Movilidad y agentes

por

Francisco J. Sevilla

Este es un capítulo separado que integra el libro

Fronteras de la Física en el Siglo XXI

Octavio Miramontes y Karen Volke (Editores)

CopIt-arXives, 2013
México, D.F.
ISBN: 978-1-938128-03-5

Índice general

Movilidad y agentes

Francisco J. Sevilla, Instituto de Física, UNAM, México

Este capítulo es una breve introducción al estudio de la movilidad en sistemas de muchos individuos y de los fenómenos colectivos que aparecen cuando se considera interacción entre ellos. En la primera parte nos concentramos en describir ciertos aspectos de la movilidad y de su importancia en diversas áreas de la ciencia. También se presentan dos de los marcos teóricos más usados en el campo para describir agentes móviles y se orienta al lector interesado, a la bibliografía correspondiente que considera sus respectivas generalizaciones. En el intermedio se consideran los efectos debidos a la interacción entre agentes móviles y se presenta un modelo de agentes autopropulsados. En la última parte se mencionan algunas posibles direcciones de este campo de estudio desde una perspectiva general.

1. Introducción

El estudio de la movilidad en sistemas de muchas "partículas" ha tenido especial relevancia en muchas áreas de la ciencia y la industria. En física, por ejemplo, las propiedades de transporte de la materia son de gran interés en sistemas que van desde las escalas microscópicas hasta las escalas astronómicas [1]. En biología, la importancia de la "movilidad"de grupos de animales proporciona información valiosa de los mecanismos de supervivencia de muchas especies. Por ejemplo el forrajeo realizado por grupos de animales, es decir, el movimiento en manadas, parvadas, etc., cuyo propósito es buscar y consumir alimentos, es de gran interés en ecología. En sociología, el estudio de la movilidad humana es de interés para comprender aspectos globales que van desde el modelado de epidemias hasta la predicción del tráfico y planeación urbana [2].

La descripción del movimiento de las entidades móviles que conforman esta amplia variedad de sistemas se ha realizado usando diversos marcos teóricos que han servido de piedra angular a la física estadística y que han resultado de mucha utilidad en otras ramas de la ciencia. Así, dado que el interés es describir el movimiento de estas entidades, usaremos la palabra *agente* para referirnos a toda entidad capaz de exhibir movilidad. Por lo que un agente puede representar a un pez en un cardumen, a una célula epitelial que se desplaza en la piel humana, etc.

Uno de estos marcos teóricos, ampliamente usado, es el de *caminata aleatoria* el cual es presentado con cierto detalle por D. Boyer en el capítulo *Procesos difusivos: de moléculas a animales* de este libro. En este marco conceptual, el movimiento no es descrito explícitamente en términos de trayectorias sino de probabilidades. A decir, la cantidad de interés es la probabilidad de que un agente móvil se encuentre localizado en un punto del espacio $\boldsymbol{x}$ al instante t. En general esta probabilidad cambia de punto a punto y de instante a instante a través de otra probabilidad, la de hacer una transición de un punto a otro al tiempo t, en general esta última probabilidad es conocida *a priori* [3, 4].

Un gran número de resultados se han obtenido en caminatas aleatorias. Uno que podemos considerar de interés en el contexto de este capítulo es el problema del territorio explorado por N caminantes aleatorios independientes, es decir, caminantes sin interacción entre ellos. Este problema fue estudiado exhaustivamente en la última década del siglo pasado con aplicaciones a diversas áreas del conocimiento, entre ellas: Física, química y particularmente en ecología [5–8]. Actualmente ha sido necesario hacer generalizaciones al marco conceptual de caminata aleatoria para considerar problemas más complejos tales como el análisis y optimización de estrategias de forrajeo, en la que los agentes exhiben un tipo de movimiento *correlacionado* [9–12] y términos como caminatas y vuelos de Lévy se han vuelto populares hoy en día [13].

Un marco teórico cercano al de las caminatas aleatorias corresponde a la *ecuación de Fokker-Planck-Kramers*. Este esquema conceptual tiene como base la teoría del *movimiento browniano*[1] formulada por Einstein y Smoluchowski y extendida posteriormente por Ornstein, Uhlenbeck y Kramers. Análogamente como ocurre en las caminatas aleatorias, en el caso más general el movimiento de un agente no es descrito por sus trayectorias, sino por una densidad de probabilidad $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ tal que $P(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)d^3\boldsymbol{x}d^3\boldsymbol{v}$ da la probabilidad de que la partícula se encuentre en una vecindad de volumen $d^3\boldsymbol{x}$ alrededor del punto $\boldsymbol{x}$ con valores de la velocidad en el elemento $d^3\boldsymbol{v}$ alrededor de $\boldsymbol{v}$. Dicha densidad de probabilidad se encuentra al resolver la ecuación de Fokker-Planck-Kramers la cual es una ecuación diferencial parcial en t, $\boldsymbol{x}$, y $\boldsymbol{v}$ [14], explícitamente en una dimensión:

$$\frac{\partial P(x,v,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} v P(x,v,t) - \frac{1}{m}\frac{\partial}{\partial v}\mathcal{V}'(x)P(x,v,t) = \frac{\partial}{\partial v}\left[\frac{\gamma}{m}v + D_v\frac{\partial}{\partial v}\right]P(x,v,t), \tag{1}$$

donde m denota la masa de la partícula, $-\mathcal{V}'(x)$ la fuerza debida al potencial externo $\mathcal{V}(x)$

[1] El movimiento browniano, llamado así en honor al botánico inglés Robert Brown, quien fue uno de los primeros científicos que realizaron experimentos para explorar el origen del movimiento irregular de una partícula macroscópica inmersa en un fluido (Brown observaba partículas de polen en agua). La diferencia entre la masa de la partícula y la masa de las moléculas del líquido es causa de una separación en las escalas de tiempo, es decir, la moléculas del líquido se mueven mucho más rápido que la partícula macroscópica razón por la cual los efectos sobre esta sólo se consideran de manera efectiva.

y γ y D_v constantes con unidades de [masa]/[tiempo] y [velocidad]^2/[tiempo] respectivamente.

