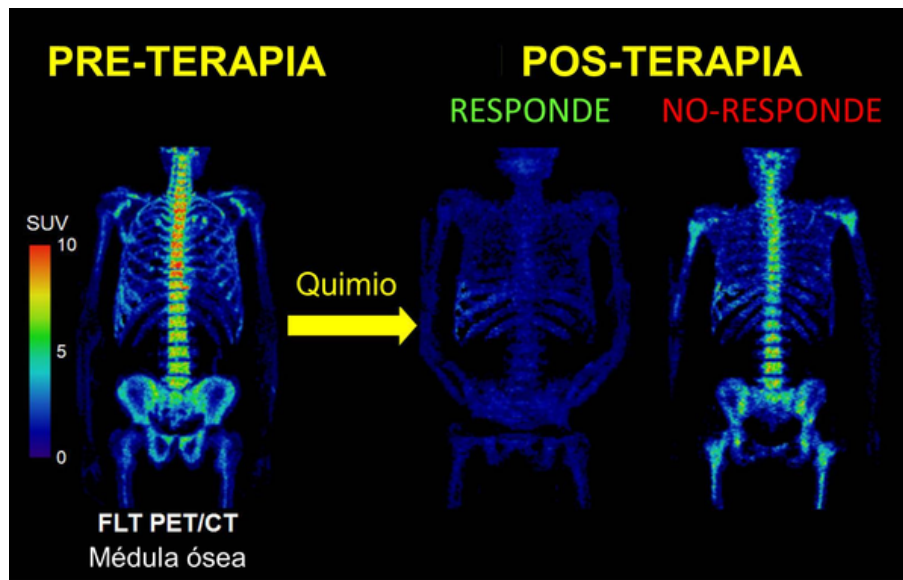


Figura 6: Estudios PET con ^{18}F -fluorotimidina que muestran el éxito y fracaso (poca y alta concentración del radiofármaco, respectivamente) de tratamientos de quimioterapia. Fuente: Dr. R. Jeraj, Universidad de Wisconsin.

Radioterapia guiada por biología

Hoy en día es común el uso de imágenes que proveen información anatómica y metabólica en radioterapia para localizar e identificar la forma de los volúmenes blanco a irradiar dentro de un paciente. El concepto tradicional de planificación del tratamiento (definición del volumen blanco y dosis a utilizar) supone que el tumor es uniforme. Sin embargo, esta suposición está lejos de la realidad; un tumor puede tener una estructura heterogénea al contener diversos tejidos con diferentes respuestas a la radiación. El siguiente gran paso en radioterapia consiste en personalizar el tratamiento de cada individuo para optimizar la respuesta del paciente. Esto será posible sólo si se mejoran e incorporan de manera adecuada técnicas de imagenología molecular y funcional para conocer la heterogeneidad en la estructura de los tumores, la respuesta biológica a la radiación de los tejidos involucrados, la forma y localización del volumen blanco basado en dicha respuesta, así como la valoración del tratamiento. El objetivo final es desarrollar la técnica denominada radioterapia guiada por biología (dose painting, como se le denomina en Inglés) que incorpore información biológica de los tejidos, con base en la cual se diseñen las planificaciones de tratamiento para impartir dosis con alta precisión en el espacio y en el tiempo [17].

Esta técnica podrá implementarse en los próximos años en los servicios de radioterapia gracias al desarrollo de procedimientos de irradiación de alta precisión y exactitud

(como IMRT, tomoterapia helicoidal, radioterapia guiada por imagen, radioterapia adaptativa, radioterapia robótica, hadronterapia, etcétera), combinados con estudios sofisticados de imagenología molecular que permitan identificar forma, distribución, composición y respuesta biológica a la radiación de los diferentes tejidos que forman a los volúmenes blanco.

Medicina molecular

Otro de los grandes avances para desarrollar tratamientos personalizados involucrará a las áreas químico-biológicas a través de la farmacogenómica y la farmacogenética. Estas disciplinas permitirán conocer las bases moleculares y genéticas de las enfermedades, y la variabilidad genética de cada individuo en su respuesta a diferentes fármacos. De esta manera, a partir del genoma de cada paciente, será posible desarrollar terapias personalizadas basadas en la susceptibilidad del individuo a diferentes enfermedades y su respuesta al tratamiento. Existen diferentes ventajas de tratamientos basados en análisis farmacogenéticos, entre las que se pueden mencionar la elección de fármacos eficientes y seguros para cada paciente, la disminución de efectos secundarios, una mejor dosificación y mayor probabilidad de éxito terapéutico [26]. Esto en su conjunto podrá representar un menor costo para el tratamiento de los pacientes.

El desarrollo de la farmacogenómica y la farmacogenética tendrá un fuerte impacto para el diseño de radiofármacos, por lo que la imagenología molecular y los tratamientos del cáncer con radioterapia dirigida³ también se verán ampliamente beneficiados. La radioterapia dirigida es una forma de tratamiento en la que se imparten altas dosis de radiación a tumores malignos administrando al paciente moléculas marcadas con un radionúclido emisor de partículas con alto poder de frenado. El radionúclido se selecciona dependiendo de su tipo de decaimiento (e.g. emisión de partículas alfa, beta o electrones Auger), alcance y vida media. El objetivo de esta terapia es diseñar radiofármacos específicos para liberar niveles tóxicos de radiación dañando sólo a los tejidos neoplásicos (es decir, mejorando su acumulación en el lugar exacto de acción), manteniendo niveles muy bajos de toxicidad en tejidos sanos. Existe un concepto interesante denominado teragnóstico, proveniente de la acción combinada de terapia y diagnóstico, que en la radioterapia dirigida se refiere al uso de radionúclidos con modos de mixtos de decaimiento, es decir, a través de la emisión de partículas y fotones. De esta manera, las partículas cargadas se utilizan para el tratamiento, garantizando el depósito de altas dosis de radiación en los tejidos cancerosos, y los fotones para vigilar en tiempo real la distribución espacial del radiofármaco. Para que la radioterapia dirigida personalizada pueda ser una realidad será necesario modificar la forma en la que se hacen planificaciones de tratamiento para

³La radioterapia dirigida con radionúclidos no sólo se pretende usar para el tratamiento del cáncer, también se ha propuesto para enfermedades cardiovasculares, inmunológicas o infecciosas, así como para el control de inflamación o dolor.

que, además de incluir información anatómica y molecular, también considere la información genética del paciente.

Explotando el potencial de la antimateria

La única aplicación exitosa de la antimateria en medicina es en estudios de medicina nuclear a través de la tomografía por emisión de positrones. Actualmente, una línea de investigación muy prometedora llevada a cabo en los grandes centros mundiales de investigación es el uso de antipartículas en radioterapia. De forma similar a la hadronterapia, se ha propuesto el uso de haces intensos de antipartículas (antiprotones, por ejemplo) de alta energía para la irradiación de tejidos neoplásicos. Estos haces de antipartículas comparten algunas de las ventajas de la hadronterapia ya mencionadas en la sección 5, es decir, su pérdida de energía conforme penetran la materia antes del pico de Bragg es aproximadamente la misma, así como sus efectos radiobiológicos. Sin embargo, una vez que alcanzan el pico de Bragg las antipartículas se aniquilan liberando localmente una gran cantidad de energía, aumentando considerablemente la dosis al volumen blanco. Adicionalmente, la producción de partículas secundarias podrían aumentar el efecto radiobiológico (aquellas con altos poderes de frenado), o bien, podrían ser utilizadas para vigilar en tiempo real la localización del pico de aniquilación (aquellas débilmente ionizantes que abandonan el volumen blanco). Debido al alto costo y a la complejidad de la tecnología involucrada en el tratamiento del cáncer con antimateria, su aplicación en la práctica podría ser una realidad probablemente en algunas décadas.

Agradecimientos

La autora agradece el apoyo de DGAPA-UNAM proyecto PAPIIT IN105913.

8. Referencias

- [1] C. Grupen and I. Buvat, *Handbook of particle detection and imaging*. Springer, 2011, vol. 1.
- [2] IOMP, International Organization for Medical Physics. 12 Oct 2012. <http://www.iomp.org/?q=node/76>.
- [3] R. F. Mould, *A century of X-rays and radioactivity in medicine: with emphasis on photographic records of the early years*. Taylor & Francis, 1993.
- [4] A. M. Cormack, "Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications," *Journal of Applied Physics*, vol. 34, no. 9, pp. 2722–2727, 1963.

- [5] G. N. Hounsfield, "Computerized transverse axial scanning (tomography): Part 1. description of system," *British Journal of Radiology*, vol. 46, no. 552, pp. 1016–1022, 1973.
- [6] J. T. Bushberg, J. A. Seibert, E. M. Leidholdt, and J. M. Boone, *The essential physics of medical imaging*. Lippincott Williams & Wilkins, 2012.
- [7] J. Yorkston, "Recent developments in digital radiography detectors," *Nuclear Instruments and Methods in Physics Research Section A: Accelerators, Spectrometers, Detectors and Associated Equipment*, vol. 580, no. 2, pp. 974–985, 2007.
- [8] W. R. Hendee, "X rays in medicine," *Physics Today*, vol. 48, p. 51, 1995.
- [9] T. M. Buzug and D. Mihailidis, "Computed Tomography from photon statistics to modern Cone-Beam CT," *Medical Physics*, vol. 36, p. 3858, 2009.
- [10] W. A. Kalender, "X-ray computed tomography," *Physics in medicine and biology*, vol. 51, no. 13, p. R29, 2006.
- [11] P. J. Bones, A. P. Butler, J. P. Ronaldson, and A. M. Opie, "Development of a CT scanner based on the Medipix family of detectors," in *Proc of SPIE*, vol. 7804, 2010, pp. 1–6.
- [12] S. R. Cherry, J. A. Sorenson, and M. E. Phelps, *Physics in nuclear medicine*. Saunders, 2012.
- [13] C. S. Levin, "Promising new photon detection concepts for high-resolution clinical and preclinical PET," *Journal of Nuclear Medicine*, vol. 53, no. 2, pp. 167–170, 2012.
- [14] M. Conti, "State of the art and challenges of time-of-flight PET," *Physica Medica*, vol. 25, no. 1, p. 1, 2009.
- [15] S. R. Cherry, "Multimodality imaging: Beyond PET/CT and SPECT/CT," in *Seminars in nuclear medicine*, vol. 39, no. 5. NIH Public Access, 2009, p. 348.
- [16] S. Webb, "The physical basis of IMRT and inverse planning," *British journal of radiology*, vol. 76, no. 910, pp. 678–689, 2003.
- [17] T. Bortfeld and R. Jeraj, "The physical basis and future of radiation therapy," *British Journal of Radiology*, vol. 84, no. 1002, pp. 485–498, 2011.
- [18] J. Gordon, "Damage limitation," *Physics World*, pp. 26–61, 2010.
- [19] IAEA, 2003, A Silent Crisis: Cancer Treatment in Developing Countries, IAEA Booklet.

- [20] E. H. Zubizarreta, A. Poitevin, and C. V. Levin, "Overview of radiotherapy resources in Latin America: a survey by the International Atomic Energy Agency (IAEA)," *Radiotherapy and oncology*, vol. 73, no. 1, pp. 97–100, 2004.
- [21] Comisión Nacional de Seguridad Nuclear y Salvaguardias, 15 de octubre de 2012, <http://www.cnsns.gob.mx/>.
- [22] T. Eudaldo and K. Olsen, "The European Federation of Organisations for Medical Physics. Policy Statement No. 12: The present status of medical physics education and training in Europe. new perspectives and EFOMP recommendations," *Physica Medica*, vol. 12, no. 1, p. 1, 2010.
- [23] OIEA, El Físico Médico: criterios y recomendaciones para su formación académica, entrenamiento clínico y certificación en América Latina. OIEA STI/PUB/1424, 2010.
- [24] MFM-UNAM, Maestría en Ciencias (Física Médica), Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM, 15 de octubre de 2012. <http://w2.fisica.unam.mx/fismed>.
- [25] MFM-UAEMex, Maestría en Ciencias con Especialidad en Física Médica, Universidad Autónoma del Estado de México, 15 de octubre de 2012. <http://www.uaemex.mx/fmedicina/Maestydoc.html>.
- [26] T. Cabaleiro, F. Abad Santos, and M. García López, "Farmacogenética: presente y futuro," *Actualidad en farmacología y terapéutica*, vol. 9, no. 1, pp. 13–19, 2011.

