El universo algorítmico

por

Héctor Zenil

Este es un capítulo separado que integra el libro

Fronteras de la Física en el Siglo XXI

Octavio Miramontes y Karen Volke (Editores)
CopIt-arXives, 2013
México, D.F.
ISBN: 978-1-938128-03-5

Índice general

El Universo Algorítmico

Héctor Zenil, Universidad de Sheffield, Reino Unido

1. Computación digital y el concepto de algoritmo

Aunque Alan Turing no fue el primero en intentar aproximarse a una definición de algoritmo[1], fue sin duda quien logró capturar la noción con un concepto mecánico que dejó pocas dudas acerca de su generalidad e implementación física. A principios del siglo XX y hasta terminada la segunda guerra mundial, las computadoras no eran electrónicas sino humanas (preferentemente se contrataban mujeres). El trabajo de *computadora* era precisamente el de realizar operaciones aritméticas tediosas con papel y lápiz. Este trabajo era considerado de menor rango al de, por ejemplo, analista que sólo hombres podían ocupar en lugares como Bletchley Park, cerca de Londres, donde se rompieron códigos de comunicación alemana y donde "piratas informáticos" profesionales aparecieron por vez primera.

En una conferencia internacional de matemáticas en 1928, David Hilbert y Wilhelm Ackermann sugirieron que un procedimiento mecánico podía probar todas las afirmaciones matemáticas. A esta idea se le conoce como el *Entscheidungsproblem* (en alemán) o el "problema de la decisión". Si una *computadora humana* no representaba mas que la ejecución de un procedimiento mecánico, no era de sorprenderse que se pensara que la aritmética permitiría una mecanización del mismo tipo, en el que de la aplicación de reglas (operaciones aritméticas) a partir de ciertas fórmulas que se aceptan verdaderas (axiomas) se pudieran derivar todas las verdades aritméticas.

El origen del *Entscheidungsproblem* tiene antecedentes en Gottfried Leibniz, quien en 1672, después de haber construido satisfactoriamente una máquina mecánica capaz de realizar operaciones aritméticas (llamada *Staffelwalze* o *Step Reckoner*), basada en las ideas de Blaise Pascal, se imaginara una máquina del mismo tipo capaz de manipular símbolos para determinar el valor de verdad de enunciados matemáticos. En dirección a este objetivo Leibniz se dedicó a la concepción de un lenguaje universal formal que designó como *characteristica universalis* con, entre otras cosas, el descubrimiento del lenguaje binario y la definición de la aritmética binaria.

[1] Los modelos de Emil L. Post y Alonzo Church son otros dos ejemplos.

El 8 de septiembre de 1930, en Königsberg[2], Hilbert cerró su discurso para la Sociedad Alemana de Científicos y Médicos con "Wir müssen wissen—wir werden wissen!" que quiere decir (traducción del autor de este artículo) "debemos saber, ¡sabremos!" en relación al "problema de la detención" para mecanizar las matemáticas (en particular la aritmética). En 1931, Kurt Gödel realizó una construcción que dejaba en claro que la intención de Hilbert (también llamado "programa de Hilbert") de probar todos los teoremas verdaderos mecanizando las matemáticas, no era posible. Gödel mostró una fórmula que codifica una verdad aritmética en términos aritméticos y que no se puede probar sin llegar a una contradicción. Peor aún, mostró que no hay conjunto de axiomas que contengan a la aritmética y que esté libre de fórmulas verdaderas que no se pueden demostrar dentro de esa teoría.

En 1944, otro investigador clave en el desarrollo del concepto de computación y computabilidad (es decir, los límites de la computación), Emil L. Post, encontró que este problema estaba íntimamente relacionado con uno (el décimo) de los 23 problemas que en París (en la Sorbona) Hilbert anunciaría como uno de los retos más importantes de las matemáticas en el siglo XX[3]. En términos del décimo problema de Hilbert, el *Entscheidungsproblem* puede reescribirse en forma de ecuaciones diofantinas (o diofánticas)[4].

Generalmente, el "programa de Hilbert" es visto como un fracaso (en especial para Hilbert o quienes creyeran que era posible una respuesta positiva a su programa), pero es todo menos eso. Primero, Martin Davis (independientemente de Julia Robinson) usa el resultado negativo de Gödel para dar respuesta negativa al décimo problema de Hilbert (cuyo argumento lo completa Yuri Matiyasevich). Si bien es cierto que Gödel rompe con la idea de que lo verdadero es demostrable, ofreciendo una respuesta negativa al "problema de la decisión", el supuesto fallido "programa de Hilbert" dio origen a lo que hoy conocemos como la ciencia de la computación ya que resulta que, efectivamente, la aritmética puede mecanizarse, aunque no se pueda demostrar todo; y sobre ella realizar todo tipo de operaciones sofisticadas con lo que hoy conocemos como la computadora electrónica digital.