Otro marco teórico de la mecánica estadística de sistemas fuera de equilibrio que ha sido bastante influyente y que está basado en las trayectorias de movimiento de los agentes, fue presentado por Paul Langevin –físico de origen francés nacido en 1872– hace más de un siglo [15, 16]. Langevin sabía que el movimiento irregular de una partícula browniana tiene su origen en el incesante número de colisiones con las moléculas del fluido circundante y propuso que en un periodo de tiempo τ, suficientemente largo para considerar un número grande de estas colisiones pero también suficientemente corto comparado con el tiempo de observación, el efecto neto podía ser representado por una *fuerza aleatoria* dependiente del tiempo $\boldsymbol{\xi}(t)$ actuando sobre la partícula browniana. Otro efecto importante que también tiene su origen en la interacción con el fluido circundante, corresponde al de una fuerza efectiva de arrastre, que en el caso más simple, se modela como una fuerza de fricción lineal en la velocidad de la partícula (fuerza de arrastre de Stokes) $-\gamma\boldsymbol{v}$, con γ el mismo coeficiente que aparece en la ecuación (1).

La *ecuación de Langevin*, como ahora es llamada, describe de manera simple el movimiento browniano y está basada en las ecuaciones que determinan la trayectoria de la partícula, es decir, en la ecuaciones de movimiento de Newton

$$m\frac{d}{dt}\boldsymbol{V}_B = -\gamma\boldsymbol{V}_B + \boldsymbol{\xi}(t), \tag{2}$$

donde $\boldsymbol{V}_B = d\boldsymbol{X}_B/dt$ es la velocidad de la partícula browniana y $\boldsymbol{X}_B$ su posición.

La naturaleza de la fuerza fluctuante es difícil de conocer a partir del abrumador número de colisiones, sin embargo, bajo ciertas consideraciones físicas, se espera que la fuerza fluctuante satisfaga ciertas propiedades generales. En principio se puede argumentar que el efecto neto de las colisiones de la moléculas del fluido con la partícula browniana durante el lapso de tiempo τ, es la de ejercer una fuerza que en promedio se anula, es decir que $\langle\boldsymbol{\xi}(t)\rangle = 0$. Además se puede argumentar que debido al gran número de colisiones que se llevan a cabo durante el tiempo τ, en un instante dado t, el valor de esta fuerza es independiente del valor a cualquier otro instante s. Esta independencia estadística puede expresarse como $\langle\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}(s)\rangle \propto \delta(t-s)$, donde $\delta(x)$ denota la función delta de Dirac, la cual queda definida por la expresión

$$\int_a^b \delta(x-x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_0 \in [a,b] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \tag{3}$$

con $b > a$. Si se considera la caracterización de la fuerza fluctuante hasta sus correlaciones de segundo orden $\langle\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}(s)\rangle \propto \delta(t-s)$, se puede demostrar que $\boldsymbol{\xi}(t)$ corresponde a un *proceso estocástico gausiano* [17]. Este término aleatorio es también conocido en la literatura como ruido térmico o simplemente ruido. En la figura 3 se muestra una posible trayectoria de una partícula browniana en dos dimensiones al integrar la ecuación (2) con *ruido gaussiano blanco*, es decir $\langle\boldsymbol{\xi}(t)\cdot\boldsymbol{\xi}(s)\rangle \propto \delta(t-s)$.

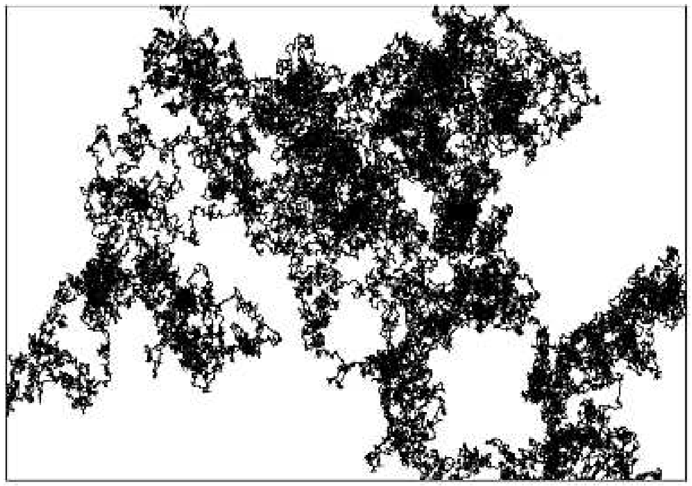

Figura 1: Trayectoria de una partícula browniana en dos dimensiones que resulta de resolver la ecuación (2).

Una propiedad más, que completa el esquema de la ecuación de Langevin se refiere a la naturaleza de las fuerzas aleatoria y disipativa. En el caso de la partícula browniana, si el fluido circundante está en equilibrio térmico caracterizado por la temperatura T, la fuerza disipativa y la fluctuante no son independientes entre sí, sino que se relacionan a través de una ecuación de balance, conocida como la relación *fluctuación-disipación* [18, 19], explícitamente en tres dimensiones $\langle \boldsymbol{\xi}(t) \cdot \boldsymbol{\xi}(s) \rangle = 6k_B T \gamma \delta(t-s)$. Dicha relación encierra un significado físico análogo al principio de *Le Châtelier* en termodinámica.

En muchas situaciones de interés la fuerza disipativa y al aleatoria pueden ser más complicados que lo expuesto aquí, lo que ha dado origen al estudio de generalizaciones de la ecuación de Langevin [20], que incluyen el caso en el que la relación fluctuación-disipación no se satisface. Se ha encontrado también que el ruido puede tener efectos importantes en sistemas fuera de equilibrio tales como ocasionar *transiciones de fase* [21, 22] o el fenómeno de resonancia estocástica [23, 24] por mencionar algunos. Incluso se ha ido más allá del caso de ecuaciones de movimiento con fuerzas aleatorias. Ciertamente, el formalismo de Langevin ha sido adaptado a situaciones con aplicaciones interdisciplinarias más generales [25], lo que ha impulsado el estudio del campo de las *ecuaciones diferenciales estocásticas*, en el que históricamente la ecuación de Langevin (2) es considerada la primera en su tipo.

2. Fenómenos colectivos: los efectos de interacción entre agentes

Hasta ahora sólo hemos mencionado que el movimiento de un agente puede ser descrito por una caminata aleatoria o un ecuación de Langevin, en algunos casos esta descripción es suficiente, sin embargo en la mayoría de los sistemas de interés esto no es así. En estos se debe considerar la interacción entre agentes la cual da un riqueza enorme a la dinámica del sistema y desafortunadamente, también una enorme complicación en su descripción.