Perspectivas sobre los nuevos materiales del siglo XXI

Gonzalo González, Instituto de Investigaciones en Materiales, UNAM, México

1. Introducción

Los materiales están tan ligados a la actividad del hombre que algunas etapas de la humanidad se han descrito en términos del manejo técnico que se tenía de alguno de ellos: pasamos entonces por la era de piedra, del bronce, del hierro, del silicio y actualmente por la era de los nanomateriales¹, esto último por las nuevas aplicaciones que dichos materiales empiezan a tener. Sea cual fuere el nombre del material preponderante que tendrá el siglo XXI, lo cierto es que dichos materiales tendrán que ver con las respuestas a los enormes desafíos científicos que impone este siglo como son: el ahorro de energía y búsqueda de fuentes de energías renovables, la búsqueda de materiales reciclables y amigables con el medio ambiente, la mejora de las propiedades de los materiales en base a un diseño a escala nanométrica del mismo. Para este fin se están desarrollando materiales nanoestructurados, algunos de ellos con características de reacción espontánea hacia estímulos externos y en donde el uso concreto de la nanotecnología esta siendo la llave para encontrar estos nuevos materiales. Por otro lado estos desafíos son tan complejos, que solo una respuesta interdisciplinaria tiene oportunidad de conseguir el objetivo. Las siguientes líneas en este capítulo intentan abundar en algunos de estos temas y, a través de algunos ejemplos, se explicará el estado actual del conocimiento, pero sobre todo se analizarán los retos que tenemos que vencer en estos campos. A lo largo de este capítulo se hará énfasis en una descripción a escala nanométrica de los fenómenos para explicar la problemática particular de cada uno de estos nuevos materiales.

2. Materiales para la captura de CO₂.

Existe una gran preocupación por los cambios climáticos que tienen su origen en la emisión de gases como el CO₂, productos en gran medida de nuestra actividad industrial

¹Véase el capítulo "Física a la escala nanométrica" de Cecilia Noguez, en este mismo volumen.

y que son señalados como los responsables del calentamiento global del planeta. No obstante a corto y mediano plazo, no parece sencillo que las sociedades industriales controlen sus emisiones de CO_2 ; más aún, existe el riesgo de que esta situación se empeore, pues el uso de los hidrocarburos como vector de energía sigue siendo demasiado preponderante.

La figura 1 muestra las reservas mundiales de gas petróleo y carbón, de acuerdo a la Asociación Mundial del Carbón (WCA). Las reservas probadas de carbón durarían al ritmo de producción actual más de 112 años, mientras que las de petróleo y gas tardarían sólo 50 años más en agotarse [1].

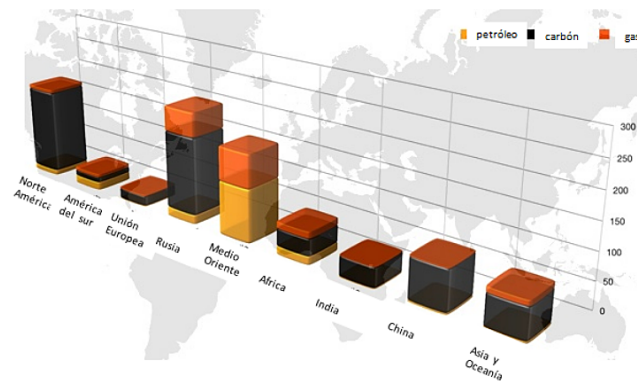


Figura 1: Reservas de petróleo, carbón y gas en el mundo (10^9 toneladas).

Al analizar la figura 1, es factible pensar que la solución energética de finales del siglo XXI, una vez terminado el petróleo, pase por el carbón, lo cual se vería facilitado por el hecho que muchos de los países industrializados poseen grandes reservas de este mineral. De hecho, si se observa la tendencia de utilización del carbón como vector de energía (figura 2), nos percatamos que el carbón es actualmente una solución energética seria para muchos países, en particular para China, quien con su crecimiento económico acelerado ha disparado el consumo del carbón, ya que está muy ligado a la producción de electricidad. También en los Estados Unidos, el consumo está creciendo, entre 2009 y 2010 el consumo total de carbón se incrementó en un 5.1 % en este país [2].

Si se confirmara la opción del carbón como vector energético después del petróleo, con el predecible aumento en la emisiones de CO_2 y de CH_4 , la ciencia de materiales debe enfocarse en buscar soluciones para capturar el CO_2 antes de que éste se emita a la atmósfera; y una vez capturado el CO_2 , el qué hacer con él es un problema abierto, actualmente se plantea la idea de reintroducir el CO_2 capturado en cavidades subterráneas para su almacenamiento.

Otro gran problema ligado al carbón ocurre durante su extracción, pues ahí se genera una cantidad importante de metano, que es un gas de efecto invernadero y que a masa igual, es 23 veces más "eficaz" que el mismo CO_2 para calentar la atmósfera, y que por

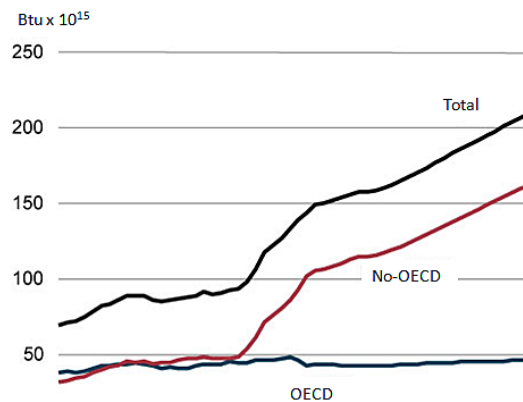


Figura 2: Consumo mundial de carbón por región (BTU × 10¹⁵). OECD es la agrupación de países desarrollados, del inglés 'Organisation for Economic Co-operation and Development' [2].

lo mismo es necesario capturarlo o cuando menos quemarlo como combustible antes de liberación ingreso a la atmósfera.

Uso de los cerámicos alcalinos para la captura de CO₂

Las investigaciones sobre de captura del CO₂ se basan en un proceso de adsorción superficial sobre el material captor. La adsorción puede ser física, en donde el CO₂ sigue existiendo como tal, o química, en donde el CO₂ se integra en una estructura, reaccionando y perdiendo su identidad como CO₂ (figura 3). La adsorción física ocurre a baja temperatura y se da en algunas zeolitas, perovskitas, hidrotalcitas así como en ciertas membranas poliméricas [3–5] y la adsorción química ocurre a alta temperatura (> 400°C) y se da en algunos cerámicos alcalinos. El candidato ideal debe ser un material que tenga una alta selectividad en la adsorción de CO₂ y su capacidad para la desorción debe ser igualmente buena. Por lo anterior, es de vital importancia, poder realizar configuraciones que maximicen el área de contacto. La nanotecnología es de gran ayuda para maximizar el área, pues se pueden proponer arreglos de nanotubos o nanopartículas que debidamente compactados, tengan una gran superficie reactiva. Ya se han logrado por ejemplo, construir "enramados" de nanotubos del compuesto ZrO₂ sobre el cual cristalizará el compuesto Li₂ZrO₃ [6](conocido por su capacidad de capturar al CO₂), se espera que dichos materiales tengan un comportamiento mejor que el mismo material micro-poroso. En la figura 4 se muestra la microestructura de algunos cúmulos del compuesto Li₂ZrO₃ obtenidos en el IIM-UNAM antes y después de la adsorción de CO₂.

En el futuro, dado el interés que la captura del CO₂ suscita, es de esperarse que los procesos para aumentar la superficie efectiva mejoren. La tendencia indica que cada vez se obtendrán materiales de sección más pequeña y la búsqueda de nuevos materiales captadores está abierta. Se ha encontrado muy recientemente que dopar uno de los compuestos

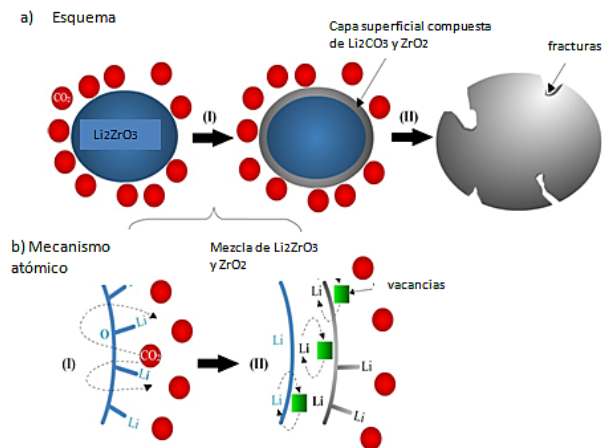


Figura 3: Esquema representativo del mecanismo de reacción correspondiente a la captura química de CO_2 en materiales cerámicos alcalinos. Fuente: Imagen cortesía de Heriberto Pfeiffer Perea (IIM-UNAM).

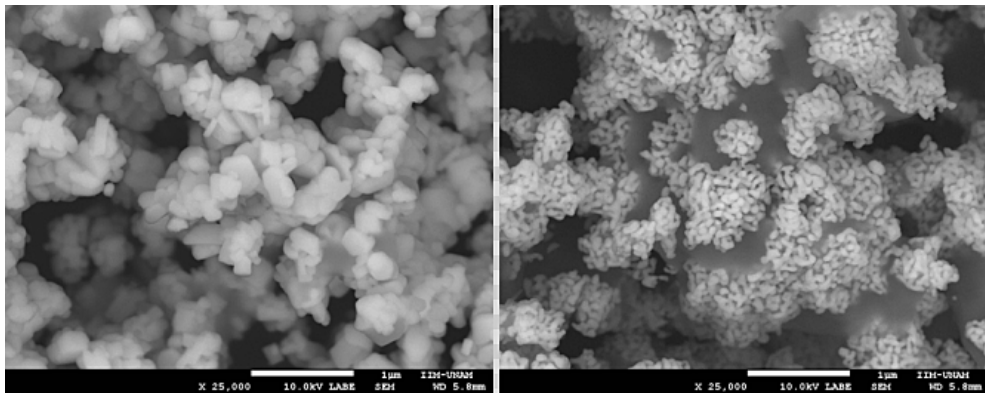


Figura 4: Imágenes de microscopía electrónica de barrido de partículas de zirconato de sodio (Na_2ZrO_3), antes (izq) y después (der) del proceso de captura química de CO_2 . Fuente: Imágenes cortesía de Heriberto Pfeiffer Perea (IIM-UNAM).

más prometedores, que es el Li_2ZrO_3 , con potasio puede aumentar la capacidad del material para captar CO_2 [5–7].

3. Materiales para su uso en las energías alternativas

El reto de conseguir un sustituto del petróleo y sus derivados como vector de energía parece muy difícil de conseguir aún a mediano y largo plazo; más plausible parece el

escenario donde no una, sino múltiples opciones energéticas se abrirán para solucionar lo que ahora solo resuelve el petróleo. Posiblemente, todas estas “pequeñas” opciones se irán consolidando y ubicándose en nichos de mercado adaptados a ellas, pero lo que parece muy probable es que ninguna podrá, por si sola, ser la solución energética del planeta.

Desde el punto de vista científico, es necesario encontrar soluciones que sean sostenibles a largo plazo, por ello es de vital importancia definir cuáles son los materiales que prometen ser una respuesta a los problemas energéticos que afrontamos y cuál es su real avance y sus perspectivas en el siglo XXI.

Existen diferentes opciones de fuentes de energía alternativa, tales como la eólica, la solar, la biomasa, las celdas de combustible por mencionar algunas. Todas ellas reunidas representan en nuestros días un porcentaje muy bajo de nuestro consumo energético. La figura 5 representa la generación mundial de electricidad, desglosado por tipo de combustible para producirla, las energías renovables, producen menos del 5% de la electricidad actual, es por lo tanto, un enorme reto lograr que estas energías se vuelvan preponderantes en tan solo 50 años.