Máquinas de Turing y universalidad

Poco tiempo después de Gödel, en 1936, el matemático inglés Alan M. Turing entró en escena. Turing se planteó el problema de la decisión en términos mucho más crudos. Si el acto de llevar a cabo operaciones aritméticas es mecánico ¿por qué no sustituir la *computadora humana* por un *dispositivo mecánico*? El trabajo de Turing fue la primera descripción

[2]En aquel entonces perteneciente al estado alemán de Prusia, hoy Kaliningrado, Rusia. El lector tal vez recuerde el problema matemático de los 7 puentes de Königsberg, resuelto negativamente por Leonhard Euler. Véase la discusión al respecto en el capítulo de Lucas Lacasa, en este libro.

[3]En realidad en París sólo expuso oralmente 10 de los 23, no incluido el décimo, sino dos años después en la publicación que le siguió a su participación en el Congreso Internacional de Matemáticos de París.

[4]Una ecuación diofantina es un polinomio con variables que sólo pueden tomar valores enteros. La pregunta es entonces si existe un algoritmo que dada la ecuación decide si tiene solución en los enteros o no.

abstracta de una computadora digital como la conocemos hoy. Turing definió, lo que en su artículo llamó una máquina "a" (por "automática"), y que hoy conocemos como *Máquina de Turing*.

Una máquina de Turing [1] es una 5-tupla $\{S_i, K_i, S'_i, K'_i, D_i\}$, donde S_i es el símbolo en una cinta que la máquina está leyendo en tiempo t (la máquina puede leer el contenido de una celda en la cinta a la vez), K_i es el estado actual de la máquina (la instrucción) en el momento t, S'_i un símbolo único para escribir (la máquina puede sobreescribir un 1 en un 0, un 0 en un 1, un 1 en un 1, o un 0 en 0) en el momento $t+1$, K_i un estado de transición a un nuevo estado K'_i (que puede ser el mismo estado en que el que ya estaba en el momento t) dependiendo del símbolo que se lee, y D_i una dirección para moverse en el tiempo $t+1$ ya sea hacia la derecha (R) de la celda o hacia la izquierda (L), después de leer y escribir en la celda donde estaba. La máquina se detiene cuando llega a un estado distinguido 0. Se dice que la máquina de Turing produce una salida en las celdas contiguas de la cinta que se escribieron si la máquina de Turing se detiene en algún momento.

Más sorprendente aún, es la demostración de Turing de la existencia de una máquina "a" que es capaz de leer la tabla de transiciones (la lista de 5-tuplas que definen el comportamiento de la máquina y que denotaremos como $code(a, s)$) de cualquier otra máquina "a" con entrada s, y comportarse tal como "a" lo haría para la entrada s. En otras palabras, Turing mostró que no era necesario construir una máquina para cada tarea distinta, sino una sola que pueda reprogramarse. Esto trae consigo la indistinción de programa y datos, así como de *software* y *hardware*, ya que uno siempre puede codificar datos como un programa para otra máquina y viceversa, y uno siempre puede construir una máquina para ejecutar cualquier programa y viceversa. En un mismo artículo Turing definió las bases de lo que hoy conocemos como computadora digital reprogramable, software, programación y subrutina y es, por lo tanto, sin duda alguna la mejor respuesta que tenemos a la pregunta ¿Qué es un algoritmo?

Sin embargo, hay máquinas de Turing que no se detienen. Y esto es lo que hubiera esperado Turing para estar en acuerdo con los resultados de Gödel. Uno puede preguntarse si hay una máquina de Turing U que para $code(a, s)$ se detiene y produce 1 si a con entrada s se detiene, y 0 si a con s no se detiene. Turing [1] demuestra que no hay tal máquina U en acuerdo con Gödel, respondiendo de igual manera negativamente al programa de Hilbert, ya que un programa informático y su entrada se puede ver como una demostración aritmética y, la salida de ella (0 o 1), como la respuesta a la pregunta de si una fórmula cualquiera (que se codifica como entrada para la máquina) es un teorema verdadero o no. A este resultado se le conoce como la *indecidibilidad del problema de la detención*.

El mundo de los programas simples

Una de las características del mundo físico es que presenta una amplia gama de sistemas que se comportan de manera distinta, pero muchos de estos sistemas presentan aspectos regulares y al mismo tiempo difíciles de predecir, como el clima. ¿De dónde

surge la regularidad y la complejidad en la naturaleza? ¿Cómo diferenciar entre azar y estructura?