A muchos nos ha causado asombro las formas de movimiento coordinado o "sincronizado" que presentan ciertos grupos de aves y de peces, o de la formación de patrones que son exhibidos en grupos de muchos agentes. El asombro aumenta cuando se considera el gran número de individuos que los componen y a pesar de ello percibimos que se comportan como una sola entidad que pareciera obedecer principios básicos, aún cuando podríamos adjudicar un elemento de "libre elección"a cada individuo. Así lo aborda en una audaz metáfora Iain Couzin, un biólogo dedicado al estudio de estos sistemas, en su ensayo titulado "Collective Minds" [26], donde presenta el problema de como una interacción del tipo "social" afecta la manera en que los animales dentro de grupos altamente sincronizados adquieren y procesan información.

Desde un punto de vista puramente biológico, el cual tiende a considerar hasta los detalles más finos para encontrar los elementos subyacentes que dan origen al comportamiento grupal observado, se formulan preguntas sobre las ventajas evolutivas de la interacción social y por tanto sobre la ventaja evolutiva de determinados comportamientos colectivos [27]. En contraste, desde el punto de vista reduccionista de la física, el cual ha permitido avanzar en el entendimiento de la naturaleza, se formulan modelos simples de los sistemas bajo estudio para ser analizados y comparados con los resultados provenientes de la observación.

En física el interés en los fenómenos colectivos[1] no es nuevo y se cuenta con una lista amplia de sistemas que lo presentan en diversas situaciones, tanto en equilibrio termodinámico como alejados de este. El desarrollo en el entendimiento de la aparición de una dinámica colectiva en sistemas fuera de equilibrio se realizó principalmente en la década de los 70 [28] y uno de los sistemas mejor estudiados y entendidos fue el *laser*. Dos ejemplos más de sistemas que exhiben una dinámica colectiva fuera de equilibrio son mostrados en la figura 2 [29, 30].

Recientemente, los físicos han prestado atención al estudio de la aparición de patrones y/o formas de movimiento grupal en sistemas un tanto alejados de los habituales en física. La diversidad de estos sistemas es tan amplia (formación de patrones en el movimiento de células epiteliales, el movimiento grupal de muchas bacterias, insectos, aves, peces, etc., ver figura 3) que también hay un gran número de biólogos, ingenieros, matemáticos, sociólogos que junto con físicos, reúnen sus esfuerzos para entender los principios que subyacen y dan origen a estos fenómenos colectivos más generales. Por ejemplo, en la referencia [31] los autores presentan un modelo de caminantes aleatorios para describir las

[1] De manera simple, se dice que un un fenómeno es colectivo cuando el sistema exhibe un comportamiento *global* (correlaciones de largo alcance) que surge como consecuencia de la interacción local entre los elementos que conforman al sistema. Este comportamiento surge como efecto de muchos cuerpos y es distinto al comportamiento de un solo elemento del sistema.

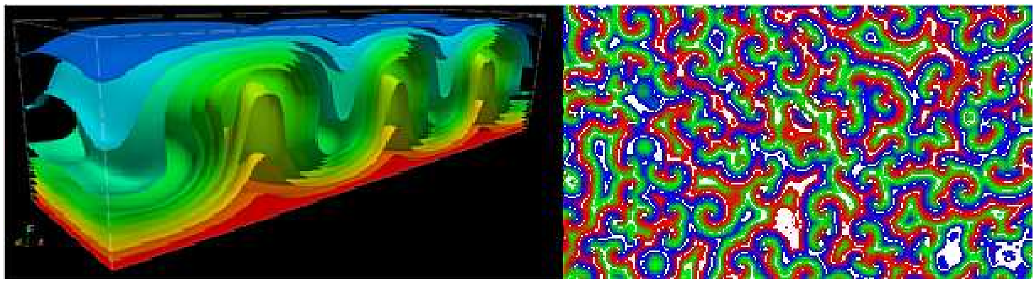

Figura 2: Izquierda, rollos de convección que aparecen al pasar un valor umbral del gradiente de temperaturas entre dos placas paralelas que confinan un líquido (imagen generada en computadora). Derecha, patrones dinámicos (oscilaciones químicas) que se observan a escalas macroscópicas en la reacción química de Beloúsov-Zhabotinski [29, 30] (imagen generada en computadora).

contracciones musculares a través de la interacción de motores actina-miocina, presentes en los músculos y que realizan trabajo mecánico teniendo como fuente de energía trifosfato de adenosina. Otro sistema biológico de interés corresponde al enjambre de bacterias que presentan estructuras organizadas y que se mueven de una manera altamente coordinada, sin duda la interacción entre bacterias cercanas entre si juega un papel fundamental.

Durante las últimas dos décadas la física estadística ha contribuido en el estudio de la emergencia espontánea de un comportamiento altamente organizado en fenómenos sociales como el esparcimiento de rumores, los sistemas de transporte en las ciudades, la "World Wide Web", la red de colaboraciones científicas, etc. [32]. Un ejemplo importante es el modelo de Axelrod [33] el cual engloba las características esenciales en la diseminación de la cultura. El modelo de Axelrod muestra como a partir de interacciones locales entre individuos que intercambian rasgos culturales, se observa la emergencia de "sociedades" distintas en una escala global. Aunque la motivación de este modelo se da en un contexto puramente social, el mismo modelo puede interpretarse como una generalización al modelo de Potts del ferromagnetismo [34]. Es así como la física ha hecho contacto con varias ramas del conocimiento.

Así, la idea que las interacciones locales entre las entidades que forman un sistema pueden llevar a un comportamiento colectivo global se ha transmitido a muchas ramas de la ciencia. En el lado de las humanidades, los expertos en ciencias cognitivas tienden a concentrarse en el comportamiento de un individuo *per se*, sin embargo es debido a la interacción de este con otros individuos que emergen estructuras complejas en un nivel jerárquico superior como son las ciudades, los grupos socioeconómicos, etc. Son bien sabidas por ejemplo, las estructuras coloniales que emergen en grupos de hormigas y no es clara la idea que dicha información pudiera estar presente en una sola de ellas.

Después de esta breve reflexión sobre la importancia de las interacciones para la emergencia de fenómenos colectivos, presentamos en la siguiente sección una introducción a una clase particular de estos sistemas, aquellos compuestos de agentes autopropulsados.

