

# PROCESOS DINÁMICOS EN REDES CON DAÑO

Leidy Katherin Eraso Hernández

**CopIt-arXives**  
Publishing Open Access  
with an Open Mind  
2025

Este libro contiene material protegido por leyes de autor

Todos los derechos reservados © 2025

Publicado electrónicamente en México, por CopIt-arXives

Obra editada por Leidy Katherin Eraso Hernández y Octavio Miramontes

Diseño de portada Octavio Miramontes

*Procesos dinámicos en redes con daño.*

[Autor] [Leidy Katherin Eraso Hernández] — México CDMX: CopIt-arXives, 2025

Incluye bibliografías e índice

ISBN: 978-1-938128-38-7 ebook

### **Derechos y permisos**

Todo el contenido de este libro es propiedad intelectual de su autora quién; sin embargo, otorga permiso al lector para copiar, distribuir e imprimir sus textos libremente, siempre y cuando se cumpla con lo siguiente: (i) el material no debe ser modificado ni alterado, (ii) la fuente debe ser citada siempre y los derechos intelectuales deben ser atribuidos a sus respectivos autores, (iii) estrictamente prohibido su uso con fines comerciales.

El contenido y puntos de vista planteados en cada capítulo es responsabilidad exclusiva de la autora y no corresponden necesariamente a los de los editores o a los de ninguna institución, incluidas CopIt-arXives o la UNAM.

Producido con software libre incluyendo L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X. Indexado en Google Books y Google Scholar.

Todas las figuras e imágenes son propias o bien cortesía de [www.wikimedia.org](http://www.wikimedia.org), a menos que se señale lo contrario explícitamente.

**ISBN: 978-1-938128-38-7 ebook**

<https://copitarxives.fisica.unam.mx>

**Este libro ha pasado por revisión de pares.**

**CopIt-arXives**

Cd. de México - Cuernavaca - Madrid - Curitiba  
Viçosa - Washington DC - Mallorca - London

Con el apoyo de la  
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO  
Instituto de Física

## ÍNDICE

<b>PRÓLOGO</b>	<b>1</b>
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>3</b>
<b>REDES Y PROCESOS DINÁMICOS</b>	<b>7</b>
Teoría de grafos . . . . .	8
Algunas medidas y cantidades básicas de las redes . . . . .	8
Modelos de redes aleatorias . . . . .	11
Detección de comunidades . . . . .	13
Caminantes aleatorios en redes . . . . .	15
Sincronización en redes . . . . .	18
<b>TRANSPORTE EN REDES CON DAÑO ACUMULADO</b>	<b>23</b>
Generación de daño acumulado en una red . . . . .	24
Daño en la red y matriz de transición . . . . .	24
Caminatas aleatorias en redes con daño . . . . .	25
Generación de asimetría en el proceso de transporte en redes con daño . . . . .	27
Topología de las redes y su tolerancia al daño . . . . .	35
<b>EFFECTO DEL DAÑO EN SISTEMAS DE TRANSPORTE METRO</b>	<b>39</b>
Base de datos . . . . .	40
Daño acumulado en las redes de metro . . . . .	42
Clasificación de las redes de metro . . . . .	44
<b>SINCRONIZACIÓN EN REDES CON DAÑO</b>	<b>51</b>
Modelo de Kuramoto de osciladores idénticos . . . . .	52
Tiempos de sincronización . . . . .	54
Modelo de Kuramoto en presencia de daño . . . . .	55
Funcionalidad en procesos de sincronización . . . . .	58
Grafos conexos de $N = 6$ nodos con daño . . . . .	60
Modelo de Kuramoto en la aproximación lineal . . . . .	66
Cambio del valor umbral $r$ . . . . .	69

<b>ANTIFRAGILIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS</b>	<b>73</b>
Antifragilidad en redes con daño en una línea . . . . .	74
Funcionalidad y medida de antifragilidad . . . . .	76
Daño infinitesimal en una línea de la red . . . . .	78
Antifragilidad en grafos pequeños . . . . .	82
Daño en comunidades tipo clique . . . . .	83
Daño en comunidades heterogéneas . . . . .	86
Antifragilidad en redes reales . . . . .	89
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>95</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

## PRÓLOGO

Los sistemas complejos nos recuerdan, una y otra vez, que el mundo está tejido por múltiples interacciones. Desde el aleteo sincronizado de las luciérnagas hasta el flujo de pasajeros en un sistema de metro, los fenómenos colectivos emergen de reglas locales simples y, sin embargo, dan lugar a comportamientos sorprendentes cuando se analizan en diferentes escalas. La ciencia de redes se ha convertido en un lenguaje poderoso para explorar estas realidades, y la investigación que dio origen a este libro constituye una valiosa contribución en esa dirección.

El eje central de este trabajo es el estudio de procesos dinámicos en redes bajo condiciones de daño acumulado. Más allá de la elegancia matemática, aquí encontramos preguntas con consecuencias muy prácticas: ¿cómo se transforma la capacidad de transporte de un sistema urbano cuando sus enlaces se deterioran? ¿Qué ocurre con la sincronización de osciladores cuando la red que los sostiene pierde fortaleza? Y, aún más intrigante, ¿puede el daño, en ciertos casos, convertirse en una oportunidad de mejora, dando paso a la antifragilidad? Estas páginas ofrecen respuestas a estas preguntas con rigor, pero también con la apertura necesaria para invitar a nuevas exploraciones.

Uno de los méritos de este libro es mostrar que la noción de daño no tiene por qué entenderse únicamente como pérdida o debilitamiento. A través de ejemplos que abarcan desde las redes de metro del mundo hasta modelos de Kuramoto y caminantes aleatorios, el lector encontrará cómo los sistemas pueden adaptarse, resistir e incluso beneficiarse de perturbaciones. En un momento histórico donde nuestras infraestructuras, sociedades y ecosistemas enfrentan presiones crecientes, estas ideas adquieren una relevancia con potencial de trascender lo académico.

Este texto no solo transmite resultados, sino también una forma de pensar: observar lo colectivo, detectar lo emergente, valorar la interacción entre estructura y dinámica. Para los estudiantes de posgrado y jóvenes investigadores, representa una invitación a sumergirse en un campo fértil, interdisciplinario y en plena expansión. Quienes se acerquen a estas páginas encontrarán no solo técnicas y modelos, sino también un estímulo para formular nuevas preguntas.

La ciencia de los sistemas complejos es, ante todo, una aventura intelectual. Este libro, nacido de una tesis doctoral rigurosa y creativa, abre caminos para comprender mejor la fragilidad y la antifragilidad de los sistemas que nos rodean. Ojalá

que inspire al lector a continuar la exploración y a descubrir, en las redes que nos sostienen, tanto su vulnerabilidad como su sorprendente capacidad de resiliencia.

Alejandro Pérez Riascos  
Departamento de Física  
Universidad Nacional de Colombia  
Bogotá, Colombia, 2025

## INTRODUCCIÓN

Los sistemas complejos son estructuras formadas por muchas partes interactuantes que dan lugar a propiedades emergentes y fenómenos colectivos que no se pueden explicar a partir del entendimiento de sus partes individuales, sino desde un enfoque del sistema como un todo [1–3]. Existen sistemas complejos de diferentes naturalezas como los organismos vivos, los sistemas sociales, los sistemas financieros, el clima, entre otros [4]. Por esto, la ciencia de los sistemas complejos es un campo interdisciplinario que abarca muchas áreas del conocimiento como la física, la biología o las ciencias sociales [5]. Dado las características de los sistemas complejos, una forma efectiva de representarlos es mediante redes [6].

Matemáticamente, las redes corresponden a grafos, que son elementos formados por un conjunto de nodos o vértices cuyas conexiones están representadas por un conjunto de líneas o aristas [7]. Las redes son relevantes en la comprensión de la naturaleza pues muchos de los sistemas que la componen, incluyendo los sistemas complejos, se pueden abordar desde este punto de vista. Por ejemplo, las cadenas alimenticias y los ecosistemas [8], el cerebro [9], las redes de amigos [10], entre otros [6]. También existen sistemas artificiales que constituyen redes y son útiles para la sociedad como las redes de aeropuertos o las redes que describen los sistemas metro [11]. El análisis de redes que representan sistemas reales ha permitido encontrar que muchas de las propiedades de estas estructuras son independientes de la naturaleza de sus componentes [6] y describir fenómenos como el de mundo pequeño, las redes libres de escala o las leyes de potencia de los sistemas complejos.

Las redes no sólo facilitan una representación estructural de los sistemas interconectados, sino que también son herramientas que permiten investigar el funcionamiento y las dinámicas que se generan en estos sistemas. El análisis de procesos dinámicos en redes es importante porque posibilita el entendimiento del papel que juega la estructura de un sistema en las dinámicas que se generan en él. Usando redes se pueden explorar procesos dinámicos tales como transporte, difusión, sincronización, propagación de enfermedades [12], redes de distribución de servicios básicos [13], enfermedades del cerebro [14], formación de opinión [15, 16], la generación de conocimiento e intercambio cultural [17] o diversos comportamientos humanos [18].

Por otro lado, uno de los fenómenos a los que se encuentran sometidos todos los

sistemas complejos naturales y artificiales es el daño, el cual puede ser producto de ataques, condiciones ambientales desfavorables o el desgaste natural de los elementos que componen los sistemas. En muchas áreas del conocimiento es de gran importancia la comprensión de los efectos del daño en los sistemas y sus funciones, por ejemplo, es crucial entender las afectaciones de sistemas de transporte debido a retrasos de vehículos, colapso en redes de internet debido a congestión de la red [19, 20], los efectos del daño en redes de neuronas [21, 22], incluso entender los mecanismos que existen detrás del proceso de envejecimiento y la esperanza de vida de los sistemas complejos [23–26]. En el contexto de los procesos dinámicos en redes, uno de los principales enfoques para abordar este problema es la remoción de nodos y líneas de las redes de manera aleatoria o planificada, lo cual describe muy bien escenarios de daño extremo de los sistemas [6, 20]. Sin embargo, hay situaciones en las cuales las redes pueden sufrir daños que no implican la pérdida completa de funcionalidad de los componentes afectados y pueden seguir trabajando, aunque no de manera óptima. Además, es necesario tener en cuenta que, en la mayoría de casos, los procesos de reparación de los sistemas no son perfectos, por lo que estos deben lidiar con la acumulación de daño residual a lo largo del tiempo [26]. Adicionalmente, muchos estudios sobre los efectos del daño en los sistemas complejos centran su atención en situaciones donde el daño constituye un elemento perjudicial que reduce su funcionalidad. Sin embargo, en la naturaleza también existen sistemas donde el daño puede desempeñar un papel beneficioso para su funcionamiento. Este fenómeno se denomina antifragilidad [27–30] y aunque aún no se comprenden muy bien los mecanismos que están detrás de esta propiedad, su estudio se puede abordar desde el campo de procesos dinámicos en redes [31].

Considerando lo expuesto anteriormente, en este libro se presentan los resultados de la exploración de los efectos del daño en procesos dinámicos que se llevan a cabo en redes. En el libro se usa un modelo que define el daño como la reducción del peso de las conexiones de la red y que se caracteriza por ser aleatorio y acumulado. Este modelo se propuso inicialmente en [26] donde se enmarca dentro del contexto de envejecimiento, entendido como la reducción de la funcionalidad de un sistema ante la acumulación de daño. En este libro se investigan los efectos del daño en los procesos dinámicos de caminatas aleatorias en redes y sincronización de redes de osciladores de Kuramoto [32–34]. Adicionalmente se describe la emergencia de antifragilidad en sistemas de transporte estocástico en redes con comunidades [31]. Todas las ideas desarrolladas en este libro abren camino a más investigaciones y al estudio de los efectos del daño y emergencia de antifragilidad en otro tipo de procesos y sistemas dinámicos.

Este libro se organiza de la siguiente manera: en el capítulo 1 se presentan algunos conceptos y métricas de teoría de grafos y ciencia de redes, esenciales para la descripción y comprensión de estas estructuras. De igual manera, se introducen algunos elementos de los procesos dinámicos de transporte estocástico y sincronización en redes, que proporcionan un marco teórico para su estudio. En el capítulo 2 se describe el modelo de daño acumulado en redes [26] y se presentan medidas



del efecto del daño en procesos de transporte en redes dirigidas, asociadas a la generación de asimetría y reducción de la funcionalidad de los sistemas [32]. En el capítulo 3 se explora la reducción de la funcionalidad de 33 redes de sistemas metro alrededor del mundo debido al daño y se presenta una clasificación de estas estructuras de acuerdo a su tolerancia al daño acumulado [33]. En el capítulo 4 se estudian los efectos del daño acumulado en los procesos de sincronización de redes de osciladores de Kuramoto, se proponen medidas para cuantificar estos efectos y se establece una clasificación de grafos de diferentes topologías de acuerdo a su resistencia al daño acumulado. En el capítulo 5 se investiga la emergencia de la antifragilidad en caminatas aleatorias en redes con comunidades y se establecen medidas que identifican las partes de una red que siendo dañadas generan una mejora en la funcionalidad del sistema. Finalmente se incluyen las conclusiones y se proponen posibles direcciones para trabajos futuros, basados en las ideas desarrolladas a lo largo de este libro.

Leidy Katherin Eraso Hernández  
CDMX, 2025

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## REDES Y PROCESOS DINÁMICOS

Las redes son herramientas que permiten describir los sistemas en términos de sus partes y la forma en que estas interactúan. Estos elementos constan de un conjunto de nodos o vértices conectados mediante líneas o aristas, donde los nodos representan las componentes del sistema y las líneas contienen la información sobre las interacciones entre componentes y la forma en que estas se hallan conectadas. Entre los ejemplos de sistemas que se pueden estudiar bajo este formalismo se encuentran las redes sociales, la World Wide Web, redes de genes, redes de metabolismo, sistemas de transporte, cadenas tróficas, redes de citaciones entre artículos, entre otras [6,35–37]. Mediante el estudio de redes es posible avanzar en la comprensión de las estructuras de los sistemas, determinar, por ejemplo, las comunidades que forman la red; el camino más corto entre cada par de los elementos de la red; las componentes más conectadas y su distribución en la red; jerarquías de nodos y comunidades entre otras [38]. Pero también es posible avanzar en el entendimiento de los fenómenos que ahí emergen y las dinámicas que ocurren en los sistemas.

Entonces, más allá de entender la estructura de las redes, también es interesante el estudio de los procesos dinámicos que se llevan a cabo en ellas. Durante los últimos años el estudio de diferentes procesos dinámicos en redes ha sido un área que ha despertado el interés en diferentes ramas del conocimiento. Se puede encontrar aplicaciones en biología, sociología, física, computación entre otras [6,37,39]. Preguntas relacionadas a la propagación de enfermedades, dinámicas de opinión, transporte, sincronización, control y robustez pueden ser estudiadas y analizadas desde la perspectiva de dinámica en redes [6,37,39]. Por lo tanto, el estudio de procesos dinámicos en redes es un área bastante amplia e importante y con muchas aplicaciones en el estudio de sistemas reales y los fenómenos que ahí emergen.

Este libro está dedicado al estudio de algunos procesos dinámicos en redes que además están sujetas al proceso de daño. Por este motivo este capítulo hace una introducción a algunos conceptos de teoría de redes que serán útiles para comprender los temas que se abordan, así como a la teoría de los procesos dinámicos estudiados correspondientes a transporte estocástico y sincronización. Adicionalmente este capítulo permite presentar la notación usada en todo el libro.

En términos matemáticos una red corresponde a un grafo. Un grafo está definido a partir de un conjunto  $G = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  compuesto de  $N$  vértices o nodos  $\mathcal{V}$  que están conectados mediante líneas o aristas definidas mediante los pares  $(i, j)$  que conforman el conjunto  $\mathcal{E}$  [6], la cantidad  $|\mathcal{E}|$  representa el número de aristas del grafo. La existencia de el par  $(i, j)$  indica la existencia de una conexión entre los vértices  $i$  y  $j$ , si el grafo es no dirigido  $\mathcal{E}$  constituye un conjunto de pares no ordenados, esto quiere decir que la línea  $(i, j)$  es equivalente a la línea  $(j, i)$ , un ejemplo de este tipo de interacciones son los enlaces químicos. Por otro lado, en un grafo dirigido el orden es relevante y  $\mathcal{E}$  es un conjunto de pares ordenados, gráficamente se usa una flecha para indicar la dirección de la conexión, un ejemplo son las redes formadas por las citas entre artículos.

Toda la conectividad de un grafo está descrita mediante su matriz de adyacencia  $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$  que corresponde a una matriz de dimensión  $N \times N$ . Sus elementos se definen como  $A_{ij} = 1$  si el par  $(i, j)$  pertenece a  $\mathcal{E}$ , esto es, si el nodo  $i$  se conecta al nodo  $j$  y  $A_{ij} = 0$  en caso contrario. Cuando no hay presencia de bucles en el grafo, es decir, que un nodo no se conecta consigo mismo  $A_{ii} = 0$ . En la figura 1 se presenta un grafo dirigido de  $N = 5$  nodos y la matriz de adyacencia respectiva, nótese las direcciones de las conexiones y su representación en  $\mathbf{A}$ .

Adicionalmente existen grafos donde las conexiones son heterogéneas debido a la importancia o intensidad que representan en el sistema. En este caso, es necesario asignar pesos a las aristas de los grafos, correspondientes a números reales. De esta manera, más allá de establecer la estructura de conexiones del grafo también es necesario definir una matriz de pesos  $\Omega$  que caracterice las conexiones del grafo. Los elementos de la matriz de pesos se definen tal que  $\Omega_{ij}$  establece el valor de la conexión del par  $(i, j)$  y en caso de no haber conexión  $\Omega_{ij} = 0$ , al igual que en la matriz de adyacencia si no hay bucles  $\Omega_{ii} = 0$ .

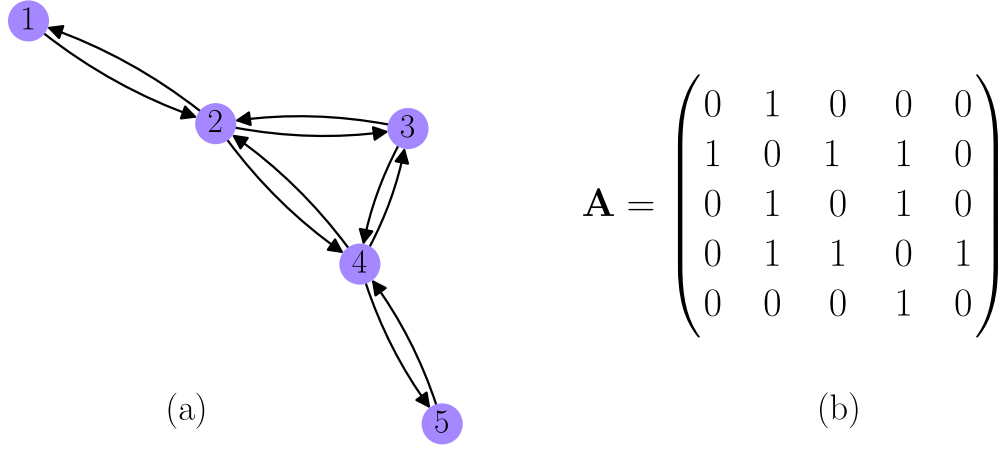
Existen diferentes cantidades y medidas que dan información acerca de la estructura de la red. A continuación se mencionan algunos de los elementos esenciales que hablan de la topología y conectividad de las redes.

#### Algunas medidas y cantidades básicas de las redes

En principio una medida local básica y que permite determinar qué tan conectado se encuentra el nodo  $i$  dentro del grafo es su *grado*  $k_i$  definido como el número de líneas que inciden en él. Si la red es no dirigida se tiene que:

$$k_i = \sum_{j=1}^N A_{ij}. \quad (1)$$

Para el caso de grafos dirigidos, se diferencia entre el grado de salida  $k_i^{(S)}$  que cuenta las aristas que parten del nodo  $i$  y el grado de entrada,  $k_i^{(E)}$ , el cual cuenta



**Figura 1:** (a) Grafo dirigido con  $N = 5$  nodos. (b) Matriz de adyacencia

el número de líneas que llegan a dicho nodo. Usando la matriz de adyacencia se tiene que:

$$k_i^{(E)} = \sum_{j=1}^N A_{ji}, \quad k_i^{(S)} = \sum_{j=1}^N A_{ij}. \quad (2)$$

En el caso de redes con pesos se define el *grado ponderado*:

$$\mathcal{S}_i = \sum_{j=1}^N \Omega_{ij}. \quad (3)$$

La *distribución de grado*  $P(k)$ , da información global de la forma en que se encuentra conectada la red.  $P(k)$  establece la probabilidad de encontrar un nodo en la red con grado  $k$ . A partir de esta distribución se pueden extraer el grado promedio:

$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \sum_k k P(k), \quad (4)$$

o los demás momentos correspondientes a:

$$\langle k^n \rangle = \sum_k k^n P(k). \quad (5)$$

Más adelante se verá la importancia del tipo de distribución de grado en la caracterización de las redes reales.

También existe otra medida denominada *coeficiente de agrupamiento* que mide la tendencia de los nodos en una red de agruparse entre sí. El coeficiente de agrupamiento  $C_3(i)$  del nodo  $i$  se calcula para grafos no dirigidos, como la fracción entre

el número de aristas que existen entre los vecinos del nodo  $i$ , incluyendo las que comparten con  $i$ ,  $e_i$ , y el número de aristas máximo que puede existir entre este grupo de nodos [6]:

$$C_3(i) = \frac{e_i}{k_i(k_i - 1)/2}. \quad (6)$$

Esta cantidad se interpreta como la fracción de triángulos que forma el nodo  $i$  con sus vecinos y el número de tripletes formados por el nodo  $i$  y otro par de vecinos pero con una arista faltante. Este coeficiente también se puede calcular en términos de la matriz de adyacencia del grafo como:

$$C_3(i) = \frac{\mathbf{A}_{ii}^3}{k_i(k_i - 1)}. \quad (7)$$

El coeficiente global de agrupación, también denotado como  $C_\Delta$  está definido como:

$$C_\Delta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_3(i). \quad (8)$$

De manera similar se puede definir un coeficiente de agrupamiento asociado al conteo de cuadrados que se forman en la red:

$$C_4(i) = \frac{\sum_{l=1}^{k_i} \sum_{m=l+1}^{k_i} q_i(l, m)}{\sum_{l=1}^{k_i} \sum_{m=l+1}^{k_i} [a_i(l, m) + q_i(l, m)]}, \quad (9)$$

donde  $l$  y  $m$  son vecinos de  $i$  y  $q_i(l, m)$  cuenta el número de vecinos comunes a  $l$  y  $m$  con los que forman un cuadrado. Y  $a_i(l, m) = (k_l - (1 + q_i(l, m) + \theta_{lm})) + (k_m - (1 + q_i(l, m) + \theta_{lm}))$ , donde  $\theta_{lm} = 1$  si  $l$  y  $m$  están conectados o 0 si no lo están [40]. Ahora el coeficiente de agrupamiento global de cuadrados es:

$$C_\square = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_4(i). \quad (10)$$

Otra medida importante y que permite determinar que tan cerca están un par de nodos de la red entre sí es el *camino más corto* entre ellos. En teoría de grafos se define un *camino*  $\mathcal{P}_{i_0, i_n}$  de longitud  $n$  entre los nodos  $i_0$  e  $i_n$  como una colección ordenada de  $n + 1$  vértices  $\mathcal{V}_{\mathcal{P}} = \{i_0, i_1, \dots, i_n\}$  y  $n$  líneas

$$\mathcal{E}_{\mathcal{P}} = \{(i_0, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{n-1}, i_n)\}$$

pertenecientes al grafo  $G$ , tal que conecta los nodos  $i_0$  e  $i_n$ .  $\mathcal{N}_{ij} = (\mathbf{A}^n)_{ij}$  representa el número de caminos de longitud  $n$  que conectan los nodos  $i$  y  $j$ . Si  $i_0 = i_n$  el camino es cerrado y constituye un *ciclo*. Por lo tanto el camino más corto denotado como  $\ell_{ij}$  corresponde al camino de menor longitud que conecta  $i, j$ . El número de aristas que conforman el camino más corto, se denomina *distancia*, si no existe un

camino que conecta al par de nodos se dice que su distancia es infinita. La longitud promedio del camino más corto de una red se define como:

$$\langle \ell \rangle = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{ij} \ell_{ij}. \quad (11)$$

Todas estas cantidades y medidas permiten describir muchos de los atributos que poseen las redes y las características sobresalientes de algunos de los modelos más típicos de las redes en la naturaleza.

#### MODELOS DE REDES ALEATORIAS

Se pueden encontrar redes de diversas características en la naturaleza y en las redes diseñadas por el hombre. Las redes pueden variar en cuanto a su función, su tamaño, la naturaleza de los elementos que las componen, así como la manera en cómo están conectadas sus partes, entre otras características. A pesar de estas diferencias, hay propiedades que se manifiestan en muchas de ellas más allá de su naturaleza o tamaño.

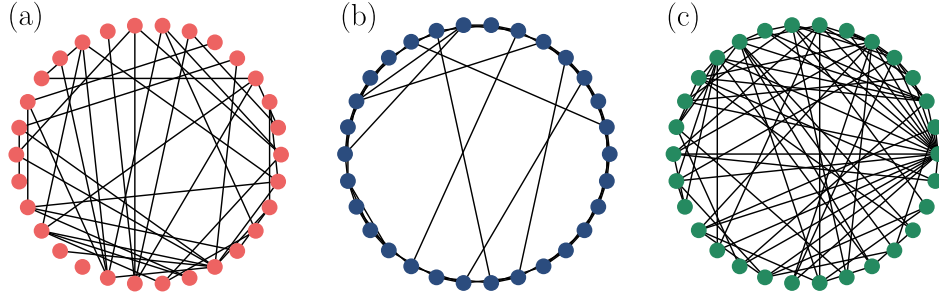
Una característica importante que se puede encontrar en las redes reales es la *propiedad de mundo pequeño*. El fenómeno de mundo pequeño se observó inicialmente en las redes sociales y plantea que 2 personas cualesquiera en el mundo están conectadas, en promedio, mediante una corta cadena de intermediarios [41]. En ciencia de redes la propiedad de mundo pequeño hace referencia a la característica de ciertas redes que presentan un coeficiente de agrupamiento global alto donde sus nodos presentan una distancia promedio baja [42]. En estos casos  $\langle \ell \rangle$  escala logarítmicamente con  $N$  [11]. Este rasgo está presente en las redes sociales [7], Internet [43], redes de neuronas, entre otras [11].

Otra propiedad que se observa en las redes reales es la alta variabilidad de los grados de los nodos. Hay redes tan heterogéneas en las que se puede encontrar con alta probabilidad nodos de bajo grado, pero también se encuentran con menor frecuencia nodos altamente conectados denominados hubs. Generalmente estas redes exhiben *distribuciones de grado de cola pesada* con altas fluctuaciones. En muchos casos estas distribuciones de grado, al menos asintóticamente, siguen leyes de potencia [44]:

$$P(k) \sim k^{-\gamma} \quad 2 < \gamma < 3 \quad (12)$$

donde el exponente  $\gamma$  usualmente toma valores entre 2 y 3. En estas redes algunos de sus momentos estadísticos divergen por lo que no es posible establecer una escala característica y por eso se denominan *redes libres de escala*. La red de aeropuertos o la red de internet presentan esta característica [45].

También es posible encontrar *redes regulares* las cuales son redes donde cada nodo posee el mismo número de conexiones, es decir, tienen el mismo grado  $k_i = k$ . Ejemplos de estas son las estructuras cristalinas o redes completamente conectadas donde el número de aristas que posee esta red si es no dirigida y de  $N$  nodos



**Figura 2:** Redes aleatorias con  $N = 30$  nodos. (a) Red de Erdős Rényi con  $p = 0.09$ . (b) Red tipo Watts-Strogatz con probabilidad  $p = 0.09$ . (c) Red tipo Barabási-Albert generada con  $m = 3$ .

es  $|\mathcal{E}| = N(N - 1)/2$ .

Por otro lado, la *aleatoriedad* es un elemento que también hace parte de las redes reales. Las redes aleatorias poseen algunos parámetros dados pero en cambio otros se generan con base en algún proceso estocástico, por ejemplo la manera en que se establecen las conexiones entre los nodos de la red. Como las redes de contagio de enfermedades [46]. La aleatoriedad es una característica importante en las redes y está asociada a la robustez, adaptabilidad y flexibilidad de estas estructuras [47–49]. Existen casos particulares de modelos de redes aleatorias que se han usado ampliamente en la literatura y se asemejan más a las redes reales adicionando las propiedades de mundo pequeño y de redes libres de escala. A continuación se mencionan sus características.

- **Redes de Erdős-Rényi.** El modelo canónico de red aleatoria son las redes de Erdős-Rényi [50], las cuales se pueden generar de acuerdo al siguiente procedimiento: inicialmente se toman  $N$  nodos sin ninguna conexión y posteriormente se toman todos los pares posibles de nodos y se asigna una conexión de acuerdo a una probabilidad  $0 \leq p \leq 1$ . Si  $p = 0$  los nodos permanecen aislados y si  $p = 1$  se obtiene una red completamente conectada. Este procedimiento genera una familia de grafos aleatorios  $G(N, p)$ , tal que el promedio el número de conexiones de las redes de ensambles es  $\langle |\mathcal{E}| \rangle = pN(N - 1)/2$ . Además estos grafos poseen una distribución de grado binomial para  $N$  finito pero se convierte en distribución de Poisson para  $N$  grande [7]. La figura 2(a) muestra una red de Erdős-Rényi de  $N = 30$  nodos y  $p = 0.09$ .
- **Redes de Watts-Strogatz.** Las redes de Watts-Strogatz [42] representan el modelo clásico de redes de mundo pequeño pero además estas redes se caracterizan por poseer coeficientes de agrupamiento grandes, i.e, son altamente transitivas pues es muy alta la probabilidad de que 2 vecinos de un

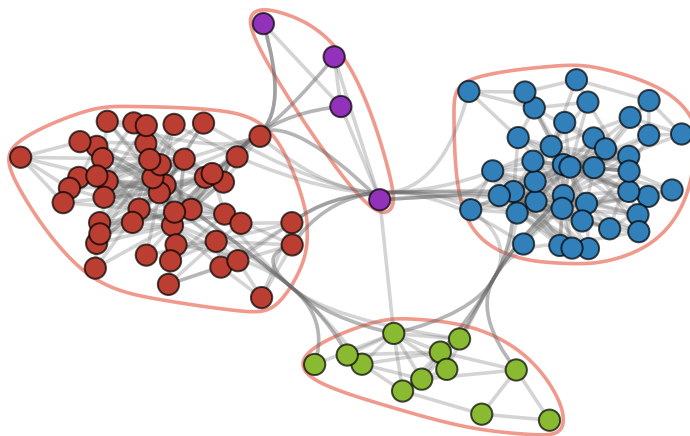


nodo sean también vecinos entre sí [7]. Este tipo de redes se pueden construir a partir del siguiente algoritmo: 1) Se inicia con un anillo de  $N$  nodos conectado a  $2K$  vecinos de manera simétrica. 2) Luego, por cada par de nodos conectados, se toma un extremo de la arista que los une, se desconecta del nodo correspondiente de acuerdo a una probabilidad  $p$  y se conecta a otro nodo, diferente del par, escogido aleatoriamente. Si  $p = 0$  la red corresponde al anillo del inicio, pero si  $p = 1$  se obtiene una red tipo Erdős-Rényi. Para valores intermedios se ha mostrado que presentan las propiedades de mundo pequeño y transitividad al mismo tiempo [42]. Este proceso genera conexiones de largo alcance o atajos dentro de la red, observados por ejemplo en redes sociales. En la figura 2(b) se muestra una red de Watts-Strogatz con probabilidad de reconexión  $p = 0.09$  y  $N = 30$  nodos.

- **Redes libres de escala de Barabási-Albert.** El modelo de Barabási-Albert [44] corresponde a un modelo de red libre de escala cuya generación se basa en el proceso de conexión preferencial. La conexión preferencial hace referencia a la situación donde en el crecimiento de una red, los nuevos nodos prefieren conectarse a los nodos de mayor grado [35], produciéndose entonces nodos con grados bastante heterogéneos. El algoritmo para construir una red de Barabási-Albert se basa en: 1) La red empieza con un conjunto pequeño de nodos  $m_0$  conectados, luego un nuevo nodo se agrega y se conecta a  $m < m_0$  de los nodos iniciales. 2) Los nuevos nodos se agregan siguiendo una distribución de probabilidad proporcional al grado de los nodos iniciales  $P_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}$ . Las redes obtenidas mediante este tipo de crecimiento presentan una distribución estacionaria de grado del tipo:  $P(k) \approx k^{-\gamma}$  donde  $\gamma = 3$ . En la figura 2(c) se muestra un ejemplo de red de Barabási-Albert con  $N = 30$  nodos y  $m = 3$ .

#### DETECCIÓN DE COMUNIDADES

Como ya se ha mencionado, las redes reales como por ejemplo las redes sociales o las redes biológicas forman estructuras heterogéneas que poseen diversas características. Una cualidad importante de las redes reales es la aparición de comunidades. Dentro de una red social formada por los amigos de una determinada persona, la red de artículos científicos que comparten citaciones, la red que forman las calles dentro de una ciudad, es posible encontrar grupos de nodos que comparten algún atributo particular o cumplen una función común y forman módulos caracterizados por compartir un número mayor de conexiones entre sí que con otros nodos de la red. En la figura 3 se muestra una red formada por libros sobre política de Estados Unidos vendidos por Amazon.com. Los nodos de la red representan los libros y las aristas representan el hecho de que eran comprados en conjunto por un mismo lector. La división en 4 comunidades de la red, que se ilustra en la figura, se hizo mediante el algoritmo *FindGraphCommunities* de Wolfram Mathematica que usa la maximización de la modularidad, definida como  $Q = \sum_{i=1}^{N_c} (e_{ii} - a_i^2)$ , donde



**Figura 3:** Red de libros sobre política de Estados Unidos. La red se muestra con 4 comunidades que se pueden asociar a la tendencia política de los libros [52]. Las comunidades grandes corresponden a tendencias liberales y conservadoras, y las tendencias centristas se recogen en las 2 comunidades más pequeñas. La detección de comunidades se hizo mediante el algoritmo implementado en Wolfram Mathematica.

$e_{ii}$  representa la fracción de aristas de la comunidad  $i$ , y  $a_i$  la fracción de extremos de aristas conectados a los nodos de la comunidad  $i$  [51]. De acuerdo con [52], la división representa grupos de libros con tendencias liberales y conservadoras, correspondientes a las comunidades más grandes y libros de tendencias centristas agrupados en las 2 comunidades más pequeñas.

Entender la formación de comunidades y saber identificarlas es muy importante en ciencia de redes. Esto permite comprender mejor la estructura de una red, su estructura jerárquica y las interacciones de los elementos que la componen, así como entender los procesos dinámicos que se generan en ellas [53]. Por ejemplo, el contagio de enfermedades o propagación de información se beneficia de la presencia de redes con estructura de comunidad [54, 55]. Uno de los desafíos en ciencia de redes es la detección de comunidades. Debido a las múltiples características que puede tener un grafo, en muchos de los casos se requieren algoritmos adecuados para su identificación. En varias situaciones las redes que mejor representan un sistema poseen conexiones dirigidas y con pesos [56, 57]. De igual manera existen redes multipartitas formadas por varios tipos de vértices, donde la identificación de las comunidades necesita de otras consideraciones [58, 59]. El problema se vuelve aún más desafiante cuando se tiene en cuenta que en numerosas ocasiones los nodos no pertenecen a una sola comunidad, sino que participan de más grupos. Por ejemplo, en una red social una misma persona pertenece a su grupo familiar, su grupo de amigos, al grupo de trabajo. En estos casos los algoritmos de detección

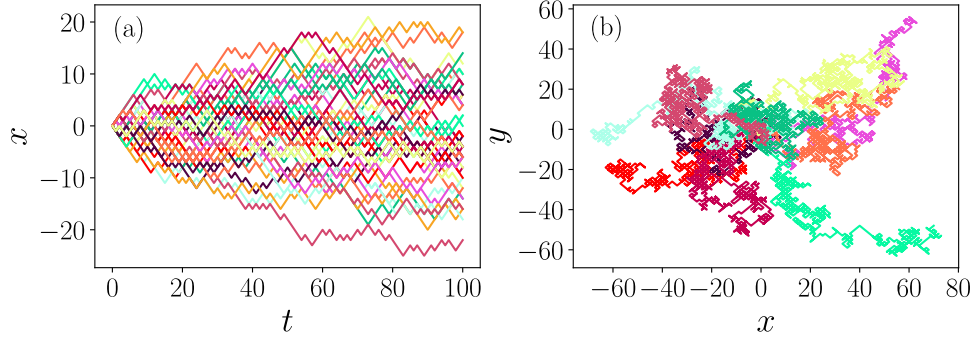
deben considerar que las comunidades no se encuentran completamente delimitadas, sino que están sobrepuestas [60,61].

Existen métodos para la detección de comunidades, que dependen del tipo de redes y sus características, de las definiciones de una comunidad e incluso, basados en una misma definición, existen diferentes métodos que minimizan u optimizan diferentes funciones o características de las comunidades [53,62]. Algunos de los principales métodos de detección de comunidades se basan en la maximización de una cantidad denominada *modularidad*  $Q$ . Esta cantidad indica que tan definidas son las comunidades en una red mediante la comparación de la fracción de aristas al interior de una comunidad con el valor esperado de la misma cantidad pero de un modelo nulo [63]. Entre los algoritmos típicos que se basan en esta idea se encuentran el algoritmo de Girvan y Neuman [63] y el algoritmo de Louvain [64]. También se encuentran algoritmos basados en técnicas espectrales que usan los autovalores y autovectores de la matriz Laplaciana de la red para establecer una clasificación de los nodos de la red en comunidades [65]. Este método de detección de comunidades es útil en cuanto se puede aplicar a redes con diferentes estructuras. Entre ellos se encuentran el método del corte mínimo [62], el método de mínimo radio de corte [66] o métodos de bisección espectral [65]. Por otro lado, existen técnicas basadas en modelos probabilísticos, aprendizaje de máquina, teoría de la información, entre otros [62]. Cada uno de los métodos que existen presentan sus ventajas y desventajas dependiendo del tipo de red que se vaya a analizar. Sin embargo, han sido de mucha utilidad en el entendimiento e identificación de comunidades en redes reales. A medida que avanzan las investigaciones surgen nuevos métodos de detección de comunidades que combinan diferentes enfoques y perspectivas para conseguir mejores resultados.