En la historia de la ciencia se ha hecho incapié en la existencia de objetos, en particular matemáticos, que parecen especialmente complejos (o complicados). Un tipo de estos objetos son, por ejemplo, los números que no pueden expresarse como la división p/q con p y q enteros. Los números 5, .5 o incluso infinitos como .3333333 . . . pueden escribirse como $5/1$, $1/2$ y $1/3$ respectivamente. Pero desde el tiempo de la Grecia antigua se conocen números como la constante matemática π y raíz cuadrada de 2 que no se pueden expresar de esa forma. Uno puede pensar en la división aritmética como un algoritmo que puede ser ejecutado por una máquina de Turing y provee el resultado en la cinta de salida. La operación producto, por ejemplo, puede verse como un algoritmo para acortar el número de operaciones necesarias para realizar las mismas operaciones únicamente con sumas. En el caso de los números que admiten una representación racional p/q, el algoritmo de la división entre números enteros consiste en el procedimiento común de encontrar cocientes y residuos. En el caso de números como π y raíz cuadrada de 2, el algoritmo produce una expansión infinita no periódica, por lo que la única manera de representarlos es simbólicamente (ejemplo π y $\sqrt{2}$). Los pitagóricos encontraron que dichos números con aparente complejidad infinita podían producirse a partir de operaciones muy simples, por ejemplo al preguntarse por el valor de la hipotenusa de un triángulo recto con catetos de longitud 1. Desde Euclides se sabe, además, que dichos números no son la excepción de entre los números reales que se encuentran en, por ejemplo, el intervalo continuo (0,1).

En ingeniería, incluyendo la programación de sistemas, la intuición de lo que es complejo (a diferencia de un número irracional en matemáticas, por ejemplo) había sido radicalmente distinta. Tradicionalmente se había considerado que para producir algo complejo había que concebir un proceso que fuera igualmente complejo. El problema, sin embargo, está estrechamente ligado al concepto de universalidad de Turing, dado que una máquina universal de Turing que sea programable es, en principio, capaz de producir cualquier grado de "complejidad". Por ejemplo, el tipo de complejidad (o aleatoriedad) que uno puede ver en la expansión decimal de la constante matemática π.

Si el algoritmo de la división es capaz de producir la complejidad de un número como π al dividir el diámetro de cualquier círculo entre la longitud de su circunferencia ¿Qué tan común puede ser que al ejecutar un programa informático cuyas instrucciones son elegidas al azar produzca el mismo tipo de complejidad aparente? Si los programas de computación que producen complejidad necesitaran una de descripción muy larga, la probabilidad de encontrar uno sería muy baja.

En un experimento con programas de computación extremadamente simples y pequeños Stephen Wolfram [2] encontró que este umbral de complejidad y universalidad es muy bajo, y que se requiere de muy poco para producir o encontrar una máquina que produzca máxima complejidad aparente y que sea capaz de ser Turing universal. El autómata celular con regla 110 (figura 2) es el mejor ejemplo de ello [2, 3].

Autómatas celulares

Wolfram se preguntó ¿Cuál es el programa de cómputo más simple que produce aleatoriedad aparente? Wolfram provee una posible respuesta: el autómata celular con regla 30 [2] en su enumeración de autómatas celulares (ver figura 1), cuya evolución hacia el lado derecho no parece presentar estructuras regulares (incluso dejándola correr por millones de pasos). Y encontró otra regla (la regla 110, ver figura 2) que requiere de sólo 2 símbolos con 8 configuraciones posibles (la demostración de universalidad requiere de una condición inicial con un patrón repetitivo).

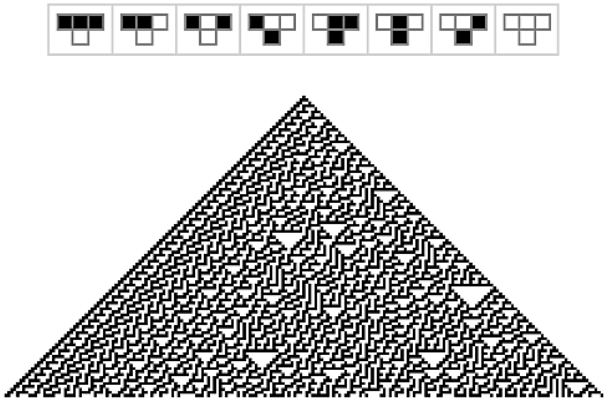

Figura 1: La evolución de la regla 30 (se muestran 100 pasos (renglones) en esta imagen) que, sorprendentemente, genera aleatoriedad aparente a pesar de comenzar con una celda negra, la condición inicial más simple. El icono en la parte superior de la evolución del programa muestra la tabla de transiciones. La regla 30 es bajo casi cualquier estándar, el programa de computación más simple que produce aleatoriedad aparente. Las columna central se ha usado por 20 años en el lenguaje de programación *Mathematica* como generador de números aleatorios.