Figura 3: Imágenes de izquierda a derecha y de arriba a bajo. Estructuras que se forman en el movimiento colectivo de bacterias. Portada de la revista *Nature* donde se muestra el estado de movimiento colectivo en un banco de peces. Centenares de estorninos que despliegan un espectáculo aéreo exhibiendo un comportamiento colectivo. Grupo de personas moviéndose colectivamente en La Meca, centro religioso musulmán. Estructura de tipo vórtice observado en algunos cardúmenes de peces. Finalmente, una manada de mamíferos donde se observa una dirección preferencial de movimiento a pesar de que en principio, cada individuo puede moverse en una dirección arbitraria.

3. Sistemas de agentes brownianos autopropulsados

Para estudiar sistemas más generales a partir de los principios y métodos de la Física y describir situaciones más allá de sus tradicionales dominios de investigación, el practicante de esta disciplina debe tener claro cuales son sus alcances y limitaciones, por ejemplo, podemos preguntarnos sobre la posibilidad de formular una teoría que describa el movimiento colectivo de una parvada de cientos de miles de estorninos (sturnus vulgaris) que exhiben un espectáculo aéreo asombroso o estudiar las complejas conexiones que se establecen en las redes de telefonía celular. En principio, uno podría considerar con cierta renuencia el hecho de intentar describir el comportamiento colectivo que exhiben las parvadas de aves o bancos de peces como si fueran simples moléculas o espínes de un sólido, los cuales sabemos también exhiben dinámicas colectivas, sin embargo, como se ha mostrado en la literatura, la colaboración entre varias disciplinas hacen que esta renuencia pueda ser disipada al extender algunos conceptos bien establecidos en física [35] a los territorios de las demás ciencias.

Primero, no hay duda que el tipo de interacción entre las partículas con los que lidia la física debe ser de naturaleza diferente al tipo de interacción entre los agentes de un sistema más general, por ejemplo, al tipo de interacción entre los individuos de un cardumen. Mientras algunos principios de conservación deben satisfacerse en sistemas físicos, como el de conservación del momento cuando colisionan un par de partículas, esto no resulta tan obvio cuando un par de aves se alinean una con la otra al moverse dentro de una parvada. Ciertamente muchos de los resultados de la mecánica clásica están basados en la descripción hamiltoniana de esta. Lo que implica la consideración de fuerzas conservativas. Una diferencia importante de los sistemas que queremos describir aquí está relacionada con fuerzas que no pueden derivarse de una función de potencial y por tanto una formulación hamiltoniana no es posible

¿Cuáles son entonces los métodos que podrían emplearse para describir estos sistemas? En general no hay preferencia de uno de estos sobre los otros, excepto por la complejidad de la formulación de un problema en particular. En los casos donde el aspecto discreto de los elementos que componen el sistema no es importante la descripción de un continuo de materia es apropiada, esta es la manera *Euleriana* de abordar el problema, donde se establecen ecuaciones que describen la evolución temporal de una densidad de elementos en el sistema (densidad de aves por ejemplo) a través de los flujos causados por las fuerzas involucradas en el sistema, justo como sucede en *hidrodinámica* razón por la cual esta formulación también recibe este nombre. Este enfoque ha sido usado ampliamente en la literatura y resultados tanto de carácter general como particular han sido obtenidos [36–39].

En la manera *Lagrangiana* de abordar la descripción de estos sistemas, la atención es puesta en las trayectorias de los individuos que los conforman, las cuales son determinadas tanto por la interacción entre ellos como por fuerzas externas. La ecuación de Langevin discutida en la sección anterior y los llamados *autómatas celulares* caben perfectamente en esta formulación. En muchas ocasiones la interacción entre agentes se establece a través de *reglas*, las cuales deben considerar de manera mínima y simple el comportamiento entre agentes. Con los avances en la tecnología para la solución numérica de ecuaciones diferenciales estocásticas, este método se ha convertido en el preferido por los especialistas para estudiar sistemas de muchas partículas bajo reglas de interacción social, como en el estudio del flujo vehicular en ciudades de México [40].

Autopropulsión

Una marcada diferencia entre las partículas convencionales, a las que los físicos estamos acostumbrado a describir, y las "partículas" en los sistemas biológicos (células, bacterias, hormigas, aves, peces, etc.), es que estas últimas tiene la capacidad de moverse por si mismas, es decir, pueden extraer energía de sus alrededores y usarla con propósitos de locomoción [41]. Es precisamente esta idea la que introdujeron Ebeling y colaboradores [42] para describir estas partículas autopropulsadas también conocidas como *partículas brownianas activas* [43].

En principio, esta característica de autopropulsión puede considerarse como una situación de movimiento alejada del equilibrio térmico, pues considera el flujo de energía del medio a la partícula, la cual esta usa activamente para autopropulsarse. En contraste, el movimiento browniano convencional puede ser considerado como pasivo pues dicho movimiento es consecuencia del gran número de impactos que las moléculas del fluido ejercen sobre la partícula. Si el fluido está en equilibrio térmico, la distribución de velocidades de la partícula browniana a tiempos largos, es decir, mayores que τ, corresponde a la distribución de velocidades de Maxwell. Es en esta diferencia donde nace la idea de agentes brownianos, los cuales generalizan el concepto de partícula browniana introducido por Langevin[1].

La ecuación de Langevin correspondiente para el caso de partículas autopropulsadas puede escribirse de manera genérica como:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{V} = -\gamma(\boldsymbol{V})\boldsymbol{V} + \boldsymbol{\xi}(t), \tag{4}$$

donde ahora $\gamma(\boldsymbol{V})$ es una función real de la velocidad $\boldsymbol{V}$ y denota un coeficiente de fricción que hace de término disipativo no-lineal, el cual puede ser negativo para ciertos valores de $\boldsymbol{V}$. Un caso ampliamente estudiado corresponde a $\gamma(\boldsymbol{V}) = \gamma_0\left(\boldsymbol{V}^2 - V_0^2\right)$, con γ_0, V_0 dos constantes positivas. Es claro que para valores de $\boldsymbol{V}$ tales que $|\boldsymbol{V}| > V_0$ el término de fricción no-lineal actúa como tal, pero en el caso contrario $|\boldsymbol{V}| < V_0$, $\gamma(\boldsymbol{V})$ se vuelve negativa, lo cual se interpreta como un periodo en el que se transfiere energía de los alrededores hacia la partícula acelerándola. En el caso determinista, es decir $\boldsymbol{\xi} = 0$, uno puede mostrar fácilmente que la solución estacionaria corresponde al caso en que la partícula se mueve con rapidez V_0. En este ejemplo, la autopropulsión puede entenderse como la tendencia de las partículas a moverse con una rapidez característica. El modelo más simple de autopropulsión es considerar que los agentes se mueven con rapidez constante [45].