Una vez definidos algunos conceptos relevantes de teoría de grafos es importante introducir algunos conceptos de procesos dinámicos que se llevan a cabo en redes. En las siguientes secciones se describen dos procesos dinámicos importantes en los que se ha enfocado este libro. El primero de ellos está asociado al transporte y difusión en redes y corresponde a los caminantes aleatorios. El segundo es la sincronización.

#### CAMINANTES ALEATORIOS EN REDES

Una caminata aleatoria es un proceso dinámico que describe un movimiento de pasos aleatorios en un espacio dado [67]. Este proceso es útil en la descripción del movimiento aleatorio de elementos en la naturaleza, como el movimiento de una partícula de polen o bacterias en un fluido [68]. Como ejemplos de estos procesos en la figura 4 se presentan las realizaciones de una caminata aleatoria en una dimensión y de una caminata aleatoria en 2 dimensiones. En la figura 4(a) se presentan 50 realizaciones de una caminata aleatoria en una línea recta en función del número de pasos. Las caminatas se ejecutaron empleando 100 pasos y con igual probabilidad de avanzar a la izquierda o de avanzar a la derecha. En la figura 4(b)



**Figura 4:** Caminatas aleatorias. (a) 50 realizaciones de una caminata aleatoria en una dimensión en función del número de pasos, con igual probabilidad de moverse a la izquierda o a la derecha en cada paso. Se utilizaron 100 pasos en cada realización. (b) 10 realizaciones de una caminata aleatoria en 2 dimensiones. Se utilizaron 1000 pasos en cada realización, usando probabilidades iguales para moverse a la izquierda, a la derecha, hacia arriba o hacia abajo en cada paso.

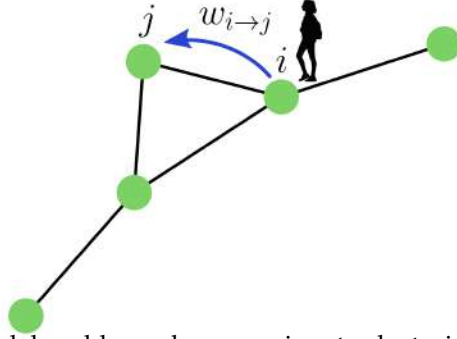
se muestran las trayectorias de 10 realizaciones de una caminata aleatoria en una cuadrícula. Cada realización se obtuvo para 1000 pasos del caminante aleatorio, en cada paso el caminante tiene la misma probabilidad de moverse hacia la derecha, hacia la izquierda, hacia arriba o hacia abajo. Las caminatas aleatorias se usan ampliamente para describir otros procesos dinámicos como la difusión [69], el movimiento de seres vivos [70], propagación de enfermedades [71] o para diseñar algoritmos de búsqueda en la web [72]. En la literatura se pueden encontrar diferentes tipos de caminatas aleatorias que incluyen los vuelos de Lévy [73], caminatas aleatorias sesgadas [74], caminatas cuánticas [75,76] entre otras.

Como tal, las caminatas aleatorias están entre los modelos más populares de procesos estocásticos y durante los últimos años se ha visto un gran interés en el estudio de estos procesos en redes [69,77].

Inicialmente se considera un proceso Markoviano, esto es un proceso sin memoria donde los resultados futuros no dependen del resultado pasado. Ahora, suponiendo que el caminante inicia su movimiento en el nodo  $i$  al tiempo  $t = 0$ , la probabilidad  $P_{ij}(t)$  de encontrar al caminante en el nodo  $j$  después de un tiempo  $t$  está descrita por la ecuación maestra en tiempo discreto [69]:

$$P_{ij}(t+1) = \sum_{l=1}^N P_{il}(t)w_{l \rightarrow j}, \quad (13)$$

donde  $w_{l \rightarrow j}$  corresponde al elemento  $l, j$  de la matriz de transición  $\mathbf{W}$  y representa la probabilidad de transición del caminante para ir del nodo  $l$  al nodo  $j$  en un solo paso. En el caso de un caminante simple, donde el agente se mueve a sus primeros vecinos con igual probabilidad, la matriz de transición del caminante queda



**Figura 5:** Ilustración del problema de un caminante aleatorio que se mueve en una red.

descrita en términos de la matriz de adyacencia de la red donde el caminante se mueve, de tal manera que las probabilidades de transición se calculan como [78]:

$$w_{i \rightarrow j} = \frac{A_{ij}}{k_i}. \quad (14)$$

Y cumplen con la condición:

$$\sum_{j=1}^N w_{i \rightarrow j} = 1. \quad (15)$$

De acuerdo a la ecuación (13)  $P_{ij}(1) = w_{i \rightarrow j}$ . Por otra parte, la matriz de ocupación  $\mathbf{P}(t)$  al tiempo  $t$  se puede expresar como:

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{W}^t = \sum_{m=1}^N \lambda_m^t |\phi_m\rangle \langle \bar{\phi}_m|, \quad (16)$$

donde se ha empleado la notación de Dirac y  $|\phi_m\rangle$  y  $\langle \bar{\phi}_m|$  corresponden a los autovalores derechos e izquierdos de  $\mathbf{W}$  asociados al autovalor  $\lambda_m$  [78]. Dado que  $\mathbf{W}$  es una matriz estocástica,  $\lambda_1 = 1$  y el autovector derecho asociado  $|\phi_1\rangle$  es constante y corresponde al estado estacionario del proceso dinámico. En la figura 5 se ilustra la representación de un caminante aleatorio que se mueve en una red no dirigida con la probabilidad de transición  $w_{i \rightarrow j}$  para ir del nodo  $i$  al nodo  $j$ .

Dentro de los problemas de caminantes aleatorios una pregunta importante que surge es sobre el tiempo promedio que le toma al caminante iniciar en un nodo  $i$  y llegar por primera vez al nodo  $j$ . Este tiempo se conoce como tiempo medio de primer arribo y se calcula como [78]:

$$\langle \mathcal{T}_{ij} \rangle = \frac{1}{P_j^{(\infty)}} \left[ \delta_{ij} + \sum_{\ell=2}^N \frac{\langle j | \phi_\ell \rangle \langle \bar{\phi}_\ell | j \rangle - \langle i | \phi_\ell \rangle \langle \bar{\phi}_\ell | j \rangle}{1 - \lambda_\ell} \right], \quad (17)$$

donde  $P_j^{(\infty)} = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t)$  representa la distribución estacionaria de la ecuación maestra (13) y viene dada por:

$$P_j^{(\infty)} = \langle i|\phi_1\rangle\langle\bar{\phi}_1|j\rangle, \quad (18)$$

los elementos  $\langle i|\phi_1\rangle$  son constantes e independientes de  $i$ . Si el punto de partida y el de llegada coinciden  $j = i$  se obtiene el tiempo medio de retorno  $\langle\mathcal{T}_{ii}\rangle = \frac{1}{\langle i|\phi_1\rangle\langle\bar{\phi}_1|i\rangle}$  [78]. El cual coincide con el inverso de la distribución estacionaria del proceso, este resultado es conocido en la literatura como teorema de Kac.

## SINCRONIZACIÓN EN REDES

La sincronización es un proceso importante dentro de la naturaleza que se ha observado en animales [79], humanos [18], redes cerebrales [80], incluso en la actividad cerebral interpersonal [81], entre muchos otros sistemas. La presencia de la sincronización en sistemas tan diversos ha despertado el interés en investigadores de muchas áreas del conocimiento [82]. En principio se considera que un sistema de varios cuerpos interactuantes está sincronizado cuando los elementos del sistema adquieren un comportamiento coherente respecto a alguna variable dinámica. Por ejemplo, cuando los asistentes de un evento empiezan a aplaudir al unísono o cuando un grupo de luciérnagas empiezan a emitir destellos coordinados [83]. Los procesos de sincronización son importantes en actividades grupales de animales como insectos, pájaros o peces, pues la coordinación entre ellos les permite buscar alimento o defenderse de amenazas externas [84]. También, estos procesos de coordinación son responsables de funciones vitales como el buen funcionamiento del cerebro o el corazón [85–88].

Uno de los primeros modelos para entender la sincronización colectiva fue propuesto por Arthur Winfree en 1967 [89]. Él consideró un sistema de osciladores acoplados globalmente, cuyo estado se describe mediante su fase. Una simplificación del modelo de Winfree es el modelo de Kuramoto [90]. En el modelo de Kuramoto se considera un grupo de  $N$  osciladores de fase acoplados sinusoidalmente tal que su dinámica se puede expresar mediante el siguiente sistema de ecuaciones no lineales [83]:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin[\theta_j(t) - \theta_i(t)], \quad (19)$$

donde  $\theta_i$  representa la fase del oscilador  $i$ ,  $\omega_i$  corresponde a su frecuencia natural y obedece una distribución de probabilidad  $g(\omega)$ , generalmente centrada alrededor de un valor medio y  $K$  la constante de acoplamiento del sistema. Aunque el sistema es no lineal, este se puede resolver para el caso  $N \rightarrow \infty$  [91].

En este modelo, Kuramoto definió el parámetro complejo de orden:

$$r(t)e^{i\Psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (20)$$

el cual caracteriza la sincronización de todo el sistema. El valor de  $\Psi(t)$  representa la fase media del sistema. En particular,  $r(t)$  mide la coherencia de fase de los osciladores, cuando  $r \approx 0$  las fases tienden a estar distribuidas de manera aleatoria, es decir, el sistema no está sincronizado. Sin embargo, cuando  $r = 1$  los osciladores poseen aproximadamente la misma fase, lo que representa que están sincronizados.

En el modelo de Kuramoto tradicional presentado en el sistema de ecuaciones (19) cada oscilador interactúa con todos los demás osciladores del sistema. Sin embargo, se puede adaptar el modelo para incluir una patrón de conectividad diferente, de tal manera que las interacciones de los osciladores están descritas mediante una red. Bajo esta nueva perspectiva se pueden analizar los efectos de la topología de la red en el proceso dinámico de sincronización. Para ajustar el modelo de Kuramoto a redes es necesario incluir la conectividad de la red [83,92]:

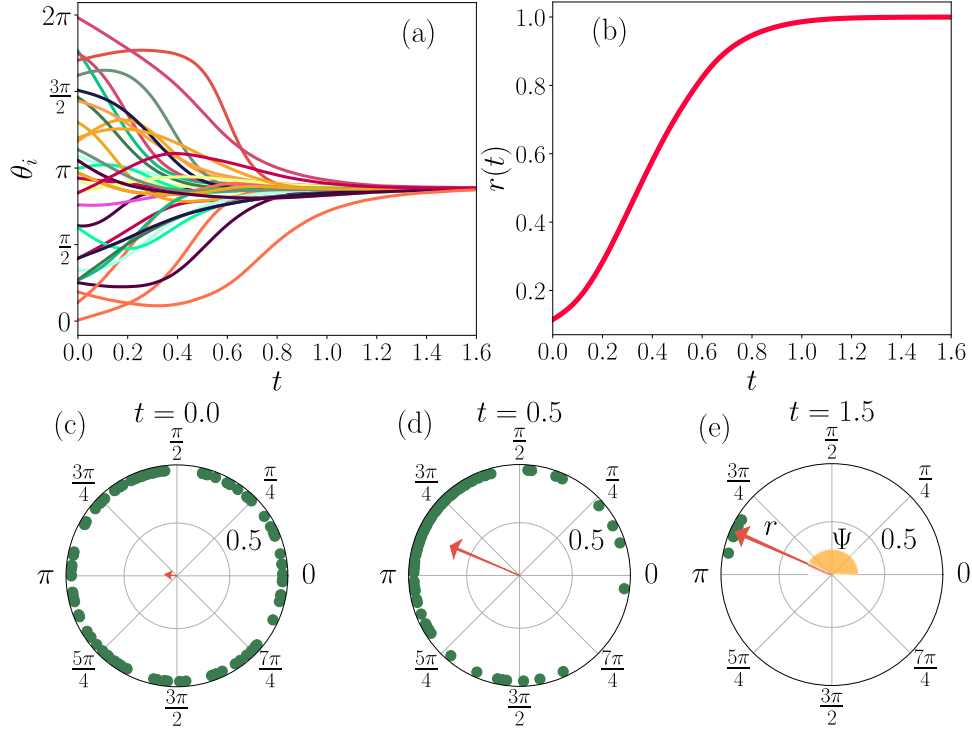
$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \sum_{j=1}^N \sigma_{ij} A_{ij} \sin[\theta_j(t) - \theta_i(t)], \quad (21)$$

donde  $\sigma_{ij}$  representa la fuerza de acoplamiento entre los osciladores  $i$  y  $j$  y  $A_{ij}$  son los elementos de la matriz de adyacencia de la red. La forma de definir  $\sigma_{ij}$  debe garantizar que no haya divergencia en el límite termodinámico ( $N \rightarrow \infty$ ) y también conservar independencia entre el efecto de la topología de la red y las interacciones dinámicas de la misma. En general se toma como  $\sigma_{ij} = k/k_{max} = K$  [83], de tal manera que se obtiene:

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + K \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin[\theta_j(t) - \theta_i(t)]. \quad (22)$$

En este sistema se ha observado una transición de fase a medida que se modifica  $K$ , por debajo de un valor crítico, la red no se sincroniza. Sin embargo, por encima de este hace su paso a un estado de coherencia [6,83].

En la figura 6 se presentan los resultados de la sincronización de  $N = 100$  osciladores de Kuramoto acoplados mediante una red de Barabási-Albert. Las frecuencias naturales  $\omega_i$  se generaron a partir de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 0.1)$  y la constante de acoplamiento se fijó en  $K = 1$ . Adicionalmente las fases iniciales se obtuvieron a partir de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . En la figura 6(a) se muestra la evolución de las fases de 32 de los osciladores de Kuramoto. Inicialmente los osciladores se mueven fuera de sincronización pero a medida que avanza el tiempo se observa su evolución a un estado sincronizado,



**Figura 6:** Sincronización de 100 osciladores de Kuramoto en una red de Barabási-Albert. (a) Evolución temporal de las fases  $\theta_i$  de 32 de los 100 osciladores. (b) Evolución temporal del parámetro de orden  $r(t)$  durante la sincronización. Representación de las fases de los osciladores en el plano polar al tiempo (c)  $t = 0.0$ , (d)  $t = 0.5$  y (e)  $t = 1.5$ . El vector rojo representa el parámetro de orden complejo de la ecuación (20), donde la longitud corresponde a  $r(t)$  y el ángulo que forma con la horizontal es la fase promedio  $\Psi(t)$ . Las frecuencias naturales  $\omega_i$  se obtuvieron a partir de una distribución uniforme en  $[0, 0.1)$  y las fases iniciales se generaron a partir de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

donde todos alcanzan valores de fase muy cercanos entre sí. En la figura 6(b) se muestra el comportamiento de el parámetro de orden  $r(t)$  en función del tiempo. En la gráfica se observa que, para valores del  $t$  cercanos a 0,  $r$  toma valores entre 0.1 y 0.2, pero a medida que el sistema evoluciona y empieza a sincronizarse  $r \rightarrow 1$ . En las figuras 6(c-e) se presentan tres instancias del proceso de sincronización a  $t = 0.0, 0.5$  y  $1.5$ . En los tres casos se representaron las fases de los 100 osciladores en el plano polar. El vector rojo representa el parámetro de orden complejo de la ecuación (20). La longitud representa su módulo  $r(t)$  y el ángulo que forma con la horizontal, la fase promedio  $\Psi(t)$  de todos los osciladores en dicho instante de tiempo, tal como se indica en la figura 6(e). Estas gráficas ilustran muy



bien el comportamiento del parámetro de orden cuando el sistema de osciladores de Kuramoto evoluciona hacia la sincronización.

En este capítulo se introdujo el concepto de redes y se expuso su utilidad para representar sistemas reales y explicar la emergencia de muchas de sus propiedades. También se introdujeron algunas cantidades y medidas que permiten caracterizar las redes. Se explicaron algunas de las propiedades de las redes del mundo real como la propiedad de mundo pequeño y las leyes de potencia que siguen las distribuciones de grado de las redes reales, al igual que la presencia de estructuras de comunidad. Se mencionaron las características de las redes de Erdős-Rényi, Watts-Strogatz y Barabási-Albert, 3 modelos típicos en ciencia de redes. Finalmente se expusieron algunos conceptos importantes de los procesos dinámicos de transporte y sincronización en redes.

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## TRANSPORTE EN REDES CON DAÑO ACUMULADO

Todos los sistemas en la naturaleza están expuestos a condiciones externas que les pueden ocasionar daño. Luego de recibir daño, los sistemas tienden a activar sus mecanismos de reparación que les permiten arreglar las posibles averías y seguir funcionando. Sin embargo, existen diversos factores que influyen en la capacidad de reparación de las partes averiadas por lo que muchas veces la reparación no es perfecta, entonces los sistemas tienden a acumular daños residuales con el tiempo [93].

Una manera de entender esta acumulación de daño es la siguiente: usualmente, los sistemas con daño tienden a repararse intentando no detener su funcionamiento, por lo que cuando el daño es demasiado severo y compromete la ejecución de las funciones, los sistemas deben repararse lo más pronto posible. Esta situación conlleva a reparaciones incompletas o incorrectas, pero que al menos garantizan que los sistemas sigan cumpliendo con su tarea [93]. Entonces, en esta búsqueda de optimización entre repararse completamente y mantener la funcionalidad, los sistemas van acumulando daño en el tiempo que a largo plazo, terminará por comprometer definitivamente su buen desempeño [93]. Un ejemplo de esta acumulación de daño, es el desgaste de una carretera debido a la fricción con las llantas de los vehículos que se mueven a través de ella. Otro ejemplo se encuentra en la generación de manchas y otras afectaciones en la piel por exposición continua al sol [94]. En general, las consecuencias de la acumulación de daño en un sistema se ven como la disminución de sus funciones o incluso el colapso total del sistema.

La acumulación de daño también se ha asociado al proceso de envejecimiento de los sistemas [23, 95]. El envejecimiento es un proceso común en la naturaleza, no sólo los seres vivos lo experimentan, si no también otros sistemas como los relacionados a infraestructura, civilizaciones o compañías [96]. Este fenómeno es de tal importancia que existe una variada literatura dedicada a su estudio y a la propuesta de modelos que lo expliquen, especialmente en sistemas biológicos [23, 93]. El envejecimiento ha sido investigado en el contexto de la ciencia de sistemas complejos [25, 95]. Bajo esta perspectiva, el envejecimiento se considera como un proceso dinámico, producto de la acumulación de daño provocada por mecanismos de reparación imperfectos. Esta acumulación de daño ocasiona la disminución paulatina de la funcionalidad de los sistemas, y en algunos casos, como el de los sistemas biológicos, puede desembocar en su colapso o muerte [26, 32].

Dada la importancia del proceso de acumulación de daño en los sistemas y su conexión con el fenómeno del envejecimiento, este proceso se ha estudiado en el contexto de ciencia de redes [26, 32]. Inicialmente, se propuso para analizar las consecuencias del daño en el movimiento de caminantes aleatorios en redes y las afectaciones a la capacidad de transporte de dichas estructuras. En este capítulo se describe la implementación de este modelo de generación de daño acumulado y envejecimiento en redes. Así como el análisis de los efectos de la acumulación de daño en la capacidad de transporte en redes de diferentes topologías. Este capítulo está basado en el artículo de investigación [32].

#### GENERACIÓN DE DAÑO ACUMULADO EN UNA RED

Las redes permiten modelar sistemas compuestos de muchas partes donde las interacciones entre los elementos se establecen mediante las líneas o aristas que conectan los nodos. En redes reales, estas aristas pueden representar las vías que conectan 2 estaciones de metro, las líneas de transmisión que conectan las estaciones eléctricas, los lazos de amistad entre un par de personas, entre otros ejemplos [6]. Considerando este panorama, es válido pensar que una manera de representar el daño que sufre una red sea a través de la reducción del valor del peso de sus aristas [26]. Dependiendo del tipo de red y su función, la reducción del peso de las líneas puede significar la disminución en la capacidad de transporte a través de esa línea, si el sistema se dedica al transporte; la disminución del acoplamiento entre pares de nodos conectados en un proceso asociado a sincronización o búsqueda de consenso, entre otros [26]. La forma como se genera el daño y se construye la matriz de pesos de la red dañada se describen a continuación.

#### Daño en la red y matriz de transición

El algoritmo inicia con una red conectada de  $N$  nodos cuya topología está representada a través de la matriz de adyacencia  $\mathbf{A}$  y el estado de daño de la red se establece mediante la matriz de pesos  $\Omega$ , tal que  $\Omega_{ij} \geq 0$  y  $\Omega_{ii} = 0$ . En un principio se considera que todas las conexiones de la red tienen el mismo peso y son recíprocas, por lo tanto la red también es no dirigida. Este estado inicial representa un sistema en perfectas condiciones que puede desempeñar su función de manera óptima.

Luego, mientras un tiempo global  $T$  transcurre, algunas líneas de la red son escogidas aleatoriamente y se dañan disminuyendo su peso. Este proceso hace que  $\Omega(T)$  cambie con el daño generado [26]. El tiempo global  $T$  es también un contador del daño total que recibe la red. Es importante señalar que los incrementos del tiempo  $T$  son mayores en comparación a los tiempos característicos de otros procesos dinámicos que suceden en la red, como es el caso de caminatas aleatorias o sincronización. El daño que recibe la línea  $(i, j)$  de la red está cuantificado en la variable entera y aleatoria  $h_{ij}(T)$ . Para  $T = 0$ ,  $h_{ij}(0) = 1$ , de tal forma que

$h_{ij}(T) - 1$  corresponde al número de golpes que ha recibido la línea  $(i, j)$  al tiempo  $T$ . La probabilidad  $\pi_{ij}(T)$  de que la línea  $(i, j)$  sea dañada depende de la cantidad de daño que sufrió con anterioridad [26]:

$$\pi_{ij}(T) = \frac{h_{ij}(T-1)}{\sum_{(l,m) \in \mathcal{E}} h_{lm}(T-1)}. \quad (1)$$

De tal manera que el proceso de daño es preferencial, las líneas que han recibido daño antes tienen más probabilidades de recibir daño en el futuro. Ahora en términos de  $h_{ij}(T)$  la matriz de pesos es definida como [26]:

$$\Omega_{ij}(T) = (h_{ij}(T))^{-\alpha} A_{ij}, \quad (2)$$

donde  $\alpha \geq 0$  es un parámetro que cuantifica la respuesta del sistema ante el daño. Si  $\alpha = 0$  se trata de un sistema que puede repararse perfectamente, de tal manera que no acumula daño. Por otro lado, si  $\alpha \rightarrow \infty$ , el sistema es incapaz de reponerse y el daño genera la remoción de la conexión. En lo que sigue, se usan valores de  $\alpha$  finitos donde el sistema se repara, aunque de manera imperfecta, y va acumulando daño con el tiempo.

En la figura 1 se ilustra el proceso de generación de daño acumulado en una red de  $N = 10$  nodos, al tiempo  $T = 1, 2 \dots 100$ . Se presentan 2 realizaciones de las simulaciones Monte Carlo del proceso y se presentan los resultados a  $T = 0, 25, 50$  y  $100$ . En color se muestra el valor de  $h_{ij}(T)$  y el grosor de las líneas representa el peso  $\Omega_{ij}(T)$  de las conexiones. Debido al mecanismo preferencial del modelo, se observa que a  $T = 100$  se pueden encontrar líneas muy afectadas por el daño pero también otras que no han recibido daño alguno. En las simulaciones se usó el parámetro de daño  $\alpha = 2$ .

#### CAMINATAS ALEATORIAS EN REDES CON DAÑO

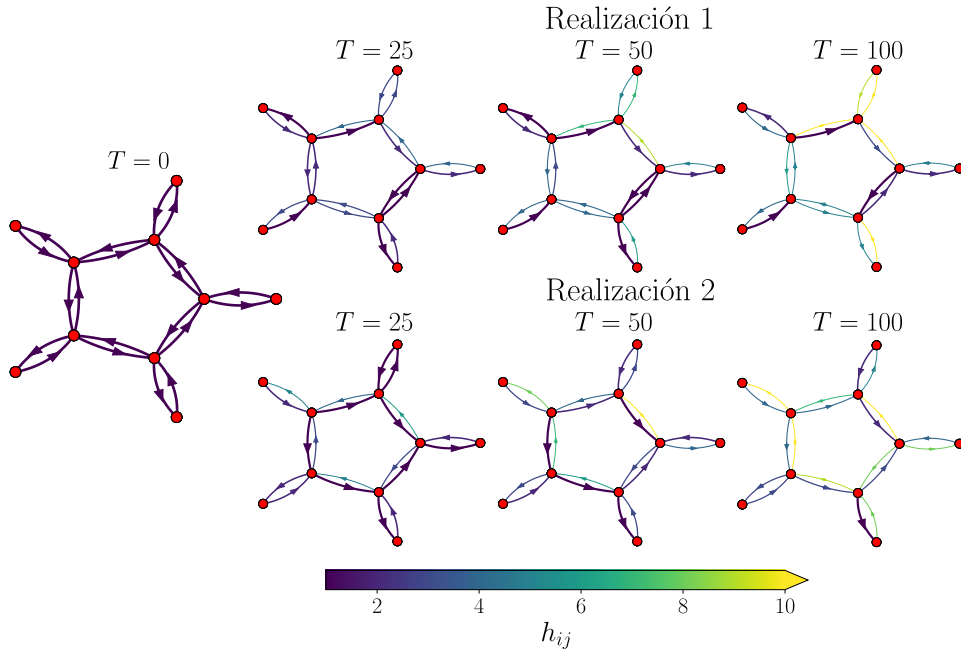
El modelo de daño acumulado y envejecimiento descrito en la sección anterior ha sido investigado en el contexto de procesos de transporte usando caminantes aleatorios. En estos sistemas, los caminantes se mueven en la red con tiempos característicos más pequeños que aquellos asociados a la generación de daño. En otras palabras, la escala de tiempo en la que suceden las caminatas aleatorias es pequeña en comparación con la escala de tiempo donde se genera el daño. La matriz de transición  $\mathbf{W}(T)$  que caracteriza estos caminantes aleatorios se define en términos de la matriz de pesos definida por los elementos de la expresión (2), así que los elementos de  $\mathbf{W}(T)$  son [26]:

$$w_{i \rightarrow j}(T) = \frac{\Omega_{ij}(T)}{\sum_{l=1}^N \Omega_{il}(T)}. \quad (3)$$

Una de las consecuencias de la generación de daño en una red dirigida es el incremento de la asimetría del proceso de transporte [32]. De manera directa, se observa

que los autovalores de la matriz de transición de una red con daño toman valores complejos.

En la figura 2 se presentan 6 tipos diferentes de redes con  $N = 50$  nodos que se utilizan en este capítulo para ilustrar los procesos de generación de daño y transporte. Por otra parte, en la figura 3 se presenta la evolución de los autovalores de la matriz de transición  $W(T)$  para 2 realizaciones del proceso de generación de daño acumulado en las redes de la figura 2. Los autovalores se calcularon para valores de daño  $T = 0, 1, \dots, 100000$  y un parámetro de daño de  $\alpha = 1$ . En la figura 3(a) se presentan los resultados obtenidos para la rueda que consiste de un anillo de  $N - 1$  nodos conectados a un nodo adicional. En la figura 3(b) se presentan los autovalores obtenidos para el grafo de barbell compuesto, en el caso del ejemplo, por 2 subgrafos completos de 20 nodos, conectados mediante un grafo lineal de 10 nodos. En la figura 3(c) se muestran los resultados para el grafo de Watts-Strogatz



**Figura 1:** Simulación Monte Carlo de el algoritmo generador de daño. El daño se genera a  $T = 1, 2, \dots, 100$  y se muestran 2 realizaciones del proceso. En  $T = 0$  se inicia con una red con conexiones simétricas, a medida que avanza  $T$  los impactos de daño en la red se distribuyen de manera preferencial, siendo las líneas que ya sufrieron daño con anterioridad las que más probabilidad tienen de recibir daño en el futuro. La barra de color indica el valor de la variable  $h_{ij}$  y el grosor de las líneas indica la reducción del peso  $\Omega_{ij}(T)$  de la conexión. Las simulaciones se hicieron para  $\alpha = 2$ . Imagen modificada de [32].

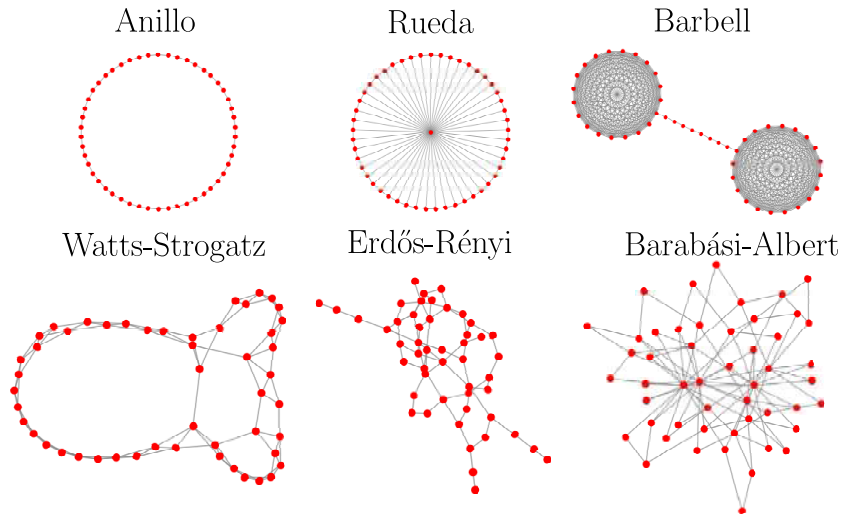
construida con una probabilidad de reconexión  $p = 0.05$  y en la figura 3(d) se presentan los resultados para una red de Barabási-Albert. El eje vertical representa la parte imaginaria de los autovalores  $\lambda(T)$  de  $\mathbf{W}(T)$  y el eje horizontal representa la parte real. El nivel de daño de la red se encuentra codificado de acuerdo a la barra de color y los círculos blancos corresponden a los autovalores  $\lambda(0)$  de la red sin daño.

#### Generación de asimetría en el proceso de transporte en redes con daño

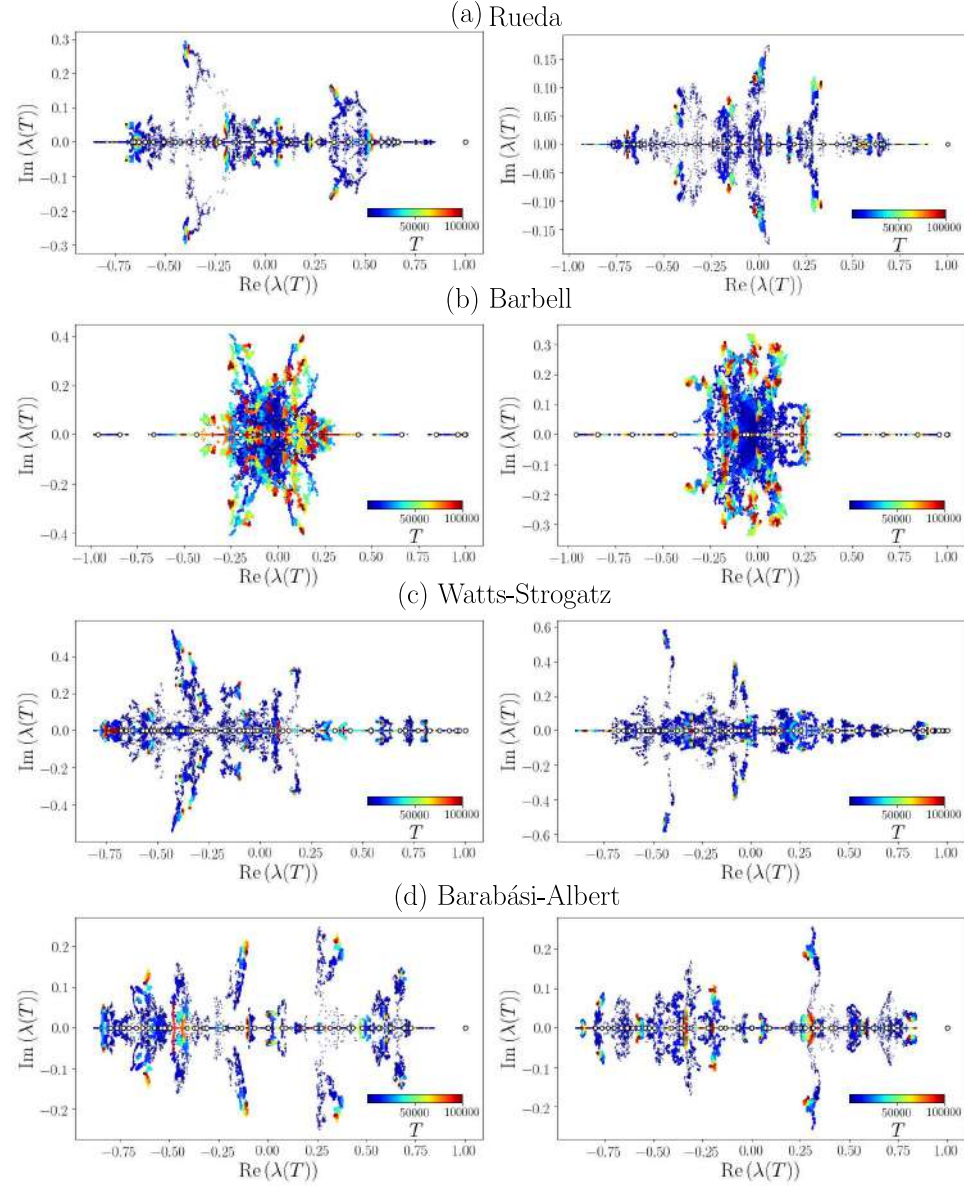
Para evaluar la cantidad de asimetría generada en los procesos de transporte en redes dañadas se proponen 2 medidas de asimetría locales y 2 medidas de asimetría globales. La primera medida de asimetría local, denominada  $S_W(T)$ , se inspira en la medida planteada en [97] donde los autores la utilizan para determinar la asimetría en la matriz de conectividad de redes neuronales. En el caso del proceso de transporte estocástico con daño, esta cantidad toma la forma:

$$S_W(T) = 1 - \frac{2}{N(N-1) - 2M} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{|w_{i \rightarrow j}(T) - w_{j \rightarrow i}(T)|}{w_{i \rightarrow j}(T) + w_{j \rightarrow i}(T)}. \quad (4)$$

La medida compara directamente las entradas  $w_{i \rightarrow j}(T)$  y  $w_{j \rightarrow i}(T)$  de la matriz de transición  $\mathbf{W}(T)$ . La cantidad  $M$  representa el número de veces que  $w_{i \rightarrow j}(T)$  y  $w_{j \rightarrow i}(T)$  son cero simultáneamente.



**Figura 2:** Redes de  $N = 50$  nodos y diferentes topologías. Imagen modificada de [32]



**Figura 3:** Evolución de los autovalores  $\lambda(T)$  de  $\mathbf{W}(T)$  con el daño en redes de  $N = 50$  nodos. Los resultados se muestran para (a) una rueda, (b) un grafo barbell, (c) una red de Watts-Strogatz, y (d) una red de Barabási-Albert. Los paneles corresponden a 2 realizaciones del proceso Monte Carlo de generación de daño acumulado. Los ejes representan la parte imaginaria y real de los autovalores  $\lambda(T)$ , mientras que el daño en la red se encuentra codificado de acuerdo a la barra de color. Los círculos blancos representan  $\lambda(0)$  de la red sin daño. Imagen tomada de [32]



La segunda medida local, denotada como  $\mathcal{S}_{\text{Entropia}}(T)$ , se basa en la comparación de las entropías del proceso de transporte definidas de acuerdo a [98]:

$$\mathcal{H}(T) = - \sum_{i,j=1}^N P_i^{(\infty)}(T) w_{i \rightarrow j}(T) \log [w_{i \rightarrow j}(T)]. \quad (5)$$

A partir de esta cantidad, se define

$$\mathcal{S}_{\text{Entropia}}(T) = \frac{\mathcal{H}(T)}{\mathcal{H}(0)}. \quad (6)$$

Por otro lado, con respecto a las medidas globales, la primera medida de asimetría global, denotada como  $\mathcal{S}_{\text{MFPT}}(T)$  donde las siglas MFPT corresponden a la expresión en inglés *Mean First Passage Time* (tiempo medio de primer arribo), está también basada en la medida de la expresión (4). En este caso  $\mathcal{S}_{\text{MFPT}}(T)$  permite comparar los tiempos medios de primer paso de un caminante aleatorio  $\langle \mathcal{T}_{ij}(T) \rangle$  y  $\langle \mathcal{T}_{ji}(T) \rangle$ , evaluados de acuerdo a la expresión 17, usando los autovalores y autovectores de  $\mathbf{W}(T)$ :

$$\mathcal{S}_{\text{MFPT}}(T) = 1 - \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{|\langle \mathcal{T}_{ij}(T) \rangle - \langle \mathcal{T}_{ji}(T) \rangle|}{\langle \mathcal{T}_{ij}(T) \rangle + \langle \mathcal{T}_{ji}(T) \rangle}. \quad (7)$$

Finalmente, la segunda medida de asimetría global  $\mathcal{S}_\gamma$  usa la información global contenida en el Laplaciano fraccional  $\mathbf{L}^\gamma(T)$ , con  $0 < \gamma \leq 1$  [99–102]. El Laplaciano fraccional es un operador que permite modelar procesos dinámicos globales, considerando correlaciones de largo alcance en una red. Dado su carácter no local, el Laplaciano fraccional se puede interpretar como el análogo en redes de los operadores fraccionales definidos en el continuo [99]. Para dar una definición de este operador, se considera inicialmente el Laplaciano estándar  $\mathbf{L}(T)$  de la red con daño con elementos

$$L_{ij}(T) = k_i^{(S)}(T) \delta_{ij} - \Omega_{ij}(T), \quad (8)$$

donde  $k_i^{(S)} = \sum_{\ell=1}^N \Omega_{i\ell}(T)$ . El Laplaciano fraccionario se define como:

$$\mathbf{L}^\gamma(T) = \sum_{m=1}^N \mu_m^\gamma(T) |\Psi_m(T)\rangle \langle \bar{\Psi}_m(T)|, \quad (9)$$

donde  $|\Psi_m(T)\rangle$  y  $\langle \bar{\Psi}_m(T)|$  corresponden, respectivamente, a los autovectores derechos e izquierdos de  $\mathbf{L}(T)$  asociados a los autovalores  $\mu_m(T)$ . Es importante resaltar que aunque los autovalores  $\mu_m(T)$  toman valores complejos debido a la asimetría que genera el daño en la red, los elementos de  $\mathbf{L}^\gamma(T)$  son reales [99–102]. El Laplaciano fraccionario cumple con las siguientes características:

- El grado fraccionario de salida se define según

$$k_i^{(\gamma)} \equiv (\mathbf{L}^\gamma)_{ii} = - \sum_{m \neq i} (\mathbf{L}^\gamma)_{im}. \quad (10)$$

- Los elementos diagonales de  $(\mathbf{L}^\gamma)_{ii}$  son valores reales positivos; esto es  $k_i^{(\gamma)} > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, N$ .
- Los elementos fuera de la diagonal son reales y además satisfacen  $(\mathbf{L}^\gamma)_{ij} < 0$  para  $i \neq j$ .