Un autómata celular es un modelo de computación basado en reglas que modela un sistema dinámico paralelo que evoluciona en pasos discretos sobre una matriz de celdas. La condición inicial más simple de un autómata celular es una celda en negro a la que se le aplica una regla (icono superior en la figura 1). El autómata celular no trivial más simple consiste en una matriz unidimensional de celdas que solamente pueden tener dos estados (0 o 1) o colores (blanco o negro), con una vecindad de distancia 1, es decir las dos celdas adyacentes (en los bordes se asume una configuración toroidal). A este conjunto de $2^3 = 8$ configuraciones posibles se le llama el conjunto de autómatas celulares elementales [2]. Existen $2^8 = 256$ modos de definir el estado de una celda en la generación siguiente para cada una de estas configuraciones (ver los iconos en la parte superior de las figuras 1 y 2) y por lo tanto, 256 autómatas celulares elementales. En las figuras 1, y 2, y 3 se muestra la evolución de la regla en el tiempo, cada renglón es una unidad de tiempo, empezando en

tiempo 1, la condición inicial, a la que se le aplica la regla correspondiente (los iconos en la parte superior de las figuras) según el estado en el que se encuentre el sistema.

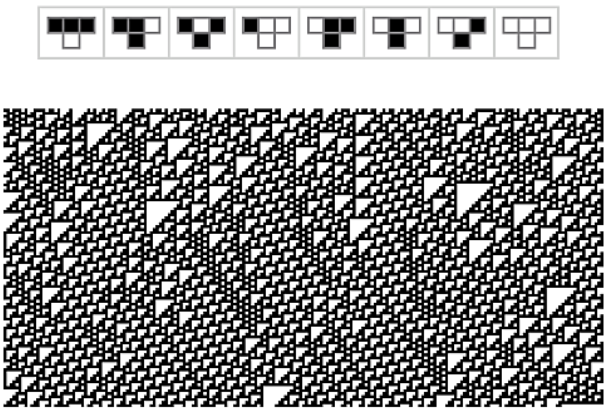

Figura 2: Evolución de la regla 110 (100 pasos) es capaz de Turing universalidad [2, 3] gracias a las estructuras persistentes, algunas de las cuales pueden observarse en esta figura, que permiten la transferencia de información. Esto quiere decir que una regla tan simple (la regla está en la parte superior) puede computar cualquier función que una máquina de Turing computa.

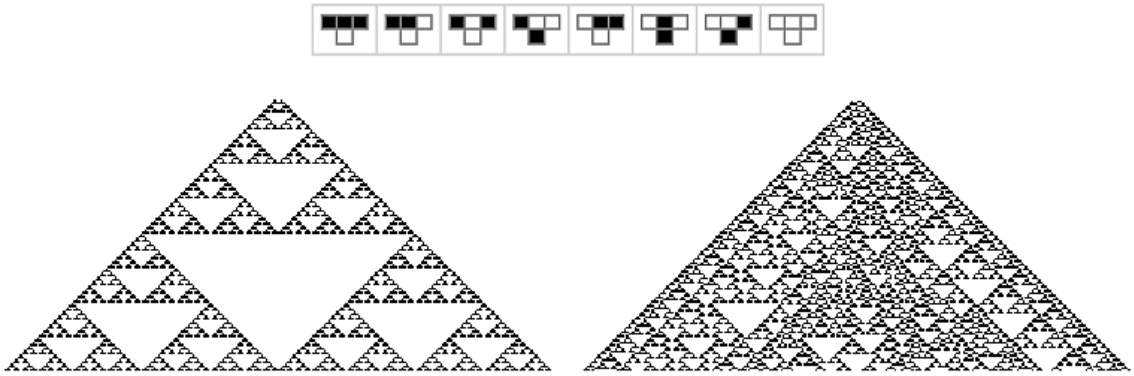

Figura 3: Evolución de la regla 22 (125 pasos) para dos condiciones iniciales que difieren en un solo bit (1001 versus 10011), altamente sensible a cambios muy pequeños en las condiciones iniciales (en particular muy sensible al rompimiento de simetría de su condición inicial).

Una deducción lógica a partir de los distintos comportamientos de estas reglas tan simples como los autómatas celulares elementales, es que si los detalles de las reglas del programa tienen poca relación directa con su comportamiento (cada regla difiere de otra por 1 bit que puede tener como resultado un comportamiento completamente distinto), entonces parecería muy difícil diseñar directamente un programa simple capaz de reali-

zar un comportamiento específico ya que un cambio muy simple en la regla conduce a comportamientos completamente diferentes (por ejemplo, ver la figura 3 que muestra la regla 22 con 2 condiciones iniciales del mismo tamaño que difieren en un solo bit) o incluso completamente impredecibles para las condiciones iniciales más simples (como la mitad derecha de la evolución de la regla 30, figura 1). Los programas simples son capaces de un rango notable de distintos comportamientos y algunos han demostrado ser capaces de computación universal como la regla 110 (figura 2).