Transiciones de fase en un sistema de partículas autopropulsadas.

Un importante artículo de física donde partículas autopropulsadas son consideradas, apareció en el año 1995 en la revista Physical Review Letters [45], en este, los autores describen una transición de fase novedosa en un sistema de partículas autopropulsadas en interacción. El sistema consiste de un número N de partículas que se mueven con rapidez constante (de aquí la autopropulsión) en una caja bidimensional de lado L, con condiciones a la frontera del tipo periódico y bajo la acción de una interacción entre agentes del

[1] La inclusión de un término de autopropusión es sólo una manera de extender el concepto de partícula browniana. Otra manera de hacerlo es distinguir entre procesos estocásticos “internos”, asociados a los procesos internos de los agentes de los procesos estocásticos externos [44] los que serían equivalentes al ruido generado por el sinnúmero de colisiones de las moléculas del líquido sobre la partícula browniana.

tipo "social". La interacción es debida a la tendencia de los agentes a moverse en la misma dirección. Así, estos adquieren la dirección promedio de movimiento de los agentes más cercanos en un radio de interacción determinado, $\Omega(R)$. Si los agentes estuvieran fijos en una red cuadrada y la dirección de movimiento fuera sustituida por otro grado de libertad caracterizado por una dirección en el plano (el espín, por ejemplo), el modelo corrrespondiente sería el modelo XY del ferromagnetismo [46]. La novedad de la transición de fase en el ahora llamado modelo de Vicsek, radica en la existencia de una fase con orden de largo alcance, es decir, un orden que se difunde en todo el sistema. En este estado todas la partículas se mueven en promedio en la misma dirección. Este tipo de orden no es posible en el modelo XY en dos dimensiones, esto ha sido demostrado en un famoso teorema ahora llamado teorema de Mermin-Wagner-Hohenberg [47, 48] el cual establece que no es posible que un sistema exhiba un fase con orden de largo alcance, en dos o menores dimensiones, si la interacción entre partículas es de corto alcance.

Siendo más explícitos, a continuación se dan los detalles de la dinámica en el modelo de Vicsek. La posición $\boldsymbol{x}_i$ y velocidad $\boldsymbol{v}_i$ del i-ésimo agente están determinadas por las siguientes reglas de actualización:

$$\boldsymbol{x}_i(n+1) = \boldsymbol{x}_i(n) + \boldsymbol{v}_i(n)\Delta t \tag{5}$$

$$\theta_i(n+1) = \langle \theta_i(n) \rangle_{\Omega(R)} + \Delta\theta \tag{6}$$

donde $\boldsymbol{v}_i = v_0\,\boldsymbol{\theta}_i$, y $\boldsymbol{\theta}_i$ da la dirección de movimiento del i-ésimo agente y $\langle \theta_i(n) \rangle_{\Omega(R)}$ denota la interacción social del i-ésimo agente con aquellos que están en su vecindad $\Omega(R)$. Las fluctuaciones en la dirección de movimiento debidas a los errores que comete la partícula al alinearse con sus vecinos son introducidas a través de un ángulo aleatorio $\Delta\theta$ el cual es tomado de una distribución uniforme en el intervalo $[-\eta\,\pi, \eta\,\pi]$ con η en $[0, 1]$, es decir, la probabilidad de elegir un ángulo ϕ en un intervalo $\phi + \Delta\phi$ es simplemente $\Delta\phi/2\eta$.

Después de un tiempo transitorio el sistema llega a un estado estacionario el cual depende únicamente de la densidad de partículas en el sistema, del radio de interacción R y de η. Cuando la densidad y el radio de interacción están fijos, los estados estacionarios transitan de una fase desordenada caracterizada por un parámetro de orden Λ, cuyo valor es muy pequeño a otro donde es marcadamente distinto de cero (ver figura 4). Λ es simplemente la rapidez promedio, normalizada a 1, de todo el grupo $\Lambda = (1/Nv_0)\left\langle \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{v}_i \right\rangle$.

El valor de η crítico para el cual se observa la transición entre ambos estados se le conoce punto crítico y se dice que el sistema sufre una *transición de fase*.

Este trabajo pionero ha sido estudiado con más detalle en la última década y del cual se siguen descubriendo muchas efectos novedosos, como lo es la formación de grupos pequeños (segregación), los cuales se forman de manera intermitente a tiempos que pueden caracterizarse de manera precisa [49].

Además de tener la posibilidad de que un sistema pueda desarrollar una fase donde las entidades cooperen para alcanzar un estado coherente, también es de interés la posibi-

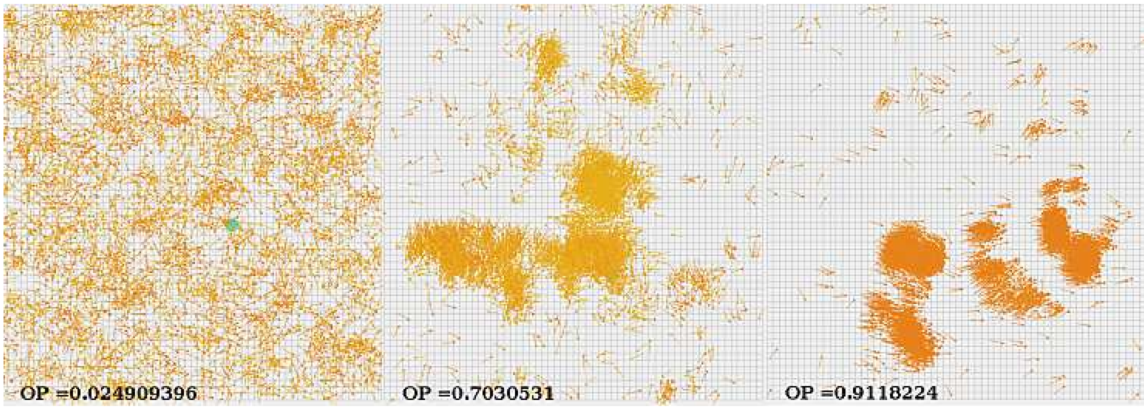

Figura 4: Tres imágenes instantáneas de un sistema de 5000 agentes en una caja de tamaño fijo L y radio de interacción $R = 0.017L$ en las que se muestra el valor instantáneo del parámetro de orden denotado con OP. La imagen de la izquierda corresponde a $\eta = 0.9$ (caso de desorden), la del medio a $\eta = 0.5$ (caso de orden) y la de la derecha a $\eta = 0.1$ (caso de orden).