Para obtener más detalles de las características y usos de este operador se pueden consultar las referencias [99, 103]. Las características del Laplaciano fraccionario permiten describir una caminata aleatoria fraccional en la red. La matriz de transición  $\mathbf{W}^\gamma(T)$  derivada del Laplaciano fraccionario está formada por los elementos

$$w_{i \rightarrow j}^{(\gamma)}(T) = \delta_{ij} - \frac{(\mathbf{L}^\gamma)_{ij}(T)}{(\mathbf{L}^\gamma)_{ii}(T)} \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad (11)$$

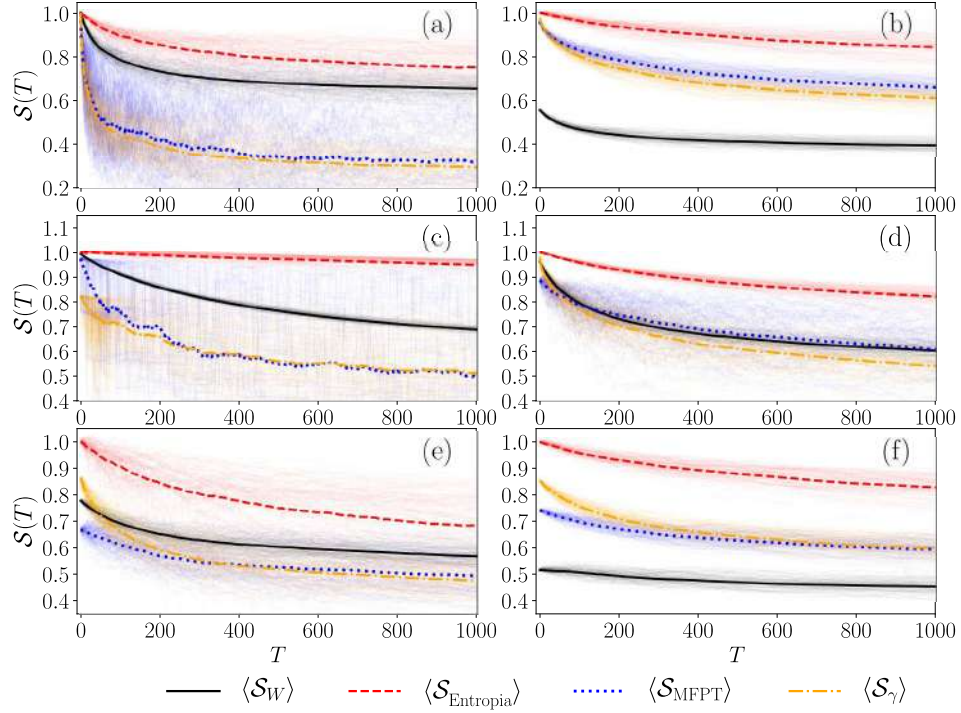
los cuales describen las probabilidades de transición para saltar del nodo  $i$  al nodo  $j$  considerando información global de la red. Con base en este proceso de difusión se plantea la medida de asimetría global  $\mathcal{S}_\gamma(T)$  definida como

$$\mathcal{S}_\gamma(T) = 1 - \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{|w_{i \rightarrow j}^{(\gamma)}(T) - w_{j \rightarrow i}^{(\gamma)}(T)|}{w_{i \rightarrow j}^{(\gamma)}(T) + w_{j \rightarrow i}^{(\gamma)}(T)}. \quad (12)$$

En todos los casos, se espera un valor máximo para el escenario de la red sin daño y un valor menor cuando el daño se acumula en las aristas de la red. Es decir que las medidas decrecen a medida que la asimetría se incrementa en el proceso de transporte.

En la figura 4 se presentan los resultados de las 4 medidas de asimetría en el proceso de daño de las 6 redes de  $N = 50$  nodos presentadas en figura 2.  $\mathcal{S}(T)$  representa a  $\mathcal{S}_W(T)$ ,  $\mathcal{S}_{\text{Entropía}}(T)$ ,  $\mathcal{S}_{\text{MFPT}}(T)$  y  $\mathcal{S}_\gamma(T)$ . Las líneas delgadas corresponden a los resultados de las medidas para 100 realizaciones del proceso de generación de daño y las líneas gruesas representan el promedio de ensamble de las medidas de asimetría. El parámetro de daño utilizado en cada caso fue  $\alpha = 1.0$ . En la figura 4(a) se muestran los resultados para el anillo. Para  $T = 0$ , en todos los casos,  $\mathcal{S}(0) = 1$  y a medida que el daño se va incrementando en la red correspondiente al incremento de  $T$ , se observa la disminución de estas medidas, indicando el incremento de asimetría en el proceso de transporte. Es importante resaltar que los resultados muestran una gran dispersión de los datos, lo que se puede interpretar como la manifestación de la sensibilidad de la estructura ante el daño.

En la figura 4(b) se muestran los resultados para la rueda. Para este escenario,  $\mathcal{S}(0)$  presenta diferentes valores debido a la asimetría natural de la configuración. En general, en contraste con el caso del anillo, se puede observar una baja dispersión de las medidas de asimetría, lo que está conectado con una mejor respuesta ante el daño de esta estructura. En la figura 4(c) se muestran los resultados para el grafo barbell. Inicialmente los 2 cliques completamente conectados que lo componen ofrecen una gran resistencia al daño, debido a la gran cantidad de caminos que conectan sus nodos. Sin embargo, esto se contrarresta con la fragilidad que genera



**Figura 4:** Medidas de asimetría para las redes de  $N = 50$  nodos correspondientes a: (a) un anillo, (b) rueda, (c) grafo barbell, (d) red de Watts-strogatz, (e) Erdős-Rényi y (f) red de Barabási-Albert.  $S(T)$  representa las medidas  $S_W(T)$ ,  $S_{\text{Entropia}}(T)$ ,  $S_{\text{MFPT}}(T)$  y  $S_\gamma(T)$  con  $\gamma = 0.5$ . En la gráfica se presentan 100 realizaciones del proceso en cada caso, las líneas gruesas representan el promedio de ensamble de cada medida usando un parámetro de daño  $\alpha = 1$ . Imagen tomada de [32].

el subgrafo lineal que los conecta. Estas características hacen que haya diferencia en la dispersión que presentan las medidas locales, la cual es baja, en comparación con la alta dispersión capturada por las medidas globales.

En la figura 4(d) se muestran los resultados de una red de Watts-Strogatz. En este caso se puede observar como la medida local  $S_{\text{Entropia}}$  tienen baja dispersión y decrece lentamente en comparación a la dispersión que presentan las otras medidas. Al menos, a nivel local, los caminos cortos presentes en este tipo de red ofrecen algo de beneficio ante el daño. Sin embargo, la medida local  $S_W$  se comporta de manera similar a las medidas globales decayendo rápido y presentando alta dispersión. En la figura 4(e) se muestran los resultados para una red de Erdős-Rényi. En esta red aleatoria se observa una gran dispersión en los resultados en todas las medidas, junto con un rápido decrecimiento de estas, lo que muestra evidencia de

su alta sensibilidad al daño. Finalmente en la figura 4(d) se muestran los resultados para la red de Barabási-Albert. En este caso se observa que la dispersión es baja en todos los casos y el decrecimiento de las 4 medidas también es baja en comparación con las otras redes. Los resultados de las 4 medidas de asimetría aplicadas a las 6 redes analizadas muestran, en términos generales, que las dos medidas locales se comportan como versiones reescaladas entre sí, al igual que ocurre con las medidas globales. Por otro lado, aunque las medidas locales son capaces de capturar el efecto del daño, las medidas globales resultan más efectivas, ya que logran reflejar el impacto del daño en el transporte a lo largo de toda la estructura de la red.

Medir la asimetría que genera el daño en el proceso de transporte estocástico es, hasta cierto punto, una forma de entender cómo afecta el daño a dicho proceso en la red. En los resultados de la figura 4, se puede observar como hay estructuras que toleran mejor el daño, considerando el aumento de asimetría y la dispersión de estos valores con el daño. Sin embargo, es necesario contar con una medida que se enfoque en determinar la capacidad global de transporte de la red a medida que esta recibe daño. La evaluación de la capacidad de transporte en estos sistemas con daño acumulado se obtiene a través de la medida de funcionalidad  $\mathcal{F}(T)$ . Esta medida compara los tiempos globales del caminante aleatorio obtenidos cuando se mueve en la red sin daño,  $\tau(0)$ , y cuando se mueve en la red dañada,  $\tau(T)$  [26]:

$$\mathcal{F}(T) \equiv \frac{\tau(0)}{\tau(T)}. \quad (13)$$

El tiempo global  $\tau(T)$  mide el promedio ponderado de pasos que el caminante aleatorio necesita para alcanzar cualquier nodo de la red [104]. Esta cantidad se obtiene en términos del tiempo medio de primer paso:

$$\tau(T) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sum_{i \neq j} P_i^{(\infty)} \langle \mathcal{T}_{ij}(T) \rangle. \quad (14)$$

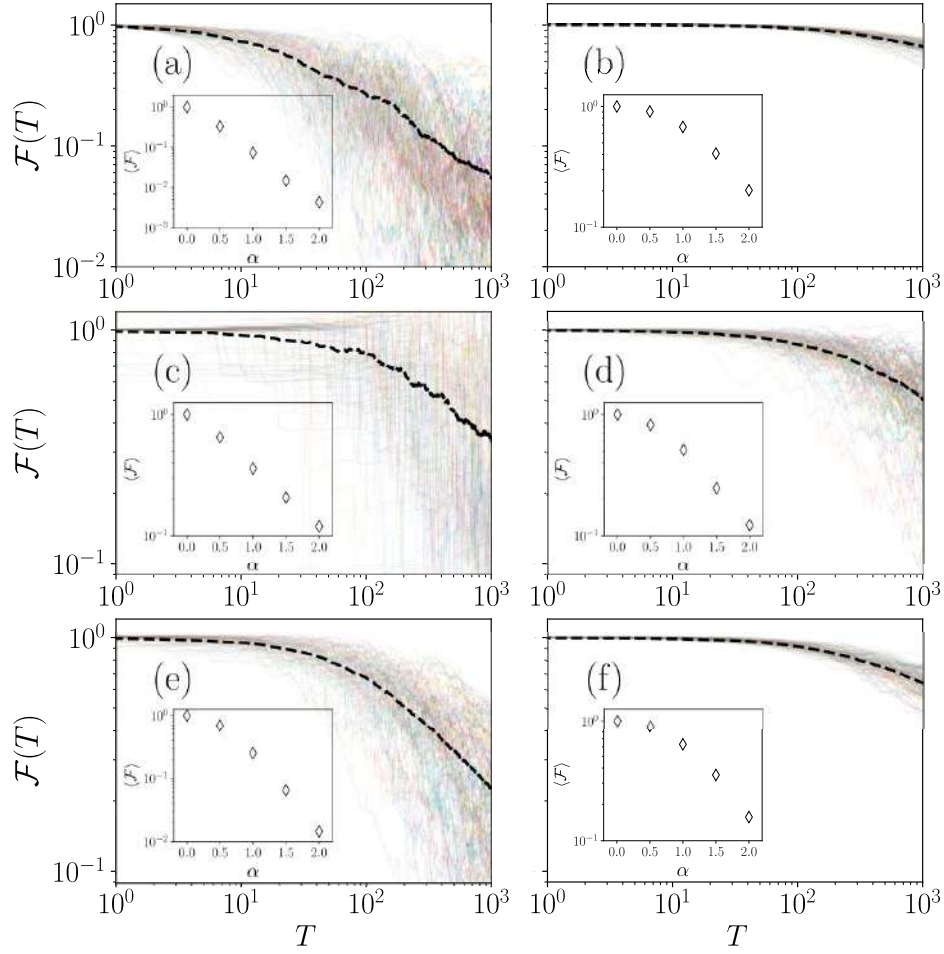
donde  $\langle \mathcal{T}_{ij}(T) \rangle$  corresponde al tiempo medio de primer paso del caminante cuando se mueve en la red con daño.  $\langle \mathcal{T}_{ij}(T) \rangle$  se calcula mediante la definición (17), para este caso particular, donde la matriz de transición se modifica por el daño generado, se utilizan los autovalores y autovectores derechos e izquierdos de la matriz de transición asociada a la red con daño al tiempo  $T$ ,  $\mathbf{W}(T)$ . Otra forma de escribir esta cantidad es

$$\tau(T) \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tau_j(T), \quad (15)$$

donde

$$\tau_j(T) = \frac{1}{P_j^\infty} \sum_{l=2}^N \frac{1}{1 - \lambda_l(T)} Z_{jj}^{(l)}(T), \quad (16)$$

en este caso se ha definido  $Z_{jj}^{(l)}(T) \equiv \langle j | \phi_l(T) \rangle \langle \bar{\phi}_l(T) | j \rangle$ . Donde  $|\phi_l(T)\rangle$  y  $|\bar{\phi}_l(T)\rangle$  son los autovectores derecho e izquierdo de  $\mathbf{W}(T)$  asociados al autovalor  $\lambda_l(T)$ .



**Figura 5:** Evolución de la funcionalidad,  $\mathcal{F}(T)$ , con el daño en redes de  $N = 50$  nodos. El análisis se hizo para tres redes deterministas: (a) Anillo, (b) Rueda y (c) Red de barbell. Y para tres redes aleatorias: (d) Red de Watts-Strogatz, (e) Red de Erdős-Rényi y (f) Red de Barabási-Albert. En las gráficas se muestran los resultados de 1000 simulaciones de Monte Carlo, tomando un parámetro  $\alpha = 1$ . La línea discontinua corresponde a al promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F} \rangle$ . Los recuadros corresponden a los valores de  $\langle \mathcal{F} \rangle$ , medidos para un valor de daño fijo de  $T = 1000$ , en función de el parámetro de daño  $\alpha$ . Imagen tomada de [32].

De esta cantidad se espera a  $T = 0$ ,  $\mathcal{F}(0) = 1$ , en principio, este resultado indica que no hay presencia de ningún daño en la red. Cuando el daño aumenta se espera  $\mathcal{F}(T) \leq 1$  lo que indica una disminución de la capacidad de transporte de

la estructura que se manifiesta a través de un incremento en el tiempo global del caminante aleatorio.

En la figura 5 se muestra la evolución de la funcionalidad con el daño en las 6 redes de  $N = 50$  nodos presentadas en la figura 2. Las gráficas muestran los valores de  $\mathcal{F}(T)$  de 1000 realizaciones del proceso de daño con un parámetro  $\alpha = 1$ . La línea discontinua en las gráficas corresponde al promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ . Los recuadros corresponden a los valores del promedio de ensamble  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para el valor fijo de daño  $T = 1000$ , calculados para 1000 realizaciones, en función del parámetro  $\alpha$ . En la figura 5(a) se muestran los resultados para el anillo donde se observa mucha dispersión en cuanto a los resultados de  $\mathcal{F}(T)$ . Además se observa un decaimiento bastante rápido de la funcionalidad con el tiempo. Por el contrario, en la figura 5(b), donde se muestran los resultados de la rueda, se observa mucha menos dispersión, al igual que un decaimiento lento de la funcionalidad. En la figura 5(c) se presentan los resultados para el grafo barbell. Para este caso se notan valores muy dispersos de la funcionalidad. Es interesante notar que, para ciertas realizaciones,  $\mathcal{F}(T)$  tiende a aumentar con el daño, este comportamiento es muy relevante para la investigación y se abordará más adelante en el capítulo 5; sin embargo, a nivel global  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ , tiende a decrecer.

En la figura 5(d) se muestran los resultados de la red de Watts-Strogatz, donde se observa una moderada dispersión de los datos en comparación con otras estructuras. El decaimiento es moderado también. En la figura 5(e) se muestran los resultados para la red de Erdős-Rényi, se alcanza a notar una dispersión moderada y a nivel global se aprecia un decaimiento más pronunciado. Finalmente, en la figura 5(f) se presentan los resultados de la red de Barabási-Albert. Se observa menos dispersión en los valores de la funcionalidad y un decaimiento menos pronunciado de la capacidad de transporte, lo que muestra que esta red tiene bastante tolerancia al daño. Con relación al comportamiento de  $\langle \mathcal{F} \rangle$  como función del parámetro de daño  $\alpha$ , se observa que a medida que  $\alpha$  aumenta,  $\langle \mathcal{F} \rangle$  alcanza valores más bajos. En los casos del anillo y de la red de Erdős-Rényi, los efectos son más notorios y se observa una reducción mucho mayor de su capacidad de transporte. Todos estos resultados muestran que los efectos del daño son mucho más marcados en estructuras con una menor capacidad de reparación, representada a través de un  $\alpha$  mayor.

De acuerdo a lo observado en las simulaciones, la medida de funcionalidad,  $\mathcal{F}(T)$ , y el ensamble promedio  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  son capaces de capturar las modificaciones en la capacidad de transporte de las redes luego de sufrir daño. Adicionalmente, el comportamiento de  $\mathcal{F}(T)$  distingue entre diferentes topologías, por lo que puede ser empleada para clasificar las redes de acuerdo a su tolerancia a este tipo de daño. En la siguiente sección se presenta en detalle la manera en que esta medida se usa para establecer clasificaciones de redes diferentes topologías con respecto a su robustez ante el daño acumulado.

## TOPOLOGÍA DE LAS REDES Y SU TOLERANCIA AL DAÑO

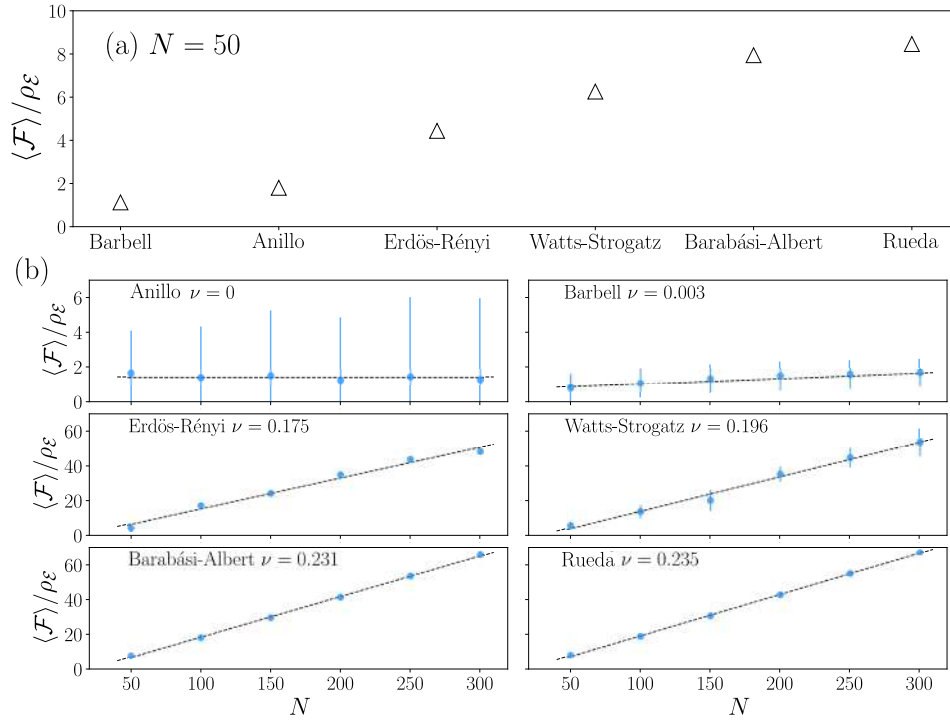
Para establecer una clasificación de las redes de acuerdo a su robustez ante el daño, inicialmente, se puede hacer una comparación entre los valores del promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para un valor fijo de daño  $T$ . Sin embargo, una consideración importante dentro de esta comparación es el efecto que el número de aristas de las redes tiene en la respuesta ante el daño. Dado que el daño afecta la capacidad de transporte de las líneas, es de esperar que en redes con muchas aristas el daño se vea atenuado, en comparación con redes menos conectadas, donde el daño en una sola de sus aristas puede provocar un efecto global más notorio y hasta destructivo. Por este motivo, resulta conveniente analizar los datos removiendo el efecto de las aristas, normalizando los valores de la funcionalidad con la densidad de aristas de la red. Para generar una clasificación usando este nuevo criterio, se usa la cantidad  $\frac{\langle \mathcal{F}(T) \rangle}{\rho_{\mathcal{E}}}$ , donde  $\rho_{\mathcal{E}} = \frac{|\mathcal{E}|}{N(N-1)}$  corresponde a la densidad de aristas de la red, y el número total de aristas,  $|\mathcal{E}|$ , de una red dirigida se calcula según  $|\mathcal{E}| = \sum_{i,j} A_{ij}$ .

En la figura 6 se presenta la clasificación de las redes de  $N = 50$  respecto al valor de la funcionalidad normalizada  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$  para  $T = 1000$  y  $\alpha = 1$ . Los promedios de ensamble se calcularon con base en 1000 realizaciones Monte Carlo del proceso. En la figura 6(a) se presentan los valores de  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$  de las redes. De acuerdo a esta clasificación se observa que la red más frágil, frente al daño acumulado, es el grafo barbell. A pesar de estar formado por 2 subgrafos completamente conectados donde existen múltiples caminos que conectan los nodos en cada subgrafo, el estar vinculados solamente a través de un subgrafo lineal, hace que toda la estructura sea muy vulnerable. Una vez que el daño tiende a acumularse en esta cadena de nodos, el moverse de un clique a otro se vuelve más complicado por lo que el caminante aleatorio tiende a quedar atrapado en una de estas estructuras. El anillo es la siguiente estructura en la clasificación, en esta red, los caminos que conectan un nodo con otro son limitados, lo que la convierte también en una estructura poco robusta ante el daño de sus aristas. Luego se encuentra la red de Erdős-Rényi que muestra mejor tolerancia al daño. La red de Watts-Strogatz, que presenta una topología de mayor complejidad caracterizada por poseer caminos cortos y alto coeficiente de agrupamiento, demuestra una buena tolerancia al daño. La red de Barabási-Albert y la rueda son las estructuras más robustas del conjunto analizado, las cuales corresponden a estructuras complejas con muchos caminos redundantes entre cada par de nodos. Es importante destacar que, en las redes libres de escala, los ataques guiados a los hubs de la red resultan destructivos. Sin embargo, cuando los ataques son aleatorios, estas redes muestran gran robustez, algo que

se refleja en la red de Barabási-Albert mostrada anteriormente.

Adicionalmente, en la figura 6(b) se realiza un estudio de  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$  en función del número de nodos  $N$  de las redes. Los resultados muestran que la funcionalidad normalizada presenta un comportamiento lineal con respecto a  $N$ ; sin embargo,





**Figura 6:** Clasificación de las redes de  $N = 50$  nodos de acuerdo a su tolerancia al daño. (a) Valores de la funcionalidad normalizada de las redes. (b) Funcionalidad normalizada en función del número de nodos  $N$  para redes de diferentes topologías.

las pendientes de estas gráficas dependen de la topología subyacente. Para el caso del anillo se encontró una pendiente  $\nu = 0$ , para la red de barbell se obtuvo  $\nu = 0.003$ , para Erdős-Rényi se encontró  $\nu = 0.175$ , para la red de Watts-Strogatz se obtuvo  $\nu = 0.196$ , en el caso de Barabási-Albert  $\nu = 0.231$  y para la rueda se encontró  $\nu = 0.235$ . Resulta interesante notar, que las pendientes son pequeñas en el caso de las redes menos tolerantes al daño como el barbell y el anillo. En cuanto que para las redes que presentan mayor tolerancia, las pendientes son mayores. Estos resultados ayudan a confirmar los efectos de la topología en la robustez de los sistemas y los procesos de transporte estocástico frente al daño acumulado.

En conclusión, en este capítulo se expuso un modelo de daño acumulado en sistemas complejos modelados mediante redes. El modelo se basa en la idea de que los sistemas tienen mecanismos de reparación que son imperfectos y por lo tanto, luego de una perturbación y posterior reparación, siempre existe daño residual que se empieza a acumular en el sistema, afectando su funcionamiento. El daño



se genera de forma aleatoria y preferencial en las líneas de la red. En el caso de procesos de transporte estocástico, el daño reduce la capacidad de transporte del sistema. Además genera asimetría en el proceso que puede ser evaluada mediante las medidas locales  $S_W$  y  $S_{\text{Entropía}}$  y las medidas globales  $S_{\text{MFPT}}$  y  $S_\gamma$ . Adicionalmente, se estableció una comparación de la robustez respecto al daño acumulado de 6 redes de diferentes topologías pero igual número de nodos  $N$ . Los resultados indican que la topología de las redes juega un papel importante en la capacidad que poseen de tolerar el daño. Las estructuras menos robustas tienden a presentar topologías simples en cuanto que las más robustas presentan estructuras mucho más complejas. Si se asocia el envejecimiento y el tiempo de vida de los sistemas a la acumulación de daño, se puede decir que estos elementos dependen en gran medida de la complejidad del sistema.

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## EFFECTO DEL DAÑO EN SISTEMAS DE TRANSPORTE METRO

Uno de los grandes desafíos de las ciudades es la movilidad de sus habitantes. Sin embargo, a medida que pasa el tiempo, las ciudades crecen junto con su número de habitantes y los problemas de transporte tales como el aumento del tráfico, retrasos en la movilidad, contaminación, aumento de costo de vida, entre otros [105,106]. Pese a este panorama, el transporte masivo o transporte público es la mejor opción para hacerle frente a los problemas de movilidad. Los sistemas de metro hacen parte de estos métodos de transporte.

Los sistemas de metro consisten en sistemas ferroviarios urbanos que permiten la conexión de diferentes partes de un área metropolitana. Una de sus principales características es que poseen vías exclusivas, de tal manera que su funcionamiento no se encuentra condicionado al tráfico externo [107]. Esto permite que la rapidez con la que transportan pasajeros sea mucho mayor en comparación con la rapidez que ofrecen otros sistemas de transporte como los autobuses o taxis. En condiciones óptimas, los sistemas de metro permiten movilizar una gran cantidad de personas de manera rápida y eficiente [107]. Además son sistemas que permiten



**Figura 1:** Metro de la Ciudad de México.

la movilidad de bajo costo, logrando una movilidad accesible para personas de diversas clases sociales, generan un bajo impacto ambiental y reducen el tráfico. En la figura 1 se presenta una fotografía del metro de la Ciudad de México, uno de los sistemas más largos del mundo con un total de 226km [108] y el principal sistema de transporte público de la ciudad.

Todas estas características hacen que los sistemas de metro desempeñen un papel fundamental en el funcionamiento y desarrollo de las grandes ciudades. Lamentablemente, existen diversos factores que ocasionan el detrimento de su funcionamiento y que incluso pueden comprometer la seguridad de los usuarios. Entre ellos se puede encontrar la falta de mantenimiento de los vehículos o vías, fallos de la red eléctrica que alimenta el sistema, condiciones meteorológicas poco favorables, ataques a la infraestructura, entre otros [109, 110]. De tal manera que es importante entender cómo funcionan y trabajar en métodos que permitan evaluar la respuesta de estos sistemas al daño.

En la literatura se pueden encontrar diversos trabajos enfocados a estudiar los efectos del daño en sistemas de metro y muchos de ellos se desarrollan dentro del contexto de redes complejas. Sin embargo, en su mayoría, consideran casos extremos que involucran remoción de aristas o nodos de la red, o el análisis de características topológicas de la red [111–113]. Considerando este panorama, en esta parte del libro se muestran los resultados del estudio de la robustez de los sistemas metro frente al daño acumulado. Este enfoque de daño acumulado es apropiado para describir la situación de los sistemas metro donde sufren daño gradual, en escenarios, justo antes de llegar a una situación extrema [33]. A continuación se exponen las características de las redes de metro que se usan para el estudio, la metodología empleada para analizar la robustez de la redes frente a la acumulación de daño y los resultados de esta investigación. Este capítulo está basado en el artículo de investigación [33].

## BASE DE DATOS

Parte de los elementos indispensables para poder realizar esta investigación, son los sistemas de metro y las redes que los representan. Los sistemas de metro que se analizan en este libro forman parte de la base de datos de Derrible [115, 116]. Esta base de datos contiene la información de la conectividad de 33 sistemas de metro en ciudades de todo el mundo, recopilada durante los años 2008 y 2009.

Esta base de datos hace una representación de los sistemas de metro mediante grafos creando una definición de los nodos y las aristas de las redes. De acuerdo a esta representación, los nodos de las redes corresponden a las estaciones de transferencia, donde es posible cambiar a otra ruta del metro, y las estaciones terminales, que marcan el final de una ruta y donde no se puede hacer cambio a una ruta diferente. Las aristas de las redes, por otra parte, permiten la conexión de las estaciones de transferencia con las estaciones terminales, por lo que representan la información

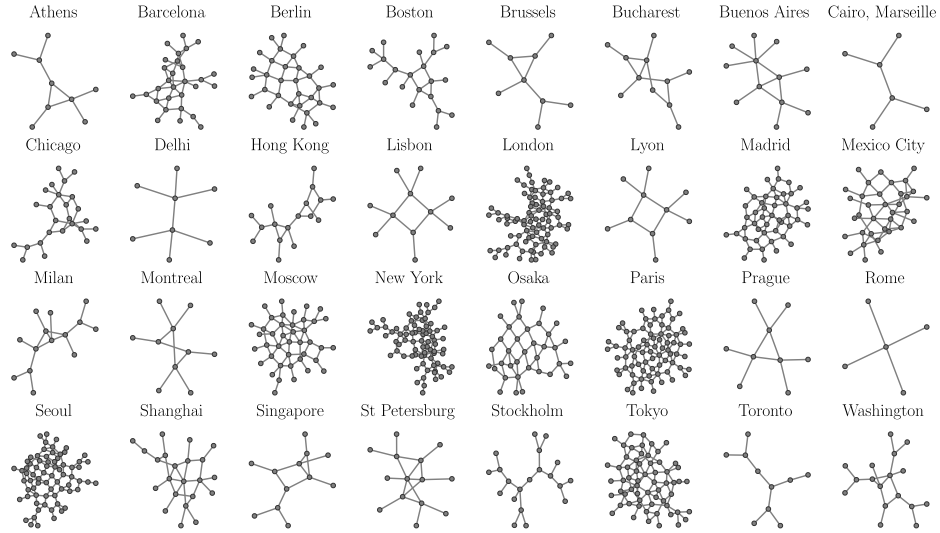


**Figura 2:** Metro de Praga. (a) Mapa del metro de Praga donde se incluyen todas las estaciones, las estaciones señaladas con círculos rojos corresponden a las estaciones de transferencia y estaciones terminales. Imagen modificada de [114]. (b) Grafo asociado a la red de Praga, los nodos corresponden a las estaciones de transferencia y terminales del sistema en (a), las líneas contienen la información de los tramos comprendidos entre las estaciones terminales y de transferencia del sistema.

de las demás estaciones, así como de las vías que las comunican.

En la figura 2 se ilustra la representación del sistema de metro de Praga. En la figura 2(a) se presenta el mapa del metro, ilustrando las líneas A, B y C que lo componen. Además, en el mapa se pueden observar todas las estaciones que conforman el sistema [114]. Con círculos rojos se resaltan las estaciones de transferencia y las estaciones terminales. En la figura 2(b) se ilustra el grafo que representa al metro de Praga. Los nodos corresponden a las estaciones resaltadas en el mapa y las aristas representan toda la información adicional que conecta dichas estaciones. La red resultante está compuesta de  $N = 9$  nodos y  $|\mathcal{E}| = 18$  aristas, si se considera que la red es dirigida.

En la figura 3 se muestran los 33 grafos que representan a los sistemas de metro de la base de datos de Derrible [115]. Los sistemas de metro representados por estos 33 grafos, pertenecen a diferentes ciudades alrededor del mundo ubicadas en los continentes de América, Europa, África y Asia. En la gráfica se puede observar redes con una gran variedad de topologías y tamaños. Con relación a la topología, se puede observar redes simples con estructuras de árbol como las redes de Cairo y Estocolmo, y también estructuras con topologías más complejas y más conectadas como las redes de Nueva York y París. En cuanto al tamaño, se encuentran desde redes de  $N = 5$  nodos, como es el caso de Roma, hasta redes de  $N = 83$  nodos, como la red de Londres. Estas características de tamaños y formas, hacen que los sistemas de metro considerados, correspondan a una representación importante



**Figura 3:** Representación de las 33 redes asociadas a los sistemas de metro estudiados. Las matrices de adyacencia que describen las redes fueron consultadas de las referencias [116] y [115]. Figura tomada de [33]

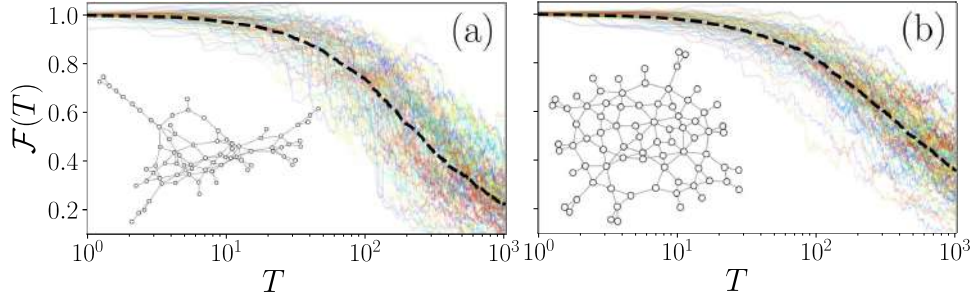
de todos los sistemas de metro del mundo [116].

Es importante mencionar que debido a que la información de la base de datos fue recopilada entre los años 2008 y 2009, existen algunas discrepancias con las redes actuales de los sistemas de metro que representan. Es el caso, por ejemplo, del sistema de metro de Roma, el cual, en la actualidad posee 2 líneas de metro adicionales o existen sistemas que han sufrido un crecimiento importante como el metro de Shanghai. Para mayor información sobre los sistemas de metro considerados y las redes que los representan, se puede consultar las referencias [116] y [117].

#### DAÑO ACUMULADO EN LAS REDES DE METRO

El método de generación de daño aleatorio y acumulado presentado en el capítulo anterior, permite hacer un análisis global de la robustez de las redes de metro. Este método está basado en la reducción de la capacidad de transporte de las aristas de la red y la medición de la funcionalidad de transporte estocástico  $\mathcal{F}(T)$  de la estructura. En esta parte del libro, las 33 redes de metro se exponen al daño acumulado para evaluar su respuesta, de tal manera que se pueda generar una clasificación de los sistemas de metro respecto a su tolerancia ante este tipo de daño.

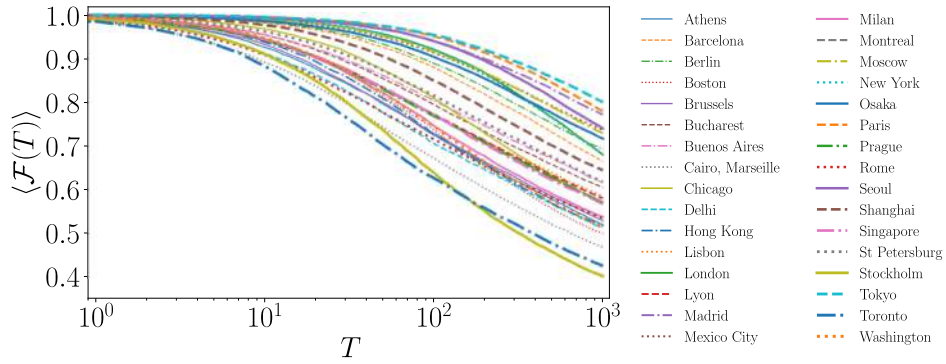
En la figura 4 se presentan los resultados detallados de la evolución de la funcio-



**Figura 4:** Evolución de la funcionalidad para las redes de metro de (a) Nueva York y (b) París. Las líneas delgadas indican 100 realizaciones Monte Carlo del proceso, tomando  $\alpha = 1$ . La línea punteada indica el promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  de las redes. Imagen modificada de [33].

nalidad  $\mathcal{F}(T)$ , definida en (13), para 2 de las redes de metro conforme aumenta el daño. En la figura 4(a) se muestran los resultados para la red de Nueva York, una red de  $N = 77$  nodos. En la figura 4(b) se muestran los resultados de la red de París con  $N = 78$  nodos. En los 2 casos se presentan 100 simulaciones Monte Carlo del proceso, usando el parámetro de daño  $\alpha = 1$ . La línea punteada indica el promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ . En general, los resultados muestran una disminución global en la capacidad de transporte de las 2 redes de metro a medida que el daño se va incrementando en la red.

Este análisis se aplicó de manera similar a las 33 redes de metro de la figura 3. En la figura 5 se muestra los promedios de ensamble  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  de las 33 redes de metro. Para el cálculo de los promedios se usaron 1000 realizaciones del proceso de generación de daño acumulado, utilizando el parámetro  $\alpha = 0.5$ . En los resultados se observa que cada una de las redes responde de manera diferente al daño, algunos sistemas responden de manera frágil, por lo que para bajos valores de  $T$  la disminución de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  es significativa. En cuanto que otros sistemas se muestran robustos frente al daño, en estos sistemas  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  decae lentamente con  $T$ . Los casos de la red de Toronto y Estocolmo, son ejemplos de estructuras frágiles, el decaimiento de su funcionalidad es notorio. Una de las características que comparten estas redes es que las dos poseen una estructura simple de tipo árbol. Por otro lado, las redes de París y Nueva York son ejemplos de estructuras muy resistentes, su funcionalidad tiende a mantenerse en el tiempo a pesar del daño recibido, solo a partir de  $T = 10^2$  se empieza a notar el decaimiento significativo de la misma. Al contrario que las redes de Toronto y Estocolmo, este par de estructuras poseen una estructura robusta y compuesta de gran variedad de caminos que conectan un par de nodos, dando lugar a redes de topologías más complejas.