2. ¿La naturaleza algorítmica del mundo?

Cuando Leibniz creó la aritmética binaria, pensó que el mundo podría haberse creado a partir de la "nada" (cero) y el uno, porque cualquier otro lenguaje puede escribirse en binario (el lenguaje más simple posible por número de símbolos). Nuestras computadoras electrónicas pueden pensarse como dispositivos que reprograman una parte del universo. La computación digital es una forma de "piratear" la materia del universo y hacerla calcular algo para nosotros. ¿Cuán diferente es un universo computable por una máquina universal de Turing al universo en que vivimos? La versión del universo de bits es, por supuesto, una simplificación excesiva, pero los dos podrían, al final, no ser muy diferentes (ver figura 4).

Figura 4: ¿Cuán diferente es un universo simulado por una máquina universal de Turing al universo en que vivimos? Tres ejemplos sorprendentes de patrones autoorganizados: Izquierda) El "Camino del gigante" (*Giant's Causeway*) en Irlanda del Norte formado por columnas basálticas hexagonales debido al enfriamiento de celdas de convección de lava. Centro) Un patrón en forma de "Anillo de hada" (*fairy ring*) en el suelo generado por el crecimiento diferencial de hongos *Micelios* en Dundee, Escocia. Derecha) Patrones en la concha de un caracol *Conus marmoreus* (Linnaeus, C., 1758), común en los océanos índico y Pacífico ¿Son los patrones espacio-temporales que componen la complejidad de la naturaleza, similares a la ejecución de programas en máquinas universales de Turing?

Si no existe una razón específica para elegir una distribución estadística particular, a partir de un conjunto de datos, a falta de información disponible, la distribución uniforme es la que no hace otra suposición más que la de que ningún dato tiene nada en particular (mayor ocurrencia) que cualquier otro, de acuerdo con el principio de indiferencia. Considérese la posibilidad de una operación desconocida que genera una cadena binaria de longitud k bits. Si el método es uniformemente aleatorio, la probabilidad de encontrar una cadena s en particular es exactamente $1/2^k$, la misma probabilidad que para cualquier otra cadena de longitud k. Sin embargo, datos de una fuente, como los dígitos de π, no son valores aleatorios sino resultado de un proceso (en el caso de π la relación con círculos y curvas), es decir, generalmente no se producen al azar, sino por un proceso algorítmico. En física, la mecánica clásica prescribe determinismo en el mundo, lo que refuerza la idea de que los procesos físicos (al menos macroscópicos) podrían ser el resultado de procesos algorítmicos semejantes a los que pueden ejecutarse en una computadora digital o una máquina de universal Turing.

Probabilidad algorítmica y la distribución universal

Hay una medida [4] (que denotaremos con m), que describe la probabilidad de que una computadora digital produzca una cadena s específica a partir de un programa informático (una serie de instrucciones) producido al azar. Formalmente [4, 5],

$$m(s) = \sum_{p:U(p)=s} 1/2^{|p|}. \tag{1}$$

Donde $|p|$ es la longitud (en bits) de los programas que producen el resultado s corriendo en una máquina universal de Turing U. Para cualquier cadena dada s, hay un número infinito de programas que pueden producir s, pero $m(s)$ se define de tal manera que la suma de las probabilidades no pase de 1 (de otra forma no podría ser una medida de probabilidad). La idea es que ningún programa válido es subrutina de ningún otro programa válido. A esta máquina universal de Turing se le llama máquina *prefija*, pero el lector no debe dejarse distraer por esta necesidad técnica. La medida m induce una distribución sobre el conjunto de cadenas s que se conoce como la distribución universal, y cuyas propiedades se han incluso descrito como *milagrosas* en la literatura de la teoría de la computación [6]) pues se le han demostrado muchas propiedades matemáticas importantes.