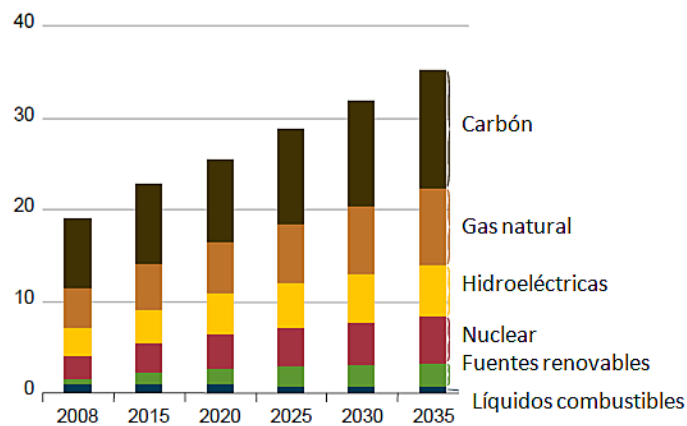


Figura 5: Generación mundial de electricidad desglosada por tipo de combustible para producirla (escala 10^{12} kWh) [2]. InternationalEnergy Outlook 2011, U.S. Energy Information Administration DOE/EIA-0484 (2011)

Entre todas las energías alternativas que se están considerando, se destaca la propuesta de las celdas de combustible, debido a que usan hidrógeno como vector energético y el tipo de residuo que produce es simplemente agua. La figura 6 muestra un esquema de una celda de combustible alimentada por hidrógeno. El hidrógeno ingresa por el lado del ánodo y se disocia entonces en protones y electrones, donde ambos siguen trayectorias distintas, por un lado los protones atraviesan una membrana hasta el cátodo y los electrones reaccionan con el oxígeno, el residuo de esta reacción es agua, entre el ánodo y el cátodo se forma una diferencia de potencial que será utilizada como la energía útil

del sistema, (típicamente varias celdas se agrupan en serie o en paralelo para aumentar la tensión).

La tecnología de las celdas de combustible es muy diversa y su gama de temperaturas de operación va de los 60 a los 1000°C. La tabla 1 muestra los diferentes tipos de celdas de combustible que actualmente existen y algunas de sus características más importantes [8, 9]. Todos los modelos presentan ventajas y desventajas, lo que hace evidente la necesidad de optimizar algunos parámetros. En la gama de bajas temperaturas, la pila alcalina (AFC), presenta la ventaja de no necesitar ningún metal precioso como ánodo, pero se contamina con la presencia del CO y CO₂ y su electrolito es sumamente corrosivo, las pilas de membrana polimérica (PEFC) funcionan a temperaturas cercanas de 100°C, necesitan de un ánodo de Pt y desgraciadamente éste último se contamina con el CO. La pila de metanol (DMFC), tiene la ventaja de usar este compuesto orgánico, es la pila que funciona a temperaturas más bajas, pero desgraciadamente algunos de sus componentes son altamente neurotóxicos, la pila de ácido fosfórico (PAFC) tolera bien el CO y el CO₂ pero su electrolito es altamente corrosivo y su rendimiento es bajo. Para temperaturas más elevadas, las pilas de carbonatos fundidos (MCFC), son las que dominan, a sus temperaturas de funcionamiento, el CO se vuelve un combustible y no un contaminante, también el metano podría usarse como carburante, otra ventaja es que ya no sería necesaria la utilización de un ánodo de Pt. Actualmente se está investigando de que manera bajar la temperatura de funcionamiento de estas celdas y como aumentar su tolerancia a los combustibles carbonados.

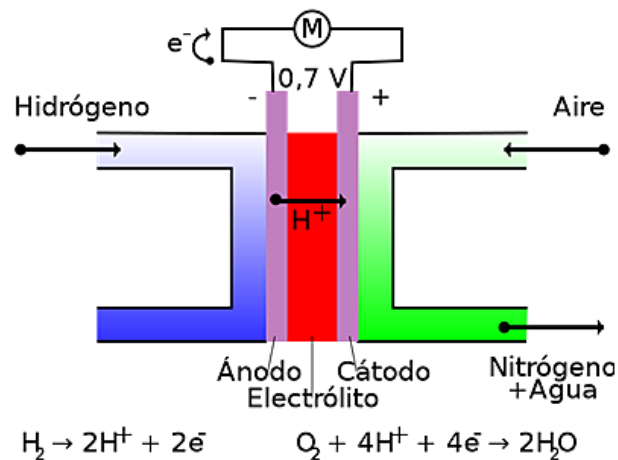


Figura 6: Esquema de una celda de combustible alimentada por Hidrógeno.

Tabla 1: Principales características y tipos de celdas de combustible.

Tipo	T(°C)	ánodo	Electrolito	Combustible	Ión	Rend.
AFC	60-90	Metal o C	NaOH-KOH	H ₂	OH-	60 %
PEFC	80-110	Pt sobre C	memb. polimérica	H ₂	H+	60 %
DMFC	80-110	Pt sobre C	memb. polimérica	CH ₃ OH	H+	60 %
PAFC	160-200	Pt sobre C	H ₃ PO ₄	H ₂	H+	55 %
MCFC	600-800	Ni+Cr	LiCO ₃ -K ₂ CO ₃	H ₂ -CO	CO ₂ 2-	55-65 %
SOFC	800-1000	Ni-ZrO ₂	ZrO ₂ con Y ₂ O ₃	H ₂ ,C0,CH ₄	O 2-	60-65 %

Datos extraídos de la referencias [7, 8]

En resumen, podemos decir que la tecnología de la pilas de combustible a baja temperatura son la base de la tecnología que usa al hidrógeno como vector energético. Como otro punto positivo, esta tecnología es muy flexible y también puede usar hidrocarburos ligeros como carburantes. En lo que se refiere a la tecnología de la pilas de combustible a alta temperatura, su interés es mayor debido a que ya no requiere de los ánodos de Pt y puede en principio usar como carburante hidrocarburos más pesados.

4. Nanocompuestos *in situ* en procesos de solidificación rápida

Se puede definir esquemáticamente un material compuesto como un material formado por dos o más fases, cuya sinergia es tal, que el nuevo material hereda parte de la propiedades de las fases primarias. El producto resultante posee una mezcla de propiedades que se consideran ventajosas respecto a cualquiera de los materiales base.

Los materiales compuestos de matriz metálica (CMM) son una clase de materiales, en donde un refuerzo cerámico es incorporado en una matriz metálica, con el fin de modificar sus propiedades. Estos CMMs son capaces de proveer límites de operación a temperaturas más altas que los materiales convencionales y mejorar algunas de sus características tales como el módulo de rigidez, la resistencia a la tracción y cedencia, la resistencia al desgaste y la estabilidad dimensional. Las características sobresalientes de los metales como matrices se manifiestan de diferentes maneras; en particular, una matriz de metal, le da al compuesto una naturaleza metálica en términos de conductividad térmica y eléctrica, y mejores operaciones de manufactura e interacción con el medio ambiente. La combinación de peso ligero, resistencia al ambiente y propiedades mecánicas útiles, han hecho que la mayoría del trabajo comercial en compuestos de matriz metálica, se haya enfocado principalmente en el aluminio. El aluminio como matriz metálica puede aceptar diferentes tipos de agentes reforzantes, entre ellos: fibras de boro (B), oxido de aluminio (Al₂O₃), carburo de silicio (SiC), carburo de boro (B₄C), y grafito en forma de partículas.

De manera general, los materiales que son usados como refuerzo en los materiales compuestos pueden ser de tres tipos: los reforzados con fibras continuas, los reforzados con fibras discontinuas y los reforzados con partículas, cada uno de ellos presenta ventajas

y desventajas. Los compuestos reforzados con fibras continuas presentan las siguientes características, aunque su elaboración aún es costosa:

- Una resistencia a la ruptura elevada y un alto módulo de elasticidad que depende de la dirección de las fibras (formación unidireccional).
- Una baja densidad.
- Una gran estabilidad química y una compatibilidad química y física con la matriz (mojado y reacción química de la interfase).

Por su parte, los refuerzos con fibras discontinuas (llamadas así por que su longitud es menor a la de las fibras continuas), ofrecen propiedades similares, a excepción de que el proceso de fabricación es de carácter más comercial. Las fibras discontinuas más utilizadas para la elaboración de compuestos son los whiskers y las fibras cortas, las propiedades alcanzadas por este tipo de compuestos son inferiores a las alcanzadas por los compuestos de fibras largas.

El otro tipo de compuesto es el reforzado por medio de partículas; en el cual dichas partículas tienen por objetivo distribuir la carga aplicada con la matriz, esto quiere decir que se logra un incremento en el límite de cedencia, y esto depende en buena medida de dos aspectos fundamentales que son el tamaño y el volumen fraccionario de partículas aplicadas para la elaboración del material.

Desde el punto de vista de su impacto tecnológico, los compuestos de matriz metálica tienen una aplicación muy importante en la industria aeroespacial, y más recientemente en la industria automotriz, entre otras cosas porque pueden utilizarse materiales más ligeros (como aluminio y magnesio); que pueden fácilmente sustituir a los materiales convencionales (como por ejemplo el acero, aleaciones ferrosas (sobre todo hierro colado), y algunas aleaciones de Cu (latones y bronce)), dando propiedades equivalentes, pero con un peso casi tres veces inferior.

Sin embargo, quedan algunos problemas metalúrgicos sin resolver para los compuestos con refuerzo de partículas, entre los cuales uno de los más importantes es la relación de la interfase matriz-cerámico con las propiedades mecánicas del compuesto. La formación de fases indeseables en la interfase, la mala distribución de las partículas en la matriz, y el mal mojado entre partículas-matriz, son solo algunos ejemplos de los principales responsables del no siempre tan buen comportamiento mecánico de estos materiales.

Recientemente han surgido nuevas técnicas de procesamiento de los materiales compuestos de matriz metálica basados en la producción *in situ* [10]. Las técnicas *in situ*, involucran una reacción química, resultado de la formación de una fase reforzante muy fina y termodinámicamente estable, dentro de una matriz metálica. Esto provee una interfase matriz-partícula más limpia y estable, las superficies reforzantes están libres de contaminación, lo cual resulta en una unión interfacial más fuerte. Algunas de estas nuevas tecnologías incluyen los procesos: DIMOX, XD, PRIMEX, infiltración de gas reactivo, síntesis

autopropagante a alta temperatura (SHS), reacciones líquido-líquido, o sólido-gas-líquido y MMCs *in situ* por plasma [11].

La técnica de procesamiento de nanocomposites MMCs *in situ* por medio de un enfriamiento rápido tiene como objetivo lograr microestructuras más favorables e isotrópicas a los ensayos mecánicos. Estas técnicas serían de particular interés en aleaciones cuyas compuestos intermetálicos, fueran un impedimento para lograr tasas de deformación útiles para las aplicaciones.

Por ejemplo, en el caso de las aleaciones Al-Ni, sus aplicaciones mecánicas se ven restringidas a composiciones con no más de 10 % en peso de contenido de Ni [12, 13], la razón de ello, es la formación de agujas del compuesto intermetálico Al_3Ni y su efecto sobre la concentración de esfuerzos. Sin embargo se intuye que a mayores concentraciones de níquel, podrían haber efectos muy interesantes. Algunos autores han encontrado [13] que la dureza Vickers se incrementa con el contenido de Ni, hasta alcanzar valores tan altos como 320 Hv con un contenido aproximado de 20 % at Ni y concluyen que tanto el refinamiento del tamaño de grano como el reforzamiento por dispersión de la fase intermetálica Al_3Ni contribuyen a alcanzar la alta dureza Vickers obtenida en esas nanoestructuras. Se ha encontrado que compuestos de aluminio con presencia del intermetálico Al_3Ni , han elevado la resistencia al desgaste en anillos para pistón de uso automotriz [14], siendo necesario mejorar aún más las propiedades de las interfaces entre el intermetálico y el aluminio, para ampliar las aplicaciones de estas aleaciones. De manera general, los aluminuros de níquel están siendo investigados para usarlos como materiales estructurales para alta temperatura [15].

Los estudios de las aleaciones Al-Ni *in situ* en condiciones de enfriamiento rápido, muestran cambios muy notables en la microestructura del material, pasando de una morfología del intermetálico en forma de agujas a una de tipo globular [16], sumamente fina y dispersa como pocas veces se puede obtener en un nanocompuesto. En la figura 7 puede apreciarse la microestructura de una aleación Al_4Ni (%at.) en condiciones de colada y la misma aleación bajo condiciones de enfriamiento muy rápido; se aprecia claramente en las imágenes los cambios morfológicos entre los dos procesos.