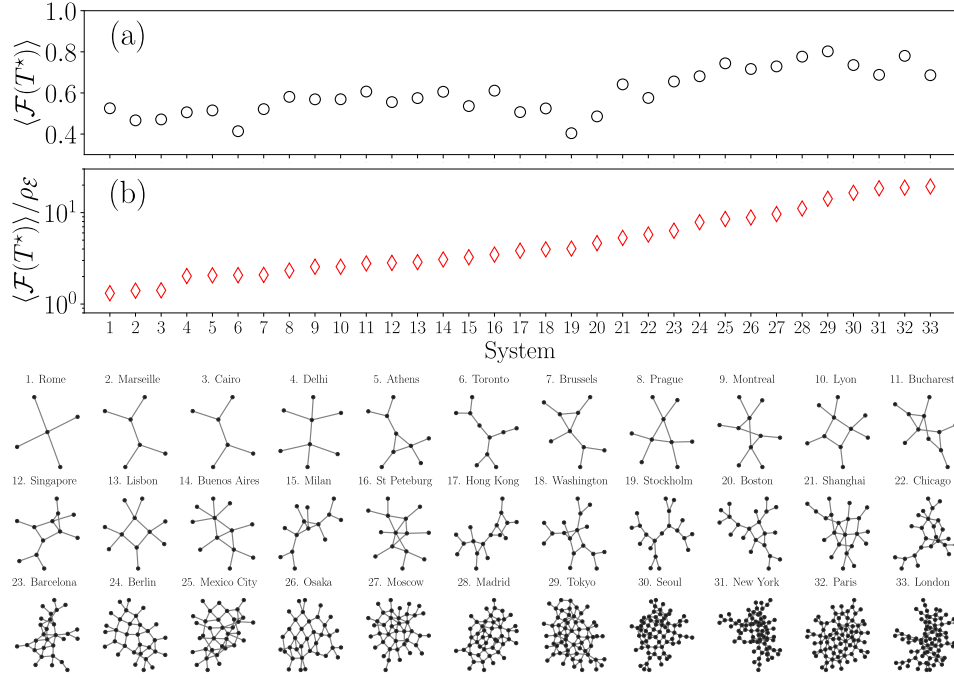
**Figura 5:** Evolución del promedio de ensemble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para 33 redes de metro alrededor del mundo. En el cálculo de los promedios de ensemble se usaron 1000 realizaciones Monte Carlo del proceso, tomando  $\alpha = 0.5$ . Imagen tomada de [33].

#### CLASIFICACIÓN DE LAS REDES DE METRO

Siguiendo las ideas presentadas en el capítulo anterior, se usan los valores de la funcionalidad para estimar una clasificación de las 33 redes de metro de acuerdo a su tolerancia ante el daño acumulado. Para ello se escoge un valor de daño fijo  $T^*$  y se mide el ensemble promedio de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle$ . Dado el efecto del número de aristas de la red, el criterio usado para el ordenamiento se hace con base en la funcionalidad normalizada con la densidad de aristas,  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$ .

En la figura 6 se presenta la clasificación de las redes de metro de acuerdo a su robustez frente al daño usando el criterio de  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$ . Para establecer la clasificación se escogió un valor de daño  $T^* = 10^3$ , considerando  $\alpha = 0.5$ , los promedios se calcularon usando  $10^3$  simulaciones Monte Carlo. En la figura 6(a) se muestra los valores de  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle$ . En la figura 6(b) se presentan los valores de  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$ . Las etiquetas de los ejes horizontales representan a las redes de metro, numeradas del 1 al 33, de acuerdo a la correspondencia mostrada en el panel inferior. En este ordenamiento se observa que el grupo de estructuras más frágiles está compuesto por las redes tipo árbol del conjunto, con excepción de Estocolmo que aparece en el puesto 16. A partir del puesto 7 ocupado por Bruselas, se observa que las redes que aparecen corresponden a topologías de tipo árbol a las que se les ha adicionado un ciclo, inicialmente de 3 nodos y luego de 4. Esta nueva estructura genera variedad en las topologías y también proporciona mayor tolerancia al daño recibido. Más adelante aparecen estructuras con 2 ciclos como Bucarest en el puesto 13 o Milán en el 14. Las que siguen son estructuras con una mayor complejidad en su conectividad, donde se observa un mayor número de ciclos y por lo tanto un incremento de caminos que conectan los nodos de las redes. En los puestos 32 y 33





**Figura 6:** Promedio de ensamble de la funcionalidad y de la funcionalidad normalizada a  $T^* = 10^3$  para las 33 redes de metro analizadas. Además se incluye la organización de las redes de acuerdo a su resistencia al daño. Imagen tomada de [33].

aparecen las redes de Londres y París siendo las estructuras más robustas de esta clasificación frente al daño acumulado, lo que va acorde con la complejidad que muestra su topología [33].

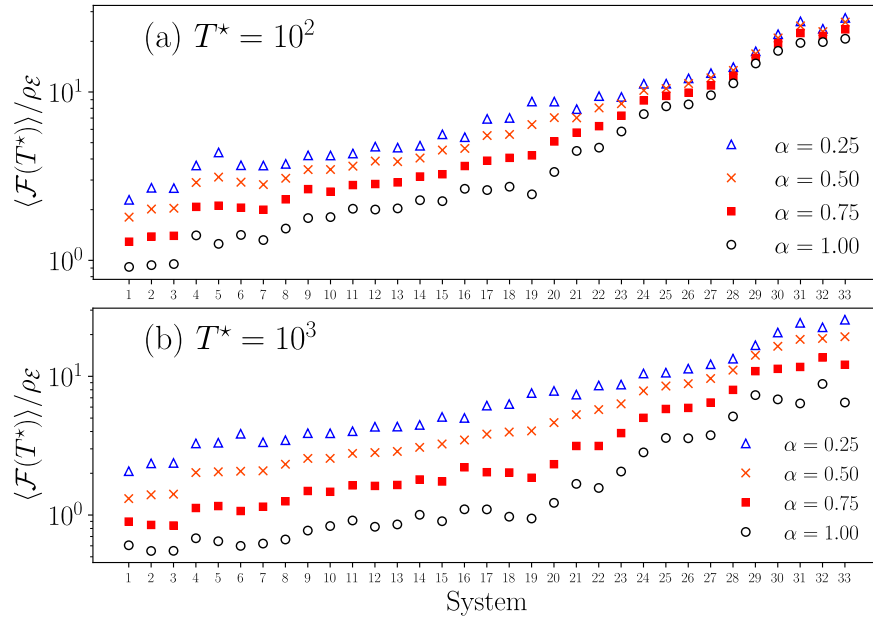
A manera de complemento de esta información sobre la clasificación de las 33 redes de metro, en la tabla 1 se presentan los valores de  $N$ ,  $|\mathcal{E}|$ , el grado promedio de las redes  $\bar{k}$ , el coeficiente de agrupamiento medio de triángulos  $\mathcal{C}_{\Delta}$  definido en 8, el coeficiente de agrupamiento medio de cuadrados  $\mathcal{C}_{\square}$  definido en 10, el tiempo medio global de las redes sin daño  $\tau(0)$  y la funcionalidad normalizada  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$ , tomando  $T^* = 10^3$  y  $\alpha = 0.5$ . En la tabla se puede observar que tanto  $N$ ,  $|\mathcal{E}|$  y  $\bar{k}$ , no son cantidades determinantes en la robustez de las redes. Por ejemplo, redes como la de Hong Kong y Washington coinciden en estos tres valores, pero difieren en los valores de  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$ .  $\mathcal{C}_{\Delta}$  y  $\mathcal{C}_{\square}$ , permiten identificar la presencia de ciclos de 3 nodos (triángulos) y los ciclos de 4 nodos (cuadrados), respectivamente. En los resultados se puede observar que en las estructuras más robustas estas cantidades aumentan,

Sistema	$N$	$ \mathcal{E} $	$\bar{k}$	$\mathcal{C}_{\Delta}$	$\mathcal{C}_{\square}$	$\tau(0)$	$\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$
1. Rome	5	8	1.6	0.0	0.0	5.3	1.31
2. Marseille	6	10	1.67	0.0	0.0	8.2	1.4
3. Cairo	6	10	1.67	0.0	0.0	8.2	1.41
4. Delhi	8	14	1.75	0.0	0.0	12.9	2.02
5. Athens	9	18	2.0	0.09	0.0	17.1	2.06
6. Toronto	10	18	1.8	0.0	0.0	23.1	2.07
7. Brussels	9	18	2.0	0.09	0.0	16.8	2.09
8. Prague	9	18	2.0	0.06	0.0	15.0	2.32
9. Montreal	10	20	2.0	0.0	0.04	17.3	2.56
10. Lyon	10	20	2.0	0.0	0.04	17.3	2.56
11. Bucharest	11	24	2.18	0.06	0.0	19.8	2.78
12. Singapore	12	26	2.17	0.06	0.02	25.7	2.82
13. Lisbon	11	22	2.0	0.0	0.03	19.9	2.87
14. Buenos Aires	12	26	2.17	0.07	0.01	23.0	3.07
15. Milan	14	30	2.14	0.07	0.01	34.5	3.25
16. St Petersburg	14	32	2.29	0.07	0.01	29.1	3.48
17. Hong Kong	17	36	2.12	0.04	0.0	48.3	3.83
18. Washington	17	36	2.12	0.04	0.02	45.5	3.96
19. Stockholm	20	38	1.9	0.0	0.0	72.7	4.04
20. Boston	21	44	2.1	0.03	0.01	65.5	4.64
21. Shanghai	22	56	2.55	0.05	0.05	54.8	5.29
22. Chicago	25	60	2.4	0.07	0.02	75.7	5.76
23. Barcelona	29	84	2.9	0.17	0.03	85.3	6.34
24. Berlin	32	86	2.69	0.08	0.02	84.0	7.86
25. Mexico City	35	104	2.97	0.1	0.04	84.3	8.51
26. Osaka	36	102	2.83	0.08	0.03	94.4	8.85
27. Moscow	41	124	3.02	0.09	0.04	113.1	9.64
28. Madrid	48	158	3.29	0.13	0.05	126.9	11.09
29. Tokyo	62	214	3.45	0.15	0.03	167.0	14.18
30. Seoul	71	222	3.13	0.09	0.04	234.3	16.47
31. New York	77	218	2.83	0.05	0.02	280.0	18.47
32. Paris	78	250	3.21	0.13	0.02	239.2	18.75
33. London	83	242	2.92	0.1	0.02	329.1	19.3

**Tabla 1:** Características de las 33 redes de metro analizadas. En la tabla se muestran el número de nodos  $N$ , el número de aristas de la red dirigida  $|\mathcal{E}|$ , el grado promedio  $\bar{k}$ , el de agrupamiento promedio de triángulos  $\mathcal{C}_{\Delta}$ , el agrupamiento promedio de cuadrados  $\mathcal{C}_{\square}$ , el tiempo medio global en la red sin daño  $\tau(0)$  y la funcionalidad normalizada  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$ , donde  $\langle \mathcal{F} \rangle = \langle \mathcal{F}(T^*) \rangle$  evaluada a  $T^* = 10^3$ , usando 1000 simulaciones y tomando  $\alpha = 0.5$ .

confirmando la importancia de su presencia en la generación de una respuesta robusta de la red. Los tiempos  $\tau(0)$  contienen información de la topología de la red, pero por sí solos son incapaces de dar información de la robustez de las redes. Por ejemplo, para la red de París  $\tau(0) = 239.2$  y para la red de Londres  $\tau(0) = 329.1$ , sin embargo, la robustez de estas 2 estructuras medida mediante  $\langle \mathcal{F} \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$  es bastante similar.

La clasificación mostrada en la figura 6 se obtiene al fijar tanto el número de daño que recibe la red a  $T^* = 10^3$  y también el parámetro de daño  $\alpha = 0.5$ . Por lo que para un análisis más completo se investigó los cambios de la respuesta ante el daño de las redes debido a la modificación del parámetro de daño  $\alpha$  y se tuvo en cuenta otro valor de daño  $T^*$ . En la figura 7 se presentan los valores de  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle / \rho_{\mathcal{E}}$  para las 33 redes de metro, ordenadas de acuerdo a los parámetros escogidos en la figura 6, usando los valores del parámetro de daño  $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$ . En la figura 7(a) se escoge  $T^* = 10^2$  y en la figura 7(b) se usa  $T^* = 10^3$ . Los promedios de ensamble se calcularon con base en 1000 realizaciones Monte Carlo. Los resultados muestran que los grupos de clasificaciones discrepan en algunos elementos en comparación al ordenamiento encontrado con los parámetros  $\alpha = 1.0$  y  $T^* = 10^3$ . Sin embargo, a simple vista los cambios no parecen significativos.



**Figura 7:** Promedio de ensamble de la funcionalidad normalizada para las 33 redes de metro organizadas de acuerdo a la figura 6, para valores de  $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$  y  $T^* = 10^2$  y  $T^* = 10^3$ . Los promedios de ensambles se calcularon con base en 1000 simulaciones Monte Carlo. Imagen tomada de [33].

Para hacer una comparación rigurosa entre las clasificaciones resultantes y la inicial se utilizó el coeficiente de correlación de rango de Kendall  $\mathcal{K}_{corr}$ . Este coeficiente, también conocido como coeficiente  $\tau$  de Kendall, permite medir la similitud entre dos conjuntos ordenados de un mismo grupo de objetos [118]. Este coeficiente utiliza los conjuntos de pares ordenados que se obtienen en cada clasificación y hace un conteo de los elementos que difieren, tomando uno de los grupos de clasificación como la referencia. De esta manera,  $\mathcal{K}_{corr}$  depende del número de inversiones de pares ordenados de elementos que se deben hacer en uno de los conjuntos de ordenamiento para obtener el otro.  $\mathcal{K}_{corr}$  puede tomar valores entre -1 y 1; -1 indica una inversión completa de los ordenamientos, 0 indica que no hay relación entre las clasificaciones y 1 muestra que las 2 clasificaciones son idénticas. Esta cantidad permite comparar las clasificaciones de las redes de metro para los parámetros  $\alpha = 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$  y los valores de  $T^* = 10^2$  y  $T^* = 10^3$ , con referencia al ordenamiento de la figura 6 obtenido para  $\alpha = 0.5$  y  $T^*$ .

En la tabla 2 se encuentran los resultados de  $\mathcal{K}_{corr}$  de la comparación de los grupos de ordenamiento de las 33 redes de metro obtenidos al variar  $\alpha$  y  $T^*$ , considerando como referencia el caso  $\alpha = 0.5$  y  $T^* = 10^3$ . Para todos los casos se observa que  $\mathcal{K}_{corr}$  toma valores cercanos a 1 por lo que hay concordancia en las clasificaciones generadas al variar  $T^*$  y  $\alpha$  con respecto a la clasificación inicial. Estos resultados permiten reafirmar la idea de que  $\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle / \rho_\varepsilon$  es un buen criterio para estimar la robustez de los sistemas de metro ante el daño acumulado.

$\alpha \backslash T^*$	0.25	0.50	0.75	1.00
$10^2$	0.95	0.98	0.98	0.97
$10^3$	0.97	1.0	0.94	0.89

**Tabla 2:** Valores de  $\mathcal{K}_{corr}$  para las clasificaciones obtenidas variando  $\alpha$  y  $T^*$  con base en la clasificación para  $\alpha = 0.5$  y  $T^* = 10^3$ .

En conclusión, este capítulo muestra una de las aplicaciones del modelo de generación de daño acumulado al estudio y comprensión de los efectos del daño progresivo en los sistemas de metro. Se consideraron 33 sistemas de metro de diferentes ciudades alrededor del mundo. Usando el algoritmo de daño acumulado se estudió la evolución de la funcionalidad  $\mathcal{F}(T)$  en cada una de las estructuras a medida que se van dañando. Posteriormente, los resultados de la funcionalidad normalizada se utilizaron para establecer una clasificación de las redes de metro estudiadas. En los resultados se observó que estructuras con topologías simples, como las de tipo árbol, son las menos robustas; pero a medida que en las topología empiezan a aparecer elementos como ciclos de tres nodos, 4 nodos y más, las respuestas ante el daño van mejorando, hasta llegar a estructuras más complejas, como las redes de París y Londres, que son las topologías más robustas de todo el conjunto analizado. Adicionalmente, el estudio permitió reafirmar la idea de que

$\langle \mathcal{F}(T^*) \rangle / \rho_\varepsilon$  es una buena medida para generar clasificaciones de diferentes redes de transporte de acuerdo a su tolerancia al daño. Los resultados presentados en este libro sumados a otros trabajos puede contribuir a un mejor diseño de los sistemas de transporte en el mundo.

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## SINCRONIZACIÓN EN REDES CON DAÑO

La sincronización es un proceso que está involucrado en muchas funciones vitales de los seres vivos como el funcionamiento de las células del corazón [119] y podría explicar la autorregulación de las nefronas, las unidades estructurales y funcionales elementales de los riñones [120, 121]. La sincronización también es fundamental para implementar mecanismos sociales de búsqueda de alimento o de defensa en animales [84]. Al igual que es un proceso importante en la transferencia de energía en redes eléctricas [122] y en muchas otras situaciones [82]. Por otro lado, la sincronización excesiva es responsable de efectos adversos en el funcionamiento del sistema nervioso y el cerebro [80, 123]

La sincronización es un proceso colectivo producto de la interacción conjunta de los elementos que constituyen un sistema, por lo que, tanto las componentes del sistema como las conexiones entre dichas componentes son indispensables. Sin embargo, las perturbaciones externas pueden provocar alteraciones en los elementos del sistema afectando también el proceso de sincronización. Varios trabajos se destacan en el estudio del procesos de sincronización con perturbaciones asociadas a ruido [124] o a la remoción de componentes [125–128]. Sin embargo, también es importante explorar la sincronización en contextos donde el daño es progresivo y acumulado. Además, observar qué sucede cuando el daño afecta la conectividad del sistema es un escenario importante en muchos contextos. Se ha observado que alteraciones en las sinapsis, que son las responsables de la conectividad de las neuronas, pueden generar un mal funcionamiento de circuitos neuronales [129]. También, el envejecimiento altera la comunicación intracelular en las células marcapasos del corazón, afectando su sincronización [130]. En otro tipo de sistemas como las redes eléctricas, la falta de mantenimiento, malas condiciones ambientales, entre otros, favorecen la pérdida de capacidad de las líneas de transmisión, alterando la sincronización de los componentes del sistema eléctrico [131].

Tomando en cuenta las ideas mencionadas, en esta parte de la investigación y dentro del contexto de ciencia de redes, se estudian los efectos del daño en el proceso de sincronización de redes de osciladores de Kuramoto considerando que el daño provoca una disminución en la conectividad de las aristas que conectan a los osciladores. En el trabajo se consideran osciladores de Kuramoto idénticos en frecuencia y el daño es generado de acuerdo al modelo expuesto en el capítulo 2. En las siguientes secciones, se explica la implementación del modelo de Kuramoto con daño, se introducen medidas para determinar la capacidad de sincronización

de las redes y por último se estudia la tolerancia al daño de grafos pequeños de  $N = 6$  nodos, lo cual da lugar a una clasificación de los grafos de acuerdo a su capacidad para sincronizarse en presencia de daño. Este capítulo está basado en el artículo de investigación [34].

#### MODELO DE KURAMOTO DE OSCILADORES IDÉNTICOS

El modelo de Kuramoto es el arquetipo para el estudio de la sincronización [83]. En esta investigación se usa una simplificación del modelo de Kuramoto en redes presentado en la ecuación (22). La simplificación consiste en considerar osciladores de Kuramoto idénticos, esto quiere decir, que la frecuencia natural de oscilación de cada oscilador es la misma, así que  $\omega_i = \omega$ . Esta asunción hace que el sistema descrito en (22) sea invariante bajo rotaciones, por lo tanto se puede hacer la transformación:  $\theta_i \rightarrow \theta_i + \omega t$ . De tal manera que con  $\omega = 0$  y rescalando el tiempo con  $K = 1$  de la ecuación (22) se obtiene el siguiente sistema de Kuramoto no lineal:

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \sum_j^N A_{ij} \sin[\theta_j(t) - \theta_i(t)]. \quad (1)$$

El sistema de Kuramoto descrito por las ecuaciones (1) es un sistema gradiente. Considerando a  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  como el vector de fases del sistema, el sistema (1) se puede escribir como  $\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} = -\nabla V$ , donde la función potencial  $V$  corresponde a

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N A_{ij} \cos[\theta_j(t) - \theta_i(t)]. \quad (2)$$

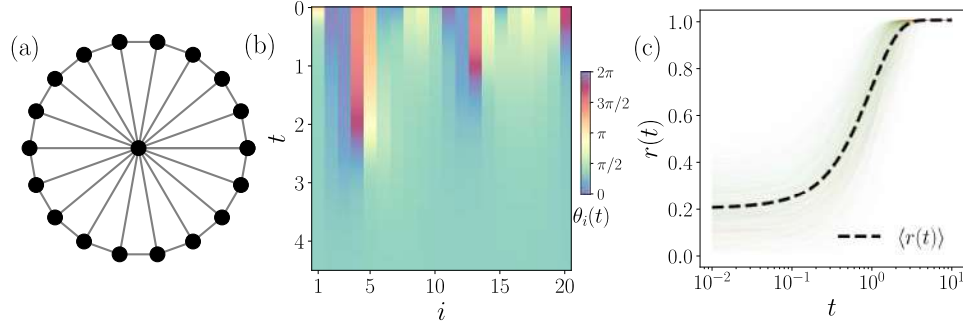
Esto implica que el sistema evoluciona a un puntos fijos que, para ciertas condiciones iniciales, corresponden a estados coherentes donde todos los osciladores oscilan en fase [132–134]. El módulo del parámetro de orden:

$$r(t) = \frac{1}{N} \left| \sum_{j=1}^N \exp[i\theta_j(t)] \right|, \quad (3)$$

permite evaluar la coherencia del sistema. Si  $r = 1$  los osciladores se mueven en completa sincronización, en cambio para  $r \approx 0$  no hay coherencia de fase en el sistema. A partir de este punto, se aludirá a  $r(t)$  como el parámetro de orden del sistema.

En la figura 1 se presenta la evolución de las fases de osciladores de Kuramoto idénticos ubicados en una rueda de  $N = 20$  nodos. En la figura 1(a) se muestra la disposición de los osciladores sobre el grafo. En la figura 1(b) se muestra la evolución temporal de las fases de los osciladores para un determinado grupo de condiciones iniciales. La evolución de las fases se obtiene mediante integración

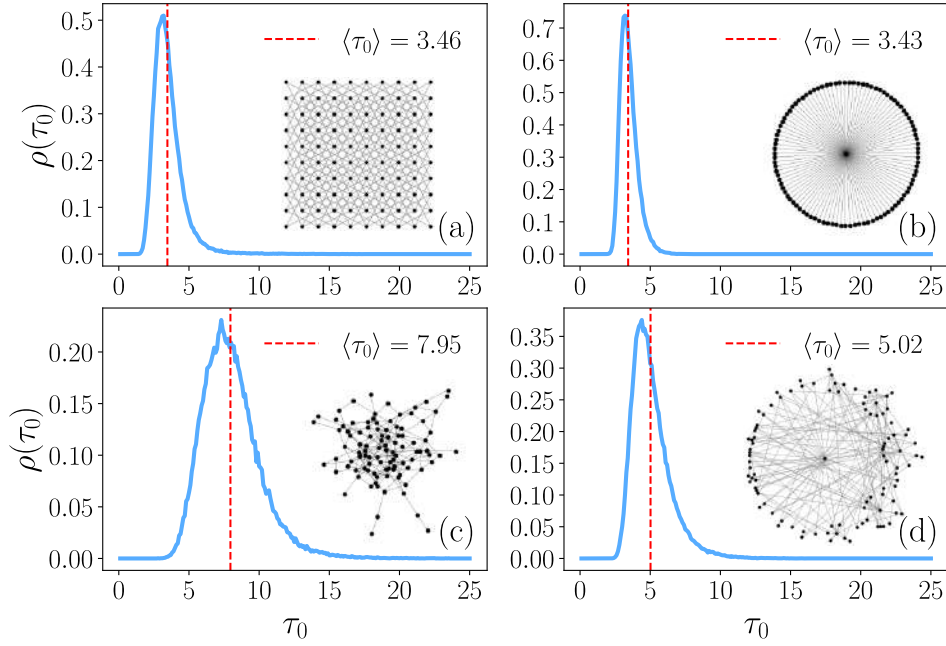




**Figura 1:** Proceso de sincronización de un grafo tipo rueda de  $N = 20$  nodos. (a) Rueda. (b) Evolución temporal de las fases  $\theta_i(t)$  obtenida mediante la integración numérica del sistema de ecuaciones (1), usando fases iniciales aleatorias muestreadas de una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ , el valor de las fases se ha codificado de acuerdo a la barra de color. (c) Evolución del parámetro de orden de  $r(t)$ . Las líneas delgadas indican los resultados de 1000 realizaciones del proceso de sincronización usando fases iniciales aleatorias, la línea discontinua representa el promedio de ensamble del parámetro de orden  $\langle r(t) \rangle$ .  $t$  está en unidades de iteraciones  $\times 10^3$ .

numérica del sistema (1) con el método de Runge-Kutta de cuarto orden implementado en C++ de la GNU Scientific Library [135] usando un paso de tiempo  $\Delta t = 0.001$ , de esta manera, el tiempo  $t$  se mide en unidades de iteraciones  $\times 10^3$ . Es importante mencionar que los resultados de la integración numérica no dependen significativamente del paso de tiempo  $\Delta t$  escogido [136–138]. Las condiciones iniciales son aleatorias y generadas a partir de una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . El valor de las fases se encuentra codificado en la barra de color. En la figura 1(c) se observa la evolución temporal del parámetro de orden  $r(t)$ , evaluado de acuerdo a (3). Las líneas delgadas corresponden a 1000 realizaciones del proceso de sincronización del sistema usando condiciones iniciales aleatorias, la línea discontinua representa el promedio de ensamble  $\langle r(t) \rangle$ . Los resultados muestran que en esta red es posible llegar a la sincronización completa, independientemente de las condiciones iniciales utilizadas. El parámetro de orden toma diferentes valores iniciales que dependen de las condiciones iniciales, pero al cabo de un determinado tiempo,  $r(t)$  evoluciona hasta tomar valores cercanos a 1 indicando la sincronización completa de la red.

Este modelo de Kuramoto simplificado ilustra la emergencia de la sincronización en redes de diferentes topologías y es sensible a las características de la red. Además, al usar frecuencias naturales idénticas para los osciladores, no se agregan elementos estocásticos, que sería el caso si las frecuencias de los osciladores se toman de distribuciones de probabilidad como se suele acostumbrar. Estas características hacen que el modelo de Kuramoto de osciladores idénticos resulte apropiado para



**Figura 2:** Densidad de probabilidad  $\rho(\tau_0)$  de los tiempos de sincronización  $\tau_0$  para 4 redes de osciladores de Kuramoto con  $N = 100$  nodos. (a) Red para los movimientos del caballo en un tablero de ajedrez de dimensiones  $10 \times 10$ , (b) rueda, (c) red de Erdős-Rényi con  $p = 0.04$ , (d) red de Barabási-Albert con  $m = 2$ . La línea vertical representa el promedio de ensemble  $\langle \tau_0 \rangle$  y cada red analizada es presentada en los recuadros. Las densidades de probabilidad se construyeron con  $10^5$  valores de  $\tau_0$  obtenidos mediante la integración numérica del sistema (1) usando fases iniciales aleatorias tomadas de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ ,  $\tau_0$  son medidos para un valor umbral  $r = 0.99$  y el tamaño de los rangos de las distribuciones son del tamaño  $\Delta\tau_0 = 0.1$ . Imagen tomada de [34].

estudiar los efectos del daño en el proceso de sincronización. Un punto importante en el estudio es encontrar una cantidad que capture tanto los efectos de la topología y más adelante los efectos del daño en estos procesos. A continuación se muestra como el tiempo de sincronización es una cantidad que ofrece estas respuestas.

#### Tiempos de sincronización

En el sentido estricto, el tiempo que le toma a un sistema de Kuramoto alcanzar un estado de sincronización completa con  $r(t) = 1$  es infinito. Sin embargo, para efectos prácticos y de investigación se puede relajar esta condición permitiendo al sistema llegar a un estado de sincronización cercano al completo, para lo cual se fija un valor umbral del parámetro de orden [139]. Bajo esta consideración se denota

al tiempo de sincronización como  $\tau_0$ , que corresponde al tiempo que el sistema necesita para llegar a un estado de sincronización caracterizado por un valor umbral de  $r(t)$ .  $\tau_0$  es una variable estocástica que depende de las condiciones iniciales del sistema. Además, su comportamiento está influenciado por la estructura de la red.

En la figura 2 se presenta la distribución de probabilidad de los tiempos de sincronización  $\tau_0$  para 4 redes de  $N = 100$  nodos y topologías diferentes. En la figura 2(a) se observa  $\rho(\tau_0)$  para la red que representa un grafo formado por los posibles movimientos de un caballo de ajedrez en un tablero de dimensiones  $N = 10 \times 10$  [140]. En la figura 2(b) se presentan los resultados para una rueda de  $N = 100$  nodos. En la figura 2(c) se analiza  $\rho(\tau_0)$  para una red de Erdős Rényi construida a partir de un grupo de  $N = 100$  nodos cuyas aristas fueron seleccionadas con probabilidad  $p = 0.04$  [141]. En la figura 2(d) se muestran los resultados para una red de Barabási-Albert construida mediante el algoritmo de conexión preferencial usando  $m = 2$  [44]. Los recuadros muestran cada una de las 4 redes analizadas y la línea vertical indica el valor del promedio de ensamble  $\langle \tau_0 \rangle$  para cada red. Los tiempos de sincronización  $\tau_0$  se obtuvieron a partir de la integración numérica del sistema (1) y se midieron considerando el umbral del parámetro de orden  $r = 0.99$ . Las densidades de probabilidad se construyeron con  $10^5$  realizaciones Monte Carlo del proceso, usando fases iniciales aleatorias tomadas de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Los rangos usados para la construcción de  $\rho(\tau_0)$  se tomaron del tamaño  $\Delta\tau_0 = 0.1$ .

En los resultados se observa que las densidades de probabilidad son asimétricas y muestran diferencias asociadas a las diferentes topologías de las redes. Para cada red, tanto la altura como el ancho de las distribuciones son diferentes, en los casos de la red de los movimientos del caballo en el ajedrez y la rueda se observan distribuciones angostas, para el caso de la red de Barabási-Albert y la red de Erdős-Rényi se observa mayor dispersión de los tiempos de sincronización. Adicionalmente, los tiempos de sincronización medios  $\langle \tau_0 \rangle$ , también muestran diferencias para cada estructura, en promedio las estructuras que toman menos tiempo para sincronizarse son la rueda y la red de movimientos del caballo seguidas de la red de Barabási-Albert y la red de Erdős-Rényi. Esta información es importante porque, en principio, muestra que los tiempos de sincronización pueden resultar cantidades sensibles al daño en las redes de los sistemas de Kuramoto, de tal manera que una forma de capturar los efectos del daño en el proceso de sincronización sea a través de estos tiempos.

#### MODELO DE KURAMOTO EN PRESENCIA DE DAÑO

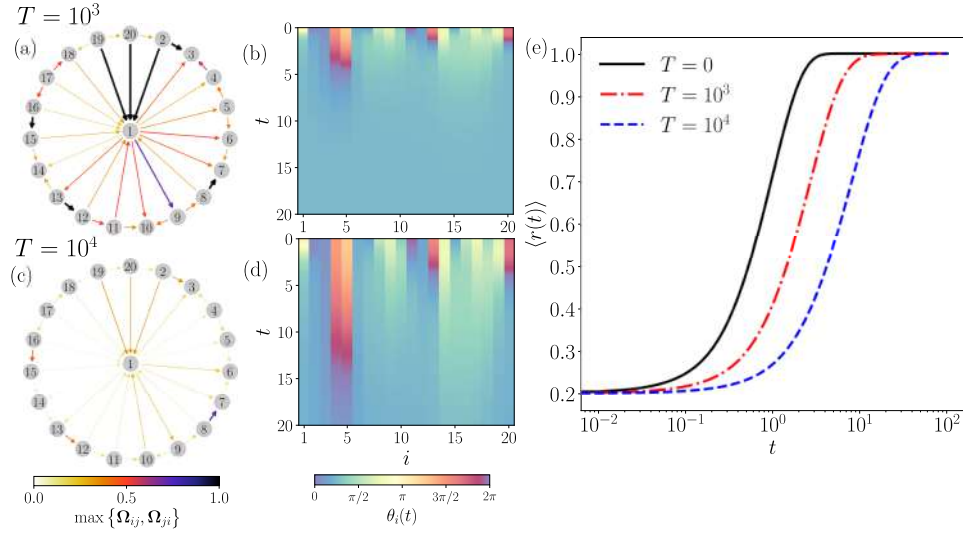
En el capítulo 2 se introdujo el modelo de generación de daño acumulado en redes. En este contexto, el daño afecta las conexiones entre los osciladores del sistema de Kuramoto representadas mediante las aristas de la red subyacente. Para introducir el daño de la red en el modelo de Kuramoto de osciladores idénticos, en las ecuaciones (1), se reemplaza la matriz de adyacencia  $A$  de la red por la matriz

de pesos  $\Omega(T)$  definida de acuerdo a la expresión (2), la cual contiene la información sobre el estado de daño de la red. Las ecuaciones que describen el sistema de Kuramoto con daño son

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^N \Omega_{ij}(T) \sin[\theta_j(t) - \theta_i(t)]. \quad (4)$$

Este sistema de ecuaciones, que describe la nueva dinámica del sistema, depende de la cantidad de daño en la red, el cual está asociado al tiempo de generación de daño  $T$ . Es importante diferenciar las 2 escalas de tiempo del sistema, la más grande, está asociada al proceso de generación de daño cuyo tiempo característico es  $T$ . La escala más pequeña está asociada al proceso de sincronización de la red con tiempos característicos  $t$ . En los sistemas estudiados, los tiempos para los cuales incrementa el daño son tan largos que dan lugar a que el sistema se sincronice. Es importante mencionar, que los sistemas que se analizan en este libro, son sistemas que en ausencia de daño, alcanzan la sincronización completa para la mayoría de condiciones iniciales.

El daño en las conexiones de la red, produce modificaciones en el proceso de sincronización. Para ilustrar las consecuencias del daño, en la figura 3 se presentan los cambios en el proceso de sincronización de la rueda formada por  $N = 20$  nodos, utilizando un parámetro de daño  $\alpha = 0.5$ . En la figura 3(a) se ilustra la red para un estado de daño  $T = 10^3$ , en la ilustración solo se muestran las aristas de mayor peso entre cada par de nodos, el peso de las aristas se codifica de acuerdo a la barra de color. En este estado, se observan aristas que mantienen su peso original, es decir, no han recibido daño; sin embargo, también hay aristas bastante afectadas como consecuencia de la distribución preferencial del daño. En la figura 3(b) se presenta la evolución de las fases  $\theta_i(t)$  de la rueda a  $T = 10^3$ , para este caso, se usaron como condiciones iniciales las fases iniciales en la sincronización en la figura 1(b). Los valores de las fases están codificados de acuerdo a la barra de color. Nuevamente se encuentra que el sistema evoluciona a un estado donde las fases adquieren el mismo valor, sin embargo, cuando se comparan los tiempos de sincronización entre este sistema y el sistema sin daño de la figura 1, se observa que en las condiciones actuales, el sistema necesita más tiempo para alcanzar un estado de sincronización completa. En la figura 3(c) se presenta la red para un estado de daño a  $T = 10^4$ , el efecto de daño es aún más notable y se encuentran regiones cuyas conexiones prácticamente han desaparecido. En la figura 3(d) se presenta la gráfica de evolución de las fases  $\theta_i(t)$  a partir de las mismas condiciones iniciales de 1. De manera similar, se observa la evolución de las fases a un estado sincronizado, pero el tiempo de sincronización aumenta en comparación a los tiempos de sincronización a  $T = 0$  y  $T = 10^3$ . Estos cambios en los tiempos de sincronización se pueden observar también en la evolución del parámetro de orden  $r(t)$ . En la figura 3(e) se presenta el promedio de ensamble del parámetro de orden  $\langle r(t) \rangle$  en función del tiempo para los estados de daño de la red caracterizados por  $T = 0$ ,  $T = 10^3$  y  $T = 10^4$ . Inicialmente cuando las fases toman valores aleatorios,  $\langle r(t) \rangle$  presenta un



**Figura 3:** Proceso de sincronización en una rueda de  $N = 20$  nodos sujeta a daño aleatorio acumulado con  $\alpha = 0.5$ . (a) Representación de la red y sus conexiones con daño a  $T = 10^3$ . En la gráfica se representan solo las líneas de mayor peso entre cada par de vértices, la barra de color codifica los pesos de las conexiones. (b) Evolución de las fases  $\theta_i(t)$  de cada nodo  $i = 1, 2, \dots, N$  en función de  $t$  y están codificadas de acuerdo a la barra de color. A medida que incrementa el daño, se observa que el sistema permanece más tiempo en un estado incoherente. En (c) se presentan las gráficas del parámetro de orden  $r(t)$  en función del tiempo  $t$ , a medida que el daño aumenta se observa que le toma más tiempo en llegar al valor de 1.

valor cercano a cero, pero a medida que el sistema evoluciona a un estado sincronizado,  $\langle r(t) \rangle$  se incrementa hasta llegar al valor de 1. Cuando el daño altera las conexiones de la red,  $\langle r(t) \rangle$  también experimenta cambios. En general, se observa que para un valor mayor de  $T$ , el tiempo que necesita para alcanzar su valor máximo también aumenta. Los promedios de ensamble fueron calculados con base en 1000 realizaciones Monte Carlo del proceso, usando fases iniciales aleatorias. Estos resultados muestran que el daño generado en la conectividad del sistema, altera los tiempos para los cuales los sistemas de Kuramoto alcanzan un estado de sincronización completa.