La noción detrás de m es muy intuitiva, si se deseara producir los dígitos de π al azar uno por uno, se tendría que intentarlo una y otra vez hasta conseguir producir la secuencia correcta de números consecutivos correspondientes a un segmento inicial de la expansión decimal de π. La probabilidad de éxito es muy pequeña: $1/10$ dígitos multiplicado por el número deseado de dígitos. Por ejemplo, $(1/10)^{1000}$ para un segmento de longitud 1000 dígitos de π. Pero si en vez de lanzar dígitos al azar, uno lanzara programas de computadora al azar para ejecutarlos en una computadora, las cosas resultan ser muy

diferentes. Un programa que produce los dígitos de π tiene una mayor probabilidad de ser producido por un programa de computadora que la probabilidad de producir un segmento largo de π ya que π es el resultado de un proceso que puede describirse con una fórmula concisa (ver ejemplo de programa en figura 5).

```
long k=4e3,p,a[337],q,t=1e3;
main(j){for(;a[j=q=0]+=2,??k;)
for(p=1+2*k;j<337;q=a[j]*k+q%p*t,a[j++]=q/p)
k!=j>2?:printf("%.3d",a[j?2]%t+q/p/t);}
```

Figura 5: Un programa escrito en el lenguaje C de 141 caracteres que al ejecutarse imprime 1000 dígitos decimales de π (Gjerrit Meinsma, *http://www.boo.net/~jasonp/pipage.html*). Es mucho más probable generar este programa (o uno equivalente) tecleando al azar que acertar los 1000 primeros dígitos de π. Este programa comprimido con GZIP ocupa solamente 713 bytes.

Complejidad de Kolmogorov

No por casualidad, a la longitud del programa más corto que produce una cadena se le reconoce como una medida de aleatoriedad llamada complejidad algorítmica o complejidad de Kolmogorov (o Kolmogorov-Chaitin). La idea es relativamente simple, si una cadena de longitud $|s|$ no puede ser producida por un programa p que produzca s tal que $|p| < |s|$, entonces a la cadena s se le considera aleatoria porque no puede describirse de manera más corta que con s mismo pues no existe un programa p que genere s y cuya longitud sea más corta que s. Formalmente, la complejidad de Kolmogorov se define como [7, 8]: $C_U(s) = \text{mín}\{|p|, U(p) = s\}$. Donde U es una máquina universal de Turing.

El teorema de invariancia garantiza que el valor de C calculado con una máquina universal de Turing u otra máquina universal de Turing, es el mismo para cadenas suficientemente largas. Formalmente, si U_1 y U_2 son 2 máquinas universales de Turing y $C_{U_1}(s)$ and $C_{U_2}(s)$ son los valores de complejidad algorítmica de s para U_1 y U_2, existe una constante c tal que $|C_{U_1}(s) - C_{U_2}(s)| < c$.

3. ¿Cuán diferente es nuestro mundo a un mundo digital?

Así como las fórmulas para la producción de los dígitos de π son versiones comprimidas de π, las leyes físicas pueden verse como sistemas que *comprimen* fenómenos naturales. Estas leyes son valiosas porque gracias a ellas se puede predecir el resultado de un fenómeno natural sin tener que esperar a que se desarrolle en tiempo real. Resolver las ecuaciones que describen el movimiento planetario en lugar de tener que esperar dos años para conocer las posiciones futuras de un planeta. No es casualidad que todos estos cálculos resultan ser computables, para todos los efectos prácticos las leyes físicas son como los

programas de computadora y los modelos científicos que tenemos de ellas, ejecutables en computadoras digitales con soluciones numéricas.

En un mundo de procesos computables en el que las leyes (como programas) no tengan una distribución sesgada, $m(s)$ indicaría la probabilidad de que un fenómeno natural ocurra como resultado de ejecutar el programa. Si uno deseara saber si la naturaleza del universo es algorítmica, lo primero que se tendría que especificar es cómo sería un universo algorítmico. Si el mundo es de algún modo parecido a un mundo de algoritmos, las estructuras, y la frecuencia de éstas, deberían ser parecidas [9].

Información y teorías de gravedad cuántica

Conexiones entre física, computación e información no son nuevas ni han derivado solamente en especulaciones. Por ejemplo, usando el principio de Landauer, Charles Bennett [10] utilizó estas conexiones para dar respuesta negativa a la paradoja del demonio de Maxwell, un experimento mental que sugería que la segunda ley de la termodinámica podía violarse. Por otra parte, una pregunta legítima es si existe un límite físico el cual indique cuánta información puede almacenarse en una región del espacio. Si no lo hubiese podríamos, en principio, almacenar una cantidad infinita de información comprimiéndola en una región cada vez más pequeña del espacio. Imaginemos cuánta información se requiere para describir el estado de una región del espacio, digamos un cuarto de una casa. La respuesta parecería depender solamente de la cantidad de materia y energía en el interior y del volumen del cuarto. Para aumentar la cantidad de información en un cuarto sellado bastaría con introducir más materia ¿Cuánta más materia e información para describirla puede introducirse en un cuarto cerrado? La física cuántica y la teoría de la relatividad proveen una respuesta. Por un lado, el principio de incertidumbre de Heisenberg nos indica que obtener información cada vez con mayor precisión a escalas cuánticas requiere cada vez de más energía, así que seguir aumentando la densidad en el cuarto y extrayendo el estado en el que se encuentra requiere cada vez más energía. Si se continua aumentando la cantidad de materia en el cuarto la densidad al interior provocará en algún momento que la atracción gravitacional en la superficie del cuarto se colapse en un agujero negro de acuerdo a la teoría general de la relatividad. A partir de ese momento nada puede escapar del agujero negro, ni siquiera la luz. Esto quiere decir que el principio de incertidumbre de Heisenberg y la teoría de la relatividad general determinan un límite superior en la cantidad de información que una región del espacio puede contener.