Para lograr el enfriamiento rápido de los metales, un método muy usual es el llamado "melt spinning". Este método consiste en inyectar un chorro fundido de metal sobre la superficie de una rueda metálica suficientemente masiva, adicionalmente la rueda también puede ser enfriada con agua o con algún líquido criogénico. La rueda debe de girar a alta velocidad, de modo que el líquido se pueda solidificar de forma extremadamente rápida, se estima que la velocidad típica de enfriamiento con este método es de 10^4 a 10^7 kelvins por segundo.

En resumen, mediante técnicas de enfriamiento rápido, se puede modificar radicalmente la morfología de las fases intermetálicas y con ello ampliar el campo de aplicación de múltiples sistemas metálicos, que hasta el día de hoy tienen una ductilidad muy reducida. No obstante, es importante aclarar, que es necesario encontrar la forma de llegar a este tipo de microestructuras en muestras volumétricas, y no solo en cintas, lo que en

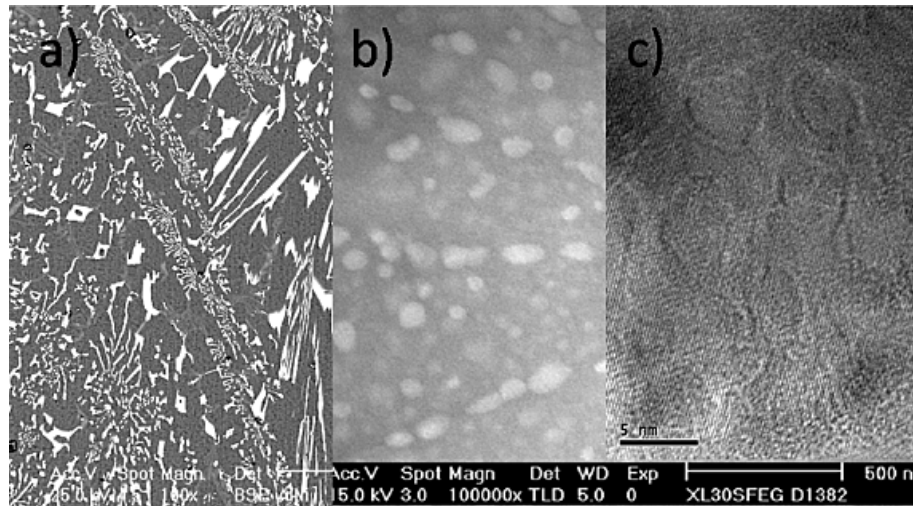


Figura 7: Microestructura de una aleación Al_4Ni (%at), a) imagen MEB de la aleación después de colada, b) imagen MEB de la aleación después del enfriamiento rápido, c) imagen TEM de una zona de b).

sí mismo es un reto tecnológico.

5. Materiales nanoestructurados en base a SPD

Es bien sabido que en metalurgia, una aleación incrementa su resistencia mecánica, si disminuye su tamaño de grano. No obstante, los métodos tradicionales para refinar el grano, con frecuencia no consiguen alcanzar niveles de grano manométrico. Los métodos de solidificación rápida, como el descrito anteriormente, consiguen este objetivo pero en muestras que son muy delgadas, son cintas metálicas de solamente algunas micras de espesor. Lograr por lo tanto la obtención de granos manométricos sobre muestras masivas parecía imposible. Fue hasta el término de la guerra fría, cuando algunas investigaciones rusas son reveladas al occidente y se conocen los métodos para la obtención de granos finos, en muestras masivas, a partir de procesos de deformación plástica severa o SPD por sus siglas en inglés. [17]

La disminución del tamaño de grano y por ende el aumento del límite de cedencia, no era la única sorpresa de estos procesos, sino que también la ductilidad se vería beneficiada [18]. Es decir, se rompía el paradigma, de que era imposible obtener a la vez incrementos en el límite de cedencia y en ductilidad mediante procesos de deformación. Es por ello, que en los últimos tiempos, se ha incrementado el interés científico y tecnológico en los procesos para obtener aleaciones, con una microestructura de granos ultrafinos, (del orden de 10 a 100 nm), por procesos de deformación plástica. La existencia de tales granos,

daría lugar a un material con mayor dureza y límite de cedencia, tal y como predicen las relaciones de Hall Petch. Por otro lado, el fenómeno de plasticidad en el material dejaría de producirse por un mecanismo de deslizamiento de dislocaciones, para producirse por un fenómeno de “deslizamiento” de granos, similar a lo que ocurre en un flujo granular, lo que explicaría el aumento inesperado de la ductilidad [19].

En los procesos de deformación plástica severa (a diferencia de otros procesos de deformación, tales como la laminación [20], en donde se observa el aumento del límite de cedencia del material, por incremento de dislocaciones, pero con gran pérdida de ductilidad.) se logra un incremento significativo de la dureza y del límite de cedencia del material y prácticamente no hay pérdida de ductilidad después de un número grande de pasos [21, 22], lo cual es sumamente interesante tanto desde el punto de vista científico como del tecnológico.

Existen diversos procesos de SPD capaces de refinar el grano, uno de ellos es el proceso ECAP (por las siglas del inglés, Equal-Channel Angular Pressing). El ECAP es un proceso que consiste en el paso forzado de una barra metálica por un pistón a través de un canal en forma de codo, cuyo ángulo oscila entre 90 y 120 grados. Los dispositivos para lograr estas deformaciones necesitan de prensas hidráulicas y de un diseño que logre soportar las presiones a la que estará sometido tanto la muestra como el molde. La figura 8a, muestra un esquema del molde de ECAP, en él se advierten dos placas intercambiables, lo que permite eventualmente cambiar el ángulo de salida usando el mismo molde, también son frecuentes los diseños en 2 piezas (figura 8b).

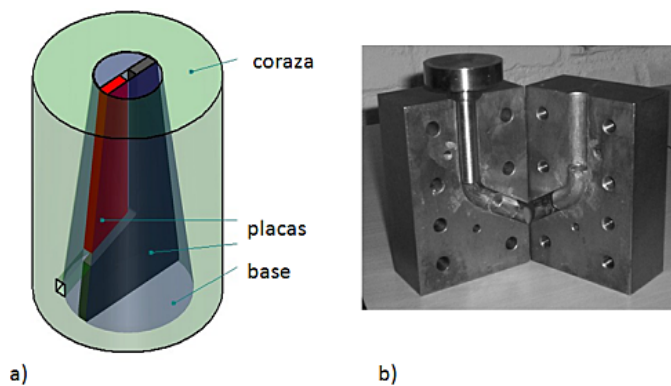


Figura 8: a) Dibujo de un molde de ECAP de placas intercambiables, b) molde de ECAP de 2 piezas.

Como es de esperarse, el proceso ECAP confiere una deformación muy importante de corte al material, por otro lado, debido a que la deformación se hace en frío, (abajo de la temperatura de recristalización del material), la aleación debe ser lo suficientemente dúctil, como para soportar la repetición de este proceso un número suficientemente elevado de veces. Como un parámetro adicional, existe la opción de distintas rutas de proceso,

que se manifiestan aplicando rotaciones en torno al eje de extrusión entre pasos sucesivos.

Se tiene referencia de algunos estudios con aleaciones muy dúctiles (de cobre ó aluminio) por ECAP, con resultados muy interesantes, que dieron lugar a incrementos del 400 % en su límite de fluencia, lo cual es excepcional, todo ello sin pérdida apreciable de ductilidad. Actualmente muchas investigaciones están en proceso, tratando de comprender como funcionaría este proceso en aleaciones cuya microestructura tuviera precipitados, por ejemplo en las aleaciones Al-Cu de amplio uso e interés industrial [23–25]. Estos proyectos son de gran interés ingenieril por las posibilidades y bondades que proporcionarían estos resultados para la industria del aluminio. El reto consiste en evitar que la formación de precipitados y la generación de zonas de alta concentración de esfuerzos alrededor de ellos, no fragilicen el material demasiado e impidan su extrusión angular.

En varias etapas del proceso ECAP, es fundamental evaluar la microestructura y la evolución de la textura, a través de técnicas de difracción de rayos X (textura cristalográfica), de microscopía electrónica de transmisión (TEM), microscopía electrónica de barrido y la técnica EBSD, pues permiten inferir los fenómenos y cambios que experimentan los granos que constituyen el material, el nivel de esfuerzos residuales, que se aporta en cada pase o ensayo de ECAP, y que a la postre explicarán los mecanismos de endurecimiento, ductilidad y conducta a nivel nanométrico [26–28]. En la figura 9, podemos apreciar como el análisis multiescala, permite apreciar claramente la evolución en la microestructura de una aleación procesada por ECAP [29], la figura 9a muestra la zona global de interés, en la figura 9b se muestra el lugar donde es extraída una muestra de 10x10 micras, la misma que después será observada por microscopía electrónica en transmisión, (figura 9c), en esta última podemos apreciar la formación de subgranos producto del proceso ECAP y presencia de la segunda fase (Sn en este caso).

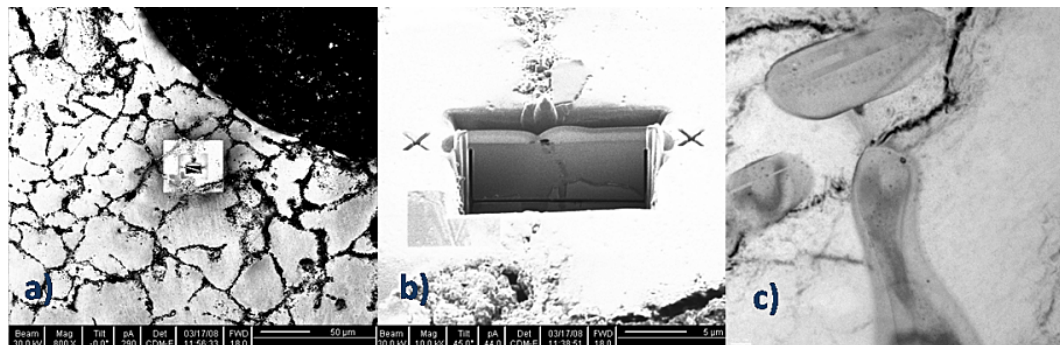


Figura 9: Análisis multiescala de una aleación Al-8Sn (wt. %) sometida a un paso de ECAP.

De la misma manera, en la figura 10a podemos comprender el efecto que el proceso ECAP puede tener sobre la dureza del material, es notable que se pueda duplicar la dureza, al mismo tiempo es importante seguir cual es la orientación preferencial de los granos

(textura cristalográfica) después de aplicado el proceso (figura 10b), esta textura determina en mucho la facilidad o dificultad para realizar los pasos subsiguientes de ECAP.

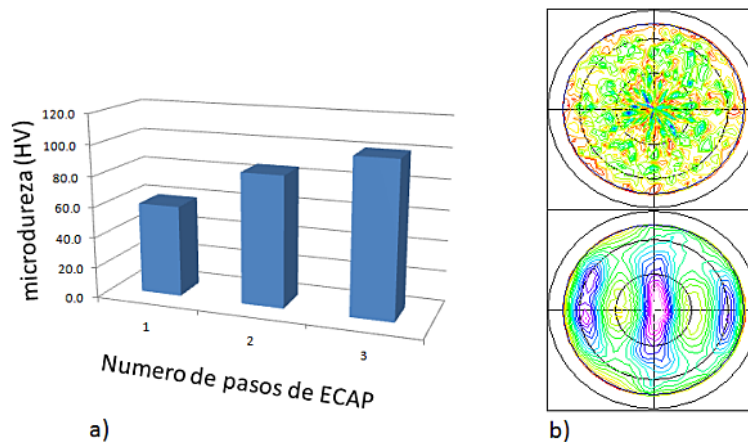


Figura 10: a) Evolución de la microdureza en función del número de pasos de ECAP, aleación Al-Sn, b) figura de polos del plano (111) de la misma aleación.

Hemos visto que, para comprender los mecanismos a la escala a veces nanométrica, que tienen lugar en el material, es necesario caracterizar el material a través de técnicas de análisis microestructural. Es necesario identificar cuáles parámetros son los que intervienen y afectan a la recrystalización y que ocurren durante el proceso ECAP. Hasta el momento, solo sabemos que la energía introducida en el material por conducto del ECAP es transformada en una recrystalización dinámica continua, lo que hace que las dislocaciones se arreglen en células de dislocaciones, lo que da lugar a nuevos y pequeños granos. Sin embargo, se ignora el rol de las interacciones entre grano y grano durante el proceso o como el sistema pudiera evolucionar ante, por ejemplo, un calentamiento del material.