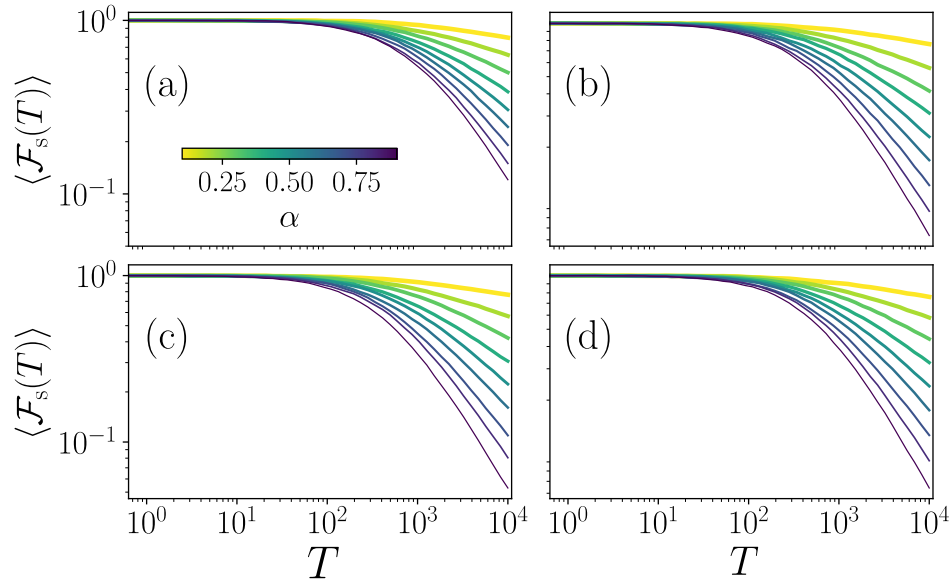
## FUNCIONALIDAD EN PROCESOS DE SINCRONIZACIÓN

Al igual que en los estudios de transporte estocástico con daño, es importante contar con una medida de funcionalidad que permita determinar los efectos del daño de las redes en el proceso de sincronización. En este nuevo contexto, la función de las redes es permitir la sincronización completa de los osciladores de Kuramoto. Considerando que los tiempos de sincronización permiten distinguir entre diferentes topologías y son cantidades sensibles a las modificaciones que produce el daño en las conexiones de la red, se define una medida de funcionalidad que compara los tiempos de sincronización del sistema

$$\mathcal{F}_s(T) \equiv \frac{\tau_0}{\tau(T)}, \quad (5)$$

donde  $\tau(T)$  representa el tiempo de sincronización de la red con daño. Esto es, el tiempo que le toma a la red con daño en llegar a un estado coherente de las fases de oscilación, determinado por un valor umbral del parámetro de orden  $r(t)$ . El valor de  $\tau_0$  es el tiempo de sincronización de la red sin daño. Esta medida toma el valor de 1 cuando no hay daño en la red, esto es, para  $T = 0$ . Luego se espera que sus valores decaigan cuando el daño se acumula en la red. En los casos para los cuales el daño hace que la red no pueda sincronizarse, se considera  $\tau(T) \rightarrow \infty$  y por lo tanto  $\mathcal{F}_s(T) \rightarrow 0$ .

Al igual que en el estudio de los tiempos de sincronización de los sistemas de osciladores de Kuramoto sin daño, para el análisis de los sistemas de Kuramoto con daño se usan simulaciones Monte Carlo. El sistema de ecuaciones de Kuramoto (4) se resuelve mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden con un incremento de tiempo  $\Delta t = 0.01$  usando fases iniciales que se obtienen de una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo  $(0, 2\pi]$ . En particular, para establecer los tiempos de sincronización  $\tau_0$  y  $\tau(T)$  se escoge el valor umbral  $r \geq 0.99$ . En la figura 4 se explora la funcionalidad de sincronización propuesta en (5) en 4 sistemas de osciladores de Kuramoto dispuestos sobre redes de  $N = 100$  nodos con diferentes topologías que sincronizan completamente. Los resultados muestran los valores de los promedios de ensamble  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  en función de  $T$ . Las redes utilizadas corresponden a las mismas redes que se usaron en el análisis de los tiempos de sincronización presentado en la figura 2. La figura 4(a) corresponde a los resultados para el grafo del movimiento del caballo, en la figura 4(b) se presentan los resultados para la rueda, en la figura 4(c) se observan los resultados para una red de Erdős-Rényi y en la figura 4(d) los resultados para una red de Barabási-Albert. Los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  se midieron para diferentes valores de  $\alpha$ , codificados de acuerdo a la barra de color que aparece en 4(a). Los promedios se evaluaron con base en 1000 realizaciones Monte Carlo del proceso, usando fases iniciales aleatorias. Para cada red se observa una disminución de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  cuando se incrementa el daño en la red. Esto está en concordancia con el ejemplo de la figura 3, mostrando que en todos estos casos, el incremento del daño en la red lleva, en promedio, a un aumento en los tiempos de sincronización de dichas estructuras. Adicionalmente, se observa que



**Figura 4:** Evolución del promedio de ensemble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  a medida que el daño incrementa. Las diferentes curvas corresponden a diferentes valores de  $\alpha$  codificados en la barra de color. La evaluación se hizo para 2 redes deterministas y 2 aleatorias: (a) grafo de los movimientos del caballo en un tablero de ajedrez de dimensiones  $10 \times 10$ , (b) rueda, (c) red de Erdős-Rényi y (d) red de Barabasi-Albert. Las redes cuentan con  $N = 100$  nodos. Las simulaciones cuentan con 1000 realizaciones Monte Carlo del proceso considerando fases iniciales aleatorias.

el aumento en el parámetro de daño  $\alpha$  también implican un mayor decrecimiento en  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$ . Esto es de esperarse puesto que el aumento en  $\alpha$  se puede ver como un aumento en la intensidad del daño que acumula la estructura debido a su poca capacidad de reparación.

Uno de los aspectos a notar es que, a pesar de que las redes poseen diferentes topologías, en las figuras 4(b)-(d) se ve un comportamiento y valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  similares. En cuanto que en la figura 4(a) se ve un comportamiento reescalado de los anteriores. Esto es consecuencia del número de aristas de las redes  $|\mathcal{E}|$ . Puesto que el daño se distribuye en las aristas, hay una parte de la robustez de estas redes que proviene de este número y la medida de funcionalidad captura este efecto. El grafo del movimiento del caballo tiene 576 aristas, la rueda tiene 396, y la red de Erdős-Rényi y Barabási-Albert poseen 392 aristas. Para investigar mejor estos efectos de estructura y número de líneas se analizó el conjunto de grafos no isomorfos de  $N = 6$  nodos, los resultados se reportan en la siguiente sección.

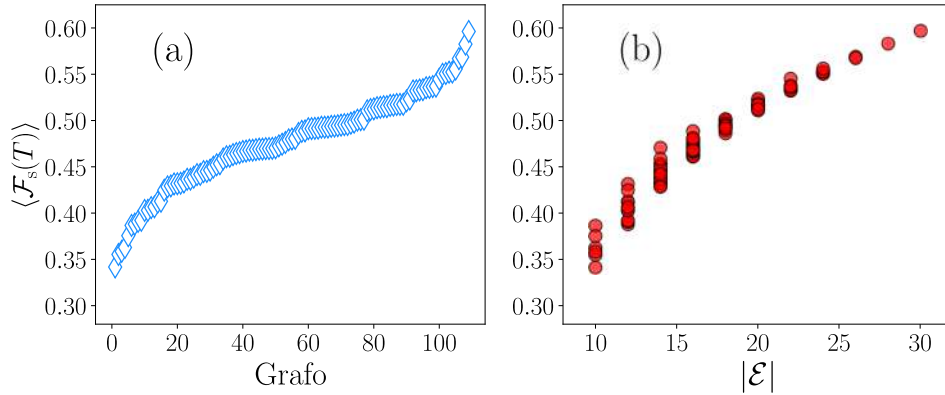


GRAFOS CONEXOS DE  $N = 6$  NODOS CON DAÑO

En esta parte del libro se estudia la funcionalidad de sincronización de las redes en función de la estructura. Para llevar a cabo esta tarea se analiza la capacidad de sincronización de grafos pequeños. Los grafos estudiados corresponden al grupo de grafos conexos no isomorfos de  $N = 6$  nodos, el cual está compuesto por 112 estructuras diferentes obtenidas de [142]. Sin embargo, se estudiaron 109 elementos de este conjunto, la razón es que para las estructuras como el anillo, y 2 estructuras formadas por un anillo de 5 nodos y una o dos aristas adicionales existen muchas condiciones iniciales para las cuales no sincronizan completamente, incluso cuando no presentan daño. En la referencia [133] se puede encontrar más detalles sobre estos casos particulares de redes de Kuramoto que no se sincronizan completamente.

Por cada grafo se usaron  $10^7$  realizaciones del proceso de sincronización usando condiciones iniciales aleatorias y se determinaron los tiempo de sincronización de la red sin daño y con daño dando lugar a las parejas  $(\tau_0, \tau(T))$ . Los tiempos  $\tau(T)$  se midieron para el proceso a un tiempo de daño fijo  $T = 100$  y se usó el parámetro de daño  $\alpha = 0.5$ .

Inicialmente se calcularon los promedios de ensamble  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  de cada estructura y se compararon entre sí. En la figura 5 se muestran los resultados de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  para los 109 grafos de  $N = 6$  nodos analizados. En el panel 5(a) se reportan los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  ordenados de forma creciente. A primera vista, se observa que aparecen



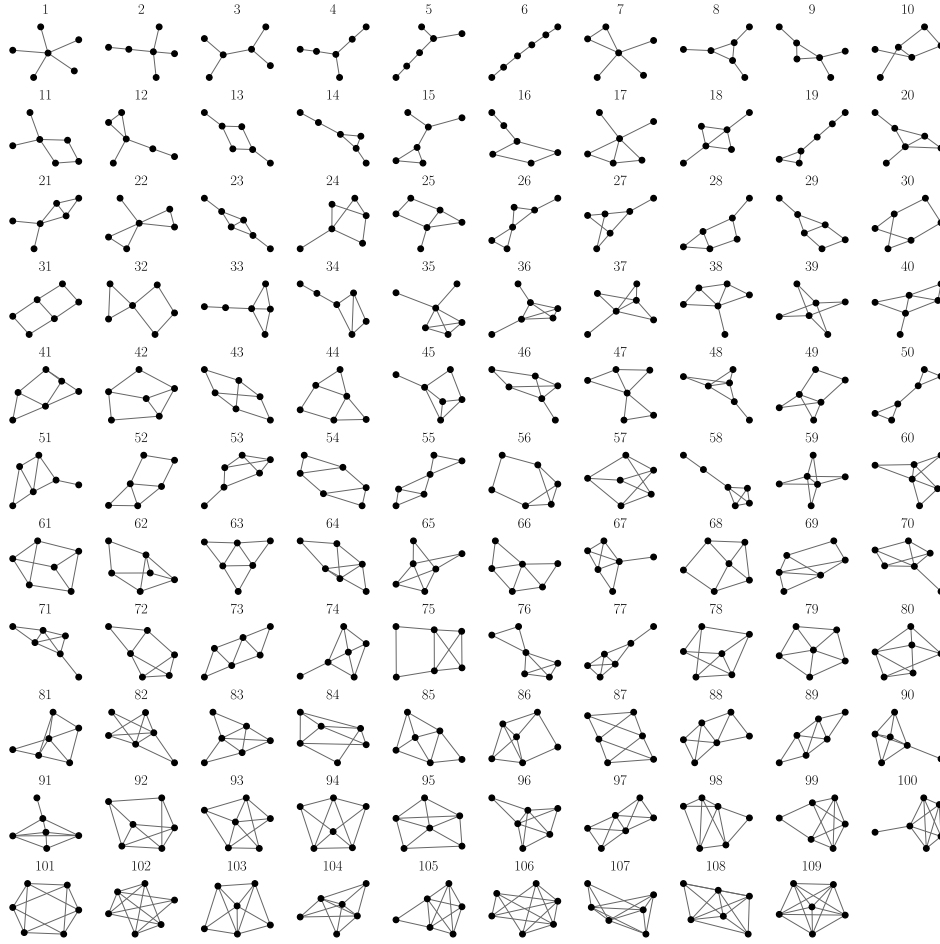
**Figura 5:** Promedio de ensamble de la funcionalidad de sincronización  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  en  $T = 100$  para grafos conexos y no isomorfos con  $N = 6$  nodos. (a) Valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  ordenados de menor a mayor. (b)  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  en función del número total de conexiones de la red  $|\mathcal{E}| = \sum_{i,j=1}^N A_{ij}$ . Los resultados se obtuvieron numéricamente considerando el parámetro de daño  $\alpha = 0.5$  y la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales (4) para  $10^7$  realizaciones. Imagen tomada de [34].



algunos grupos con valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  cercanos entre sí, los cuales corresponden a grupos de topologías que poseen el mismo número de aristas. Entonces, la medida  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  genera un ordenamiento de los grafos acorde a  $|\mathcal{E}|$ , donde para grafos dirigidos  $|\mathcal{E}| \equiv \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij}$ . En el panel 5(b) se presentan los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  en función de  $|\mathcal{E}|$ . La gráfica muestra que la relación entre estas cantidades no es lineal. También, analizando más detalladamente cada grupo, se encuentran diferencias sutiles entre los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  para las estructuras con igual número de aristas. Particularmente se puede notar que en los grafos con menor número de aristas parece haber una mayor influencia de la estructura, pues las diferencias del valor de funcionalidad son más significativas. En tanto que las estructuras con mayor número de aristas poseen valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  más cercanos entre sí. En algunos casos estas diferencias de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  en estructuras con igual  $|\mathcal{E}|$  son del orden de  $10^{-5}$ , las cuales se pudieron capturar gracias a las  $10^7$  realizaciones que se hicieron por cada grafo. Con base en la información de la figura 5 se generó la figura 6 donde se presentan los grafos ordenados conforme al valor de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  para  $T = 100$ . La organización empieza con los grafos tipo árbol (1 a 6) que tienen los valores más bajos de funcionalidad siendo los menos resistentes al daño durante el proceso de sincronización. El grafo menos resistente de acuerdo a esta organización es la estrella con  $\langle \mathcal{F}_s \rangle = 0.34175$ . Por otra parte, los grafos que les siguen están más conectados y poseen estructuras como ciclos y más caminos redundantes. La estructura más resistente es el grafo completamente conectado con  $\langle \mathcal{F}_s \rangle = 0.59621$ . Sin embargo,  $|\mathcal{E}|$  también juega un papel importante en esta organización, pues el tener un mayor número de aristas no solo hace que los grafos puedan formar otro tipo de estructuras si no que también el daño se distribuye mejor entre las líneas. Por lo tanto es necesario hacer un análisis más exhaustivo que permita encontrar los efectos más allá del tamaño de los grafos.

Algo que es importante resaltar es que este orden de los grafos de acuerdo a su tolerancia al daño, cuando la función asociada es la sincronización, difiere del orden obtenido para el mismo conjunto de grafos cuando la función de la red es el transporte estocástico [26]. Un ejemplo es el grafo tipo barbell, que de acuerdo a la figura 6 aparece en el puesto 50. En [26] y en el capítulo 2 se expone esta estructura como un grafo frágil ante el daño acumulado, en el caso del transporte estocástico, debido a la cadena que une los subgrafos completos. Sin embargo, en la organización obtenida en este trabajo se observa como una estructura robusta e incluso aparece luego de estructuras con una arista más. Esto muestra que los efectos del daño acumulado son diferentes para los 2 procesos y que los mecanismos que contribuyen a que una red sea más resistente en cuestiones de transporte no son los mismos si la función de la red es la sincronización completa.

Por otra parte, dentro de los aspectos que se resaltan entre las estructuras con igual número de líneas está el hecho de que las topologías más resistentes tienen una parte muy conectada unida a una cadena de nodos, véase por ejemplo el grafo 19 o el 34 de la gráfica. Una posible explicación es que estas cadenas pueden recibir poca influencia de la dinámica del resto de la red donde puede estar concentrado



**Figura 6:** Grafos conexos no isomorfos de  $N = 6$  en los que ocurre la sincronización completa. Las redes se ordenan de acuerdo a su respuesta al daño considerando el valor de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  en  $T = 100$  presentado en la figura 5(a) para  $\alpha = 0.5$  y  $10^7$  realizaciones de la sincronización en redes con daño. Los grafos son obtenidos de [142]. De los 112 grafos de este tipo, se descartaron 3 debido a que no se sincronizan completamente para muchas configuraciones iniciales. Imagen tomada de [34].

la mayor parte del daño, de tal manera que funciona como un regulador que evita que el daño afecte aún más el proceso de sincronización de la red. Otra posibilidad es que el daño tienda a concentrarse en esta área menos conectada de tal manera que el resto de la red no se vea afectada severamente. Adicionalmente no es posible encontrar un patrón en cuanto al número de ciclos de 3, 4 o 5 nodos. Algo que se puede encontrar en la clasificación de estas redes pero respecto a su capacidad

de transporte difusivo con daño [26].

En general, la funcionalidad de sincronización permite capturar los efectos globales que el daño produce en los procesos de sincronización de redes de osciladores de Kuramoto. Sin embargo, los efectos observados provienen principalmente de la contribución del número de líneas de la red. Aunque  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  puede detectar ciertas diferencias para grafos con el mismo número de aristas, se requiere de una gran cantidad de simulaciones. Adicionalmente, la medida usada es un promedio por lo que hay mucha información que no se toma en cuenta. Por estos motivos es necesario investigar otra medida que permita entender mejor el efecto de la estructura de la red. De esta manera, en lo que sigue, se estudia una medida basada en los cambios de las densidades de probabilidad de los tiempos de sincronización de las redes a medida que estas se van dañando.

Para este fin se considera la densidad de probabilidad de los tiempos de sincronización de la red sin daño  $\rho(\tau_0)$  y la densidad de probabilidad  $\rho(\tau^*)$  donde  $\tau^*$  se define como

$$\tau^* \equiv \langle \mathcal{F}(T) \rangle_{\tau(T)}, \quad (6)$$

de tal manera que  $\tau^*$  corresponde a un reescalamiento de los tiempos de sincronización de la red con daño. La definición (6) remueve el efecto del número de líneas en  $\tau(T)$  debido al factor  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ , esto pone a  $\tau_0$  y  $\tau^*$  en la misma escala y permite obtener una comparación más apropiada entre los tiempos de sincronización. Luego se estudian las diferencias entre las densidades de probabilidad  $\rho(\tau_0)$  y  $\rho(\tau^*)$ . Para poder compararlas se usa el método de la divergencia de Kullback-Leibler. Este método de teoría de la información, permite evaluar la diferencia entre una distribución de probabilidad  $P(z)$  y una distribución de probabilidad de referencia  $Q(z)$  que describen a la variable aleatoria  $z$  [143, 144]. En el caso de distribuciones continuas esta divergencia está dada por [143, 144]

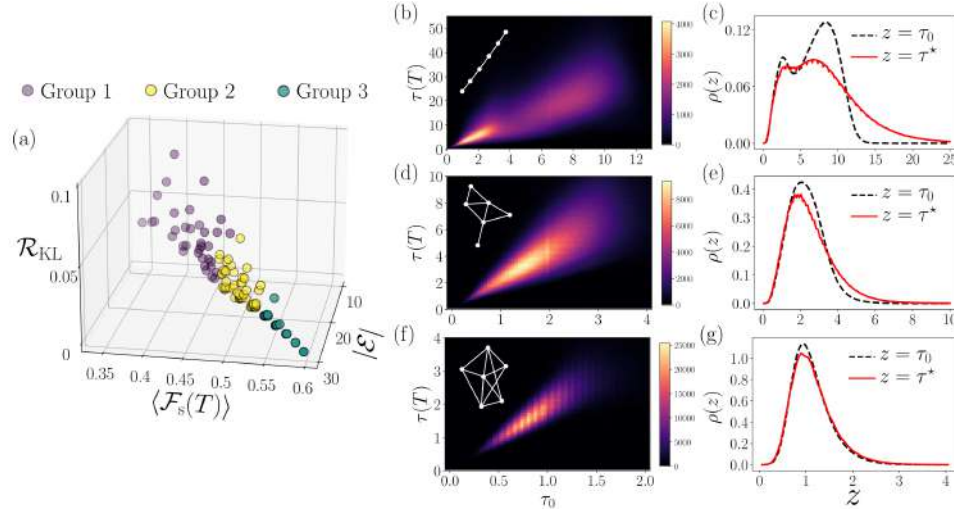
$$\mathcal{D}_{\text{KL}}[P||Q] = \int P(z) \log \left[ \frac{P(z)}{Q(z)} \right] dz. \quad (7)$$

De esta definición se observa que  $\mathcal{D}_{\text{KL}}[P||Q] > 0$  y que  $\mathcal{D}_{\text{KL}}[P||Q] = 0$  si  $P = Q$ . Es importante resaltar que la divergencia de Kullback-Leibler no es una medida simétrica, esto quiere decir que  $\mathcal{D}_{\text{KL}}[P||Q] \neq \mathcal{D}_{\text{KL}}[Q||P]$  por lo que aunque a veces se suele referirse a  $\mathcal{D}_{\text{KL}}[P||Q]$  como una distancia, no lo es.

Para aplicar esta medida al estudio de los cambios en las densidades de probabilidad de los tiempos de sincronización  $\tau_0$  y  $\tau^*$  se considera la siguiente definición

$$\mathcal{R}_{\text{KL}}\{\rho(\tau_0), \rho(\tau^*)\} \equiv \frac{1}{\Delta\tau} \mathcal{D}_{\text{KL}} \left[ \rho(\tau_0) \left\| \frac{\rho(\tau_0) + \rho(\tau^*)}{2} \right\| \right]. \quad (8)$$

En este caso  $(\rho(\tau_0) + \rho(\tau^*))/2$  corresponde a la densidad de probabilidad total que involucra todas las medidas de  $\tau_0$  y  $\tau^*$  y contiene toda la información del proceso de sincronización. Además considerando  $(\rho(\tau_0) + \rho(\tau^*))/2$  como la distribución de



**Figura 7:** Efectos del daño acumulado en la sincronización en los grafos conexos y no isomorfos con  $N = 6$  nodos para un valor de daño  $T = 100$  y  $\alpha = 0.5$ . (a) Valores de  $(|\mathcal{E}|, \langle \mathcal{F}_s(T) \rangle, \mathcal{R}_{KL})$  para las 109 redes presentadas en la figura 6. Los valores de  $\mathcal{R}_{KL}$  se obtuvieron numéricamente mediante la ecuación (8). (b) Histograma bidimensional de los  $10^7$  pares de valores  $(\tau_0, \tau(T))$  para la cadena mostrada en el recuadro, las frecuencias están codificadas en la barra de color. (c) Densidades de probabilidad  $\rho(z)$  de los tiempos de sincronización  $\tau_0$  y  $\tau^*$ , para su elaboración se usaron rangos de tamaño  $\Delta\tau = 0.1$ . Los paneles (d) y (e) muestran los resultados para el grafo 40 y (f) y (g) para el grafo 93 de la figura 6. Los grupos mostrados en (a) se obtuvieron mediante el algoritmo de clasificación K-means de la librería *Scikit-learn* de Python [145]. Imagen tomada de [34].

referencia se evitan denominadores nulos.  $\Delta\tau$  corresponde al tamaño de los rangos usados para construir las densidades de probabilidad  $\rho(\tau_0)$  y  $\rho(\tau^*)$ . De esta manera  $\mathcal{R}_{KL}\{\rho(\tau_0), \rho(\tau^*)\}$  muestra las variaciones entre la información que se obtiene de la red sin daño y la información que involucra los efectos del daño en el proceso de sincronización de la misma. Para el caso en que estas 2 probabilidades coincidan  $\mathcal{R}_{KL}\{\rho(\tau_0), \rho(\tau^*)\} = 0$ , en este escenario se encuentra que los efectos del daño nada más reescalan los tiempos de sincronización. Cuando el daño genera cambios, más allá del reescalamiento de estos tiempos, se incrementa la disimilitud entre las densidades y por lo tanto  $\mathcal{R}_{KL}\{\rho(\tau_0), \rho(\tau^*)\}$  aumenta.

En la figura 7 se presenta el análisis completo de los 109 grafos de la figura 6 usando  $T = 100$  y  $\alpha = 0.5$ . La figura 7(a) muestra el gráfico de dispersión de los valores  $(|\mathcal{E}|, \langle \mathcal{F}_s(T) \rangle, \mathcal{R}_{KL})$  obtenidos para cada una de las 109 redes analizadas. En la figura 7(b) se presenta el histograma bidimensional de los tiempos de sincronización  $\tau_0$  y  $\tau(T)$  de la cadena de  $N = 6$  nodos. El color refleja el conteo de

frecuencias de acuerdo a la barra de color. En la figura 7(c) se muestran las densidades de probabilidad  $\rho(\tau_0)$  mediante la línea negra y  $\rho(\tau^*)$  mediante la línea roja, construidas usando rangos de tamaño  $\Delta\tau = 0.1$  de los tiempos de sincronización sin daño  $\tau_0$  y con daño reescalados  $\tau^*$  para la cadena. En las figuras 7(d)-(g) se muestran los resultados para los grafos 40 y 93 de la figura 6. Todos los resultados se obtuvieron considerando  $10^7$  realizaciones del proceso de sincronización para cada red.

Con el fin de entender los resultados de la figura 7(a), se realiza una clasificación de las redes utilizando el algoritmo K-means. Este es un algoritmo de clasificación no supervisada, de tal manera que los datos a clasificar no necesitan etiquetas externas y se clasifican de acuerdo a la estructura interna que presentan. Particularmente, el algoritmo de K-means, particiona el conjunto de datos dado en K grupos. La clasificación se hace en base a la optimización (minimización) de la distancia cuadrática de los elementos del conjunto de datos a K centroides, en principio definidos, pero que se van actualizando conforme se itera el algoritmo hasta que quedan fijos o se establece un umbral para la minimización [146]. En este libro se utilizó el algoritmo K-means de la librería *Scikit-learn* de Python [145] para establecer una clasificación de las redes de acuerdo a su respuesta al daño. En esta clasificación se utilizó la información correspondiente al número de líneas de la red  $|\mathcal{E}|$ , el valor del promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  para  $T = 100$  y el valor de  $\mathcal{R}_{KL}$  y se estableció el número de grupos en  $K=3$ . En la figura 7(a) los grupos se denominan grupo 1, 2 y 3. El grupo 1 corresponde al grupo de redes donde los efectos del daño son más evidentes, los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  son más bajos y los de  $\mathcal{R}_{KL}$  más altos, por lo que en este grupo de redes se encuentran aquellas en las que las modificaciones de las densidades de probabilidad de los tiempos de sincronización son más marcadas. Un ejemplo de un grafo del grupo 1 es la cadena de 7(b) y (c), en el panel (c) se ve claramente el contraste de las dos densidades de probabilidad,  $\rho(\tau_0)$  presenta una forma con 2 lóbulos, sin embargo, el daño en la estructura hace que esos lóbulos casi desaparezcan de  $\rho(\tau^*)$ . El grupo 2 está constituido por redes donde los efectos del daño no son tan severos como en el primer caso, los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  aumentan un poco y los valores de  $\mathcal{R}_{KL}$  son más bajos. Sin embargo, hay modificaciones moderadas en las densidades de probabilidad. El grafo de la figura 7(d) y (e) ilustra un ejemplo del grupo 2, los cambios no son tan pronunciados como en el caso anterior pero igual es apreciable la modificación de  $\rho(\tau^*)$ . Por último, el grupo 3 reúne las redes más robustas del conjunto, en estas redes, los efectos del daño solo reescalan los tiempos de sincronización. La figura 7(f) y (g) muestran los resultados para un grafo de este grupo, como se puede observar  $\rho(\tau^*)$  sufre modificaciones muy pequeñas en comparación con  $\rho(\tau_0)$ . En los histogramas de las figuras 7(b), (d) y (f) se observa una dispersión de los valores de los tiempos de sincronización cerca de una línea recta.

También se hizo una comparación de los resultados de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  y  $\mathcal{R}_{KL}$  para analizar la respuesta al daño de las redes de  $N = 100$  nodos mostradas en la figura 2. Para este caso, se utilizaron  $10^5$  pares de tiempos de sincronización  $(\tau_0, \tau(T))$

Red	$ \mathcal{E} $	$\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$	$\mathcal{R}_{KL}$
Caballo	576	0.7072	0.0138
Barabási-Albert	392	0.6185	0.0208
Erdős-Rény	392	0.593	0.1117
Rueda	396	0.5907	0.1532

**Tabla 3:** Caracterización de la sincronización y acumulación de daño para las redes de  $N = 100$  nodos mostradas en la figura 2. Los valores se obtienen del análisis estadístico de  $10^5$  pares de tiempos de sincronización  $(\tau_0, \tau(T))$  generados para  $T = 1000$ ,  $\alpha = 0.5$  y  $r = 0.99$ .

con  $T = 1000$ , un parámetro de daño  $\alpha = 0.5$  y un umbral de sincronización  $r = 0.99$ . Los histogramas utilizados para determinar las densidades de probabilidad se construyeron con rangos  $\Delta\tau = 0.1$ . En la tabla 3 se presentan los valores de  $|\mathcal{E}|$ ,  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  y  $\mathcal{R}_{KL}$  de las redes, ordenados de mayor a menor valor de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$ . En la tabla se puede observar que el grafo del movimiento del caballo es la estructura más resistente considerando los valores de  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  y  $\mathcal{R}_{KL}$ . Luego aparece la red de Barabási-Albert. A pesar de que la red de Erdős-Rényi y la red de Barabási-Albert comparten el mismo número de aristas, la red de Erdős-Rényi aparece menos tolerante al daño, en especial si se comparan los valores de  $\mathcal{R}_{KL}$ , los cuales sí difieren bastante entre este par de estructuras. La estructura menos resistente del conjunto es la rueda evidenciado en el valor de las 2 medidas. Como se ha mencionado anteriormente, las clasificaciones para la sincronización difieren de las clasificaciones para el transporte. Vale la pena mencionar que en el caso del transporte, la rueda es una de las estructuras más resistentes, incluso por encima de las redes de Barabási-Albert, en el caso de la sincronización la rueda aparece menos resistente que la red de Barabási-Albert, un resultado capturado mediante las medidas  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle$  y particularmente  $\mathcal{R}_{KL}$ .

#### MODELO DE KURAMOTO EN LA APROXIMACIÓN LINEAL

Un enfoque particular y bastante extendido en la literatura es el estudio de la sincronización en aproximación lineal. Cuando se analiza el modelo de Kuramoto cerca del estado de sincronización completa, es decir, cuando las fases tienen valores similares entre sí, es válido considerar una aproximación del acoplamiento entre los osciladores de tipo lineal, tal que  $\sin[\theta_j - \theta_i] \approx \theta_j - \theta_i$ . Considerando su simplicidad y el amplio uso en la comunidad científica, es importante analizar los efectos del daño acumulado en la sincronización usando el modelo lineal. En esta aproximación, el modelo de Kuramoto con daño presentado en la ecuación (4) se escribe como

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} \approx \sum_{j=1}^N \Omega_{ij}(T) [\theta_j(t) - \theta_i(t)] = - \sum_{j=1}^N (S_i(T) \delta_{ij} - \Omega_{ij}(T)) \theta_j(t), \quad (9)$$

donde el grado ponderado  $\mathcal{S}_i(T)$  del nodo  $i$  se define como  $\mathcal{S}_i(T) \equiv \sum_{\ell=1}^N \Omega_{i\ell}(T)$  y  $\delta_{ij}$  representa la delta de Kronecker. En el caso de una red que ha acumulado de daño, los elementos  $L_{ij}(T)$  de la matriz Laplaciana  $\mathbf{L}(T)$  se definen mediante

$$L_{ij}(T) \equiv \mathcal{S}_i(T)\delta_{ij} - \Omega_{ij}(T). \quad (10)$$

En este orden de ideas la aproximación lineal del modelo de Kuramoto con daño de (9) define el siguiente proceso dinámico

$$\frac{d\theta_i(t)}{dt} = - \sum_{j=1}^N L_{ij}(T)\theta_j(t). \quad (11)$$

Haciendo la integración de la ecuación (11) se obtiene

$$\theta_i(t) = \sum_{j=1}^N \left( e^{-t\mathbf{L}(T)} \right)_{ij} \theta_j(0), \quad (12)$$

donde  $\theta_j(0)$  corresponden a las fases iniciales del problema. Para la matriz Laplaciana  $\mathbf{L}(T)$ , se especifica el conjunto de autovectores derechos  $\{|\Psi_j(T)\rangle\}_{j=1}^N$ , los cuales satisfacen la siguiente ecuación  $\mathbf{L}(T)|\Psi_j(T)\rangle = \mu_j(T)|\Psi_j(T)\rangle$  para  $j = 1, \dots, N$ , donde  $\mu_j(T)$  representan los autovalores asociados. Con esta información se define la matriz  $\mathbf{Q}(T)$  con elementos  $Q(T)_{ij} = \langle i|\Psi_j(T)\rangle$  y la matriz diagonal  $\mathbf{\Lambda}(t, T) = \text{diag}(e^{-t\mu_1(T)}, e^{-t\mu_2(T)}, \dots, e^{-t\mu_N(T)})$ . Las cuales satisfacen

$$e^{-t\mathbf{L}(T)} = \mathbf{Q}(T)\mathbf{\Lambda}(t, T)\mathbf{Q}(T)^{-1}, \quad (13)$$

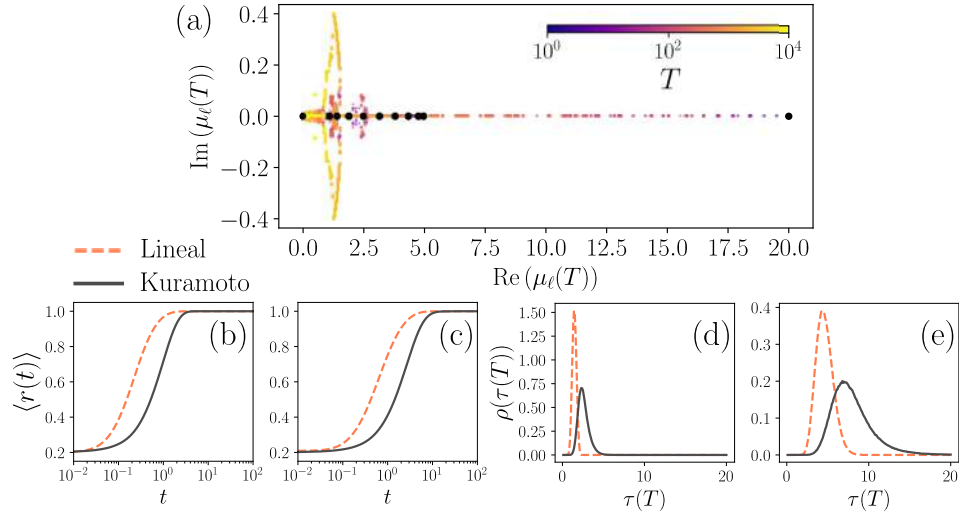
en esta ecuación  $\mathbf{Q}(T)^{-1}$  representa la inversa de la matriz  $\mathbf{Q}(T)$ . Partiendo de la matriz  $\mathbf{Q}(T)^{-1}$ , se define el conjunto de autovectores izquierdos de  $\mathbf{L}(T)$ ,  $\{\langle \bar{\Psi}_i(T)|\}_{i=1}^N$ , estos autovectores definen sus componentes mediante  $\langle \bar{\Psi}_i(T)|j\rangle = (\mathbf{Q}(T)^{-1})_{ij}$ . Con estos resultados, la solución del modelo lineal en (12) se puede escribir como

$$\theta_i(t) = \sum_{j=1}^N \sum_{\ell=1}^N e^{-t\mu_\ell(T)} \langle i|\Psi_\ell(T)\rangle \langle \bar{\Psi}_\ell(T)|j\rangle \theta_j(0). \quad (14)$$

Los resultados muestran que para el modelo de Kuramoto lineal con daño, se obtiene una solución analítica para el valor de las fases en términos de los autovalores y autovectores de  $\mathbf{L}(T)$ .

En la figura 8 se presentan los resultados del análisis de modelo lineal de sincronización con daño acumulado para la rueda de  $N = 20$  nodos de la figura 1. Para este caso se usó un valor del parámetro de daño  $\alpha = 0.5$ . En la figura 8(a) se presenta la evolución del espectro  $\{\mu_\ell(T)\}_{\ell=1}^N$  de la matriz Laplaciana  $\mathbf{L}(T)$  a medida que se genera daño en la red, el eje horizontal corresponde a la parte real de los autovalores y el eje vertical corresponde a la parte imaginaria. Los autovalores se evaluaron para valores de daño  $T = 10^0, \dots, 10^4$  codificados de acuerdo a la barra





**Figura 8:** Aproximación lineal del modelo de Kuramoto en una rueda de  $N = 20$  nodos con daño acumulado con  $\alpha = 0.5$ . (a) Evolución de los autovalores  $\mu_\ell$  de  $\mathbf{L}(T)$  en el plano complejo para diferentes valores de daño codificados de acuerdo a la barra de color. Los puntos negros representan los autovalores de la matriz Laplaciana de la red sin daño  $\mathbf{L}(0)$ . (b) Comparación de la evolución del promedio de ensamble del parámetro de orden  $\langle r(t) \rangle$  de la red sin daño usando el modelo lineal y el modelo de Kuramoto, los promedios se calcularon con base en 1000 simulaciones Monte Carlo. (c) Resultados obtenidos para  $\langle r(t) \rangle$  del sistema con daño a  $T = 1000$ . (d) Densidades de probabilidad  $\rho(\tau(T))$  de los tiempos de sincronización  $\tau(T)$ , las densidades se construyeron usando  $10^6$  valores de tiempos de sincronización  $\tau(T)$  a  $T = 0$  del modelo lineal y del modelo Kuramoto y se usaron rangos de tamaño  $\Delta\tau = 0.1$ . Un análisis similar se presenta en (e) para los tiempos de sincronización a  $T = 1000$ . En los paneles (b)-(d), las líneas punteadas corresponden a los resultados del modelo lineal obtenidos mediante la evaluación numérica de la ecuación (14) y las líneas sólidas representan los resultados del modelo de Kuramoto de sincronización obtenido mediante la integración numérica de la ecuación (4). En todos los casos se usaron condiciones iniciales aleatorias tomadas de una distribución uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ . Imagen tomada de [34].

de color. Los puntos negros corresponden a los autovalores de la matriz Laplaciana en el caso de  $T = 0$ , mostrando que corresponden a valores reales. Cuando la red recibe daño, los autovalores de  $\mathbf{L}(T)$  toman valores complejos debido a la asimetría que se genera en la red. En la figura 8(b) se presenta la evolución del promedio de ensamble del parámetro de orden  $\langle r(t) \rangle$ , definido en (3), para el caso de la red sin daño  $T = 0$ . En la gráfica se muestran los dos escenarios, con línea continua se ilustra la evolución en el sistema de Kuramoto y con la línea discontinua la evolución en el caso de la aproximación lineal. En la figura 8(c) se presenta la evolución

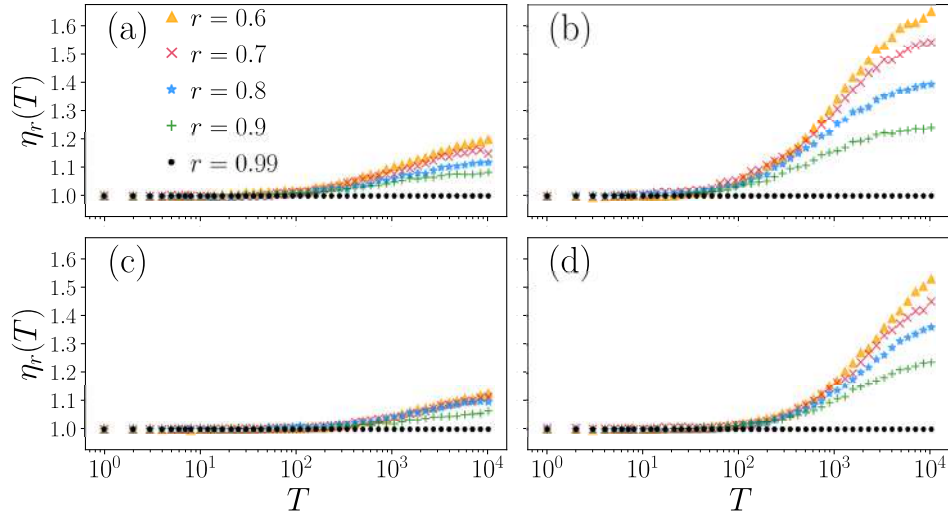


de  $\langle r(t) \rangle$  para el caso de la red con daño a  $T = 1000$ . En ambas figuras se observa que la red alcanza la sincronización completa usando los dos planteamientos, pero la evolución de  $\langle r(t) \rangle$  es diferente, el modelo lineal alcanza la coherencia de fase más rápido. Adicionalmente, la sincronización completa se alcanza en un tiempo mayor cuando la red está dañada. En la figura 8(d) se presentan las densidades de probabilidad  $\rho(\tau(T))$  de los tiempos de sincronización  $\tau(T)$  para  $T = 0$ , para los dos modelos y en la figura 8(e) se muestran las densidades de probabilidad para el caso de  $T = 1000$ . En cada caso se estableció un umbral de  $r = 0.99$ . En general, se puede observar que las distribuciones para cada modelo son diferentes, para el caso lineal se ve que las gráficas son más estrechas y los picos se alcanzan para valores de tiempos de sincronización más pequeños en comparación a los tiempos de sincronización del modelo de Kuramoto. Por otro lado, cuando se analizan los efectos del daño en los dos modelos, se observan modificaciones para los 2 escenarios. Para evaluar los promedios de las figuras 8(b) y (c) se usaron 1000 realizaciones del proceso de sincronización. Los resultados para el modelo lineal se obtuvieron mediante la evaluación numérica de las expresiones (14) y en el caso del modelo de Kuramoto se integran numéricamente las ecuaciones (4). Cada una de las densidades de probabilidad de las figuras 8(d) y (e) se construyeron con  $10^6$  valores de tiempos de sincronización medidos al alcanzar el valor umbral  $r = 0.99$  y se usó rangos de tamaño  $\Delta\tau = 0.1$ . En todos los casos se escogieron valores de fases iniciales aleatorias tomadas de una distribución de probabilidad uniforme en el intervalo  $[0, 2\pi)$ .