lidad de explorar la formación de patrones que pueden originarse en estos sistemas [50]. Un ejemplo son la formación de estructuras de tipo vórtice que son observadas en sistemas de peces y aves. Diferentes mecanismos pueden dar origen a dichas estructuras. Uno de ellos es combinar los efectos de una fuerza "social" de alineamiento con los efectos de autopropulsión y de fuerzas atractivas y repulsivas. El trabajo de Levine y colaboradores [51] muestra que con estos ingredientes se pueden obtener estructuras tipo vórtices en un sistema bidimensional de agentes autopropulsados (sin ruido). Un aspecto importante que falta por entender es la estabilidad de las estructuras observadas ante perturbaciones. En la figura 5 se muestran dos sistemas donde se observan vórtices (colonia de hormigas a la izquierda, banco de peces a la derecha) y se compara con el vórtice obtenido por Levine y colaboradores (centro).

En esta misma línea de investigación el modelo de Ebeling y Erdmann [42], el cual usa como autopropulsión el modelo de fricción no-lineal expuesta en líneas anteriores, ha sido estudiado con la adición que las partículas influyen entre sí a través de fuerzas de tipo de oscilador armónico. En ese estudio, fuerzas de tipo "social" no son consideradas, sin embargo el sistema exhibe dos estados colectivos y estacionarios muy distintos, uno es caracterizado por un estado "coherente"en el que el grupo se desplaza en una única dirección de movimiento; el otro estado presenta un movimiento desorganizado de tipo enjambre [53]. La transición de un estado a otro está determinado tanto por la intensidad de las fuerzas aleatorias que actúan sobre los agentes así como de las condiciones iniciales del sistema. El valor umbral se encuentra a través del monitoreo de un parámetro de orden, como en el caso de Vicsek, la rapidez promedio del grupo. En el estado de enjambre, el parámetro de orden vale cero mientras que tiene un valor distinto a cero en el estado

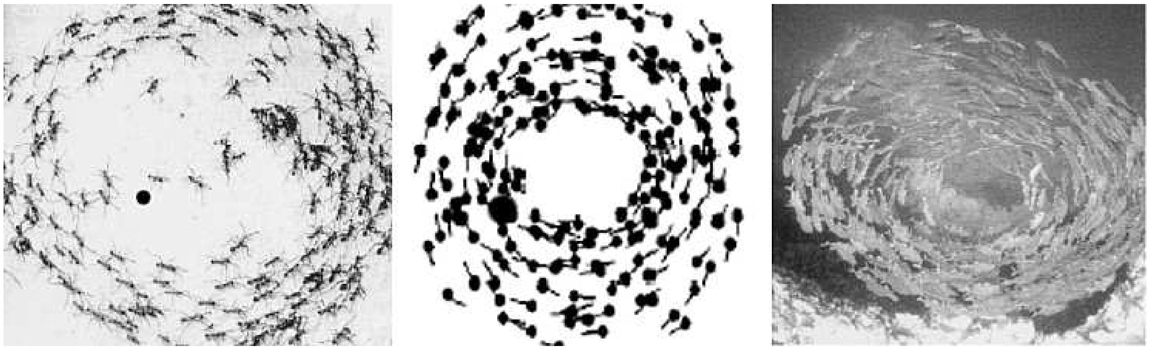

Figura 5: Tres imágenes que muestran estructuras de tipo vórtice en: una colonia de hormigas (izquierda, adaptado de [52]), el modelo de Levine *et al.* (centro, adaptado de [51]), en un banco de peces (derecha, adaptado de [52]).

de movimiento "coherente".

Existe una gran cantidad de estudios y modelos referentes a fenómenos colectivos de partículas autopropulsadas y resulta difícil exponerla en detalle o referirse a ella exhaustivamente, sólo expusimos brevemente algunos de los modelos teóricos, que en opinión del autor son emblemáticos, de este interesante campo de investigación. El lector interesado puede encontrar más información en los recientes artículos de revisión [54, 55].

4. Direcciones futuras

A pesar de los grandes avances que se han realizado en el contexto de movilidad y agentes, aún queda mucho por aprender. Por ejemplo, aún no es clara la razón por la que el modelo de Vicsek y similares tienen la posibilidad de presentar un fase con orden de largo alcance en dos dimensiones con interacción de corto alcance. En un principio, se creyó que la autopropulsión era el elemento fundamental para que el sistema escapara del alcance del teorema de Mermin-Wagner-Hohenberg, pues este último es válido, en principio, para sistemas en equilibrio termodinámico, sin embargo, como se presenta en la referencia [56], autopropulsión no es un requerimiento para alcanzar un estado de cooperación. En esta dirección se plantean problemas importantes en el contexto de la física de sistemas lejos de equilibrio. Aunque esta afirmación no es nueva, si lo es el hecho que sistemas no-físicos nos indiquen una ruta alternativa para ello.

Actualmente se comienzan a abordar preguntas muy parecidas a las que se formulan en biología usando las herramientas de la física estadística de sistemas fuera de equilibrio. Por ejemplo, en la referencia [57] se plantea la posibilidad de explicar como una muchedumbre de aves se comporta como un sola entidad. Los autores argumentan que dicho efecto es consecuencia de la acción conjunta de colapsos de organización (por instantes el estado de movimiento coherente se ve disminuido debido a la segregación del sistema) y de la facilidad con la que se transmite la información muy cerca del punto de crítico de la transición.

Por otra parte los aspectos que hasta ahora han sido estudiados en los sistemas de muchos agentes brownianos que consideran interacción entre ellos, han sido analizados bajo una actitud reduccionista. En algunos estudios sólo se inquiere el efecto combinado de interacción social y ruido, en otros, los efectos del mecanismo de autopropulsión con fuerzas de tipo intermoleculares soslayando la importancia de la interacción social. Esta manera de proceder ha permitido explorar y entender los ingredientes esenciales de algunos aspectos que exhiben los sistemas reales, pero aún se está lejos de entenderlos de una manera holística. Si bien en algunos casos se puede controlar experimentalmente algunos efectos que no son de interés, y así confrontar nuestras ideas planteadas en los modelos teóricos, en otros, esta opción es casi imposible de alcanzar. De cualquier modo, es esencial contar con un análisis experimental que permita la extracción de información de la interacción entre agentes y mejorar las reglas de interacción social [58]. La gente está muy interesada en tal situación y es perceptible la tendencia hacia esta visión holística que nos permitirá establecer y mejorar nuestros modelos teóricos para representar de manera más fiel la realidad.