En conclusión, las técnicas SPD abren la puerta a la mejora sustancial de propiedades mecánicas de muchas aleaciones, quedando por entender aún los mecanismos precisos que ocurren durante el proceso de deformación, lo que nos permitiría ampliar nuestra gama de posibilidades al usar estos materiales.

6. Reflexiones finales

Hemos visto, a través del estudio de cuatro casos, como la ciencia de materiales puede dar algunas soluciones técnicas a ciertos de los problemas más apremiantes de nuestra sociedad.

Tratamos en primera instancia, el final de la era del petróleo como el vector energético de nuestra actividad industrial. Vimos como poco a poco se ha llegado al convencimiento, de que tanto el crecimiento de la demanda, como la explotación de los pozos actuales

hacen poco factible que el petróleo, o lo que quede de él, tuviera un precio razonable para finales de 2050. Esto significa, que a menos de modificarse drásticamente nuestro consumo, estaremos obligados, como países y como individuos a cambiar radicalmente nuestra forma de vivir y de producir los bienes que ahora nos parecen comunes. De alguna forma las sociedades se volverán, por la fuerza de las circunstancias, más racionales en sus consumos energéticos. La ciencia de materiales propone soluciones a la captura del CO_2 , disminuyendo con ello el efecto del calentamiento global del planeta, y también ofrece soluciones, más limpias, como el caso de las celdas de combustible, para transitar hacia una era energética más sustentable.

Vimos también como, gracias a la comprensión de la estructura de los materiales a nivel nanométrico, podemos generar nuevos materiales partiendo de los ya existentes, es así que se puede lograr modificar una aleación Al-Ni aparentemente ya estudiada y lograr mejorar su ductilidad, o cambiar drásticamente el comportamiento mecánico de una aleación de Al-Sn en base a un proceso de deformación plástica severa.

Inmersos en la problemática de los nuevos materiales, no podemos olvidar el desarrollo espectacular de ciertas técnicas de caracterización, ellas son indispensables para entender mejor los mecanismos a la escala nanométrica de los cuales estamos hablando. Los progresos científicos en el área de la nanotecnología van muy ligados con nuestra capacidad de "ver" y analizar las estructuras manométricas. Como ejemplo de lo anterior, los actuales microscopios electrónicos de transmisión tienen resoluciones de menos de 0.1 nm, tales resoluciones eran inimaginables hace solo 10 años. Las capacidades de análisis se han incrementado, actualmente es posible tener contrastes químicos diferenciados a nivel de columnas atómicas. Esto es, entre dos columnas atómicas distanciadas de menos de 0.2 nm, podemos evaluar el número atómico de cada una de dichas columnas. Sin embargo, aún y cuando esto nos parezca impresionante, este progreso es insuficiente para, por ejemplo, detectar la presencia directa del CO_2 , sobre un material que lo haya capturado o realizar determinaciones directas de posición atómica o de composición sobre elementos muy ligeros, por ejemplo el Li no puede ser detectado, su factor de dispersión es demasiado pequeño, su influencia sobre la intensidad de los picos de difracción de electrones o de RX es muy marginal y por lo tanto su posición en una estructura solamente puede ser supuesta.

En la incorporación de los nuevos materiales en nuestra sociedad, comienza a permear la idea de integrar los materiales dentro de ciclos de producción, donde un desecho se vuelva la materia prima del siguiente proceso. En ese caso, por ejemplo, el CO_2 que es considerado como uno de los culpables del calentamiento global, una vez capturado, podría ser incorporado a un ciclo en donde el CO_2 sería la materia prima para otro proceso, por ejemplo, podría ser el sustituto del N como el gas de inyección en los pozos petroleros o utilizarlo para carbonatar las bebidas ó en la obtención de alcaloides, etcétera. Sin embargo, estas son solo propuestas hacia el futuro.

Desde el punto de vista de los materiales ecológicos, empieza a haber una reflexión seria sobre nuestra forma de administrar los recursos del planeta y de tomar en cuenta los

residuos que generamos, la sociedad industrializada moderna ha producido más desperdicios en solo un siglo, que en toda la historia de la humanidad, muchos recursos se están agotando y el planeta ya no puede regenerar tanta destrucción. El punto positivo, es que al hacer el balance, la sociedad esta llegando a un replanteamiento de lo que significa vivir en este planeta responsablemente y esto esta impactando fuertemente la investigación de nuevos materiales. Los recursos que las países están invirtiendo en ciencia de materiales, están siendo dirigidos hacia áreas sustentables, por ello la esperanza en que la búsqueda de materiales para generar energías alternativas fructifique a pesar del retardo que se tiene.

En lo que resta de este siglo, veremos como muchos otros materiales, con características ecológicas, de baja energía o simplemente más eficientes, se integran en nuestras sociedades, ya han hecho su aparición los llamados materiales inteligentes, así nombrados, por su capacidad de adaptarse, "por sí solos", a un cambio exterior. Dentro de esta familia, encontramos materiales que responden a la temperatura, a la luz o al campo magnético cambiando su forma, que son capaces de repararse, que reaccionan al pH, cambiando su color o su volumen, líquidos que cambian su viscosidad en presencia de un campo magnético, textiles que se adaptan a las condiciones climáticas para absorber o emitir calor etcétera. Los materiales inteligentes representan una generación de materiales que se enmarcan bien dentro de lo que la sociedad del siglo XXI esta esperando.

Agradecimientos

Quiero expresar mi agradecimiento al Dr. Heriberto Pfeiffer Perea y al Dr. José Chavez Carvayar del IIM-UNAM, por las imágenes, que ilustraron las secciones de captura de CO₂ y energías alternativas de este capítulo.

7. Referencias

- [1] USDOE, "Annual coal report 2010. U.S. gas, and coal supply statistics," U.S. Dep. of Energy, Washington D.C., Tech. Rep., 2010.
- [2] —, "International energy outlook 2011," U.S. Dep. of Energy, Washington D.C., Tech. Rep. EIA-0484-2011, 2011.
- [3] S. Wirawan and D. Creaser, "CO₂ adsorption on silicalite-1 and cation exchanged ZSM-5 zeolites using a step change response method," *Microporous and mesoporous materials*, vol. 91, no. 1, pp. 196–205, 2006.
- [4] K. Nomura, K. Tokumistu, T. Hayakawa, and Z. Homonnay, "The influence of mechanical treatment on the absorption of CO₂ by perovskite oxides," *Journal of Radioanalytical and Nuclear Chemistry*, vol. 246, no. 1, pp. 69–77, 2000.

- [5] Z. Yong and A. Rodrigues, "Hydrotalcite-like compounds as adsorbents for carbon dioxide," *Energy conversion and management*, vol. 43, no. 14, pp. 1865–1876, 2002.
- [6] L. Guo, X. Wang, S. Zhang, C. Zhong, and L. Li, "Effect of alkalinity on the hydrothermal synthesis of Li_2ZrO_3 nanotube arrays," *Journal of materials science*, vol. 46, no. 21, pp. 6960–6963, 2011.
- [7] M. Veliz-Enriquez, G. Gonzalez, and H. Pfeiffer, "Synthesis and CO_2 capture evaluation of $Li_{2-x}K_xZrO_3$ solid solutions and crystal structure of a new lithium-potassium zirconate phase," *Journal of Solid State Chemistry*, vol. 180, no. 9, pp. 2485–2492, 2007.
- [8] F. Alcaide, P. Cabot, and E. Brillas, "Fuel cells for chemicals and energy cogeneration," *Journal of Power sources*, vol. 153, no. 1, pp. 47–60, 2006.
- [9] T. Desaunay, "Approche théorique et expérimentale pour la conception de nouveaux catalyseurs a base de CeO_2 pour l'anode des piles a combustible," Ph.D. dissertation, Université Paris VI Pierre et Marie Curie, 2012.
- [10] S. Tjong and Z. Ma, "Microstructural and mechanical characteristics of in situ metal matrix composites," *Materials Science and Engineering: R: Reports*, vol. 29, no. 3, pp. 49–113, 2000.
- [11] C. Cui, Y. Shen, F. Meng, and S. Kang, "Review on fabrication methods of in situ metal matrix composites," *Journal of Materials Science & Technology*(China)(USA), vol. 16, pp. 619–626, 2000.
- [12] K. S. Kumar, "Ternary intermetallics in aluminiumrefractory metal-X systems (X=V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni, Cu, Zn)," *International Materials Reviews*, vol. 35, no. 1, pp. 293–328, 1990. [Online]: <http://dx.doi.org/10.1179/095066090790324037>
- [13] K. Kita, H. Sasaki, J. Nagahora, and A. Inoue, "Microstructure and mechanical properties of al-ni alloys fabricated by continuous electron beam evaporation." *Journal of the Japan Society of Powder and Powder Metallurgy*, vol. 47, no. 4, pp. 406–411, 2000.
- [14] S. Lee, S. Choo, and M. Rhee, "Fracture behavior of squeeze-cast aluminum-nickel composites for diesel engine piston rings," *Metallurgical and Materials Transactions A*, vol. 28, no. 12, pp. 2773–2780, 1997.
- [15] C. Liu, J. Stiegler, and F. Froes, "Ordered intermetallics," *ASM International, Metals Handbook, Tenth Edition.*, vol. 2, pp. 913–942, 1990.
- [16] G. Gonzalez, G. Lara-Rodriguez, A. Sandoval-Jiménez, W. Saikaly, and A. Charai, "The influence of cooling rate on the microstructure of an Al–Ni hypereutectic alloy," *Materials Characterization*, vol. 59, no. 11, pp. 1607–1612, 2008.

- [17] V. Segal, V. Reznikov, A. Drobyshevskii, and V. Kopylov, "Plastic working of metals by simple shear," *Russ. Met.*, vol. 1, pp. 99–105, 1981.
- [18] R. Valiev and T. Langdon, "Principles of equal-channel angular pressing as a processing tool for grain refinement," *Progress in Materials Science*, vol. 51, no. 7, pp. 881–981, 2006.
- [19] Y. Wang, M. Chen, F. Zhou, and E. Ma, "High tensile ductility in a nanostructured metal," *Nature*, vol. 419, no. 6910, pp. 912–915, 2002.
- [20] O. Hernández and G. Gonzalez, "Microstructural and mechanical behavior of highly deformed Al–Sn alloys," *Materials characterization*, vol. 59, no. 5, pp. 534–541, 2008.
- [21] C. Xu, M. Furukawa, Z. Horita, and T. Langdon, "Severe plastic deformation as a processing tool for developing superplastic metals," *Journal of alloys and compounds*, vol. 378, no. 1, pp. 27–34, 2004.
- [22] V. Segal, "Equal channel angular extrusion: from macromechanics to structure formation," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 271, no. 1, pp. 322–333, 1999.
- [23] M. Rekik, A. Rebhi, and N. Njah, "The effect of copper addition on microstructural parameters of an aluminium alloy processed by equal channel angular pressing," *Physics Procedia*, vol. 2, no. 3, pp. 1271–1279, 2009. [Online]: <http://dx.doi.org/10.1016/j.phpro.2009.11.091>
- [24] M. Hockauf, L. Meyer, and L. Krüger, "Combining equal-channel angular extrusion (ECAE) and heat treatment for achieving high strength and moderate ductility in an Al–Cu alloy," in *Materials Science Forum*, vol. 584. Trans Tech Publ, 2008, pp. 685–690.
- [25] M. Rekik, K. Kassis, J. Masmoudi, S. Zghal, Y. Champion, and N. Njah, "Recovery of industrial and recycled Al–Cu alloys subjected to severe plastic deformation," *Physics Procedia*, vol. 2, no. 3, pp. 1337–1342, 2009.
- [26] R. Valiev, R. Islamgaliev, and I. Alexandrov, "Bulk nanostructured materials from severe plastic deformation," *Progress in Materials Science*, vol. 45, no. 2, 2000.
- [27] C. Xu, M. Furukawa, Z. Horita, and T. Langdon, "The evolution of homogeneity and grain refinement during equal-channel angular pressing: A model for grain refinement in ECAP," *Materials Science and Engineering: A*, vol. 398, no. 1, pp. 66–76, 2005.
- [28] G. Winther and X. Huang, "Boundary characteristics in heavily deformed metals," *Nanomaterials by Severe Plastic Deformation*, pp. 321–331, 2005.
- [29] G. Gonzalez, C. Braham, J. Lebrun, Y. Chastel, and S. W., "Microstructure and texture of $AlSi_{2-x}Sn$ ($x = 0, 4, 8$ mass %) alloys processed by ECAP," *Materials Transactions*, pp. 1234–1239, 2012.