La comparación entre los modelos de sincronización de Kuramoto y lineal muestran diferencias, principalmente por el uso de condiciones iniciales aleatorias que no necesariamente están cerca de un estado de sincronización. Sin embargo, si se utilizan condiciones iniciales cercanas entre sí, se espera que los resultados de los dos modelos estén en concordancia. En este libro, el principal interés es investigar los procesos de sincronización con condiciones iniciales aleatorias por lo que el modelo de Kuramoto con daño, expuesto en (4), es el más apropiado.

#### CAMBIO DEL VALOR UMBRAL $r$

Tal como se mencionó en la sección tiempos de sincronización, la sincronización completa, de manera estricta, se alcanza para un tiempo  $t \rightarrow \infty$ . Sin embargo, para efectos prácticos, se fija un valor umbral  $r$  del parámetro de orden donde el sistema se encuentre muy cerca de la sincronización [139]. En esta investigación se escogió un valor umbral  $r = 0.99$  y el tiempo de sincronización se definió como el tiempo que al sistema le toma llegar a este valor umbral por debajo. Además,  $\mathcal{F}_s(T)$ , por la definición (5), es una cantidad que también depende del valor umbral  $r$ . Entonces, resulta apropiado e importante revisar la influencia que la selección del valor umbral  $r$  tiene en la evaluación de la funcionalidad de sincronización de las redes y su respuesta al daño. En esta sección se evalúan los efectos del valor de  $r$  en  $\mathcal{F}_s(T)$ .



**Figura 9:** Evolución de  $\eta_r(T)$  como función de  $T$  para diferentes valores del parámetro umbral  $r$  para una rueda y una red de Barabási-Albert con  $N = 100$  nodos.  $\eta_r(T)$  definido por la ecuación (15) se calculó con base en 1000 realizaciones para los promedios  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle_r$ , con valores del umbral  $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  y  $0.99$  para  $1 \leq T \leq 10^4$ . Rueda con (a)  $\alpha = 0.5$  y (b)  $\alpha = 1.0$ . Red de Barabási-Albert (c)  $\alpha = 0.5$  y (d)  $\alpha = 1.0$ . Imagen tomada de [34].

Para esta evaluación se propone la cantidad  $\eta_r(T)$  que compara las funcionalidades de sincronización para valores diferentes del umbral  $r$ , esta se define como

$$\eta_r(T) \equiv \frac{\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle_r}{\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle_{r=0.99}}, \quad (15)$$

donde  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle_r$  corresponde al promedio de ensamble de la funcionalidad de sincronización a un valor de daño  $T$ , usando los tiempos de sincronización medidos de acuerdo a un parámetro de orden umbral  $r$ . En particular,  $\langle \mathcal{F}_s(T) \rangle_{r=0.99}$  es el promedio de ensamble de la funcionalidad a  $r = 0.99$ .

En la figura 9 se presentan la evaluación del efecto del parámetro  $r$  en la medida de la funcionalidad de sincronización para la rueda y la red de Barabási-Albert, las dos redes de  $N = 100$  nodos. Para hacer la evaluación se calculó numéricamente  $\eta_r(T)$  para diferentes valores de daño,  $T = 0, 1, \dots, 10^4$ , utilizando los valores umbrales  $r = 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 0.99$ . Los promedios de ensamble de la funcionalidades se calcularon con base en 1000 realizaciones del proceso de sincronización usando fases iniciales aleatorias. En la figura 9(a) se presentan los resultados para la rueda con  $\alpha = 0.5$  y en la figura 9(b) para  $\alpha = 1.0$ . En la figura 9(c) se muestran los resultados para la red de Barabási-Albert usando  $\alpha = 0.5$  y en 9(d) para  $\alpha = 1.0$ . En los resultados se puede observar que para los valores obtenidos con  $r = 0.9$ , en todos

los casos se obtienen cambios más pequeños, pero para valores más bajos de  $r$  las modificaciones son más notorias, particularmente cuando el daño en la red es más grande. Es importante mencionar que para  $r$  bajos el sistema se aleja del estado de sincronización completa. Otro punto a resaltar es que los efectos del umbral se ven más marcados para  $\alpha = 1.0$  o cuando las cantidades de daño recibido en la red son mayores. Adicionalmente, se nota que las modificaciones que se producen en la funcionalidad debido al  $r$  dependen también de la estructura de la red, se observa mayores cambios para la rueda, la cual es menos robusta en comparación con la red de Barabási-Albert. De esta evaluación se puede concluir que el valor del umbral  $r$  produce modificaciones en los resultados de los valores de la funcionalidad de sincronización de los sistemas; sin embargo, estos cambios son representativos, especialmente cuando  $r$  se aleja de 0.99, es decir cuando se estudian sistemas que se alejan de la sincronización completa. Por ende, los resultados mostrados en este libro siguen siendo válidos cuando el parámetro umbral se mantiene cerca de  $r = 0.99$ .

Como conclusión de esta parte del libro, se investigaron los efectos del daño acumulado en los procesos de sincronización de osciladores de Kuramoto en redes. El daño se localizó en las líneas de la red afectando la conectividad del sistema y se midieron los tiempos de sincronización en estas nuevas condiciones. Para evaluar los efectos del daño en el proceso de sincronización se propuso una medida de funcionalidad  $\mathcal{F}_s(T)$  que permite la caracterización global de la pérdida de capacidad de sincronización del sistema, la cual mostró que, en principio, el daño genera un reescalamiento de los tiempos de sincronización. También se implementó la medida  $\mathcal{R}_{KL}$  que captura los efectos en las modificaciones de las densidades de probabilidad de los tiempos de sincronización cuando la red recibe daño. Estas medidas permitieron hacer una caracterización del conjunto de grafos pequeños conexos y no isomorfos con  $N = 6$ , de acuerdo a su tolerancia al daño acumulado. Al igual que el análisis de la tolerancia al daño de 4 estructuras de  $N = 100$  nodos correspondientes al grafo del movimiento del caballo en el ajedrez, una rueda, una red de Erdős-Rényi y una red de Barabási-Albert. Los resultados muestran que las clasificaciones de las redes de acuerdo a su tolerancia al daño en el contexto de sincronización son diferentes a las clasificaciones obtenidas para la tolerancia al daño en redes usadas para el transporte estocástico, indicando que los mecanismos detrás de cada proceso son diferentes.

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## ANTIFRAGILIDAD EN SISTEMAS DINÁMICOS

Generalmente, cuando los sistemas se exponen a daño es típico esperar que su comportamiento se ajuste a alguno de los dos escenarios más conocidos. El primer escenario recoge los sistemas que responden con afectaciones considerables de sus funciones, en estos casos el daño genera efectos adversos en su funcionalidad por lo que se consideran sistemas frágiles. El segundo escenario alberga los sistemas cuya respuesta consiste en la preservación de su funcionalidad a pesar del daño, por lo que se consideran sistemas robustos. Sin embargo, en la naturaleza también existen sistemas que luego de ser expuestos a perturbaciones externas mejoran su funcionalidad, en estos casos cuando los sistemas se benefician del daño, se habla de sistemas antifrágiles. En el contexto de este libro, la antifragilidad se considera como la respuesta que ofrece un sistema dinámico ante el daño, la cual se manifiesta como una mejoría de la capacidad del sistema para realizar alguna tarea.

El término antifrágil fue acuñado por primera vez por Nassim Taleb en su libro *Antifragil: Things That Gain from Disorder* [27]. En el libro, Taleb presenta la palabra antifrágil como un antónimo del término frágil y muestra varios ejemplos de antifragilidad en sistemas biológicos, financieros, políticos, entre otros. En la naturaleza, un ejemplo de sistema antifrágil es el sistema inmunitario que protege al cuerpo de diferentes amenazas externas. Particularmente, el sistema inmunitario adaptativo, presente en los vertebrados, se beneficia de la presencia de virus, bacterias u otros patógenos al desarrollar una memoria y generar respuestas específicas ante dichas amenazas, lo cual se traduce en un fortalecimiento del organismo para hacer frente a enfermedades o infecciones [147]. Otro ejemplo que ilustra esta situación es la hormesis [148]. Un efecto que se produce al someter el cuerpo al efecto de toxinas en bajas cantidades para proveerlo de inmunidad ante tales sustancias. Sin embargo, la antifragilidad no solo se puede observar en sistemas biológicos sino en sistemas físicos como el descrito en las referencias [149,150], donde se observa antifragilidad en fluidos de contraiones en presencia de superficies con carga aleatoria congelada, lo cual lleva a un estado más “ordenado” del sistema. En este sentido, la antifragilidad está presente en muchos sistemas complejos naturales y desarrollados por los seres humanos [28].

A pesar de lo interesante que resulta la antifragilidad y las posibles aplicaciones en diversos campos del conocimiento, no son muchas las investigaciones dedicadas a su estudio. Entre ellas se encuentran el análisis de antifragilidad en mercados

de acciones y criptomonedas [29] y en ecosistemas [151], el diseño de sistemas de energía renovable antifrágiles [152], o la búsqueda de medidas de antifragilidad en redes booleanas [30]. Por lo que es necesario ampliar los trabajos en esta área que permitan exponer los mecanismos detrás de la antifragilidad, caracterizar los sistemas donde se observa y desarrollar métodos y medidas que permitan detectarla y cuantificarla. Esta parte del libro se centra en analizar la emergencia de la antifragilidad en caminatas aleatorias que se generan en redes susceptibles de recibir daño. Particularmente, se busca establecer medidas que permitan identificar si el sistema puede ofrecer una respuesta antifrágil en caso de recibir daño en alguna de sus líneas o en sus comunidades e identificar las características de estas redes antifrágiles. Este capítulo está basado en el artículo de investigación [31].

#### ANTIFRAGILIDAD EN REDES CON DAÑO EN UNA LÍNEA

Como ya se ha mencionado, esta parte del libro está motivada por la búsqueda y detección de antifragilidad en procesos de transporte estocástico en redes. En una primera aproximación a estas ideas, se analiza la emergencia de antifragilidad en caminatas aleatorias que se desarrollan en redes con daño en una sola de sus líneas. Continuando con la idea general de la obra, el daño se entiende como la reducción en la capacidad de transporte de las aristas de la red, o dicho de otra manera, la reducción del peso de las líneas.

Inicialmente, se considera una red formada por  $N$  nodos que se encuentran conectados mediante el conjunto de aristas  $\mathcal{E}$  y con una topología que está descrita mediante la matriz de adyacencia  $\mathbf{A}$  y la matriz de pesos asociada  $\mathbf{\Omega}$ . Para un caminante aleatorio que se mueve entre los nodos de una red con pesos se considera la matriz de transición  $\mathbf{W}(\mathbf{\Omega})$  con elementos definidos en (3),  $w_{i \rightarrow j} = \frac{\Omega_{ij}}{S_i}$ , donde  $S_i$  es el grado ponderado del nodo  $i$ , definido como  $S_i = \sum_{j=1}^N \Omega_{ij}$ . En el caso de un caminante aleatorio que se mueve en la red sin daño  $\Omega_{ij} = A_{ij}$ , y la matriz de transición asociada a este caminante se denota como  $\mathbf{W}(\mathbf{A}) = \mathbf{W}$ .

En el proceso de dañar una de las líneas de la red, se escoge la línea  $(a, b) \in \mathcal{E}$ , que conecta el nodo  $a$  con el nodo  $b$  de la red, y se modifica su peso a  $1 - \beta$ .  $\beta$  representa un parámetro asociado al daño generado, tal que  $0 \leq \beta < 1$ . En el caso de  $\beta \rightarrow 0$  se entiende que el daño es pequeño, de tal manera que cuando  $\beta = 0$  no existe daño en la línea. Sin embargo, cuando  $\beta \rightarrow 1$ , se entiende que el daño es tan severo que la conexión tiende a desaparecer. En este nuevo estado de la red, la matriz de pesos que representa este proceso de daño se define como  $\mathbf{\Omega}^*$ , con elementos

$$\Omega_{ij}^* = \begin{cases} A_{ij} & i \neq a, j \neq b \\ (1 - \beta)A_{ab} & i = a, j = b. \end{cases} \quad (1)$$

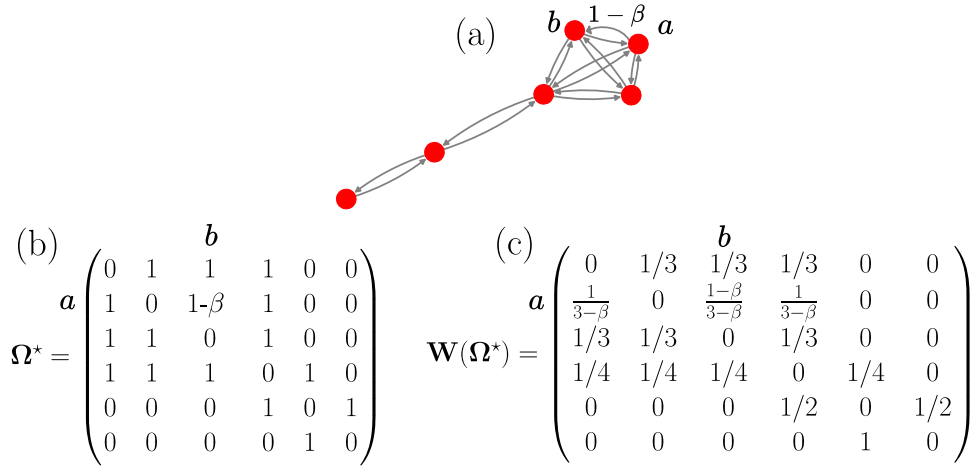
Debido al daño en la línea  $(a, b)$  de la red, la matriz de transición que describe el movimiento de un caminante aleatorio también se modifica. En este caso, se denota como  $\mathbf{W}(\mathbf{\Omega}^*)$  a la matriz de transición modificada por el daño en una línea de la

red, con elementos definidos como

$$(\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}^*))_{ij} \equiv \frac{\Omega_{ij}^*}{\sum_{\ell=1}^N \Omega_{i\ell}^*} = \begin{cases} w_{i \rightarrow j} & \text{si } i \neq a, \\ \frac{A_{aj}}{k_a - \beta} & \text{si } i = a, j \neq b, \\ \frac{(1 - \beta)A_{ab}}{k_a - \beta} & \text{si } i = a, j = b. \end{cases} \quad (2)$$

El efecto de dañar la línea  $(a, b)$  de la red se refleja en la modificación de la fila  $a$  de la matriz de transición. Debido a la definición de los elementos de  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}^*)$  en la ecuación (2), este proceso genera una redistribución de las probabilidades de transición del caminante aleatorio. Disminuye la probabilidad del caminante de tomar el camino con daño y se incrementan las probabilidades del caminante aleatorio de moverse por las líneas que no han sido alteradas.

En la figura 1 se ilustra el proceso de dañar una de las líneas de una red lollipop de  $N = 6$  nodos. En figura 1(a) se muestra la red lollipop, constituida a partir de un grafo completamente conectado de  $N - L$  nodos, unido a un grafo lineal o cadena de  $L$  nodos. En el grafo se indica la selección de la línea  $(a, b)$ . La línea  $(a, b)$  es dañada, lo que implica la reducción de su peso a  $(1 - \beta)$ . En la figura 1(b) se muestra la matriz de pesos  $\boldsymbol{\Omega}^*$  resultante de este proceso de daño. Finalmente, en la figura 1(c) se muestra la matriz de transición  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}^*)$  para un caminante aleatorio que se mueve en este grafo. En la fila  $a$  de la matriz se observan las modificaciones de las probabilidades de transición del caminante aleatorio cuando se mueve de  $a$  hacia los nodos vecinos, el daño en  $(a, b)$  reduce la probabilidad de transición para



**Figura 1:** Ilustración de la generación de daño en una línea de un grafo lollipop. (a) Grafo lollipop de  $N = 6$  nodos y  $L = 2$  con reducción de el peso de la línea  $(a, b)$  a  $1 - \beta$ . (b) Matriz de pesos  $\boldsymbol{\Omega}^*$ . (c) Matriz de transición  $\mathbf{W}(\boldsymbol{\Omega}^*)$  para un caminante aleatorio que se mueve en esta red.

ir de  $a$  hacia  $b$ , pero se incrementan las probabilidades para ir de  $a$  hacia los otros nodos.

#### Funcionalidad y medida de antifragilidad

En el caso de redes con daño en una de sus líneas generado mediante  $\beta$  también se establece una medida de la capacidad de transporte de la red. De manera similar a la ecuación (13) se define la funcionalidad de la red con daño en una línea  $\mathcal{F}_\beta$

$$\mathcal{F}_\beta \equiv \frac{\tau(0)}{\tau(\beta)}, \quad (3)$$

donde  $\tau(0)$  es el tiempo global del caminante aleatorio definido en las ecuaciones (14) y (15) considerando la información de la red sin daño, con  $T = 0$  en (14).  $\tau(\beta)$  es el tiempo global del caminante aleatorio que se mueve en la red con daño en una de sus líneas, de manera similar, se calcula usando las ecuaciones (14) y (15) usando los autovalores y autovectores derechos e izquierdos de  $\mathbf{W}(\Omega^*)$ .

Adicionalmente, se define la medida  $\Lambda$  que da el cambio de la funcionalidad  $\mathcal{F}_\beta$  con respecto a daños infinitesimales en alguna de las líneas de la red cuando  $\beta \rightarrow 0$

$$\Lambda \equiv \left. \frac{d\mathcal{F}_\beta}{d\beta} \right|_{\beta \rightarrow 0}. \quad (4)$$

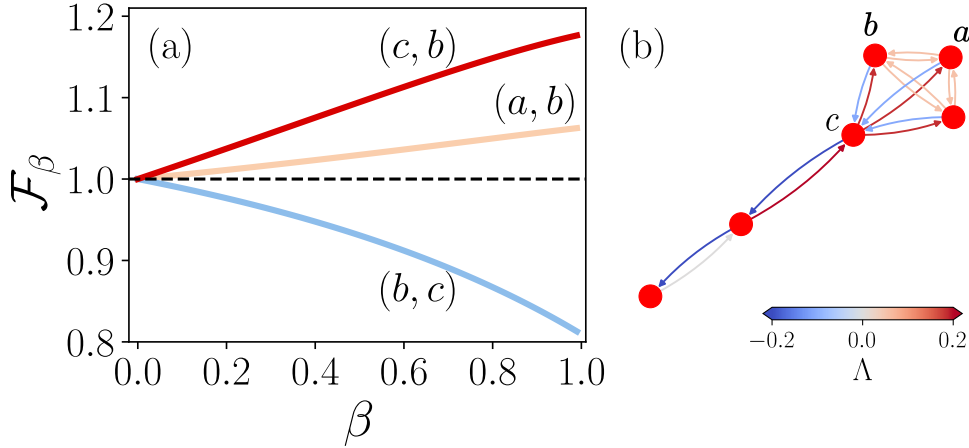
Con base en el comportamiento de  $\Lambda$ , se puede determinar el tipo de respuesta de la red ante el daño en una de sus líneas. Si se obtiene  $\Lambda < 0$  indica que  $\mathcal{F}_\beta$  tiende a disminuir con  $\beta$ . Esto sugiere que la línea escogida corresponde a una componente vulnerable de la red, lo que conduce a una respuesta frágil del sistema. Por otro lado, cuando se obtiene  $\Lambda > 0$ , al menos para ciertos valores de  $\beta$ , se espera que  $\mathcal{F}_\beta$  tienda a aumentar, mejorando la capacidad de transporte. En este caso, el daño en la línea de la red ofrece beneficios al proceso de transporte, lo que conduce a una respuesta antifrágil del sistema. Por último, cuando  $\Lambda = 0$ , se espera que el daño en la línea no afecte la capacidad de transporte del sistema y este se comporte indiferente al daño, por lo tanto se considera una respuesta robusta del sistema.

En la figura 2 se ilustran las respuestas de una grafo lollipop de  $N = 6$  nodos cuando se dañan algunas de sus líneas. La figura 2(a) muestra  $\mathcal{F}_\beta$  como función de  $\beta$  para las líneas  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, b)$  de la red. Se puede notar que el daño, tanto en las líneas  $(a, b)$  y  $(c, b)$  de la red, mejora la capacidad de transporte del sistema puesto que  $\mathcal{F}_\beta$  incrementa. Esto muestra que el tiempo global del caminante aleatorio tiende a disminuir conforme se dañan las líneas indicadas. Por otro lado, el dañar la línea  $(b, c)$  compromete la capacidad de transporte de la red, que se observa en la reducción de  $\mathcal{F}_\beta$ . Por lo tanto, en este caso se observa antifragilidad cuando se dañan las líneas  $(a, b)$ ,  $(c, b)$  y fragilidad en el caso de dañar  $(b, c)$ . En la figura 2(b) se ilustra la evaluación de  $\Lambda$  para todas las líneas de la red lollipop. Los valores de  $\Lambda$  se encuentran codificados de acuerdo a la barra de color mostrada. En el grafo se observa tanto la presencia de líneas antifragiles y frágiles. Además se observan



que las medidas de  $\Lambda$  de las líneas  $(a, b)$  y  $(c, b)$  corresponden a valores positivos, en cambio para  $(b, c)$  se obtiene un valor negativo lo que concuerda con las observaciones de  $\mathcal{F}_\beta$ . Es importante mencionar que  $\Lambda$  se calculó numéricamente usando la aproximación  $\Lambda \approx \frac{1}{\Delta\beta} (\mathcal{F}_\beta - 1)$  tomando  $\Delta\beta = 10^{-4}$ .

Adicionalmente, en la figura 3 se investiga la antifragilidad de grafos lollipop de diferentes tamaños. En la figura 3(a) se presentan los resultados de  $\mathcal{F}_\beta$  en función de  $\beta$  para grafos lollipop de diferentes tamaños  $N$  y que mantienen el grafo lineal de tamaño  $L = 1$ . El daño es generado en la línea  $(a, b)$ , que corresponde a alguna de las líneas en el subgrafo completamente conectado que no se encuentran conectadas al nodo que se une al subgrafo lineal del lollipop, como la línea  $(a, b)$  de la figura 2(b). En los resultados se observa que en todos estos sistemas, el daño en la línea  $(a, b)$  genera una respuesta antifrágil de la red, indicada en el incremento de la funcionalidad para diferentes valores de  $\beta$ . También es interesante notar que el resultado sobresale más, cuando los grafos analizados son pequeños. En la figura 3(b) se muestra el valor de  $\Lambda$  calculado para la línea  $(a, b)$  de diferentes grafos lollipop en función de  $N$ . Los 3 grupos de datos analizados corresponden a lollipops con subgrafos lineales de diferentes tamaños  $L = 1, 2, 3$ . En todos los casos se obtiene  $\Lambda > 0$ , esto quiere decir que el daño de la línea  $(a, b)$  implica una respuesta antifrágil del sistema, lo cual concuerda con los resultados de la figura 3(a). También es importante notar que para  $N \gg 1$ ,  $\Lambda$  presenta la tendencia a decaer con  $N^2$ , esto es,  $\Lambda \sim N^{-2}$ . Los cálculos de  $\mathcal{F}_\beta$  y  $\Lambda$  se hicieron numéricamente.



**Figura 2:** Funcionalidad y medida de antifragilidad en el grafo lollipop con  $N = 6$  nodos. (a)  $\mathcal{F}_\beta$  en función de  $\beta$  del lollipop con daño en las líneas  $(a, b)$ ,  $(b, c)$  y  $(c, b)$ . (b) Valores de  $\Lambda$  para cada una de las líneas del grafo. Su valor se encuentra codificado de acuerdo a la barra de color.  $\Lambda$  se evaluó mediante cálculo numérico de (4) tomando  $\Delta\beta = 10^{-4}$ .

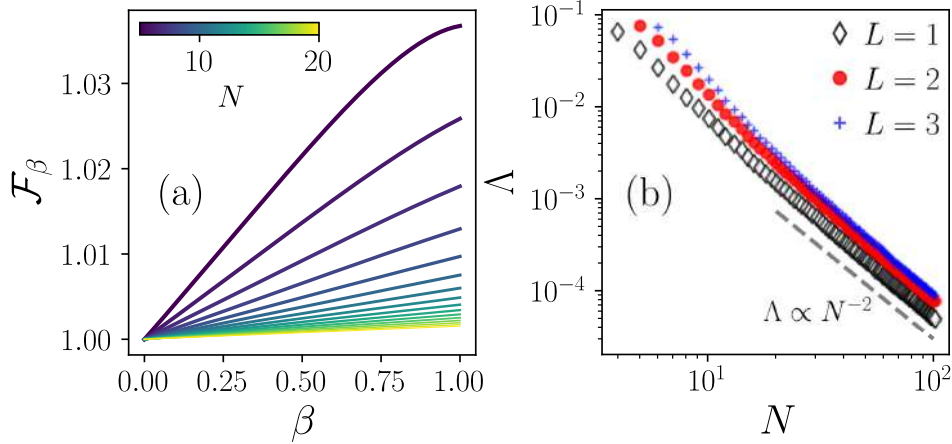
## DAÑO INFINITESIMAL EN UNA LÍNEA DE LA RED

La generación de antifragilidad y el comportamiento de  $\Lambda$  se pueden entender mediante el estudio del caso particular de generación de daño infinitesimal en una de las líneas que componen una red. En este caso se modifica el peso de la línea  $(a, b)$  a  $1 - \beta$ , con  $\beta \ll 1$ , por lo tanto  $\Omega_{ab}^* = (1 - \beta)A_{ab}$ . Para este caso de daño infinitesimal se denota la matriz de transición del caminante aleatorio como  $\Pi_{\beta}^{(a,b)} = \mathbf{W}(\Omega^*)$ , con elementos

$$\left(\Pi_{\beta}^{(a,b)}\right)_{ij} \equiv \frac{\Omega_{ij}^*}{\sum_{\ell=1}^N \Omega_{i\ell}^*} = \begin{cases} w_{i \rightarrow j} & \text{si } i \neq a, \\ \frac{A_{aj}}{k_a - \beta} & \text{si } i = a, j \neq b, \\ \frac{(1 - \beta)A_{ab}}{k_a - \beta} & \text{si } i = a, j = b. \end{cases} \quad (5)$$

Usando la aproximación a primer orden en  $\beta$  para los elementos de (5) se obtiene

$$\left(\Pi_{\beta}^{(a,b)}\right)_{ij} = \begin{cases} w_{i \rightarrow j} & \text{si } i \neq a, \\ \frac{A_{aj}}{k_a - \beta} \approx w_{a \rightarrow j} + \frac{\beta}{k_a} w_{a \rightarrow j} & \text{si } i = a, j \neq b, \\ \frac{(1 - \beta)A_{ab}}{k_a - \beta} \approx w_{a \rightarrow b} + \beta \frac{w_{a \rightarrow b} - A_{ab}}{k_a} & \text{si } i = a, j = b. \end{cases} \quad (6)$$



**Figura 3:** Funcionalidad y medida de antifragilidad para lollipops de diferentes tamaños con daño en la línea  $(a, b)$ . (a)  $\mathcal{F}_{\beta}$  en función del parámetro  $\beta$  para lollipops con diferentes valores de  $N$  y  $L = 1$ . (b)  $\Lambda$  de los grafos lollipop con daño en la línea  $(a, b)$  en función del número de nodos de los grafos. Los 3 grupos de datos presentados corresponden a grafos con  $L = 1, 2, 3$ .  $\Lambda$  se evaluó mediante cálculo numérico de (4) tomando  $\Delta\beta = 10^{-4}$ .

De tal manera que la matriz de transición  $\Pi_\beta^{(a,b)}$  para  $\beta \ll 1$  se puede aproximar como

$$\Pi_\beta^{(a,b)} \approx \mathbf{W} + \beta \left( \frac{\mathbf{E}^{(a,a)} \mathbf{W} - \mathbf{E}^{(a,b)}}{k_a} \right), \quad (7)$$

donde todos los elementos de la matriz  $\mathbf{E}^{(a,b)}$  son iguales a 0, con excepción del elemento  $(\mathbf{E}^{(a,b)})_{ab} = 1$ , así que

$$(\mathbf{E}^{(a,b)})_{ij} \equiv \delta_{ia} \delta_{jb}. \quad (8)$$

Definiendo la matriz  $\Gamma$  como

$$\Gamma \equiv \frac{\mathbf{E}^{(a,a)} \mathbf{W} - \mathbf{E}^{(a,b)}}{k_a}, \quad (9)$$

la matriz de transición de la expresión (7) se puede reescribir como

$$\Pi_\beta^{(a,b)} \approx \mathbf{W} + \beta \Gamma. \quad (10)$$

Esta aproximación de la matriz de transición, continúa siendo una matriz estocástica para  $0 \leq \beta < 1$ , es decir que  $\sum_{\ell=1}^N (\mathbf{W} + \beta \Gamma)_{i\ell} = 1$ . Esto se debe a que  $\sum_{\ell=1}^N (\Gamma)_{i\ell} = 0$ , lo cual se puede demostrar, usando la definición (9), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^N (\Gamma)_{i\ell} &= \frac{1}{k_a} \sum_{\ell=1}^N (\mathbf{E}^{(a,a)} \mathbf{W} - \mathbf{E}^{(a,b)})_{i\ell} \\ &= \frac{1}{k_a} \sum_{\ell=1}^N \left( \sum_{k=1}^N (\mathbf{E}^{(a,a)})_{ik} (\mathbf{W})_{k\ell} - (\mathbf{E}^{(a,b)})_{i\ell} \right) \\ &= \frac{1}{k_a} \sum_{\ell=1}^N \left( \sum_{k=1}^N \delta_{ia} \delta_{ka} w_{k \rightarrow \ell} - \delta_{ia} \delta_{b\ell} \right) \\ &= \frac{1}{k_a} \left( \sum_{\ell=1}^N \delta_{ia} w_{a \rightarrow \ell} - \delta_{ia} \right) = 0. \end{aligned}$$

Con estas consideraciones se procede a estudiar el efecto de valores infinitesimales de  $\beta$  en la medida  $\Lambda$ . Para ello se empieza de la definición de  $\Lambda$  en (4), en este caso se obtiene

$$\Lambda = -\frac{\tau(0)}{(\tau(\beta))^2} \frac{d\tau(\beta)}{d\beta} \Big|_{\beta \rightarrow 0} = -\frac{1}{\tau(0)} \frac{d\tau(\beta)}{d\beta} \Big|_{\beta \rightarrow 0}. \quad (11)$$

Por lo que se debe investigar los efectos de  $\beta$  en el tiempo global  $\tau(\beta)$  definido en (14) y (15) tomando los autovalores y autovectores derechos e izquierdos de  $\Pi_\beta^{(a,b)}$ . Para valores infinitesimales de  $\beta$  se puede expresar el tiempo global como

$$\tau(\beta) = \tau(0) + \beta \Delta \tau + o(\beta^2), \quad (12)$$

donde  $\Delta\tau$  corresponde a la corrección a primer orden en el tiempo global  $\tau(0)$  del caminante aleatorio, producto del daño generado en una de las líneas de la red. Considerando únicamente términos a primer orden en la ecuación (11) se obtiene

$$\Lambda = -\frac{\Delta\tau}{\tau(0)}. \quad (13)$$

Para entender las correcciones del tiempo global  $\Delta\tau$ , se analizan las cantidades  $\tau_j(\beta)$  definidas en (16) usando los autovalores y autovectores de  $\Pi_\beta^{(a,b)}$ . En ese caso se aproximan a primer orden en  $\beta$  como

$$\tau_j(\beta) \approx \frac{1}{P_j^\infty + \beta\Delta P_j^\infty} \sum_{\ell=2}^N \frac{Z_{jj}^{(\ell)} + \beta\Delta Z_{jj}^{(\ell)}}{1 - \lambda_\ell - \beta\Delta\lambda_\ell}, \quad (14)$$

donde  $\Delta\lambda_\ell$  representa la corrección a primer orden de los autovalores  $\lambda_\ell$ ,  $\Delta P_j^\infty$  la corrección a primer orden de la distribución estacionaria  $P_j^\infty$  y  $\Delta Z_{jj}^{(\ell)}$  corresponde a la corrección de primer orden de  $Z_{jj}^{(\ell)} = \langle j|\phi_\ell\rangle\langle j|\bar{\phi}_\ell\rangle$ , cantidades asociadas a  $\Pi_\beta^{(a,b)}$ . Expandiendo (14) para  $\beta \ll 1$  se obtiene

$$\begin{aligned} \tau_j(\beta) &\approx \frac{1}{P_j^\infty} \left( 1 - \beta \frac{\Delta P_j^\infty}{P_j^\infty} \right) \\ &\times \sum_{\ell=2}^N \frac{1}{1 - \lambda_\ell} \left( 1 + \beta \frac{\Delta\lambda_\ell}{1 - \lambda_\ell} \right) (Z_{jj}^{(\ell)} + \beta\Delta Z_{jj}^{(\ell)}) \\ &= \tau_j(0) + \beta\Delta\tau_j + o(\beta^2) \end{aligned} \quad (15)$$

donde

$$\Delta\tau_j = \frac{1}{P_j^\infty} \sum_{\ell=2}^N \frac{1}{1 - \lambda_\ell} \Delta Z_{jj}^{(\ell)} + \frac{1}{P_j^\infty} \sum_{\ell=2}^N \frac{\Delta\lambda_\ell}{(1 - \lambda_\ell)^2} Z_{jj}^{(\ell)} - \frac{\Delta P_j^\infty}{(P_j^\infty)^2} \sum_{\ell=2}^N \frac{1}{1 - \lambda_\ell} Z_{jj}^{(\ell)}. \quad (16)$$

Usando la ecuación (15) y la ecuación (12), se obtiene el siguiente resultado

$$\Delta\tau = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta\tau_j = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_3, \quad (17)$$

donde

$$\mathcal{T}_1 \equiv \sum_{\ell=2}^N \frac{1}{1 - \lambda_\ell} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\Delta Z_{jj}^{(\ell)}}{NP_j^\infty} \right) \quad (18)$$

$$\mathcal{T}_2 \equiv \sum_{\ell=2}^N \frac{\Delta \lambda_\ell}{(1 - \lambda_\ell)^2} \left( \sum_{j=1}^N \frac{Z_{jj}^{(\ell)}}{NP_j^\infty} \right) \quad (19)$$

$$\mathcal{T}_3 \equiv \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\Delta P_j^\infty}{P_j^\infty} \tau_j(0). \quad (20)$$

De esta manera, retomando la expresión (13) se encuentra que

$$\Lambda = -\frac{1}{\tau(0)} (\mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 - \mathcal{T}_3). \quad (21)$$

Los valores de  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  y  $\mathcal{T}_3$  se pueden obtener de forma analítica usando teoría de perturbaciones. Así la expresión para  $\Lambda$  en (21) se puede expresar analíticamente en términos de los autovalores y autovectores de la matriz de transición  $\Pi_\beta^{(a,b)}$ . Para el caso de una red con una matriz de transición con autovalores no degenerados se obtienen las siguientes expresiones

$$\mathcal{T}_1 = \sum_{\ell=2}^N \frac{1}{1 - \lambda_\ell} X^{(\ell)}, \quad (22)$$

con

$$\begin{aligned} X^{(\ell)} = \sum_{j=1}^N \frac{1}{NP_j^\infty} \sum_{m \neq \ell} \frac{\langle j | \phi_m \rangle \langle \bar{\phi}_\ell | j \rangle \langle \bar{\phi}_m | \Gamma | \phi_\ell \rangle}{\lambda_\ell - \lambda_m} \\ + \sum_{j=1}^N \frac{1}{NP_j^\infty} \sum_{m \neq \ell} \frac{\langle j | \phi_\ell \rangle \langle \bar{\phi}_m | j \rangle \langle \bar{\phi}_\ell | \Gamma | \phi_m \rangle}{\lambda_\ell - \lambda_m}, \end{aligned} \quad (23)$$

para  $\ell = 2, 3, \dots, N$ . De manera similar se obtienen

$$\mathcal{T}_2 = \sum_{\ell=2}^N \frac{\langle \bar{\phi}_\ell | \Gamma | \phi_\ell \rangle}{(1 - \lambda_\ell)^2} \left( \sum_{j=1}^N \frac{Z_{jj}^{(\ell)}}{NP_j^\infty} \right), \quad (24)$$

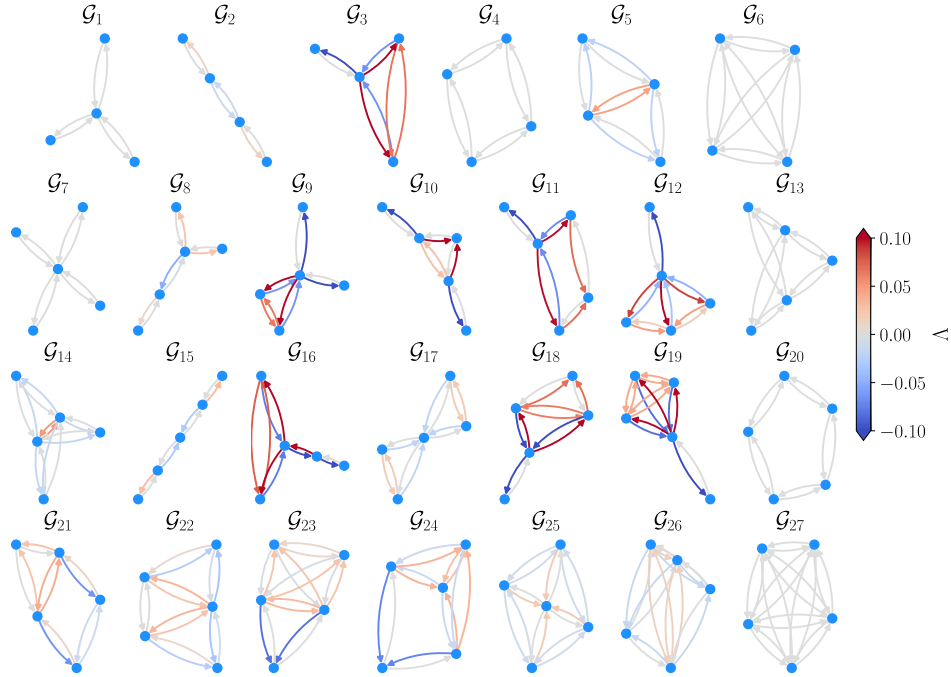
$$\mathcal{T}_3 = \sum_{j=1}^N \frac{\tau_j(0)}{NP_j^\infty} \left( \sum_{m=2}^N \frac{\langle \bar{\phi}_m | j \rangle \langle j | \phi_1 \rangle \langle \bar{\phi}_1 | \Gamma | \phi_m \rangle}{1 - \lambda_m} \right). \quad (25)$$

Los resultados obtenidos en las ecuaciones (22)-(25) ilustran la generación de antifragilidad en una red con daño en una de sus líneas, la cual se puede medir mediante la información que se obtiene de los autovalores y autovectores de la matriz

de transición  $\Pi_\beta^{(a,b)}$ . Además, permiten entender el comportamiento de  $\Lambda$  en las diferentes respuestas de la red, particularmente los resultados de  $\Lambda > 0$  en el caso de una respuesta antifrágil del sistema. Aunque los valores de  $\mathcal{T}_1$ ,  $\mathcal{T}_2$  y  $\mathcal{T}_3$  presentados en (22)-(25) son válidos para el caso de autovalores no degenerados, este caso particular muestra claramente los efectos del daño en una línea en la medida  $\Lambda$ . Para los casos generales de daño en diferentes redes se usan cálculos numéricos de los autovalores y autovectores de la matriz de transición correspondiente  $\mathbf{W}$  o  $\Pi_\beta^{(a,b)} = \mathbf{W}(\Omega^*)$ .