Aún se requiere de mucha investigación para que nuestros modelos puedan describir muchos de los procesos biológicos, químicos, físicos y sociales que observamos en la naturaleza, los cuales son dinámicos, evolutivos, y que no permanecen en estados estacionarios, donde el tiempo no juega más un papel esencial. El considerar que conocer dichos estados estacionarios es el último fin, equivale a la visión Boltzmanniana sobre el destino del universo, el que se consideraba llegaría al equilibrio termodinámico, a un estado donde todo indicio de evolución se ve desvanecido [29]. En consideración a esto, en [59] se presenta un modelo de agentes brownianos en el que se exhibe una región en el espacio de parámetros (tiempo de correlación de la fuerza aleatoria y su intensidad) en donde el sistema transita dinámicamente entre dos soluciones estables distintas, uno donde el grupo se mueve de manera "coherente," el otro donde el grupo se mueve desorganizadamente en un estado de enjambre. En contraste con otros estudios, dicho modelo muestra esta característica dinámica, relevante, de algunos sistemas que observamos en la naturaleza, los cuales transitan entre varios estados de comportamiento colectivo.

Como último comentario quiero decir que los sistemas presentados en este capítulo son de interés para varias ramas de la ciencia las cuales a través de colaboración entre ellas, contribuyen al objetivo general de esta, el cual según Alfred North Whitehead, consiste en la construcción de un marco teórico, coherente y lógico, donde los conceptos generales pueden ser interpretados a través de los elementos de nuestra experiencia. En un futuro no muy lejano quizá, dicho objetivo podría alcanzarse.

5. Referencias

[1] S. Chandrasekhar, "Stochastic problems in physics and astronomy," *Reviews of modern physics*, vol. 15, no. 1, pp. 1–89, 1943.

[2] C. Song, T. Koren, P. Wang, and A. L. Barabási, "Modelling the scaling properties of human mobility," *Nature Physics*, vol. 6, no. 10, pp. 818–823, 2010.

[3] F. Spitzer, *Principles of random walk*. Springer Verlag, 2001, vol. 34.

[4] B. D. Hughes, *Random Walks and Random Environments: Volume 1: Random Environments*. Oxford University Press, USA, 1996.

[5] H. Larralde, P. Trunfio, S. Havlin, H. E. Stanley, and G. H. Weiss, "Territory covered by N diffusing particles," *Nature*, vol. 355, pp. 423–426, 1992.

[6] ——, "Number of distinct sites visited by N random walkers particles," *Physical Review A*, vol. 45, no. 10, pp. 7128–7138, 1992.

[7] G. M. Sastry and N. Agmon, "The span of one-dimensional multiparticle Brownian motion," *Journal Chemical Physics*, vol. 104, no. 8, pp. 3022–3025, 1996.

[8] S. B. Yuste and L. Acedo, "Territory covered by N random walkers," *Physical Review E*, vol. 60, no. 4, pp. R3459–R3462, 1999.

[9] G. M. Viswanathan, S. V. Buldyrev, S. Havlin, E. P. Raposo, M. G. E. da Luz, and H. E. Stanley, "Optimizing the success of random searches," *Nature*, vol. 401, pp. 911–914, 1999.

[10] G. M. Viswanathan, M. G. E. da Luz, E. P. Raposo, and H. E. Stanley, *The physics of foraging: an introduction to random searches and biological encounters*. Cambridge University Press, 2011.

[11] F. Bartumeus, M. da Luz, G. Viswanathan, and J. Catalan, "Animal search strategies: a quantitative random-walk analysis," *Ecology*, vol. 86, no. 11, pp. 3078–3087, 2005.

[12] L. Giuggioli, F. J. Sevilla, and V. M. Kenkre, "A generalized master equation approach to modelling anomalous transport in animal movement," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 43, p. 434004, 2009.

[13] M. F. Schlessinger, G. M. Zaslavsky, and F. (Eds.), *Lévy Flights and Related Topics in Physcs*. Springer, Berlin, 1995.

[14] H. Risken, *The Fokker-Planck equation: Methods of solution and applications*. Springer Verlag, 1996, vol. 18.

[15] P. Langevin, "On the Theory of Brownian Motion," *C.R. Seances Acad. Sci. (Paris)*, vol. 146, pp. 530–533, 1908.

[16] D. S. Lemons and A. Gythiel, "Paul Langevin's 1908 paper On the Theory of Brownian Motion," *American Journal of Physics*, vol. 65, no. 11, p. 1079, 1997.

[17] C. W. Gardiner, *Handbook of stochastic methods*, 2nd ed. Springer-Verlag, 1985.

[18] R. Kubo, "The fluctuation-dissipation theorem," *Reports on Progress in Physics*, vol. 29, no. 1, p. 255, 2002.

[19] K. Kawasaki, "Simple derivations of generalized linear and nonlinear langevin equations," *Journal of Physics A: Mathematical, Nuclear and General*, vol. 6, no. 9, p. 1289, 2001.

[20] E. Lutz, "Fractional langevin equation," *Physical Review E*, vol. 64, no. 5, p. 051106, 2001.

[21] C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, and R. Toral, "Noise-induced nonequilibrium phase transition," *Physical review letters*, vol. 73, no. 25, pp. 3395–3398, 1994.

[22] C. Van den Broeck, J. M. R. Parrondo, R. Toral, and R. Kawai, "Nonequilibrium phase transitions induced by multiplicative noise," *Physical Review E*, vol. 55, no. 4, p. 4084, 1997.

[23] K. Wiesenfeld, F. Moss *et al.*, "Stochastic resonance and the benefits of noise: from ice ages to crayfish and squids," *Nature*, vol. 373, no. 6509, pp. 33–36, 1995.

[24] B. McNamara and K. Wiesenfeld, "Theory of stochastic resonance," *Physical review A*, vol. 39, no. 9, p. 4854, 1989.

[25] M. Schienbein and H. Gruler, "Langevin equation, Fokker-Planck equation and cell migration," *Bulletin of Mathematical Biology*, vol. 55, no. 3, pp. 585–608, 1993.