El Universo Algorítmico

Héctor Zenil, Universidad de Sheffield, Reino Unido

1. Computación digital y el concepto de algoritmo

Aunque Alan Turing no fue el primero en intentar aproximarse a una definición de algoritmo¹, fue sin duda quien logró capturar la noción con un concepto mecánico que dejó pocas dudas acerca de su generalidad e implementación física. A principios del siglo XX y hasta terminada la segunda guerra mundial, las computadoras no eran electrónicas sino humanas (preferentemente se contrataban mujeres). El trabajo de *computadora* era precisamente el de realizar operaciones aritméticas tediosas con papel y lápiz. Este trabajo era considerado de menor rango al de, por ejemplo, analista que sólo hombres podían ocupar en lugares como Bletchley Park, cerca de Londres, donde se rompieron códigos de comunicación alemana y donde “piratas informáticos” profesionales aparecieron por vez primera.

En una conferencia internacional de matemáticas en 1928, David Hilbert y Wilhelm Ackermann sugirieron que un procedimiento mecánico podía probar todas las afirmaciones matemáticas. A esta idea se le conoce como el *Entscheidungsproblem* (en alemán) o el “problema de la decisión”. Si una *computadora humana* no representaba más que la ejecución de un procedimiento mecánico, no era de sorprenderse que se pensara que la aritmética permitiría una mecanización del mismo tipo, en el que de la aplicación de reglas (operaciones aritméticas) a partir de ciertas fórmulas que se aceptan verdaderas (axiomas) se pudieran derivar todas las verdades aritméticas.

El origen del *Entscheidungsproblem* tiene antecedentes en Gottfried Leibniz, quien en 1672, después de haber construido satisfactoriamente una máquina mecánica capaz de realizar operaciones aritméticas (llamada *Staffelwalze* o *Step Reckoner*), basada en las ideas de Blaise Pascal, se imaginara una máquina del mismo tipo capaz de manipular símbolos para determinar el valor de verdad de enunciados matemáticos. En dirección a este objetivo Leibniz se dedicó a la concepción de un lenguaje universal formal que designó como *characteristica universalis* con, entre otras cosas, el descubrimiento del lenguaje binario y la definición de la aritmética binaria.

¹Los modelos de Emil L. Post y Alonzo Church son otros dos ejemplos.

El 8 de septiembre de 1930, en Königsberg², Hilbert cerró su discurso para la Sociedad Alemana de Científicos y Médicos con “Wir müssen wissen—wir werden wissen!” que quiere decir (traducción del autor de este artículo) “debemos saber, ¡sabremos!” en relación al “problema de la detención” para mecanizar las matemáticas (en particular la aritmética). En 1931, Kurt Gödel realizó una construcción que dejaba en claro que la intención de Hilbert (también llamado “programa de Hilbert”) de probar todos los teoremas verdaderos mecanizando las matemáticas, no era posible. Gödel mostró una fórmula que codifica una verdad aritmética en términos aritméticos y que no se puede probar sin llegar a una contradicción. Peor aún, mostró que no hay conjunto de axiomas que contengan a la aritmética y que esté libre de fórmulas verdaderas que no se pueden demostrar dentro de esa teoría.

En 1944, otro investigador clave en el desarrollo del concepto de computación y computabilidad (es decir, los límites de la computación), Emil L. Post, encontró que este problema estaba íntimamente relacionado con uno (el décimo) de los 23 problemas que en París (en la Sorbona) Hilbert anunciaría como uno de los retos más importantes de las matemáticas en el siglo XX³. En términos del décimo problema de Hilbert, el *Entscheidungsproblem* puede reescribirse en forma de ecuaciones diofantinas (o diofánticas)⁴.

Generalmente, el “programa de Hilbert” es visto como un fracaso (en especial para Hilbert o quienes creyeran que era posible una respuesta positiva a su programa), pero es todo menos eso. Primero, Martin Davis (independientemente de Julia Robinson) usa el resultado negativo de Gödel para dar respuesta negativa al décimo problema de Hilbert (cuyo argumento lo completa Yuri Matiyasevich). Si bien es cierto que Gödel rompe con la idea de que lo verdadero es demostrable, ofreciendo una respuesta negativa al “problema de la decisión”, el supuesto fallido “programa de Hilbert” dio origen a lo que hoy conocemos como la ciencia de la computación ya que resulta que, efectivamente, la aritmética puede mecanizarse, aunque no se pueda demostrar todo; y sobre ella realizar todo tipo de operaciones sofisticadas con lo que hoy conocemos como la computadora electrónica digital.

Máquinas de Turing y universalidad

Poco tiempo después de Gödel, en 1936, el matemático inglés Alan M. Turing entró en escena. Turing se planteó el problema de la decisión en términos mucho más crudos. Si el acto de llevar a cabo operaciones aritméticas es mecánico ¿por qué no sustituir la *computadora humana* por un *dispositivo mecánico*? El trabajo de Turing fue la primera descripción

²En aquel entonces perteneciente al estado alemán de Prusia, hoy Kaliningrado, Rusia. El lector tal vez recuerde el problema matemático de los 7 puentes de Königsberg, resuelto negativamente por Leonhard Euler. Véase la discusión al respecto en el capítulo de Lucas Lacasa, en este libro.

³En realidad en París sólo expuso oralmente 10 de los 23, no incluido el décimo, sino dos años después en la publicación que le siguió a su participación en el Congreso Internacional de Matemáticos de París.

⁴Una ecuación diofantina es un polinomio con variables que sólo pueden tomar valores enteros. La pregunta es entonces si existe un algoritmo que dada la ecuación decide si tiene solución en los enteros o no.

abstracta de una computadora digital como la conocemos hoy. Turing definió, lo que en su artículo llamó una máquina “*a*” (por “automática”), y que hoy conocemos como *Máquina de Turing*.

Una máquina de Turing [1] es una 5-tupla $\{S_i, K_i, S'_i, K'_i, D_i\}$, donde S_i es el símbolo en una cinta que la máquina está leyendo en tiempo t (la máquina puede leer el contenido de una celda en la cinta a la vez), K_i es el estado actual de la máquina (la instrucción) en el momento t , S'_i un símbolo único para escribir (la máquina puede sobrescribir un 1 en un 0, un 0 en un 1, un 1 en un 1, o un 0 en 0) en el momento $t + 1$, K'_i un estado de transición a un nuevo estado K'_i (que puede ser el mismo estado en que el que ya estaba en el momento t) dependiendo del símbolo que se lee, y D_i una dirección para moverse en el tiempo $t + 1$ ya sea hacia la derecha (R) de la celda o hacia la izquierda (L), después de leer y escribir en la celda donde estaba. La máquina se detiene cuando llega a un estado distinguido 0. Se dice que la máquina de Turing produce una salida en las celdas contiguas de la cinta que se escribieron si la máquina de Turing se detiene en algún momento.

Más sorprendente aún, es la demostración de Turing de la existencia de una máquina “*a*” que es capaz de leer la tabla de transiciones (la lista de 5-tuplas que definen el comportamiento de la máquina y que denotaremos como $code(a, s)$) de cualquier otra máquina “*a*” con entrada s , y comportarse tal como “*a*” lo haría para la entrada s . En otras palabras, Turing mostró que no era necesario construir una máquina para cada tarea distinta, sino una sola que pueda reprogramarse. Esto trae consigo la indistinción de programa y datos, así como de *software* y *hardware*, ya que uno siempre puede codificar datos como un programa para otra máquina y viceversa, y uno siempre puede construir una máquina para ejecutar cualquier programa y viceversa. En un mismo artículo Turing definió las bases de lo que hoy conocemos como computadora digital reprogramable, software, programación y subrutina y es, por lo tanto, sin duda alguna la mejor respuesta que tenemos a la pregunta ¿Qué es un algoritmo?

Sin embargo, hay máquinas de Turing que no se detienen. Y esto es lo que hubiera esperado Turing para estar en acuerdo con los resultados de Gödel. Uno puede preguntarse si hay una máquina de Turing U que para $code(a, s)$ se detiene y produce 1 si a con entrada s se detiene, y 0 si a con s no se detiene. Turing [1] demuestra que no hay tal máquina U en acuerdo con Gödel, respondiendo de igual manera negativamente al programa de Hilbert, ya que un programa informático y su entrada se puede ver como una demostración aritmética y, la salida de ella (0 o 1), como la respuesta a la pregunta de si una fórmula cualquiera (que se codifica como entrada para la máquina) es un teorema verdadero o no. A este resultado se le conoce como la *indecidibilidad del problema de la detención*.

El mundo de los programas simples

Una de las características del mundo físico es que presenta una amplia gama de sistemas que se comportan de manera distinta, pero muchos de estos sistemas presentan aspectos regulares y al mismo tiempo difíciles de predecir, como el clima. ¿De dónde

surge la regularidad y la complejidad en la naturaleza? ¿Cómo diferenciar entre azar y estructura?

En la historia de la ciencia se ha hecho incapié en la existencia de objetos, en particular matemáticos, que parecen especialmente complejos (o complicados). Un tipo de estos objetos son, por ejemplo, los números que no pueden expresarse como la división p/q con p y q enteros. Los números 5 , $.5$ o incluso infinitos como $.3333333\dots$ pueden escribirse como $5/1$, $1/2$ y $1/3$ respectivamente. Pero desde el tiempo de la Grecia antigua se conocen números como la constante matemática π y raíz cuadrada de 2 que no se pueden expresar de esa forma. Uno puede pensar en la división aritmética como un algoritmo que puede ser ejecutado por una máquina de Turing y provee el resultado en la cinta de salida. La operación producto, por ejemplo, puede verse como un algoritmo para acortar el número de operaciones necesarias para realizar las mismas operaciones únicamente con sumas. En el caso de los números que admiten una representación racional p/q , el algoritmo de la división entre números enteros consiste en el procedimiento común de encontrar cocientes y residuos. En el caso de números como π y raíz cuadrada de 2 , el algoritmo produce una expansión infinita no periódica, por lo que la única manera de representarlos es simbólicamente (ejemplo π y $\sqrt{2}$). Los pitagóricos encontraron que dichos números con aparente complejidad infinita podían producirse a partir de operaciones muy simples, por ejemplo al preguntarse por el valor de la hipotenusa de un triángulo recto con catetos de longitud 1 . Desde Euclides se sabe, además, que dichos números no son la excepción de entre los números reales que se encuentran en, por ejemplo, el intervalo continuo $(0,1)$.

En ingeniería, incluyendo la programación de sistemas, la intuición de lo que es complejo (a diferencia de un número irracional en matemáticas, por ejemplo) había sido radicalmente distinta. Tradicionalmente se había considerado que para producir algo complejo había que concebir un proceso que fuera igualmente complejo. El problema, sin embargo, está estrechamente ligado al concepto de universalidad de Turing, dado que una máquina universal de Turing que sea programable es, en principio, capaz de producir cualquier grado de "complejidad". Por ejemplo, el tipo de complejidad (o aleatoriedad) que uno puede ver en la expansión decimal de la constante matemática π .

Si el algoritmo de la división es capaz de producir la complejidad de un número como π al dividir el diámetro de cualquier círculo entre la longitud de su circunferencia ¿Qué tan común puede ser que al ejecutar un programa informático cuyas instrucciones son elegidas al azar produzca el mismo tipo de complejidad aparente? Si los programas de computación que producen complejidad necesitaran una descripción muy larga, la probabilidad de encontrar uno sería muy baja.

En un experimento con programas de computación extremadamente simples y pequeños Stephen Wolfram [2] encontró que este umbral de complejidad y universalidad es muy bajo, y que se requiere de muy poco para producir o encontrar una máquina que produzca máxima complejidad aparente y que sea capaz de ser Turing universal. El autómata celular con regla 110 (figura 2) es el mejor ejemplo de ello [2, 3].