#### ANTIFRAGILIDAD EN GRAFOS PEQUEÑOS

En la primera parte de este capítulo se ilustra la detección de antifragilidad en grafos lollipop; sin embargo, estos estudios se pueden extender a redes con otras topologías. En la figura 4 se presentan los resultados de la evaluación de  $\Lambda$  en las líneas de 27 grafos pequeños. Las estructuras analizadas corresponden a grafos conexos y no isomorfos de  $N = 4$  nodos, representados por  $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_6$ , y de  $N = 5$



**Figura 4:** Evaluación numérica de  $\Lambda$  usando (4) para los grafos conexos y no isomorfos de  $N = 4$  y  $N = 5$  nodos. El valor de  $\Lambda$  en las líneas se representa de acuerdo a la barra de color.

nodos representados por  $\mathcal{G}_7, \mathcal{G}_8, \dots, \mathcal{G}_{27}$ . El valor de  $\Lambda$  se encuentra codificado de acuerdo a la barra de color.

De los resultados se observa que hay estructuras donde no es posible encontrar líneas que generen respuestas antifrágiles cuando reciben daño. En la figura 4 se ve que los grafos regulares, en los cuales todos los nodos poseen el mismo grado  $k_i$ , como lo grafos completamente conectados  $\mathcal{G}_6$  y  $\mathcal{G}_{27}$  o los grafos cuya topología forma un anillo, como  $\mathcal{G}_4$  y  $\mathcal{G}_{20}$  son estructuras con todas sus líneas con  $\Lambda \rightarrow 0$ . Este mismo comportamiento se puede observar en los grafos tipo estrella  $\mathcal{G}_1$  y  $\mathcal{G}_7$  los cuales son altamente simétricos respecto a un nodo central.

Por otra parte, en las redes donde se empiezan a romper estas simetrías, como el caso de  $\mathcal{G}_5$  o  $\mathcal{G}_8$ , aparecen líneas generadoras de antifragilidad. Dentro de estos grafos con asimetrías, es notable la presencia de líneas antifrágiles, en redes donde los nodos se tienden a agrupar para formar estructuras densamente conectadas. Tal es el caso de los grafos lollipop, donde la cadena de nodos de estas estructuras, rompe con la simetría del clique completamente conectado. En la figura 4 se observa una alta presencia de líneas generadoras de antifragilidad en los grafos  $\mathcal{G}_3, \mathcal{G}_{16}$  y  $\mathcal{G}_{19}$ . Otras estructuras similares son  $\mathcal{G}_{11}, \mathcal{G}_{12}$  y  $\mathcal{G}_{18}$ , en donde se han removido algunas de las conexiones del clique. Otras estructuras como  $\mathcal{G}_9$  y  $\mathcal{G}_{10}$  con presencia de cliques, también contienen líneas antifrágiles. En los grafos restantes que presentan asimetrías y agrupamientos de nodos se siguen observando estas líneas con  $\Lambda > 0$ , algunos ejemplos son los grafos  $\mathcal{G}_{21}, \mathcal{G}_{23}$  y  $\mathcal{G}_{24}$ .

Como última observación, es interesante resaltar que dentro de la misma estructura donde se encuentran elementos antifrágiles, también existen partes frágiles. En ninguno de los ejemplos presentados se encuentra una red en la cual todas sus partes sean antifrágiles. Por lo que los resultados sugieren que la existencia de partes del sistema que generan antifragilidad, requiere también de la existencia de partes frágiles del sistema.

#### DAÑO EN COMUNIDADES TIPO CLIQUE

Hasta esta parte del libro se ha evidenciado que existen líneas en ciertos grafos que generan una respuesta antifrágil del sistema cuando dicha línea recibe daño, además, la medida  $\Lambda$  es un indicador de esta propiedad. El siguiente paso es poder explorar y trasladar estos conceptos a una escala diferente donde el daño no se limita a afectar solo una línea de la red si no que se extiende a conjuntos de líneas del grafo. Esta sección se enfoca en el estudio de redes con estructura de comunidad y con el daño localizado dentro de las comunidades.

Una comunidad  $\mathcal{C}_i$  del grafo  $\mathcal{G}$  formado por el conjunto de aristas  $\mathcal{E}$  corresponde a un subgrafo definido por el subconjunto de nodos que están densamente conectados entre sí pero que comparten pocas conexiones con los otros nodos de la red [52, 63]. Para estas estructuras y como una extensión de la medida  $\Lambda$  en (4) se

propone la medida de antifragilidad para la comunidad  $\mathcal{C}_i$

$$\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_i} \equiv \frac{1}{|\mathcal{E}_i|} \sum_{(a,b) \in \mathcal{E}_i} \Lambda_{(a,b)}, \quad (26)$$

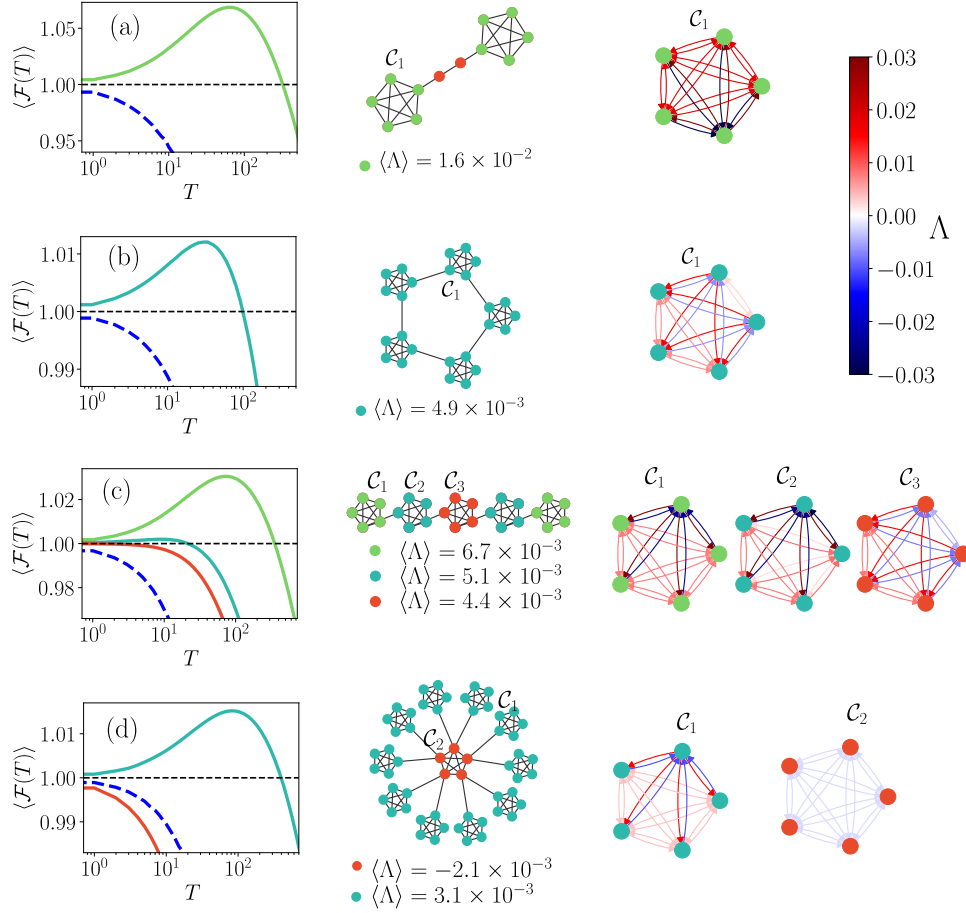
donde  $\mathcal{E}_i \subset \mathcal{E}$ , corresponde al conjunto de aristas de la comunidad  $\mathcal{C}_i$  y  $\Lambda_{(a,b)}$  representa la medida de antifragilidad de la línea  $(a,b) \in \mathcal{E}_i$  de la comunidad  $\mathcal{C}_i$ .  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_i}$  corresponde entonces al promedio de la medida de antifragilidad de las líneas que conectan los nodos de la comunidad entre sí.

Inicialmente se estudian redes con comunidades perfectas o cliques que corresponden a subgrafos completamente conectados. Las comunidades se dañan progresivamente mediante el uso del algoritmo generador de daño acumulado presentado en el capítulo 2. En este caso el daño se distribuye aleatoriamente y de manera preferencial considerando únicamente el conjunto  $\mathcal{E}_i$  que corresponde a las aristas pertenecientes a la comunidad  $\mathcal{C}_i$ . Posteriormente se evalúa la funcionalidad de transporte de la red de acuerdo a la definición (13),  $\mathcal{F}(T) = \frac{\tau(0)}{\tau(T)}$  usando los tiempos medios globales del caminante aleatorio en la red sin daño y con daño. Recordando que la generación de daño es un proceso aleatorio, la respuesta del daño del sistema se mide de acuerdo al promedio de ensamble  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ .

En la figura 5 se presentan los resultados de la evaluación de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para diferentes redes de cliques de 5 nodos cuando se dañan sus comunidades. En cada gráfica se presentan los resultados de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ , con línea continua, cuando el daño se genera en las comunidades y con línea discontinua el caso del daño distribuido en toda la red. Los colores de las líneas continuas coinciden con los colores de los nodos de la comunidad afectada. Los promedios de ensamble se calcularon con  $10^4$  simulaciones de Monte Carlo y usando un parámetro de daño  $\alpha = 0.5$ . En la figura 5(a) se observan las respuestas al daño de un grafo tipo barbell. Como se puede observar, cuando el daño se limita a afectar las comunidades  $\mathcal{C}_1$ ,  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  tiende a aumentar para un determinado intervalo de daño y luego decae rápidamente para valores de daño más grandes. En contraste, para el caso donde el daño puede afectar cualquier parte de la red,  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  decae desde un inicio y lo hace de manera monótona. Para el clique se obtuvo una medida  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_1} = 1.6 \times 10^{-2}$ , un valor positivo que concuerda con la respuesta antifrágil de la comunidad  $\mathcal{C}_1$ . Adicionalmente, se muestran los valores de  $\Lambda$  para cada una de las líneas del clique, donde se observa que en su mayoría presentan respuestas antifrágiles a excepción de las líneas que se conectan al nodo unido al resto de la red.

En la figura 5(b) se presenta un anillo de cliques. Nuevamente en esta estructura se observa que el transporte se beneficia cuando se dañan las comunidades, lo cual contrasta con el efecto de la fragilidad del sistema cuando se daña toda la red. Para los cliques del anillo se encuentra que  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_1} = 4.9 \times 10^{-3}$ . En estas comunidades se encuentra también que la mayoría de líneas son antifrágiles, sin embargo, las líneas que se conectan a los nodos unidos al resto de la red presentan respuestas frágiles.





**Figura 5:** Promedio de ensamble de la funcionalidad en redes de cliques. Las líneas continuas corresponde a los resultados obtenidos cuando el daño se localiza en los cliques y la línea punteada corresponde a resultados para el daño en toda la red en (a) red de Barbell, (b) anillo de cliques, (c) cadena de cliques, (d) estrella de cliques. Los promedios fueron calculados usando  $10^4$  simulaciones de Monte Carlo. Los colores de las líneas continuas coinciden con el color de los nodos de las comunidades afectadas. El daño fue generado utilizando el parámetro  $\alpha = 0.5$ . Adicionalmente se incluyen los valores de  $\langle \Lambda \rangle$  de los cliques que conforman las redes y los valores  $\Lambda$  de cada una de sus líneas codificados de acuerdo a la barra de color.

En la figura 5(c) se muestran los resultados para una cadena de cliques. En este caso también se observan respuestas anti-frágiles cuando se dañan las comunidades. Sin embargo, la respuesta de cada clique depende de su posición dentro del

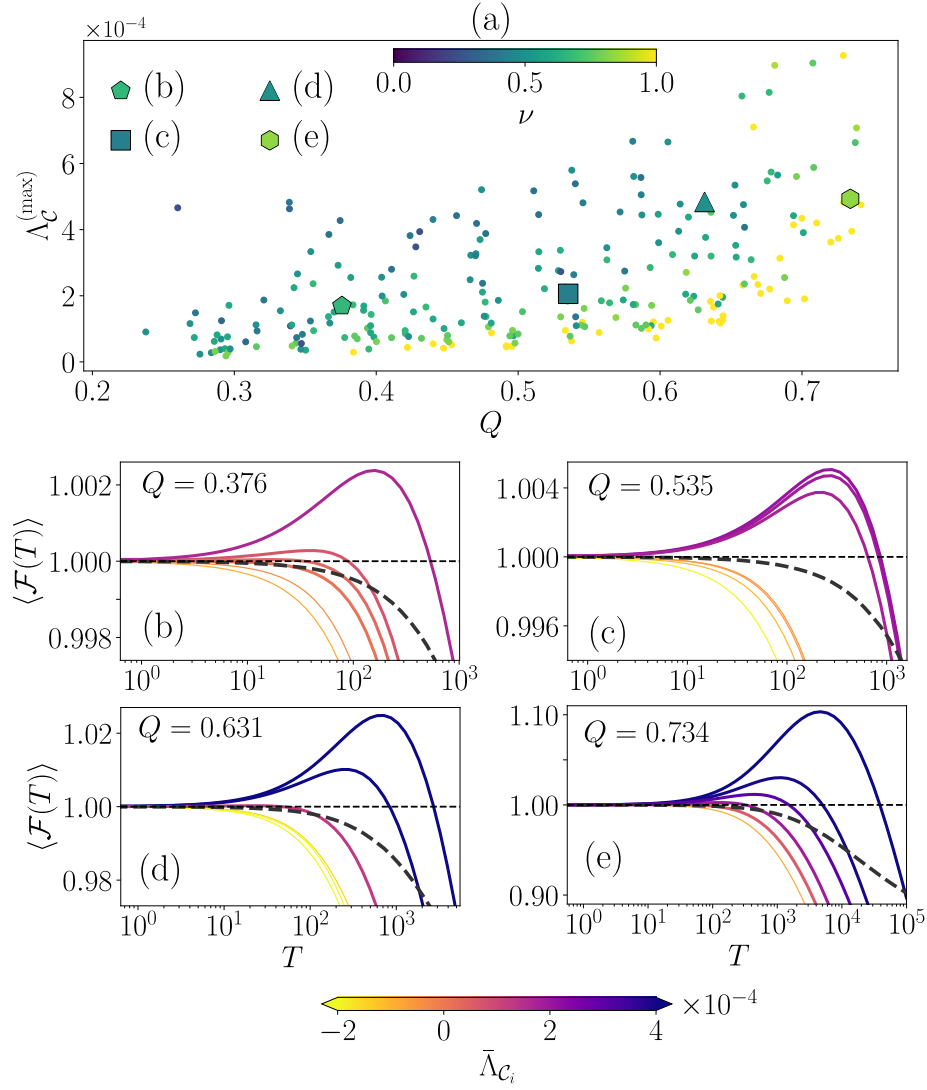
grafo. Cuando el daño se localiza en  $\mathcal{C}_1$ , que corresponden a los cliques ubicados en los extremos, se obtiene un beneficio mayor en el transporte. La comunidad  $\mathcal{C}_2$  también ofrece una mejora al ser dañada, sin embargo, su respuesta antifrágil es menor a la anterior. Ahora, cuando se daña  $\mathcal{C}_3$ , la comunidad central, el beneficio es mucho menor, pero se observa un proceso mucho más robusto en comparación con lo que sucede con la respuesta de la red ante el daño generado en toda la estructura. Adicionalmente, se observa que la distribución de las líneas antifrágiles de los cliques también dependen del clique analizado. En el caso de los cliques  $\mathcal{C}_1$ , se puede observar que las únicas líneas frágiles son las que se conectan al nodo unido al resto de la red y las líneas que salen de este nodo poseen los valores de  $\Lambda$  más grandes. Para los cliques  $\mathcal{C}_2$  se observa que solo las líneas que llegan al nodo conectado a  $\mathcal{C}_1$  son frágiles, pero las líneas que llegan al nodo conectado a  $\mathcal{C}_3$  tienden a ser robustas con  $\Lambda \approx 0$ . Para el clique del medio  $\mathcal{C}_3$ , las líneas que llegan a los dos nodos que se conectan a los cliques  $\mathcal{C}_2$  son frágiles, por lo que corresponde a la comunidad con más líneas frágiles de la red.

Finalmente, en la figura 5(d) se muestran los resultados para una estrella de cliques. Lo que se encuentra en este caso es que cuando el daño afecta las comunidades externas  $\mathcal{C}_1$  se obtiene una respuesta antifrágil del sistema con  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_1} = 3.1 \times 10^{-3}$ . Sin embargo, algo diferente ocurre cuando se daña la comunidad central  $\mathcal{C}_2$ , en este caso, el sistema se comporta de manera frágil e incluso la respuesta es más desfavorable que cuando el daño se localiza en toda la red. Este resultado concuerda con  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_2} = -2.1 \times 10^{-3}$ . Los resultados obtenidos se pueden corroborar con el análisis individual de la antifragilidad de las líneas de los cliques. Los cliques  $\mathcal{C}_1$  corresponden a comunidades con la mayoría de líneas antifrágiles, con excepción de las líneas que se conectan al nodo que se une a  $\mathcal{C}_2$ . En el caso del clique central  $\mathcal{C}_2$  se observa que todas las líneas son frágiles.

Con estos ejemplos se puede observar la emergencia de antifragilidad en redes a una escala de comunidades. Es importante notar que en principio, la medida  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_i}$  es una buena medida para identificar la antifragilidad en grupos de nodos como los cliques. Sin embargo, este análisis se puede extender a redes con comunidades heterogéneas e incluso redes reales.

#### DAÑO EN COMUNIDADES HETEROGÉNEAS

Las redes con comunidades perfectas tipo clique muestran la presencia de antifragilidad; sin embargo, las redes que se observan en la naturaleza no son perfectas. De hecho presentan estructuras caracterizadas por la heterogeneidad tanto en las distribuciones del grado como en las distribuciones del tamaño de las comunidades e incluso en muchos casos las comunidades se pueden traslapar [153, 154]. Por lo que es necesario investigar la emergencia de la antifragilidad en redes con estructura de comunidad con características similares a las observadas en redes reales. En esta parte del libro se estudia la antifragilidad, particularmente, en redes modulares con distribuciones de grado y distribuciones de tamaños de comu-



**Figura 6:** Antifragilidad en redes con comunidades heterogéneas de  $N = 100$  nodos (a)  $\Lambda_C^{(\max)}$  para cada una de las 240 redes de LFR en función de  $Q$ . La fracción  $\nu$  de comunidades antifrágiles en la red está codificada de acuerdo a la barra de color (b)-(e)  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para cada comunidad de redes LFR de  $Q = 0.376, 0.535, 0.631, 0.734$ . Las líneas continuas indican el caso del daño generado en las comunidades, en cuanto que con línea discontinua se indica el caso del daño distribuido en toda la red. El valor de  $\bar{\Lambda}_{C_i}$  se encuentra codificado de acuerdo a la barra de color. Imagen modificada de [31].

des heterogéneas.

El algoritmo de Lancichinetti-Fortunato-Radicchi (LFR) [155] permite generar redes con estas características. El algoritmo LFR construye redes con distribuciones de grado y distribuciones del tamaño de comunidades que siguen leyes de potencia con exponentes  $\gamma$  y  $\beta$  respectivamente. Adicionalmente, permite modificar la cantidad de líneas que las comunidades comparten con el resto de la red mediante el parámetro  $\mu$ , el cual representa la fracción promedio de aristas que los nodos de la comunidad comparten fuera de ella; cuanto más bajo el valor de  $\mu$  se esperan redes con comunidades bastante definidas. También se puede controlar el grado promedio de los nodos de la red  $\langle k \rangle$ , así como el valor máximo y mínimo de este.

Por otro lado, es importante contar con un parámetro que permita diferenciar las redes, como parámetro de clasificación de las redes LFR se considera la modularidad  $Q$  de la red. En el caso de grafos no dirigidos con un número de comunidades  $N_C$  la modularidad se define como

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{N_C} \left[ \frac{|\mathcal{E}_i|}{|\mathcal{E}|} - \left( \frac{k_{C_i}}{2|\mathcal{E}|} \right)^2 \right], \quad (27)$$

donde  $k_{C_i} = \sum_{i \in C_i} k_i$ , es el grado total de los nodos de la comunidad  $C_i$ . La definición (27) hace una comparación entre la fracción de aristas que pertenecen a las comunidades de la red actual, correspondiente al término  $\frac{|\mathcal{E}_i|}{|\mathcal{E}|}$ , y la fracción de aristas que se esperarían en una red aleatorizada, correspondiente a  $\left( \frac{k_{C_i}}{2|\mathcal{E}|} \right)^2$  [51, 56, 156]. Por lo tanto, la modularidad es una cantidad que indica que tan definidas son las comunidades de una red, en comparación a lo que se observaría en una red aleatoria sin ningún tipo de estructura modular. A mayor valor de  $Q$  se entiende que la red presenta una estructura con comunidades muy bien definidas.

Usando el algoritmo LFR se generaron 240 redes de  $N = 100$  nodos con valores de  $Q$  que varían desde 0.238 hasta 0.741. Para construir las redes con estas características se estableció la variación del parámetro  $\mu$  entre 0.05 y 0.5. También se optó por escoger los valores de  $\gamma$  de 2 y 3 y en el caso de  $\beta$ , se tomaron los valores de 1 y 2. Luego para las redes generadas se calculó  $Q$  usando el paquete Networkx de Python. Para cada una de las redes se hizo una evaluación de las respuestas antifrágiles de sus comunidades.

En la figura 6 se ilustra la emergencia de la antifragilidad en las 240 redes LFR. En cada red se evaluó  $\bar{\Lambda}_{C_i}$  para cada comunidad y se seleccionó su máximo valor

$$\Lambda_C^{(\max)} \equiv \max \{ \bar{\Lambda}_{C_i} : i = 1, \dots, N_C \} \quad (28)$$

En la figura 6(a) se presenta  $\Lambda_C^{(\max)}$  como función de  $Q$  para cada una de las 240 redes. Adicionalmente, se representa la fracción  $\nu$  de comunidades antifrágiles que posee cada red de acuerdo a la barra de color. Lo primero a observar es que en todas las redes hay al menos una comunidad antifrágil o al menos robusta con

$\bar{\Lambda}_{C_i} \geq 0$ . Sin embargo, no hay una tendencia clara que relacione la cantidad de comunidades antifrágiles presentes con la modularidad de la red,  $\nu$  no muestra una relación definida con  $Q$ . El segundo aspecto a notar es que  $\Lambda_C^{(\max)}$  muestra una tendencia al incremento a medida que  $Q$  aumenta. Por lo que se puede ver que en las redes con comunidades más definidas es posible encontrar una mejor respuesta antifrágil de alguna de sus comunidades. Aunque esto no necesariamente es determinante ya que la magnitud de la respuesta antifrágil, entendida como el máximo valor de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  de la red, depende de otros factores como la topología de toda la estructura. Con estos resultados se muestra que en redes con comunidades heterogéneas también se puede encontrar antifragilidad.

En las figuras 6(b)-(e) se muestran los valores de los ensambles de la funcionalidad de 4 de las 240 redes LFR analizadas, con valores de  $Q = 0.376, 0.535, 0.631$  y  $0.734$ . En cada una de estas redes se generó daño considerando el algoritmo de daño acumulado. Con línea continua se indican  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  en el caso del daño generado en las comunidades y con línea discontinua se indica  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para el escenario del daño distribuido en toda la red. En todos los casos se evaluaron los promedios de ensamble con base en  $10^4$  simulaciones de Monte Carlo, considerando un parámetro de daño de  $\alpha = 0.5$ . El valor de  $\bar{\Lambda}_{C_i}$  se indica para cada comunidad de las redes de acuerdo a la barra de color. Lo que se puede señalar en las redes analizadas es que en las estructuras de modularidad baja con  $Q$  de 0.376 y 0.535 se obtiene una respuesta antifrágil del sistema baja, considerando la magnitud de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$ . En cambio en las redes con  $Q$  de 0.631 y 0.734 se encuentran respuestas antifrágiles más significativas a la generación de daño acumulado. Aquí también se puede notar que a pesar de tener redes de alta modularidad, no necesariamente todas las comunidades son antifrágiles.

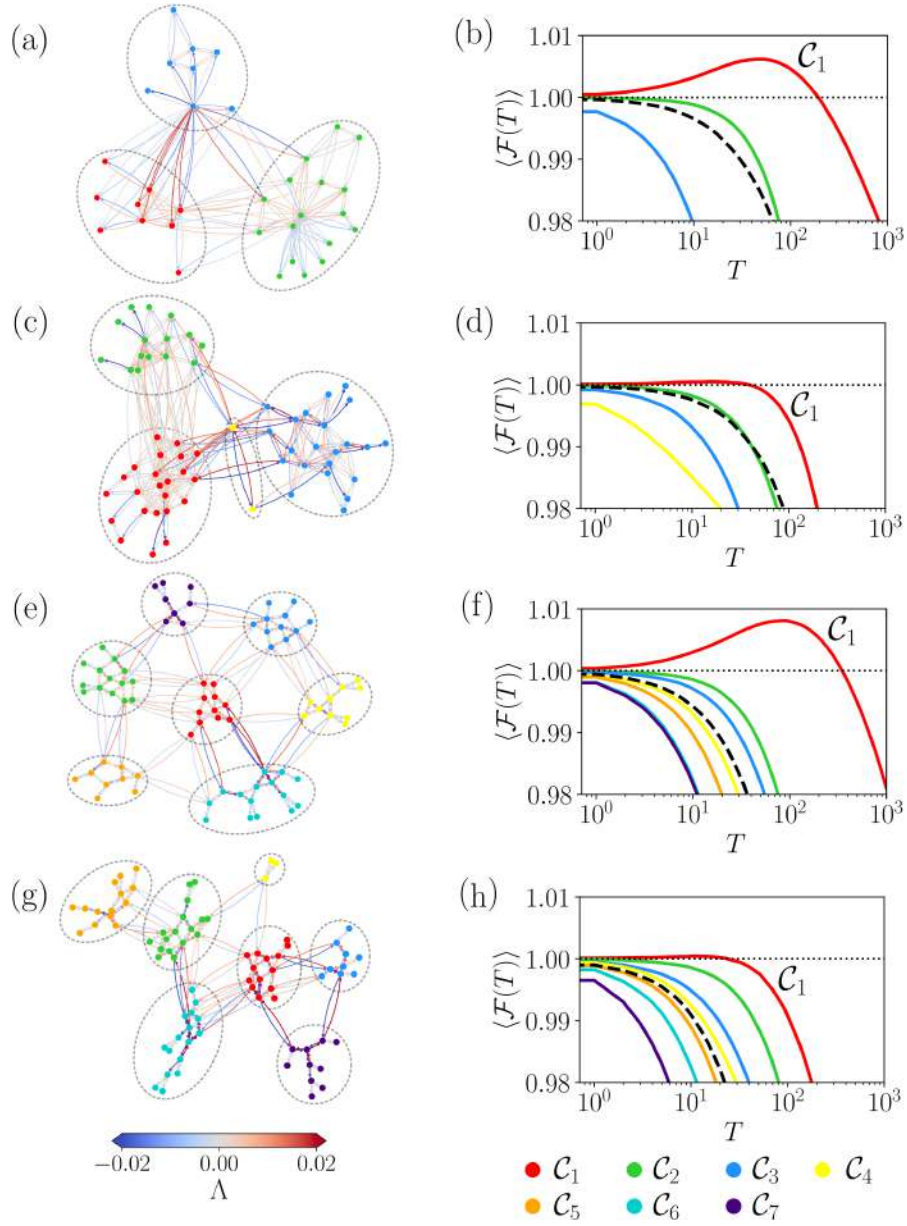
#### ANTIFRAGILIDAD EN REDES REALES

En la parte final de esta obra se usan las herramientas desarrolladas previamente para evidenciar la presencia de antifragilidad en redes reales. Particularmente, se estudiaron 4 redes que representan sistemas de la naturaleza. La primera es una red social bastante conocida en ciencia de redes, denominada red del club de karate de Zachary [157] con  $N = 34$  nodos. Esta estructura representa los lazos interpersonales de los integrantes de un club de karate de una universidad norteamericana en los años 70, que tras un conflicto interno terminó dividiéndose en dos organizaciones. Las conexiones de la red se determinaron mediante la inspección del comportamiento de los integrantes, esta red se utiliza frecuentemente para probar algoritmos de detección de comunidades [53]. La segunda red analizada corresponde a otra red social de  $N = 62$  nodos, pero esta vez, formada por los integrantes de un grupo de delfines nariz de botella en un fiordo en Nueva Zelanda. Las conexiones representan las relaciones sociales entre los individuos, evidenciadas mediante observación directa del grupo entre los años de 1994 y 2001 [158]. La tercera y cuarta red corresponden a la red del metro de París de  $N = 78$  y la red

del metro de Londres de  $N = 86$  [116]. Las dos redes hacen parte del grupo analizado en el capítulo 3 y están formadas por nodos que representan las estaciones terminales y de transferencia de los sistemas de metro y por líneas que representan toda la información contenida entre dichas estaciones. Para la identificación de las comunidades  $\mathcal{C}_i$  de las 4 redes reales analizadas, se usó el algoritmo de Wolfram Mathematica, el cual busca comunidades maximizando la modularidad de la clasificación resultante.

En la figura 7 se muestran los resultados de la evaluación de las respuestas anti-frágiles de las 4 redes reales. En la figura 7(a) se presenta la red del club de karate con tres comunidades, la cuales se resaltan mediante los círculos de línea discontinua. La evaluación de la modularidad en esta estructura, usando la ecuación (27), muestra un  $Q = 0.381$ . Los valores de  $\Lambda$  de las aristas de la red están codificados de acuerdo a la barra de color. En la figura 7(b) se presenta la evolución del promedio de ensamble de la funcionalidad  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  de la red del club de karate. Con línea continua se muestra los casos cuando el daño se genera en cada comunidad de la red y con línea discontinua el caso del daño distribuido en toda la red. Los colores de las líneas coinciden con los colores de los nodos de la comunidad que es dañada. Para la evaluación de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  se usaron  $10^4$  realizaciones del proceso de Monte Carlo con el parámetro de daño  $\alpha = 0.5$ . Similarmente, en la figura 7(c) se muestra la red de delfines con 4 comunidades y  $Q = 0.495$  y en la 7(d) se muestran los resultados de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  cuando el daño se localiza en las comunidades o cuando se localiza en toda la estructura. En la figura 7(e) se presenta la red del metro de París con una estructura de 7 comunidades y  $Q = 0.614$  y en la figura 7(f) se presenta  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para todos los casos considerados. Finalmente, en la figura 7(g) se ilustra la red del metro de Londres con 7 comunidades con la modularidad de  $Q = 0.629$  y en la figura 7(h) se presenta al evaluación de  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  para todos los casos en esta red. Para complementar el análisis, en la tabla 4 se muestran los valores del número de nodos  $N$  de las redes; el número de líneas  $|\mathcal{E}|$  de las redes no dirigidas; el tiempo global de un caminante aleatorio que se mueve en la estructura sin daño  $\tau(0)$ ; las comunidades  $\mathcal{C}_i$  con el respectivo número de nodos  $N_i$  y la medida de antifragilidad para las comunidades  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_i}$ .

De los resultados se observa que las redes presentan respuestas favorables ante el daño en algunas de sus comunidades. Particularmente, en la red del club de karate y en la red de metro de París la comunidad  $\mathcal{C}_1$  de cada una es anti-frágil. Adicionalmente, estas redes poseen otras comunidades que generan una respuesta robusta. Por otro lado, en la red de delfines y en la red del metro de Londres se observan respuestas robustas, que contrastan bastante con la respuesta que se obtiene cuando el daño se genera en toda la red. Es interesante notar que aunque para la red de karate, la red del metro de París y la red del metro de Londres, las comunidades identificadas como  $\mathcal{C}_1$  poseen valores de  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_1} \approx 0.002$ , la respuesta ante el daño cuantificada mediante  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  es diferente en la red del metro de Londres. En este caso, solamente se aprecia una respuesta robusta al momento de afectar  $\mathcal{C}_1$ . La respuesta a este comportamiento se halla cuando se analiza detalladamente el conjunto de valores de  $\Lambda$  de las líneas que forman las comunidades  $\mathcal{C}_1$ . Luego de



**Figura 7:** Emergencia de la antifragilidad en redes reales. (a)-(b) Red del club de karate y promedio de ensamble de la funcionalidad (c)-(d) red de delfines y su funcionalidad. (e)-(f) red del metro de París y su funcionalidad. (g)-(h) red del metro de Londres y su funcionalidad. Los promedios de ensamble se calcularon con base en  $10^4$  realizaciones del proceso de Monte Carlo del algoritmo de daño acumulado con  $\alpha = 0.5$ . Los colores de las líneas continuas que representan  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle$  coinciden con los colores de los nodos de la comunidad afectada.



medir la dispersión de los valores de  $\Lambda$  de las líneas de  $\mathcal{C}_1$  se obtiene para la red de karate  $\sigma_{\mathcal{C}_1} = 0.0055$  y para la red del metro de París  $\sigma_{\mathcal{C}_1} = 0.0480$ . En cambio para la red de Londres se encuentra que  $\sigma_{\mathcal{C}_1} = 0.01$  lo que indica una mayor dispersión de estos valores, por lo que en la ejecución de varias realizaciones de las simulaciones de Monte Carlo es posible observar respuestas antifrágiles para esta red. Sin embargo, la dispersión de los valores de  $\Lambda$  hace que también aparezcan con frecuencia respuestas frágiles que contrarrestan las primeras, de tal manera que al medir el promedio de ensamble de la funcionalidad se pierdan los efectos de antifragilidad que aparecen para ciertas configuraciones de daño en dicha co-

Red	$N$	$ \mathcal{E} $	$\tau(0)$	$\mathcal{C}_i$	$N_i$	$\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_i}$
Club de karate [157]	34	78	63.9	$\mathcal{C}_1$	9	0.001996
				$\mathcal{C}_2$	17	0.000608
				$\mathcal{C}_3$	8	-0.004638
Delfines [158]	62	159	155.2	$\mathcal{C}_1$	23	0.000757
				$\mathcal{C}_2$	15	0.000288
				$\mathcal{C}_3$	22	-0.001077
				$\mathcal{C}_4$	2	-0.007719
Metro París [115, 116]	78	125	239.2	$\mathcal{C}_1$	11	0.002025
				$\mathcal{C}_2$	14	0.000927
				$\mathcal{C}_3$	11	0.000628
				$\mathcal{C}_4$	10	-0.000394
				$\mathcal{C}_5$	9	-0.001093
				$\mathcal{C}_6$	15	-0.002537
				$\mathcal{C}_7$	8	-0.002646
Metro Londres [115, 116]	83	121	329.1	$\mathcal{C}_1$	14	0.001797
				$\mathcal{C}_2$	17	0.00143
				$\mathcal{C}_3$	9	0.000427
				$\mathcal{C}_4$	3	-0.000229
				$\mathcal{C}_5$	14	-0.000476
				$\mathcal{C}_6$	16	-0.001433
				$\mathcal{C}_7$	10	-0.004369

**Tabla 4:** Caracterización de la antifragilidad en las redes reales del club de karate, la red de delfines de nariz de botella, la red del metro de París y el metro de Londres. En la tabla se presentan el número de nodos de las redes  $N$ , el número de aristas de toda la red, considerando redes no dirigidas,  $|\mathcal{E}|$ , el tiempo global del caminante aleatorio en una red sin daño  $\tau(0)$ , las comunidades identificadas  $\mathcal{C}_i$ , con su respectivo número de líneas  $N_i$  y la medida de antifragilidad de las comunidades  $\bar{\Lambda}_{\mathcal{C}_i}$ .



munidad.