[26] I. Couzin, "Collective Minds," *Nature*, vol. 445, p. 715, 2007.

[27] J. K. Parrish and L. Edelstein-Keshet, "Complexity, Pattern, and Evolutionary Trade-Offs in Animal Aggregation," *Science*, vol. 284, no. 2–April, pp. 99–101, 1999.

[28] H. Haken, "Cooperative fenomena in systems far from thermal equilibrium and in nonphysical systems," *Reviews of Modern Physics*, vol. 47, no. 1, pp. 68–119, 1975.

[29] I. Stengers and I. Prigoggine, *Order out of chaos*. Bantam Books Inc, 1984.

[30] P. Glansdorff and I. Prigoggine, *Thermodynamic Theory of Structure, Stability and Fluctuations*. Wiley, New York, 1971.

[31] F. Jülicher and J. Prost, "Cooperative Molcular Motors," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 13, pp. 2618–2621, 1995.

[32] S. Fortunato, C. Castellano, and V. Loreto, "Statistical physics of social dynamics," *Reviews of Modern Physics*, vol. 81, pp. 591–646, 2009.

[33] R. Axelrod, "The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization," *Journal of Confict Resolution*, vol. 41, pp. 203–226, 1997.

[34] K. Klemm, V. M. Eguíluz, R. Toral, and M. San Miguel, "Nonequilibrium transitions in complex networks: A model of social interaction," *Physical Review E*, vol. 67, no. 2, p. 026120, 2003.

[35] G. Flierl, D. Grünbaum, S. Levin, and D. Olson, "From Individuals to Aggregations: the Interplay between Behavior and Physics," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 196, pp. 397–454, 1999.

[36] J. Toner and Y. Tu, "Long-Range Order in a Two-Dimensional Dynamical XY Model: How Birds Fly Together," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 23, pp. 4326–4329, 1995.

[37] ——, "Flocks, herds, and schools: A quantitative theory of flocking ," *Physical Review E*, vol. 58, no. 4, pp. 4828–4858, 1998.

[38] C. M. Topaz and A. L. Bertozzi, "Swarming patterns in a two-dimensional kinematic model for biological groups," *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 65, no. 1, pp. 152–174, 2004.

[39] E. Bertin, M. Droz, and G. Grégoire, "Hydrodynamic equations for self-propelled particles: microscopic derivation and stability analysis," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 42, no. 1, p. 445001, 2009.

[40] M. Krbalek1 and P. Seba, "Headway statistics of public transport in Mexican cities," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 1, pp. L7–L11, 2003.

[41] F. Schweitzer, W. Ebeling, and B. Tilch, "Complex Motion of Brownian Particles with Energy Depots," *Physical Review Letters*, vol. 80, no. 23, pp. 5044–5047, 1998.

[42] U. Erdmann, W. Ebeling, L. Schimansky-Geier, and F. Schweitzer, "Brownian particles far from equilibrium," *The European Physical Journal B*, vol. 15, pp. 105–113, 2000.

[43] F. Schweitzer, *Brownian agents and active particles: collective dynamics in the natural and social sciences*. Springer, 2007.

[44] R Groffmann, L Schimansky-Geier, and P. Romanczuk, "Active Brownian particles with velocity-alignment and active fluctuations," *arXiv:1204.4304v1*, 2012.

[45] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet, "Novel type of phase transition in a system of self-driven particles," *Physical Review Letters*, vol. 75, no. 6, pp. 1226–1229, 1995.

[46] J. M. Kosterlitz and D. J. Thouless, "Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems," *Journal of Physics C: Solid State Physics*, vol. 6, pp. 1181–1203, 1973.

[47] N. D. Mermin and H. Wagner, "Absence of ferromagnetism or antiferromagnetism in one-or two-dimensional isotropic heisenberg models," *Physical Review Letters*, vol. 17, no. 22, pp. 1133–1136, 1966.

[48] P. C. Hohenberg, "Existence of long-range order in one and two dimensions," *Physical Review*, vol. 158, no. 2, pp. 383–386, 1967.

[49] C. Huepe and M. Aldana, "Intermittency and Clustering in a System of Self-Driven Particles," *Physical Review Letters*, vol. 92, no. 16, p. 168701, 2004.

[50] P. Romanczuk and L. Schimansky-Geier, "Swarming and Pattern Formation due to Selective Attraction and Repulsion," *arXiv:1205.3406v1*, 2012.

[51] H. Levine, W-J. Rappel, and I. Cohen, "Self-organization in systems of self-propelled particles," *Physical Review E*, vol. 63, no. 1, p. 017101, 2000.

[52] J. K. Parrish and L. Edelstein-Keshet, "Self-Organized Fish Schools: An Examination of Emergent Properties," *Biological Bulletin*, vol. 202, no. 3–June, pp. 296–305, 2002.

[53] U. Erdmann, W. Ebeling, and V. S. Anishchenko, "Excitation of rotational modes in two-dimensional systems of driven brownian particles," *Physical Review E*, vol. 65, no. 6, p. 061106, 2002.

[54] T. Vicsek and A. Zafeiris, "Collective motion," *Physics Reports*, vol. 517, pp. 71–140, 2012.

[55] P. Romanczuk, M. Bär, W. Ebeling, B. Lindner, and L. Schimansky-Geier, "Active Brownian Particles: From Individual to Collective Stochastic Dynamics," *The European Physical Journal Special Topics*, vol. 202, pp. 1–162, 2012.

[56] F.J. Sevilla and A. Heiblum, "Collective motion in a system of Brownian agents," in *Unifying Themes in Complex Systems Volume VIII*, H. Sayama, A.A. Minai, D. Braha, and Y. Bar-Yam, Eds. Greenwood Press, 2011, pp. 526–537.

[57] F. Vanni, M. Luković, and P. Grigolini, "Criticality and Transmission of Information in a Swarm of Cooperative Units," *Physical Review Letters*, vol. 107, no. 7, p. 078103, 2011.

[58] S. V. Viscido, M. Miller, and D. S.Wethey, “The Dilemma of the Selfish Herd: The Search for a Realistic Movement Rule,” *Journal of Theoretical Biology*, vol. 217, pp. 183–194, 2002.

[59] V. Dossetti, F. J. Sevilla, and V. M. Kenkre, “Phase Transitions induced by complex nonlinear noise in a system of self-propelled agents,” *Physical Review E*, vol. 79, p. 051115, 2009.