Autómatas celulares

Wolfram se preguntó ¿Cuál es el programa de cómputo más simple que produce aleatoriedad aparente? Wolfram provee una posible respuesta: el autómata celular con regla 30 [2] en su enumeración de autómatas celulares (ver figura 1), cuya evolución hacia el lado derecho no parece presentar estructuras regulares (incluso dejándola correr por millones de pasos). Y encontró otra regla (la regla 110, ver figura 2) que requiere de sólo 2 símbolos con 8 configuraciones posibles (la demostración de universalidad requiere de una condición inicial con un patrón repetitivo).

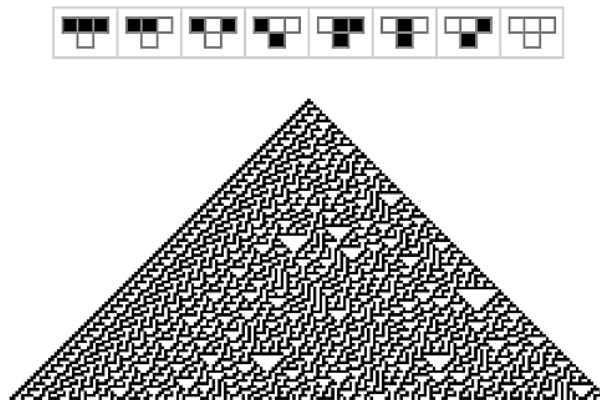


Figura 1: La evolución de la regla 30 (se muestran 100 pasos (renglones) en esta imagen) que, sorprendentemente, genera aleatoriedad aparente a pesar de comenzar con una celda negra, la condición inicial más simple. El icono en la parte superior de la evolución del programa muestra la tabla de transiciones. La regla 30 es bajo casi cualquier estándar, el programa de computación más simple que produce aleatoriedad aparente. Las columna central se ha usado por 20 años en el lenguaje de programación *Mathematica* como generador de números aleatorios.

Un autómata celular es un modelo de computación basado en reglas que modela un sistema dinámico paralelo que evoluciona en pasos discretos sobre una matriz de celdas. La condición inicial más simple de un autómata celular es una celda en negro a la que se le aplica una regla (icono superior en la figura 1). El autómata celular no trivial más simple consiste en una matriz unidimensional de celdas que solamente pueden tener dos estados (0 o 1) o colores (blanco o negro), con una vecindad de distancia 1, es decir las dos celdas adyacentes (en los bordes se asume una configuración toroidal). A este conjunto de $2^3 = 8$ configuraciones posibles se le llama el conjunto de autómatas celulares elementales [2]. Existen $2^8 = 256$ modos de definir el estado de una celda en la generación siguiente para cada una de estas configuraciones (ver los iconos en la parte superior de las figuras 1 y 2) y por lo tanto, 256 autómatas celulares elementales. En las figuras 1, y 2, y 3 se muestra la evolución de la regla en el tiempo, cada renglón es una unidad de tiempo, empezando en

tiempo 1, la condición inicial, a la que se le aplica la regla correspondiente (los iconos en la parte superior de las figuras) según el estado en el que se encuentre el sistema.

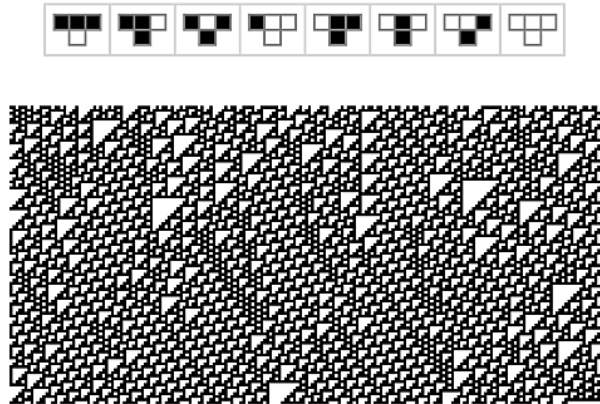


Figura 2: Evolución de la regla 110 (100 pasos) es capaz de Turing universalidad [2, 3] gracias a las estructuras persistentes, algunas de las cuales pueden observarse en esta figura, que permiten la transferencia de información. Esto quiere decir que una regla tan simple (la regla está en la parte superior) puede computar cualquier función que una máquina de Turing computa.

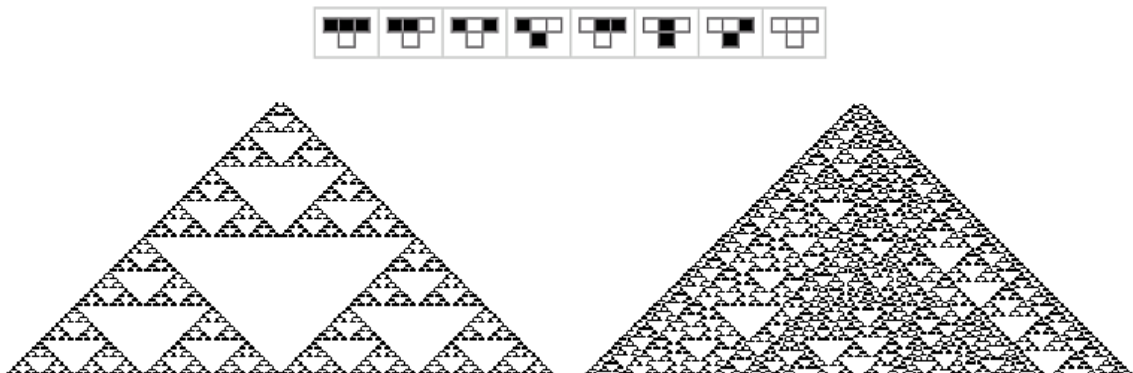


Figura 3: Evolución de la regla 22 (125 pasos) para dos condiciones iniciales que difieren en un solo bit (1001 versus 10011), altamente sensible a cambios muy pequeños en las condiciones iniciales (en particular muy sensible al rompimiento de simetría de su condición inicial).

Una deducción lógica a partir de los distintos comportamientos de estas reglas tan simples como los autómatas celulares elementales, es que si los detalles de las reglas del programa tienen poca relación directa con su comportamiento (cada regla difiere de otra por 1 bit que puede tener como resultado un comportamiento completamente distinto), entonces parecería muy difícil diseñar directamente un programa simple capaz de reali-

zar un comportamiento específico ya que un cambio muy simple en la regla conduce a comportamientos completamente diferentes (por ejemplo, ver la figura 3 que muestra la regla 22 con 2 condiciones iniciales del mismo tamaño que difieren en un solo bit) o incluso completamente impredecibles para las condiciones iniciales más simples (como la mitad derecha de la evolución de la regla 30, figura 1). Los programas simples son capaces de un rango notable de distintos comportamientos y algunos han demostrado ser capaces de computación universal como la regla 110 (figura 2).

2. ¿La naturaleza algorítmica del mundo?

Cuando Leibniz creó la aritmética binaria, pensó que el mundo podría haberse creado a partir de la “nada” (cero) y el uno, porque cualquier otro lenguaje puede escribirse en binario (el lenguaje más simple posible por número de símbolos). Nuestras computadoras electrónicas pueden pensarse como dispositivos que reprograman una parte del universo. La computación digital es una forma de “piratear” la materia del universo y hacerla calcular algo para nosotros. ¿Cuán diferente es un universo computable por una máquina universal de Turing al universo en que vivimos? La versión del universo de bits es, por supuesto, una simplificación excesiva, pero los dos podrían, al final, no ser muy diferentes (ver figura 4).



Figura 4: ¿Cuán diferente es un universo simulado por una máquina universal de Turing al universo en que vivimos? Tres ejemplos sorprendentes de patrones autoorganizados: Izquierda) El “Camino del gigante” (*Giant’s Causeway*) en Irlanda del Norte formado por columnas basálticas hexagonales debido al enfriamiento de celdas de convección de lava. Centro) Un patrón en forma de “Anillo de hada” (*fairy ring*) en el suelo generado por el crecimiento diferencial de hongos *Micelios* en Dundee, Escocia. Derecha) Patrones en la concha de un caracol *Conus marmoreus* (Linnaeus, C., 1758), común en los océanos Índico y Pacífico ¿Son los patrones espacio-temporales que componen la complejidad de la naturaleza, similares a la ejecución de programas en máquinas universales de Turing?

Si no existe una razón específica para elegir una distribución estadística particular, a partir de un conjunto de datos, a falta de información disponible, la distribución uniforme es la que no hace otra suposición más que la de que ningún dato tiene nada en particular (mayor ocurrencia) que cualquier otro, de acuerdo con el principio de indiferencia. Considérese la posibilidad de una operación desconocida que genera una cadena binaria de longitud k bits. Si el método es uniformemente aleatorio, la probabilidad de encontrar una cadena s en particular es exactamente $1/2^k$, la misma probabilidad que para cualquier otra cadena de longitud k . Sin embargo, datos de una fuente, como los dígitos de π , no son valores aleatorios sino resultado de un proceso (en el caso de π la relación con círculos y curvas), es decir, generalmente no se producen al azar, sino por un proceso algorítmico. En física, la mecánica clásica prescribe determinismo en el mundo, lo que refuerza la idea de que los procesos físicos (al menos macroscópicos) podrían ser el resultado de procesos algorítmicos semejantes a los que pueden ejecutarse en una computadora digital o una máquina de universal Turing.

Probabilidad algorítmica y la distribución universal

Hay una medida [4] (que denotaremos con m), que describe la probabilidad de que una computadora digital produzca una cadena s específica a partir de un programa informático (una serie de instrucciones) producido al azar. Formalmente [4, 5],

$$m(s) = \sum_{p:U(p)=s} 1/2^{|p|}. \quad (1)$$

Donde $|p|$ es la longitud (en bits) de los programas que producen el resultado s corriendo en una máquina universal de Turing U . Para cualquier cadena dada s , hay un número infinito de programas que pueden producir s , pero $m(s)$ se define de tal manera que la suma de las probabilidades no pase de 1 (de otra forma no podría ser una medida de probabilidad). La idea es que ningún programa válido es subrutina de ningún otro programa válido. A esta máquina universal de Turing se le llama máquina *prefija*, pero el lector no debe dejarse distraer por esta necesidad técnica. La medida m induce una distribución sobre el conjunto de cadenas s que se conoce como la distribución universal, y cuyas propiedades se han incluso descrito como *milagrosas* en la literatura de la teoría de la computación [6]) pues se le han demostrado muchas propiedades matemáticas importantes.

La noción detrás de m es muy intuitiva, si se deseara producir los dígitos de π al azar uno por uno, se tendría que intentarlo una y otra vez hasta conseguir producir la secuencia correcta de números consecutivos correspondientes a un segmento inicial de la expansión decimal de π . La probabilidad de éxito es muy pequeña: $1/10$ dígitos multiplicado por el número deseado de dígitos. Por ejemplo, $(1/10)^{1000}$ para un segmento de longitud 1000 dígitos de π . Pero si en vez de lanzar dígitos al azar, uno lanzara programas de computadora al azar para ejecutarlos en una computadora, las cosas resultan ser muy

diferentes. Un programa que produce los dígitos de π tiene una mayor probabilidad de ser producido por un programa de computadora que la probabilidad de producir un segmento largo de π ya que π es el resultado de un proceso que puede describirse con una fórmula concisa (ver ejemplo de programa en figura 5).

```
long k=4e3,p,a[337],q,t=1e3;
main(j){for(;a[j=q=0]+=2,??k;)
for(p=1+2*k;j<337;q=a[j]*k+q%p*t,a[j++]=q/p)
k!=j>2?:printf("%.3d",a[j?2]%t+q/p/t);}
```

Figura 5: Un programa escrito en el lenguaje C de 141 caracteres que al ejecutarse imprime 1000 dígitos decimales de π (Gjerrit Meinsma, <http://www.boon.net/~jasonp/pipage.html>). Es mucho más probable generar este programa (o uno equivalente) tecleando al azar que acertar los 1000 primeros dígitos de π . Este programa comprimido con GZIP ocupa solamente 713 bytes.