En este capítulo se estudió la respuesta antifrágil del proceso de transporte estocástico en redes. Se observó como las caminatas aleatorias se pueden beneficiar del daño tanto cuando se afecta alguna línea de la red o cuando se dañan las líneas de toda una comunidad, en estos casos, la antifragilidad es producto de la redistribución del transporte que se genera cuando hay presencia de daño. Dentro de los resultados importantes se obtuvo la implementación de la medida de antifragilidad  $\Lambda$ , basada en el cambio de la funcionalidad  $\mathcal{F}$  con respecto al daño en una línea de la red. Un valor positivo de  $\Lambda$  indica que el daño en la línea escogida produce una respuesta antifrágil en el sistema, en cambio un valor negativo, indica que el sistema responde de manera frágil. Adicionalmente se implementó la medida  $\bar{\Lambda}_{C_i}$  correspondiente al promedio de los valores  $\Lambda$  de todas las líneas de la comunidad  $C_i$ , la cual evalúa la antifragilidad a una escala de comunidades. En este caso  $\bar{\Lambda}_{C_i}$  permite entender si el el daño en la comunidad  $C_i$  producirá una respuesta antifrágil en el sistema, para valores positivos se observa una comunidad antifrágil, en cambio para valores negativos se observa una respuesta frágil del sistema. Las dos medidas se probaron en diferentes redes y especialmente se hizo la evaluación de la antifragilidad de 4 redes que representan redes reales correspondientes a la red del club de karate, la red de delfines de nariz de botella y las redes que representan los sistemas metro de París y Londres. Esta investigación mostró la emergencia de la antifragilidad en un sistema dinámico, lo cual abre camino para el estudio de este fenómeno y la búsqueda de medidas de antifragilidad en otro tipo de sistemas dinámicos.

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## CONCLUSIONES

EN este libro se presentan los resultados del estudio de los efectos del daño acumulado en procesos dinámicos en redes. Durante la investigación se consideró un modelo de daño que disminuye la funcionalidad de las aristas que conectan los nodos de las redes, además, el daño se distribuye de manera aleatoria y preferencial, de tal manera que la probabilidad de que una de las líneas reciba daño en el futuro depende del daño que tiene acumulado al presente. Los procesos analizados corresponden al transporte estocástico, la sincronización y la emergencia de la antifragilidad.

En el estudio del transporte estocástico, el daño que supone la reducción del peso de las aristas, genera una modificación de las probabilidades de transición de los caminantes aleatorios. Como resultado se observa un incremento de la asimetría en los procesos de transporte, el cual se puede medir a través de diferentes cantidades que incluyen información local y global del proceso. Por otro lado, la capacidad del transporte global también se modifica debido al daño. Los cambios en la capacidad de transporte de la red se pueden detectar mediante la funcionalidad  $\mathcal{F}(T)$  que compara los tiempos globales del caminante aleatorio en la red sin daño y con daño. Con base en esta información, el promedio de ensamble de la funcionalidad normalizada con el número de líneas  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle / \rho_E$  permite establecer clasificaciones de las redes de acuerdo a la tolerancia al daño, concluyendo que la estructura de la red es fundamental para determinar su robustez, en general las redes con topologías más complejas son las que mejor toleran el daño acumulado.

Siguiendo esta metodología se estudiaron 33 redes de metro del mundo. Estas redes de metro están formadas por nodos que representan las estaciones terminales y de transferencia de estos sistemas y las líneas que conectan los nodos representan toda la información de las vías y demás estaciones de los sistemas. Las redes de metro se sometieron a la generación de daño acumulado y con base en la medida  $\langle \mathcal{F}(T) \rangle / \rho_E$  se evaluó y comparó la capacidad de transporte de las 33 estructuras. Con estos resultados se obtuvo una clasificación de los sistemas metro de acuerdo a su tolerancia al daño acumulado, encontrando que existen sistemas muy robustos ante el daño debido a su topología.

Adicionalmente, se estudiaron los efectos del daño acumulado en el proceso de sincronización de sistemas de osciladores de Kuramoto idénticos en redes. En este caso, los resultados muestran que el daño, que se modela como la disminución

del acoplamiento entre los osciladores, afecta el tiempo de sincronización de las redes. Las modificaciones del proceso de sincronización se evaluaron mediante el promedio de ensamble de la funcionalidad  $\mathcal{F}_s(T)$ , definida como la razón entre los tiempos de sincronización de la red sin daño y con daño, y  $\mathcal{R}_{KL}$  que cuantifica los cambios en las densidades de probabilidad de los tiempos de sincronización de las redes con daño y sin daño. Con base en estas medidas se clasificaron 109 grafos de  $N = 6$  nodos conexos y no isomorfos de acuerdo a su robustez frente al daño acumulado. Los resultados muestran que el conjunto de las redes se puede agrupar en 3 categorías, en la primera se encuentran los grafos que son poco tolerantes ante el daño, donde se observan aumentos en los tiempos de sincronización y también modificaciones significativas de las densidades de probabilidad de sus tiempos de sincronización. Existe un segundo grupo donde el aumento en los tiempos de sincronización y las modificaciones de las densidades de probabilidad son medianamente notorios. Por último, el tercer grupo está conformado por grafos bastante robustos ante el daño, donde las densidades de probabilidad de los tiempos de sincronización no cambian significativamente y en los que los tiempos de sincronización sólo se reescalan con el daño acumulado.

En la última parte de la investigación se estudió la emergencia de antifragilidad en los procesos de caminatas aleatorias en redes. En este contexto, se observa que la antifragilidad se manifiesta como una disminución en los tiempos globales que los caminantes aleatorios emplean para explorar la red cuando esta experimenta daño localizado. Como resultados, se planteó la medida de antifragilidad  $\Lambda$  que determina los cambios de la funcionalidad de transporte  $\mathcal{F}_\beta$ , por daños infinitesimales en las líneas de la red. Para un valor  $\Lambda > 0$  se obtiene una respuesta antifrágil de la red, mientras que  $\Lambda = 0$  representa una respuesta robusta y  $\Lambda < 0$  indica una respuesta frágil de la red. La evaluación de  $\Lambda$  en todas las aristas de redes con diferentes topologías mostró que la antifragilidad se manifiesta en redes que presentan asimetrías. Además, una observación importante es que la existencia de líneas antifrágiles requiere de la coexistencia de líneas frágiles, lo que implica que no es posible encontrar una red donde todas sus líneas sean antifrágiles. Adicionalmente, se construyó la medida  $\bar{\Lambda}_{C_i}$ , que promedia los valores  $\Lambda$  de las líneas pertenecientes a la comunidad  $C_i$ . De esta manera, si  $\bar{\Lambda}_{C_i} > 0$  la comunidad  $C_i$  es antifrágil y en el caso de  $\bar{\Lambda}_{C_i} < 0$  corresponde a una comunidad frágil. Esta medida permitió investigar la antifragilidad de redes con estructura de comunidades, indicando que en redes con comunidades muy definidas se puede presentar la antifragilidad.

En conclusión, en este libro se proporciona un marco de referencia para estudiar los efectos del daño en diversos procesos dinámicos en sistemas complejos. Esto se logra mediante el uso de un algoritmo generador de daño, la identificación de cantidades asociadas a la funcionalidad de los sistemas y el desarrollo de medidas que permitan cuantificar las modificaciones en dicha funcionalidad. Por otro lado, la investigación sobre antifragilidad propone una metodología y métricas para el análisis matemático de la emergencia de antifragilidad en sistemas complejos y

abre camino a la exploración de este fenómeno en otros sistemas y procesos dinámicos. Todas estas ideas tienen un amplio potencial de aplicación en otras áreas del conocimiento como en ciencias biológicas, donde se pueden usar para explorar la robustez de sistemas formados por las variables fisiológicas de los organismos vivos.

Una posible dirección futura para las ideas desarrolladas en este libro es el estudio de los efectos del daño y análisis de antifragilidad en sistemas de redes multicapa. Las redes multicapa permiten incluir diferentes tipos de interacciones, de esta manera, se podrían analizar los cambios en la funcionalidad de sistemas que involucren más de un proceso dinámico y estudiar la antifragilidad de diferentes procesos dinámicos acoplados, incluyendo procesos como el consenso o control.

⊙ *Esta es una página en blanco.* ⊙

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Hiroki Sayama. *Introduction to the Modeling and Analysis of Complex Systems*. Open SUNY Textbooks, Geneseo, New York, 2015.
- [2] Yaneer Bar-Yam. *Dynamics of Complex Systems*. Addison-Wesley, Boston, 1997.
- [3] James Ladyman and Karoline Wiesner. *What Is a Complex System?* Yale University Press, New Haven, 2020.
- [4] Melanie Mitchell. *Complexity: A Guided Tour*. Oxford University Press, New York, 2009.
- [5] Stefan Thurner, Rudolf Hanel, and Peter Klimek. *Introduction to the Theory of Complex Systems*. Oxford University Press, Oxford, 2018.
- [6] Alain Barrat, Marc Barthélemy, and Alessandro Vespignani. *Dynamical Processes on Complex Networks*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [7] M. E. J Newman. *Networks: An introduction*. Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [8] Jonathan M. Levine, Jordi Bascompte, Peter B. Adler, and Stefano Allesina. Beyond pairwise mechanisms of species coexistence in complex communities. *Nature*, 546:56–64, 2017.
- [9] Danielle S. Bassett and Olaf Sporns. Network neuroscience. *Nature Neuroscience*, 20:353–364, 2017.
- [10] Anton V. Proskurnikov and Roberto Tempo. A tutorial on modeling and analysis of dynamic social networks. part ii. *Annual Reviews in Control*, 45:166–190, 2018.
- [11] A. Barrat, M. Barthélemy, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(11):3747–3752, 2004.
- [12] Romualdo Pastor-Satorras, Claudio Castellano, Piet Van Mieghem, and Alessandro Vespignani. Epidemic processes in complex networks. *Reviews of Modern Physics*, 87:925–979, 2015.

- [13] Mehdi A. Kamran, Reza Kia, Fariba Goodarzian, and Peiman Ghasemi. A new vaccine supply chain network under covid-19 conditions considering system dynamic: Artificial intelligence algorithms. *Socio-Economic Planning Sciences*, 85:101378, 2023.
- [14] S. Kalitzin, G. Petkov, P. Suffczynski, V. Grigorovsky, B. L. Bardakjian, F. Lopes da Silva, and P. L. Carlen. Epilepsy as a manifestation of a multistate network of oscillatory systems. *Neurobiology of Disease*, 130:104488, 2019.
- [15] Norma L. Abrica-Jacinto, Evguenii Kurmyshev, and Héctor A. Juárez. Effects of the interaction between ideological affinity and psychological reaction of agents on the opinion dynamics in a relative agreement model. *Journal of Artificial Societies and Social Simulation*, 20(3):3, 2017.
- [16] Claudio Castellano, Santo Fortunato, and Vittorio Loreto. Statistical physics of social dynamics. *Reviews of Modern Physics*, 81:591–646, 2009.
- [17] Pablo Gallarta-Sáenz, Hugo Pérez-Martínez, and Jesús Gómez-Gardeñes. Emergence of innovations in networked populations with reputation-driven interactions. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 34(3):033106, 2024.
- [18] Shir Shahal, Ateret Wurzberg, Inbar Sibony, Hamootal Duadi, Elad Shniderman, Daniel Weymouth, Nir Davidson, and Moti Fridman. Synchronization of complex human networks. *Nature Communications*, 11(1):3854, 2020.
- [19] Alessio Pagani, Guillem Mosquera, Aseel Alturki, Samuel Johnson, Stephen Jarvis, Alan Wilson, Weisi Guo, and Liz Varga. Resilience or robustness: identifying topological vulnerabilities in rail networks. *Royal Society Open Science*, 6(2):181301, 2021.
- [20] Reuven Cohen and Shlomo Havlin. *Complex Networks: Structure, Robustness and Function*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [21] Sara Teller, Estefania Estévez-Priego, Clara Granell, Daniel Tornero, Jordi Andilla, Omar E. Olarte, Pablo Loza-Alvarez, Alex Arenas, and Jordi Soriano. Spontaneous functional recovery after focal damage in neuronal cultures. *eNeuro*, 7(1):ENEURO.0254, 2020.
- [22] Sàlem Ayasreh, Imanol Jurado, Clara F. López-León, Marc Montalà-Flaquer, and Jordi Soriano. Dynamic and functional alterations of neuronal networks in vitro upon physical damage: A proof of concept. *Micromachines*, 13(12), 2022.
- [23] Thomas B. L. Kirkwood. Understanding the odd science of aging. *Cell*, 120(4):437–447, 2005.
- [24] Lewis A. Lipsitz and Ary L. Goldberger. Loss of ‘complexity’ and aging: Potential applications of fractals and chaos theory to senescence. *JAMA*, 267(13):1806–1809, 04 1992.



- 
- [25] Alan A. Cohen, Luigi Ferrucci, Tamàs Fülöp, Dominique Gravel, Nan Hao, Andres Kriete, Morgan E. Levine, Lewis A. Lipsitz, Marcel G. M. Olde Rikert, Andrew Rutenberg, Nicholas Stroustrup, and Ravi Varadhan. A complex systems approach to aging biology. *Nature Aging*, 2(7):580–591, 2022.
  - [26] A. P. Riascos, J. Wang-Michelitsch, and T. M. Michelitsch. Aging in transport processes on networks with stochastic cumulative damage. *Physical Review E*, 100(2):022312, 2019.
  - [27] Nassim Nicholas Taleb. *Antifragile*. Random House, New York, 2012.
  - [28] Cristian Axenie, Oliver López-Corona, Michail A. Makridis, Meisam Akbarzadeh, Matteo Saveriano, Alexandru Stancu, and Jeffrey West. Antifragility in complex dynamical systems. *npj Complexity*, 1(1):12, 2024.
  - [29] Darío Alatorre, Carlos Gershenson, and José L. Mateos. Stocks and cryptocurrencies: Antifragile or robust? a novel antifragility measure of the stock and cryptocurrency markets. *PLoS One*, 18(3):1–21, 03 2023. e0280487.
  - [30] Massimiliano Zanin, Omar K. Pineda, Hyobin Kim, and Carlos Gershenson. A novel antifragility measure based on satisfaction and its application to random and biological boolean networks. *Complexity*, 2019:3728621, 2019.
  - [31] L. K. Eraso-Hernandez and A. P. Riascos. Antifragility of stochastic transport on networks with damage. *Physical Review E*, 110:044309, Oct 2024.
  - [32] L. K. Eraso-Hernandez, A. P. Riascos, T. M. Michelitsch, and J. Wang-Michelitsch. Random walks on networks with preferential cumulative damage: generation of bias and aging. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2021(6):063401, 2021.
  - [33] L. K. Eraso-Hernandez, A. P. Riascos, T. M. Michelitsch, and J. Wang-Michelitsch. Evolution of transport under cumulative damage in metro systems. *International Journal of Modern Physics C*, 35(04):2450037, 2023.
  - [34] L. K. Eraso-Hernandez and A. P. Riascos. Influence of cumulative damage on synchronization of kuramoto oscillators on networks. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 56(47):475001, October 2023.
  - [35] M. E. J. Newman. Clustering and preferential attachment in growing networks. *Physical Review E*, 64:025102, 2001.
  - [36] M. E. J. Newman. The structure and function of complex networks. *SIAM Review*, 45(2):167–256, 2003.
  - [37] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang. Complex networks: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 424(4):175–308, 2006.
  - [38] A. Barrat, M. Barthélemy, R. Pastor-Satorras, and A. Vespignani. The architecture of complex weighted networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 101(11):3747–3752, March 2004.

- [39] Albert-László Barabási. *Network science*. Cambridge University Press, Cambridge, 2016.
- [40] Peng Zhang, Jinliang Wang, Xiaojia Li, Menghui Li, Zengru Di, and Ying Fan. Clustering coefficient and community structure of bipartite networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387(27):6869–6875, 2008.
- [41] Stanley Milgram. The small world problem. *Psychology Today*, 2(1):60–67, 1967.
- [42] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of ‘small-world’ networks. *Nature*, 393:3, 1998.
- [43] Shudong Jin and Azer Bestavros. Small-world characteristics of internet topologies and implications on multicast scaling. *Computer Networks*, 50(5):648–666, 2006.
- [44] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286(5439):509–512, 1999.
- [45] Michele Guida and Funaro Maria. Topology of the italian airport network: A scale-free small-world network with a fractal structure? *Chaos, Solitons & Fractals*, 31(3):527–536, 2007.
- [46] Duygu Balcan and Alessandro Vespignani. Phase transitions in contagion processes mediated by recurrent mobility patterns. *Nature Physics*, 7(7):581–586, July 2011.
- [47] Tiago Pereira, Deniz Eroglu, G. Baris Bagci, Ugur Tirnakli, and Henrik Jeldtoft Jensen. Connectivity-driven coherence in complex networks. *Phys. Rev. Lett.*, 110:234103, Jun 2013.
- [48] Tiago P. Peixoto and Stefan Bornholdt. Evolution of robust network topologies: Emergence of central backbones. *Phys. Rev. Lett.*, 109:118703, Sep 2012.
- [49] Axel Hutt, Scott Rich, Taufik A. Valiante, and Jérémie Lefebvre. Intrinsic neural diversity quenches the dynamic volatility of neural networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 120(28):e2218841120, 2023.
- [50] Paul Erdős, Alfréd Rényi, et al. On the evolution of random graphs. *Publication of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, 5(1):17–60, 1960.
- [51] Aaron Clauset, M. E. J. Newman, and Cristopher Moore. Finding community structure in very large networks. *Physical Review E*, 70:066111, Dec 2004.
- [52] M. E. J. Newman. Modularity and community structure in networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 103(23):8577–8582, 2006.
- [53] Santo Fortunato. Community detection in graphs. *Physics Reports*, 486(3):75–174, 2010.

- 
- [54] Zhen Su, Wei Wang, Lixiang Li, H Eugene Stanley, and Lidia A Braunstein. Optimal community structure for social contagions. *New Journal of Physics*, 20(5):053053, May 2018.
  - [55] Jiachen Li, Wenjie Li, Feng Gao, Meng Cai, Zengping Zhang, Xiaoyang Liu, and Wei Wang. Social contagions on higher-order community networks. *Applied Mathematics and Computation*, 478:128832, 2024.
  - [56] E. A. Leicht and M. E. J. Newman. Community structure in directed networks. *Physical Review Letters*, 100:118703, Mar 2008.
  - [57] Jörg Reichardt and Stefan Bornholdt. Statistical mechanics of community detection. *Physical Review E*, 74:016110, Jul 2006.
  - [58] Hong liang Sun, Eugene Ch'ng, Xi Yong, Jonathan M. Garibaldi, Simon See, and Duan bing Chen. A fast community detection method in bipartite networks by distance dynamics. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 496:108–120, 2018.
  - [59] Michael J. Barber. Modularity and community detection in bipartite networks. *Physical Review E*, 76:066102, Dec 2007.
  - [60] Jierui Xie, Stephen Kelley, and Boleslaw K. Szymanski. Overlapping community detection in networks: The state-of-the-art and comparative study. *ACM Computing Surveys*, 45(4), August 2013.
  - [61] Zhuanlian Ding, Xingyi Zhang, Dengdi Sun, and Bin Luo. Overlapping community detection based on network decomposition. *Scientific Reports*, 6(1):24115, April 2016.
  - [62] Jiakang Li, Songning Lai, Zhihao Shuai, Yuan Tan, Yifan Jia, Mianyang Yu, Zichen Song, Xiaokang Peng, Ziyang Xu, Yongxin Ni, Haifeng Qiu, Jiayu Yang, Yutong Liu, and Yonggang Lu. A comprehensive review of community detection in graphs. *Neurocomputing*, 600:128169, 2024.
  - [63] M. Girvan and M. E. J. Newman. Community structure in social and biological networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 99(12):7821–7826, 2002.
  - [64] Vincent D Blondel, Jean-Loup Guillaume, Renaud Lambiotte, and Etienne Lefebvre. Fast unfolding of communities in large networks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2008(10):P10008, oct 2008.
  - [65] Earl R. Barnes. An algorithm for partitioning the nodes of a graph. *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, 3(4):541–550, 1982.
  - [66] L. Hagen and A.B. Kahng. New spectral methods for ratio cut partitioning and clustering. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 11(9):1074–1085, 1992.
  - [67] Rick Durrett. *Probability: Theory and Examples*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, 5 edition, 2019.

- [68] Edward A Codling, Michael J Plank, and Simon Benhamou. Random walk models in biology. *Journal of The Royal Society Interface*, 5(25):813–834, April 2008.
- [69] Masuda Naoki, A. Porter Mason, and Lambiotte Renaud. Random walks and diffusion on networks. *Physics Reports*, 716-717:1–58, 2017.
- [70] Denis Boyer, Gabriel Ramos-Fernández, Octavio Miramontes, José L Mateos, Germinal Cocho, Hernán Larralde, Humberto Ramos, and Fernando Rojas. Scale-free foraging by primates emerges from their interaction with a complex environment. *Proceedings of the Royal Society B: Biological Science*, 273:1743–1750, 2006.
- [71] Flavio Iannelli, Andreas Koher, Dirk Brockmann, Philipp Hövel, and Igor M. Sokolov. Effective distances for epidemics spreading on complex networks. *Physical Review E*, 95:012313, 2017.
- [72] Sibowang, Renchi Yang, Runhui Wang, Xiaokui Xiao, Zhewei Wei, Wenqing Lin, Yin Yang, and Nan Tang. Efficient algorithms for approximate single-source personalized pagerank queries. *ACM Transactions on Database Systems*, 44(4), oct 2019.
- [73] Injong Rhee, Minsu Shin, Seongik Hong, Kyunghan Lee, Seong Joon Kim, and Song Chong. On the levy-walk nature of human mobility. *IEEE/ACM Transactions on Networking*, 19(3):630–643, 2011.
- [74] Vinko Zlatić, Andrea Gabrielli, and Guido Caldarelli. Topologically biased random walk and community finding in networks. *Physical Review E*, 82:066109, Dec 2010.
- [75] Salvador Elías Venegas-Andraca. Quantum walks: a comprehensive review. *Quantum Information Processing*, 11(5):1015–1106, October 2012.
- [76] J Kempe. Quantum random walks:an introductory overview. *Contemporary Physics*, 44(4):307–327, 2003.
- [77] A P Riascos and José L Mateos. Random walks on weighted networks: a survey of local and non-local dynamics. *Journal of Complex Networks*, 9(5):cnab032, 10 2021.
- [78] A. P. Riascos and José L. Mateos. Random walks on weighted networks: A survey of local and non-local dynamics. *Journal of Complex Networks*, 9:cnab032, 2021.
- [79] Arkady Pikovsky, Michael Rosenblum, and Jürgen Kurths. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [80] Dan Wilson and Jeff Moehlis. Recent advances in the analysis and control of large populations of neural oscillators. *Annual Reviews in Control*, 54:327–351, 2022.

- 
- [81] Atesh Koul, Davide Ahmar, Gian Domenico Iannetti, and Giacomo Novembre. Spontaneous dyadic behavior predicts the emergence of interpersonal neural synchrony. *NeuroImage*, 277:120233, 2023.
  - [82] Steven H. Strogatz. *Sync: the emerging science of spontaneous order*. Hyperion, New York, 1st edition, 2003.
  - [83] Alex Arenas, Albert Díaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 469(3):93–153, 2008.
  - [84] Iain D. Couzin. Synchronization: The key to effective communication in animal collectives. *Trends in Cognitive Sciences*, 22(10):844–846, 2018.
  - [85] Renato E. Mirollo and Steven H. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50(6):1645–1662, 1990.
  - [86] Yael Yaniv, Ismayil Ahmet, Jie Liu, Alexey E. Lyashkov, Toni-Rose Guiriba, Yosuke Okamoto, Bruce D. Ziman, and Edward G. Lakatta. Synchronization of sinoatrial node pacemaker cell clocks and its autonomic modulation impart complexity to heart beating intervals. *Heart Rhythm*, 11(7):1210–1219, 2014.
  - [87] György Buzsáki. *Rhythms of the Brain*. Oxford University Press, Oxford, 2006.
  - [88] Florian Mormann, Klaus Lehnertz, Peter David, and Christian E. Elger. Mean phase coherence as a measure for phase synchronization and its application to the eeg of epilepsy patients. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 144(3):358–369, 2000.
  - [89] Arthur T. Winfree. *The Geometry of Biological Time*, volume 12 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, New York, NY, 2001.
  - [90] Yoshiki Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*. Springer Berlin, Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1984.
  - [91] Francisco A. Rodrigues, Thomas K. D. M. Peron, Peng Ji, and Jürgen Kurths. The kuramoto model in complex networks. *Physics Reports*, 610:1–98, 2016.
  - [92] Adilson E. Motter, Changsong Zhou, and Jürgen Kurths. Network synchronization, diffusion, and the paradox of heterogeneity. *Physical Review E*, 71(1):016116, 2005.
  - [93] J. Wang, T. Michelitsch, A. Wunderlin, and R. Mahadeva. Aging as a consequence of misrepair: A novel theory of aging. *arXiv preprint arXiv:0904.0575*, 2009.
  - [94] Gary J. Fisher, Sewon Kang, James Varani, Zsuzsanna Bata-Csorgo, Yinsheng Wan, Subhash Datta, and John J. Voorhees. Mechanisms of Photoaging and Chronological Skin Aging. *Archives of Dermatology*, 138(11):1462–1470, 11 2002.

- [95] Eric D. Sun, Thomas C. T. Michaels, and L. Mahadevan. Optimal control of aging in complex networks. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 117(34):20404–20410, 2020.
- [96] Geoffrey West. *Scale: The Universal Laws of Growth, Innovation, Sustainability, and the Pace of Life in Organisms, Cities, Economies, and Companies*. Penguin Press, New York, 2017.
- [97] Umberto Esposito, Michele Giugliano, Mark van Rossum, and Eleni Vasilaiki. Measuring Symmetry, Asymmetry and Randomness in Neural Network Connectivity. *PLoS One*, 9(7):e100805, 7 2014.
- [98] Tongfeng Weng, Michael Small, Jie Zhang, and Pan Hui. Lévy walk navigation in complex networks: A distinct relation between optimal transport exponent and network dimension. *Scientific Reports*, 5(11):17309, Nov 2015.
- [99] T M Michelitsch, A P Riascos, B A Collet, A F Nowakowski, and F C G A Nicolleau. *Fractional Dynamics on Networks and Lattices*. ISTE/Wiley, London, 2019.
- [100] T.M. Michelitsch, B.A Collet, A.P. Riascos, A.F. Nowakowski, and F.C.G.A Nicolleau. Recurrence of random walks with long-range steps generated by fractional laplacian matrices on regular networks and simple cubic lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50:505004, 2017.
- [101] A P Riascos and José L Mateos. Fractional dynamics on networks: Emergence of anomalous diffusion and lévy flights. *Physical Review E*, 90:032809, Sep 2014.
- [102] Alfonso Allen-Perkins and Roberto F S Andrade. Fractional dynamics on circulant multiplex networks: optimal coupling and long-range navigation for continuous-time random walks. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2019(12):123302, dec 2019.
- [103] A. P. Riascos, T. M. Michelitsch, and A. Pizarro-Medina. Nonlocal biased random walks and fractional transport on directed networks. *Physical Review E*, 102:022142, Aug 2020.
- [104] A. P. Riascos and José L. Mateos. Long-range navigation on complex networks using Lévy random walks. *Physical Review E*, 86:056110, 2012.
- [105] Juan de Dios Ortúzar and Luis G. Willumsen. *Modelling Transport, 4th Edition*. John Wiley & Sons, May 2011.
- [106] Ciyun Lin, Kang Wang, Dayong Wu, and Bowen Gong. Passenger flow prediction based on land use around metro stations: A case study. *Sustainability*, 12(17):6844, 2020.
- [107] Vukan R. Vuchic. *Urban Transit Systems and Technology*. John Wiley & Sons, Ltd, 2007.

- 
- [108] Metro cdmx. <https://metro.cdmx.gob.mx/longitud-lineas>.
  - [109] Alireza Mohammadi, Luis Amador-Jimenez, and Fuzhan Nasiri. Review of asset management for metro systems: challenges and opportunities. *Transport Reviews*, 39(3):309–326, 2019.
  - [110] Y. Gao and J. W. Wang. A resilience assessment framework for urban transportation systems. *International Journal of Production Research*, 59(7):2177–2192, 2021.
  - [111] B. Berche, C. von Ferber, T. Holovatch, and Yu. Holovatch. Resilience of public transport networks against attacks. *European Physical Journal B*, 71(1):125–137, 2009.
  - [112] Bertrand Berche, Christian von Ferber, Taras Holovatch, and Yuriy Holovatch. Public transport networks under random failure and directed attack. *Dynamics of Socio-Economic Systems*, 2(1):42–54, 2011.
  - [113] Christian von Ferber, Bertrand Berche, Taras Holovatch, and Yuriy Holovatch. A tale of two cities. *Journal of Transportation Security*, 5(3):199–216, 2012.
  - [114] Pražská integrovaná doprava. <https://www.dpp.cz>.
  - [115] Sybil Derrible. Wolfram demonstrations project: World metro networks, 2014.
  - [116] Sybil Derrible. Network centrality of metro systems. *PloS One*, 7(7):e40575, 2012.
  - [117] Sybil Derrible. *The properties and effects of metro network designs*. PhD thesis, University of Toronto, 2010.
  - [118] Maurice Kendall and Jean D. Gibbons. *Rank Correlation Methods*. A Charles Griffin Title, 5 edition, September 1990.
  - [119] Kazufumi Sakamoto, Yoshitsune Hondo, Naoki Takahashi, Yuhei Tanaka, Rikuto Sekine, Kenji Shimoda, Haruki Watanabe, and Kenji Yasuda. Emergent synchronous beating behavior in spontaneous beating cardiomyocyte clusters. *Scientific Reports*, 11(1):11869, June 2021.
  - [120] Dmitry Postnov, Donald J Marsh, Will A Cupples, Niels-Henrik Holstein-Rathlou, and Olga Sosnovtseva. Synchronization in renal microcirculation unveiled with high-resolution blood flow imaging. *eLife*, 11:e75284, may 2022.
  - [121] Donald J. Marsh, Dmitry D. Postnov, Olga V. Sosnovtseva, and Niels-Henrik Holstein-Rathlou. The nephron-arterial network and its interactions. *American Journal of Physiology-Renal Physiology*, 316(5):F769–F784, 2019. PMID: 30759020.

- [122] Yufeng Guo, Dongrui Zhang, Zhuchun Li, Qi Wang, and Daren Yu. Overviews on the applications of the kuramoto model in modern power system analysis. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 129:106804, 2021.
- [123] Bernadette C. van Wijk, Peter J. Beek, and Andreas Daffertshofer. Neural synchrony within the motor system: what have we learned so far? *Frontiers in Human Neuroscience*, 6, 2012.
- [124] Y. Kobayashi and H. Kori. Synchronization failure caused by interplay between noise and network heterogeneity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 26(9):094805, 06 2016.
- [125] Taotao Wu, Jared A Rifkin, Adam Rayfield, Matthew B. Panzer, and David F. Meaney. An interdisciplinary computational model for predicting traumatic brain injury: Linking biomechanics and functional neural networks. *NeuroImage*, 251:119002, 2022.
- [126] František Váša, Murray Shanahan, Peter J. Hellyer, Gregory Scott, Joana Cabral, and Robert Leech. Effects of lesions on synchrony and metastability in cortical networks. *Neuroimage*, 118:456–467, 2015.
- [127] Samantha N. Schumm, David Gabrieli, and David F. Meaney. Neuronal degeneration impairs rhythms between connected microcircuits. *Frontiers in Computational Neuroscience*, 14:18, 2020.
- [128] Jonas Wassmer, Dirk Witthaut, and Franz Kaiser. Targeted suppression of failure spreading in multistable oscillator networks. *Journal of Physics: Complexity*, 2(3):035003, may 2021.
- [129] Fernando Maestú, Jose-Maria Peña, Pilar Garcés, Santiago González, Ricardo Bajo, Anto Bagic, Pablo Cuesta, Michael Funke, Jyrki P. Mäkelä, Ernestina Menasalvas, Akinori Nakamura, Lauri Parkkonen, Maria E. López, Francisco del Pozo, Gustavo Sudre, Edward Zamrini, Eero Pekkonen, Richard N. Henson, and James T. Becker. A multicenter study of the early detection of synaptic dysfunction in mild cognitive impairment using magnetoencephalography-derived functional connectivity. *Neuroimage: Clinical*, 9:103–109, 2015.
- [130] Michael J. Zeitz and James W. Smyth. *Gap Junctions and Ageing*, page 113–137. Subcellular Biochemistry. Springer International Publishing, Cham, 2023.
- [131] Mathaios Panteli and Pierluigi Mancarella. Influence of extreme weather and climate change on the resilience of power systems: Impacts and possible mitigation strategies. *Electric Power Systems Research*, 127:259–270, 2015.
- [132] Richard Taylor. There is no non-zero stable fixed point for dense networks in the homogeneous kuramoto model. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 45(5):055102, Feb 2012.



- 
- [133] Alex Townsend, Michael Stillman, and Steven H. Strogatz. Dense networks that do not synchronize and sparse ones that do. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, 30(8):083142, 2020.
  - [134] A. Jadbabaie, N. Motee, and M. Barahona. On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators. In *Proceedings of the 2004 American Control Conference*, volume 5, page 4296–4301, Jun 2004.
  - [135] Galassi, M. et al. GNU Scientific Library Reference Manual, 2018.
  - [136] Lyle Muller, Ján Mináč, and Tung T. Nguyen. Algebraic approach to the kuramoto model. *Physical Review E*, 104:L022201, 2021.
  - [137] Géza Ódor and Jeffrey Kelling. Critical synchronization dynamics of the kuramoto model on connectome and small world graphs. *Scientific Reports*, 9(1):19621, 2019.
  - [138] T. Böhle, C. Kuehn, and M. Thalhammer. On the reliable and efficient numerical integration of the kuramoto model and related dynamical systems on graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 99(1):31–57, 2022.
  - [139] Juan A Almendral and Albert Díaz-Guilera. Dynamical and spectral properties of complex networks. *New Journal of Physics*, 9(6):187, jun 2007.
  - [140] John J. Watkins. *Across the Board: The Mathematics of Chessboard Problems*. Princeton University Press, Jul 2012.
  - [141] P. Erdős and A. Rényi. On random graphs, I. *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 6:290–297, 1959.
  - [142] <http://users.cecs.anu.edu.au/~bdm/data/graphs.html>.
  - [143] S. Kullback and R. A. Leibler. On Information and Sufficiency. *The Annals of Mathematical Statistics*, 22(1):79 – 86, 1951.
  - [144] Solomon Kullback. *Information Theory and Statistics*. Wiley, New York, 1959.
  - [145] F. Pedregosa, G. Varoquaux, A. Gramfort, V. Michel, B. Thirion, O. Grisel, M. Blondel, P. Prettenhofer, R. Weiss, V. Dubourg, J. Vanderplas, A. Passos, D. Cournapeau, M. Brucher, M. Perrot, and E. Duchesnay. Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12:2825–2830, 2011.
  - [146] Stuart P. Lloyd. Least squares quantization in pcm. *IEEE Transactions on Information Theory*, 28(2):129–136, 1982.
  - [147] B Alberts, A Johnson, J Lewis, D Morgan, M Raff, K Roberts, and P Walter. *Molecular Biology of the Cell, Sixth Edition*. Taylor and Francis Group, New York, 2015.
  - [148] Mark P. Mattson. Hormesis defined. *Ageing research reviews*, 7(1):1–7, January 2008.

- [149] Malihe Ghodrat, Ali Naji, Haniyeh Komaie-Moghaddam, and Rudolf Podgornik. Strong coupling electrostatics for randomly charged surfaces: anti-fragility and effective interactions. *Soft Matter*, 11(17):3441–3459, April 2015.
- [150] Ali Naji, Malihe Ghodrat, Haniyeh Komaie-Moghaddam, and Rudolf Podgornik. Asymmetric Coulomb fluids at randomly charged dielectric interfaces: Anti-fragility, overcharging and charge inversion. *The Journal of Chemical Physics*, 141(17):174704, 11 2014.
- [151] Miguel Equihua, Mariana Espinosa Aldama, Carlos Gershenson, Oliver López-Corona, Mariana Munguía, Octavio Pérez-Maqueo, and Elvia Ramírez-Carrillo. Ecosystem antifragility: beyond integrity and resilience. *PeerJ*, 8:e8533, 2020.
- [152] Diederik Coppitters and Francesco Contino. Optimizing upside variability and antifragility in renewable energy system design. *Scientific Reports*, 13(1):9138, 2023.
- [153] Andrea Lancichinetti, Mikko Kivelä, Jari Saramäki, and Santo Fortunato. Characterizing the community structure of complex networks. *PLoS ONE*, 5(8):e11976, August 2010.
- [154] Punam Bedi and Chhavi Sharma. Community detection in social networks. *WIREs Data Mining and Knowledge Discovery*, 6(3):115–135, 2016.
- [155] Andrea Lancichinetti, Santo Fortunato, and Filippo Radicchi. Benchmark graphs for testing community detection algorithms. *Physical Review E*, 78:046110, Oct 2008.
- [156] M. E. J. Newman and M. Girvan. Finding and evaluating community structure in networks. *Physical Review E*, 69(2):026113, February 2004.
- [157] Wayne W. Zachary. An information flow model for conflict and fission in small groups. *Journal of Anthropological Research*, 33(4):452–473, 1977.
- [158] David Lusseau, Karsten Schneider, Oliver J. Boisseau, Patti Haase, Elisabeth Slooten, and Steve M. Dawson. The bottlenose dolphin community of doubtful sound features a large proportion of long-lasting associations. *Behavioral Ecology and Sociobiology*, 54(4):396–405, September 2003.