Los agujeros negros son objetos predichos por la teoría de la relatividad general (y presumiblemente detectados experimentalmente)[5]. Sorprendentemente, están jugando un papel central en la discusión del papel que la teoría de la información tiene en el mundo físico, por varias razones. Los agujeros negros son, por así decirlo, el lugar de encuentro de las teorías físicas que describen lo más grande y lo más pequeño en el universo, es

[5]Véase también el capítulo de Miguel Alcubierre “Agujeros Negros” en este mismo libro

decir, los objetos que describen la teoría de la relatividad general y la mecánica cuántica. Esto se debe a que los agujeros negros son tan masivos que producen lo que en la teoría de la relatividad de Einstein es una consecuencia de la gravedad, un punto de singularidad de densidad infinita y de dimensiones infinitamente pequeñas. La búsqueda de la unificación de estas dos grandes teorías ha centrado su atención en los agujeros negros. Una segunda propiedad que hace de los agujeros negros objetos sumamente interesantes es que reproducen lo que se cree fue la condición inicial del universo, cuando toda la materia estaba altamente concentrada en un espacio infinitamente pequeño.

La pregunta de lo que sucede con lo que cae en un agujero negro ha sido motivo de largas discusiones que han cambiado su curso en diferentes direcciones [11]. Por un lado, nada de lo que cae en un agujero negro puede escaparse, ni siquiera la luz una vez dentro de lo que se conoce como el horizonte de sucesos. Sin embargo, la primera ley de la termodinámica afirma que en el universo la materia y energía se conservan, y la segunda ley de la termodinámica afirma que la entropía de un sistema cerrado solamente puede aumentar. Bekenstein sugirió que la segunda ley de la termodinámica podría violarse, dado que podría utilizarse el agujero negro para disminuir indiscriminadamente la entropía en el exterior arrojando masa que "desaparece" en el agujero negro, y que para conservar la segunda ley de la termodinámica era necesario asignarle entropía a un agujero negro. La entropía es una aproximación de la cantidad de información que se requiere para describir la configuración completa de un sistema físico en todo detalle (todos los grados de libertad de las moléculas en un espacio). Esto es por supuesto una versión simplificada de una descripción matemática del concepto que tiene la siguiente forma para un sistema aislado: $\partial S/\partial t \geq 0$, donde S es la entropía y T es el tiempo.

Que los agujeros negros se "evaporen", en forma de lo que se conoce hoy como radiación de Hawking, y que el tamaño del agujero aumente, es importante porque ello establece una conexión más coherente con las principios de la termodinámica.

El Principio Holográfico

El que los agujeros negros aumenten de tamaño proporcionalmente a lo que se arroje en ellos sugiere también que los agujeros negros actúan de cierta forma como algoritmos de compresión perfectos, ya que de acuerdo con la relatividad general no hay forma de comprimir un objeto en un volumen más pequeño que el ocupado ya por el horizonte de sucesos del agujero negro. Esto debido a que el interior de un agujero negro es una región de espacio que se ha colapsado en una densidad crítica que determina el límite de lo que puede guardarse en una región compacta de espacio. Esta región está determinada por el llamado límite de Bekenstein [12], $I \leq (2\pi kRE)/(\hbar c \log 2)$. Donde I es la cantidad de información en bits, k es la constante de Boltzmann, R el radio de una región de espacio que contiene energía (o masa) $E = mc^2$, $\hbar = 1.0545 \times 10^{-34}$ julio-segundo es la constante de Planck y $c = 2.9979 \times 10^8$ metros por segundo es la velocidad de la luz. Pero dado que masa y área están relacionadas proporcionalmente en los agujeros negros, Bekenstein

conjeturó [12] que la información I contenida en un agujero negro es $I = A/l_p^2$, donde l_p^2 es un término que depende de la constante de Planck y la constante de gravitación y donde solamente aparece el área A del agujero negro como parámetro único que determina la cantidad de información que contiene.