Complejidad de Kolmogorov

No por casualidad, a la longitud del programa más corto que produce una cadena se le reconoce como una medida de aleatoriedad llamada complejidad algorítmica o complejidad de Kolmogorov (o Kolmogorov-Chaitin). La idea es relativamente simple, si una cadena de longitud $|s|$ no puede ser producida por un programa p que produzca s tal que $|p| < |s|$, entonces a la cadena s se le considera aleatoria porque no puede describirse de manera más corta que con s mismo pues no existe un programa p que genere s y cuya longitud sea más corta que s . Formalmente, la complejidad de Kolmogorov se define como [7, 8]: $C_U(s) = \min\{|p|, U(p) = s\}$. Donde U es una máquina universal de Turing.

El teorema de invariancia garantiza que el valor de C calculado con una máquina universal de Turing u otra máquina universal de Turing, es el mismo para cadenas suficientemente largas. Formalmente, si U_1 y U_2 son 2 máquinas universales de Turing y $C_{U_1}(s)$ and $C_{U_2}(s)$ son los valores de complejidad algorítmica de s para U_1 y U_2 , existe una constante c tal que $|C_{U_1}(s) - C_{U_2}(s)| < c$.

3. ¿Cuán diferente es nuestro mundo a un mundo digital?

Así como las fórmulas para la producción de los dígitos de π son versiones comprimidas de π , las leyes físicas pueden verse como sistemas que *comprimen* fenómenos naturales. Estas leyes son valiosas porque gracias a ellas se puede predecir el resultado de un fenómeno natural sin tener que esperar a que se desarrolle en tiempo real. Resolver las ecuaciones que describen el movimiento planetario en lugar de tener que esperar dos años para conocer las posiciones futuras de un planeta. No es casualidad que todos estos cálculos resultan ser computables, para todos los efectos prácticos las leyes físicas son como los

programas de computadora y los modelos científicos que tenemos de ellas, ejecutables en computadoras digitales con soluciones numéricas.

En un mundo de procesos computables en el que las leyes (como programas) no tengan una distribución sesgada, $m(s)$ indicaría la probabilidad de que un fenómeno natural ocurra como resultado de ejecutar el programa. Si uno deseara saber si la naturaleza del universo es algorítmica, lo primero que se tendría que especificar es cómo sería un universo algorítmico. Si el mundo es de algún modo parecido a un mundo de algoritmos, las estructuras, y la frecuencia de éstas, deberían ser parecidas [9].

Información y teorías de gravedad cuántica

Conexiones entre física, computación e información no son nuevas ni han derivado solamente en especulaciones. Por ejemplo, usando el principio de Landauer, Charles Bennett [10] utilizó estas conexiones para dar respuesta negativa a la paradoja del demonio de Maxwell, un experimento mental que sugería que la segunda ley de la termodinámica podía violarse. Por otra parte, una pregunta legítima es si existe un límite físico el cual indique cuánta información puede almacenarse en una región del espacio. Si no lo hubiese podríamos, en principio, almacenar una cantidad infinita de información comprimiéndola en una región cada vez más pequeña del espacio. Imaginemos cuánta información se requiere para describir el estado de una región del espacio, digamos un cuarto de una casa. La respuesta parecería depender solamente de la cantidad de materia y energía en el interior y del volumen del cuarto. Para aumentar la cantidad de información en un cuarto sellado bastaría con introducir más materia ¿Cuánta más materia e información para describirla puede introducirse en un cuarto cerrado? La física cuántica y la teoría de la relatividad proveen una respuesta. Por un lado, el principio de incertidumbre de Heisenberg nos indica que obtener información cada vez con mayor precisión a escalas cuánticas requiere cada vez de más energía, así que seguir aumentando la densidad en el cuarto y extrayendo el estado en el que se encuentra requiere cada vez más energía. Si se continúa aumentando la cantidad de materia en el cuarto la densidad al interior provocará en algún momento que la atracción gravitacional en la superficie del cuarto se colapse en un agujero negro de acuerdo a la teoría general de la relatividad. A partir de ese momento nada puede escapar del agujero negro, ni siquiera la luz. Esto quiere decir que el principio de incertidumbre de Heisenberg y la teoría de la relatividad general determinan un límite superior en la cantidad de información que una región del espacio puede contener.

Los agujeros negros son objetos predichos por la teoría de la relatividad general (y presumiblemente detectados experimentalmente)⁵. Sorprendentemente, están jugando un papel central en la discusión del papel que la teoría de la información tiene en el mundo físico, por varias razones. Los agujeros negros son, por así decirlo, el lugar de encuentro de las teorías físicas que describen lo más grande y lo más pequeño en el universo, es

⁵Véase también el capítulo de Miguel Alcubierre “Agujeros Negros” en este mismo libro

decir, los objetos que describen la teoría de la relatividad general y la mecánica cuántica. Esto se debe a que los agujeros negros son tan masivos que producen lo que en la teoría de la relatividad de Einstein es una consecuencia de la gravedad, un punto de singularidad de densidad infinita y de dimensiones infinitamente pequeñas. La búsqueda de la unificación de estas dos grandes teorías ha centrado su atención en los agujeros negros. Una segunda propiedad que hace de los agujeros negros objetos sumamente interesantes es que reproducen lo que se cree fue la condición inicial del universo, cuando toda la materia estaba altamente concentrada en un espacio infinitamente pequeño.

La pregunta de lo que sucede con lo que cae en un agujero negro ha sido motivo de largas discusiones que han cambiado su curso en diferentes direcciones [11]. Por un lado, nada de lo que cae en un agujero negro puede escaparse, ni siquiera la luz una vez dentro de lo que se conoce como el horizonte de sucesos. Sin embargo, la primera ley de la termodinámica afirma que en el universo la materia y energía se conservan, y la segunda ley de la termodinámica afirma que la entropía de un sistema cerrado solamente puede aumentar. Bekenstein sugirió que la segunda ley de la termodinámica podría violarse, dado que podría utilizarse el agujero negro para disminuir indiscriminadamente la entropía en el exterior arrojando masa que “desaparece” en el agujero negro, y que para conservar la segunda ley de la termodinámica era necesario asignarle entropía a un agujero negro. La entropía es una aproximación de la cantidad de información que se requiere para describir la configuración completa de un sistema físico en todo detalle (todos los grados de libertad de las moléculas en un espacio). Esto es por supuesto una versión simplificada de una descripción matemática del concepto que tiene la siguiente forma para un sistema aislado: $\partial S/\partial t \geq 0$, donde S es la entropía y T es el tiempo.

Que los agujeros negros se “evaporen”, en forma de lo que se conoce hoy como radiación de Hawking, y que el tamaño del agujero aumente, es importante porque ello establece una conexión más coherente con los principios de la termodinámica.

El Principio Holográfico

El que los agujeros negros aumenten de tamaño proporcionalmente a lo que se arroje en ellos sugiere también que los agujeros negros actúan de cierta forma como algoritmos de compresión perfectos, ya que de acuerdo con la relatividad general no hay forma de comprimir un objeto en un volumen más pequeño que el ocupado ya por el horizonte de sucesos del agujero negro. Esto debido a que el interior de un agujero negro es una región de espacio que se ha colapsado en una densidad crítica que determina el límite de lo que puede guardarse en una región compacta de espacio. Esta región está determinada por el llamado límite de Bekenstein [12], $I \leq (2\pi kRE)/(\hbar c \log 2)$. Donde I es la cantidad de información en bits, k es la constante de Boltzmann, R el radio de una región de espacio que contiene energía (o masa) $E = mc^2$, $\hbar = 1.0545 \times 10^{-34}$ julio-segundo es la constante de Planck y $c = 2.9979 \times 10^8$ metros por segundo es la velocidad de la luz. Pero dado que masa y área están relacionadas proporcionalmente en los agujeros negros, Bekenstein

conjeturó [12] que la información I contenida en un agujero negro es $I = A/l_p^2$, donde l_p^2 es un término que depende de la constante de Planck y la constante de gravitación y donde solamente aparece el área A del agujero negro como parámetro único que determina la cantidad de información que contiene.

El llamado Principio Holográfico [13, 14] asume la conjetura de Bekenstein, de la que se tienen muchas indicaciones teóricas de su veracidad (no asumirlo deriva en muchas contradicciones de áreas bien establecidas de la física). El Principio Holográfico determina entonces que el área de la superficie del horizonte de un agujero negro mide el contenido de la información del agujero negro dada por la ecuación del *radio gravitacional* o *radio de Schwarzschild* $R_S = (2GM)/c^2$ que determina que la relación entre el tamaño del agujero negro y la masa crecen proporcionalmente, donde M es la masa del agujero negro, $G = 6.673 \times 10^{-11}$ la constante gravitacional de Newton, y c la velocidad de la luz. Si además, la información sobre el objeto que cae en el agujero negro puede recuperarse de la radiación de Hawking, el agujero negro sería un compresor perfecto sin pérdida de datos, o con pérdida de datos de otra manera. En este caso, el radio de Schwarzschild se convierte en el radio de compresión, y el valor I , su complejidad de Kolmogorov. Tenemos entonces un límite físico para la complejidad de Kolmogorov dado por $K(s) = I(s) \leq A/l_p^2$ donde A/l_p^2 no depende del objeto s sino del área de la superficie que lo contiene. Usando estas conexiones entre física, información y computación; Seth Lloyd incluso propuso un cálculo [15] de la capacidad de cómputo, velocidad y capacidad de almacenamiento de información del universo. Lloyd estimó que el universo no puede haber realizado más de 10^{120} operaciones lógicas elementales con más de 10^{90} bits.

A manera de conclusión

Wheeler creía [16] que la mecánica cuántica y todas las leyes de la física se podían escribir en el lenguaje de bits encapsulado en su famoso “it from bit” que sugiere que toda la realidad material (it) debe su existencia a partir de la información (bit). Afirmó que cualquier fórmula con unidades que involucran la longitud de Planck \hbar eran prueba irrefutable de la naturaleza discreta del mundo. No era tal vez por casualidad que Wheeler mismo acuñara el término “agujero negro” para las soluciones extrañas que la relatividad producía, dando lugar a singularidades.

Hemos visto como la teoría de la computación y la teoría de la información algorítmica pueden explicar la emergencia de estructura y la persistencia de principios físicos incluso dando lugar a reinterpretaciones de teorías físicas modernas en términos de información. Las posibilidades de seguir conectando la realidad física, computación e información son innumerables y apasionantes.

4. Referencias

- [1] A. Turing, "On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. a correction," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 1, p. 544, 1938.
- [2] S. Wolfram, *A new kind of science*. Wolfram media Champaign, IL, 2002.
- [3] M. Cook, "Universality in elementary cellular automata," *Complex Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 1–40, 2004.
- [4] L. Levin, "Laws of information conservation (nongrowth) and aspects of the foundation of probability theory," *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 10, no. 3, pp. 30–35, 1974.
- [5] R. Solomonoff, *A preliminary report on a general theory of inductive inference*. Citeseer, 1960.
- [6] W. Kirchherr, M. Li, and P. Vitányi, "The miraculous universal distribution," *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, no. 4, pp. 7–15, 1997.
- [7] A. Kolmogorov, "Three approaches to the quantitative definition of information," *Problems of information transmission*, vol. 1, no. 1, pp. 1–7, 1965.
- [8] G. Chaitin, *Algorithmic information theory*. Cambridge University Press, 1987.
- [9] J.-P. Zenil, H. y Delahaye, "On the algorithmic nature of the world," in *Information and Computation*, G. Dodig-Crnkovic and M. Burgin, Eds. World Scientific, 2010.
- [10] C. Bennett, "Demons, engines and the second law," *Scientific American*, vol. 257, no. 5, pp. 108–116, 1987.
- [11] S. Hawking, "Particle creation by black holes," *Communications in mathematical physics*, vol. 43, no. 3, pp. 199–220, 1975.
- [12] J. Bekenstein, "Black holes and entropy," *Physical Review D*, vol. 7, no. 8, p. 2333, 1973.
- [13] G. 't Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," in *Salamfestschrift: A Collection of Talks from the Conference on Highlights of Particle and Condensed Matter Physics*, A. Ali, J. Ellis, and S. Randjbar-Daemi, Eds. World Scientific, 1993.
- [14] L. Susskind, "The world as a hologram," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, p. 6377, 1995.
- [15] S. Lloyd, "Computational capacity of the universe," *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 23, p. 237901, 2002.

- [16] J. A. Wheeler, "Information, physics, quantum: The search for links," in *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*, W. Zurek, Ed. Addison-Wesley, 1990.