El llamado Principio Holográfico [13, 14] asume la conjetura de Bekenstein, de la que se tienen muchas indicaciones teóricas de su veracidad (no asumirlo deriva en muchas contradicciones de áreas bien establecidas de la física). El Principio Holográfico determina entonces que el área de la superficie del horizonte de un agujero negro mide el contenido de la información del agujero negro dada por la ecuación del *radio gravitacional* o *radio de Schwarzschild* $R_S = (2GM)/c^2$ que determina que la relación entre el tamaño del agujero negro y la masa crecen proporcionalmente, donde M es la masa del agujero negro, $G = 6.673 \times 10^{-11}$ la constante gravitacional de Newton, y c la velocidad de la luz. Si además, la información sobre el objeto que cae en el agujero negro puede recuperarse de la radiación de Hawking, el agujero negro sería un compresor perfecto sin pérdida de datos, o con pérdida de datos de otra manera. En este caso, el radio de Schwarzschild se convierte en el radio de compresión, y el valor I, su complejidad de Kolmogorov. Tenemos entonces un límite físico para la complejidad de Kolmogorov dado por $K(s) = I(s) \leq A/l_p^2$ donde A/l_p^2 no depende del objeto s sino del área de la superficie que lo contiene. Usando estas conexiones entre física, información y computación; Seth Lloyd incluso propuso un calculo [15] de la capacidad de cómputo, velocidad y capacidad de almacenamiento de información del universo. Lloyd estimó que el universo no puede haber realizado más de 10^{120} operaciones lógicas elementales con más de 10^{90} bits.

A manera de conclusión

Wheeler creía [16] que la mecánica cuántica y todas las leyes de la física se podían escribir en el lenguaje de bits encapsulado en su famoso "it from bit" que sugiere que toda la realidad material (it) debe su existencia a partir de la información (bit). Afirmó que cualquier fórmula con unidades que involucran la longitud de Planck $\hbar$ eran prueba irrefutable de la naturaleza discreta del mundo. No era tal vez por casualidad que Wheeler mismo acuñara el término "agujero negro" para las soluciones extrañas que la relatividad producía, dando lugar a singularidades.

Hemos visto como la teoría de la computación y la teoría de la información algorítmica pueden explicar la emergencia de estructura y la persistencia de principios físicos incluso dando lugar a reinterpretaciones de teorías físicas modernas en términos de información. Las posibilidades de seguir conectando la realidad física, computación e información son innumerables y apasionantes.

4. Referencias

[1] A. Turing, "On computable numbers, with an application to the entscheidungsproblem. a correction," *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. 2, no. 1, p. 544, 1938.

[2] S. Wolfram, *A new kind of science*. Wolfram media Champaign, IL, 2002.

[3] M. Cook, "Universality in elementary cellular automata," *Complex Systems*, vol. 15, no. 1, pp. 1–40, 2004.

[4] L. Levin, "Laws of information conservation (nongrowth) and aspects of the foundation of probability theory," *Problemy Peredachi Informatsii*, vol. 10, no. 3, pp. 30–35, 1974.

[5] R. Solomonoff, *A preliminary report on a general theory of inductive inference*. Citeseer, 1960.

[6] W. Kirchherr, M. Li, and P. Vitányi, "The miraculous universal distribution," *The Mathematical Intelligencer*, vol. 19, no. 4, pp. 7–15, 1997.

[7] A. Kolmogorov, "Three approaches to the quantitative definition ofinformation," *Problems of information transmission*, vol. 1, no. 1, pp. 1–7, 1965.

[8] G. Chaitin, *Algorithmic information theory*. Cambridge University Press, 1987.

[9] J.-P. Zenil, H. y Delahaye, "On the algorithmic nature of the world," in *Information and Computation*, G. Dodig-Crnkovic and M. Burgin, Eds. World Scientific, 2010.

[10] C. Bennett, "Demons, engines and the second law," *Scientific American*, vol. 257, no. 5, pp. 108–116, 1987.

[11] S. Hawking, "Particle creation by black holes," *Communications in mathematical physics*, vol. 43, no. 3, pp. 199–220, 1975.

[12] J. Bekenstein, "Black holes and entropy," *Physical Review D*, vol. 7, no. 8, p. 2333, 1973.

[13] G. Hooft, "Dimensional reduction in quantum gravity," in *Salamfestschrift: A Collection of Talks from the Conference on Highlights of Particle and Condensed Matter Physics*, A. Ali, J. Ellis, and S. Randjbar-Daemi, Eds. World Scientific, 1993.

[14] L. Susskind, "The world as a hologram," *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, p. 6377, 1995.

[15] S. Lloyd, "Computational capacity of the universe," *Physical Review Letters*, vol. 88, no. 23, p. 237901, 2002.

[16] J. A. Wheeler, "Information, physics, quantum: The search for links," in *Complexity, Entropy, and the Physics of Information*, W. Zurek, Ed. Addison-Wesley, 1990.